

Tests mit diskreten Verteilungen - Übungen von Studierenden

Beispiel 1 Die Unternehmung SAGI produziert 100'000 Stück eines Gutes pro Jahr. Der maximale Ausschuss sollte 1% sein. Es wird eine Zufallstichprobe aus der Jahresproduktion gezogen, um zu überprüfen, ob die Produktion den Anforderungen genügt. Es werden 200 Stück ohne Zurücklegen gezogen. Eines davon sei defekt. Entspricht die Produktion den Anforderungen (Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$)

H_0 : Der Ausschuss von 1% wird nicht überstiegen.

H_A : Der Ausschuss von defekten Objekten übersteigt 1% ($\implies$ rechtsseitiger Test).

$X \sim B(200, 0.1)$ (da grosse Grundmenge, ist es nicht nötig die hypergeometrische Verteilung zu verwenden).

$$P(X \geq 1) = \sum_{i=1}^{200} \binom{200}{i} 0.01^i 0.99^{200-i} = 1 - \binom{200}{0} 0.01^0 0.99^{200-0} = 0.866\,02 > 0.05.$$
 Nicht signifikantes Testergebnis. Die Grenze von 1% wird nicht überstiegen.

Beispiel 2 Eine Unternehmung hatte im letzten Jahr an der alten Schleifmaschine X 5 Unfälle zu verzeichnen. An der neu gekauften Schleifmaschine Y gab es dieses Jahr nur noch 2 Unfälle. (Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$)

H_0 : „Die neue Maschine ist nicht sicherer.“

H_A : „Die neue Maschine ist sicherer. (d.h. es hat weniger Unfälle $\implies$ linksseitig)

$X \sim P(5)$

$$P(X \leq 2) = \sum_{i=0}^2 e^{-5} \frac{5^i}{i!} = 0.124\,65 > 0.01.$$
 Nicht signifikant. Die neue Maschine ist nicht sicherer.

Beispiel 3 Ein Bremsenhersteller testet ob sein neues Bremsmodell XRP059 wirklich zuverlässig brems. Die zulässige Norm des Versagens der Bremsen liegt bei 0.5% der produzierten Menge. Bei einer Stichprobe von 1'000 Bremsen gab es 2 Stk., die versagt haben. Das Signifikanzniveau liegt bei 0.01.

H_0 : Die Bremsen versagen nicht mehr als zulässig.

H_A : Das Bremsen versagen mehr als zulässig. (rechtsseitiger Test)

$X \sim B(1000, 0.005)$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \sum_{i=0}^1 \binom{1000}{i} 0.005^i 0.995^{1000-i} = 0.959\,91 > 0.05.$$

Nicht signifikant. Die Bremsen versagen nicht mehr als zulässig.

Beispiel 4 Auf einer Eierfarm werden täglich 2500 Eier gelegt. Von dieser Produktion dürfen, von Gesetzes wegen höchstens 10 Eier den Richtwert der Medikamentenbelastung überschreiten. In einer Stichprobe von 20 Eiern sind 2 Eier über den Richtwerten. Signifikanzniveau 0.05. Dürfen die Eier dieses Tages nun in den Verkauf?

H_0 : Die Eier der heutigen Produktion sind innerhalb der Toleranzgrenze

H_A : Die Eier der heutigen Produktion sind oberhalb der Toleranzgrenze und müssen aus dem Verkehr gezogen werden ($\implies$ rechtsseitiger Test).

Für $X \sim B(20; 0.004)$ gilt $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0.9999306672 = 0.0000693328$

$0.0000693328 < 0.05$ Also verwerfen wir die Nullhypothese und akzeptieren die Alternativhypothese. Die Eier dürfen also nicht verkauft werden.

Beispiel 5 Eine Oberwalliser Firma produziert pro Tag 75'000 Schrauben. Es dürfen davon maximal 150 Schrauben fehlerhaft sein. Es wird eine Stichprobe von 600 Schrauben gezogen, darunter befinden sich 5 fehlerhafte. Signifikanzniveau: 0.05

H_0 : Die Produktionsweise entspricht den Anforderungen.

H_A : Die Produktionsweise entspricht nicht den Anforderungen, d.h. es hat zu viele fehlerhafte Schrauben (rechtsseitiger Test).

$X \sim B(600, 0.002), \quad p = \frac{150}{75000} = 0.002$

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - \sum_{i=0}^4 \binom{600}{i} 0.005^i 0.995^{600-i} = 0.18431 > 0.05.$$

Nicht signifikante Abweichung. Die Produktionsweise entspricht den Anforderungen.

$$\sum_{i=0}^5 \binom{600}{i} 0.002^i 0.998^{600-i} = 0.99852$$

Beispiel 6 Wir sind eine Unternehmung und produzieren Elektrouhren. Die Direktion hat festgelegt, dass auf 12'000 Uhren nur 12 defekt sein dürfen. Um dies zu überprüfen wird eine Stichprobe von 1'000 Stück erhoben. Es werden 5 defekte Elektrouhren entdeckt. Das Signifikanzniveau wird auf 0.05 gesetzt.

H_0 : Die Uhren entsprechen den Anforderungen der Direktion

H_A : Die Uhren entsprechen den Anforderungen der Direktion nicht (es hat zu viele: rechtsseitiger Test)

Wir wenden einen Binomialtest an: $X \sim B(1000, 0.001)$. $p = \frac{12}{12000} = \frac{1}{1000}$

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - \sum_{i=0}^4 \binom{1000}{i} 0.001^i 0.999^{1000-i} = 0.0036369 < 0.05$$

Die Nullhypothese kann verworfen werden. Es hat zuviele defekte Uhren.

Beispiel 7 Eine Gärtnerei pflanzt Weihnachtsbäume an. An Weihnachten 2001 mussten von 100 Bäumen 3 Bäume wegen minderwertiger Qualität aus dem Verkauf genommen werden. Beim Vergleich mit anderen Jahren ist der Gärtnerei aufgefallen, dass sie überdurchschnittlich viel Ausschuss hat. Branchendurchschnitt: 1 Baum auf 100 Bäume. War der hohe Ausschuss zu Weihnachten 2001 nur Zufall? (Signifikanzniveau 0.05)

H_0 : Der Ausschuss im Jahr 2001 weicht vom Branchendurchschnitt nicht ab.

H_A : Der Ausschuss im Jahr 2001 weicht vom Branchendurchschnitt ab (es hat mehr minderwerte Bäume: rechtsseitiger Test)

Poisson-Verteilung, weil zu einem bestimmten Zeitpunkt

$P(X \geq 3)$ für $X \sim P(1)$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0.91969 = 0.0803 > 0.05$$

Der Ausschuss des Jahres 2001 war nicht signifikant höher.

Beispiel 8 a) Innerhalb eines Jahres gibt es in einer Firma durchschnittlich 5 Ausfälle im Computersystem mit Schadenfolgen. Die Firma führt ein Qualitätssystem ein. Nach der Einführung ergeben sich noch 3 Ausfälle. ($\alpha = 0.05$). Hat sich die Einführung des Qualitätssystems gelohnt?

H_0 : Durch die Einführung des Qualitätssystems hat sich nichts geändert.

H_A : Durch die Einführung des Qualitätssystems ergeben sich weniger Ausfälle ($\implies$ linksseitiger Test).

Wir verwenden einen Poissonstest: Wir berechnen $P(X \leq 3)$ für $X \sim P(5)$.

Das System lohnt sich (unabhängig von allfälligen Kosten) nicht.

Beispiel 9 Bei der Prüfung der Zielerreichung in einer Unternehmung wird eine Stichprobe von 1000 Mt. (aus 10000) gezogen. Laut Zielvorgabe dürfen höchstens 12 auf 10'000 das Ziel nicht erreichen. Die Stichprobe weist 4 Mt auf, welche das Ziel nicht erreicht haben. ($\alpha = 0.05$).

H_0 : Die Produktion entspricht den Anforderungen.

H_A : Die Produktion entspricht den Qualitätsanforderungen nicht (ist schlechter als erwünscht) ($\Rightarrow$ rechtsseitiger Test).

(Problem mit der Aufgabenstellung: 1000 Stück für die Stichprobe ist zuviel - kostet zu viel! Zwar wird das Vertrauensintervall bei grossen Stichproben kleiner, der Aufwand wird sich jedoch kaum lohnen). Deshalb wählen wir eine kleinere Stichprobe: 50 und nehmen an, 2 auf 50 hätten das Ziel nicht erreicht. Wir können einen Binomialtest anwenden - auch wenn wir nicht zurücklegen. Wir müssen $P(X \geq 2)$ für $X \sim P(50, 0.0012)$ berechnen ($= 1 - P(X < 2) = 1 - 0.998302326 = 1.6977 \times 10^{-3}$). Es gilt: $P(X \geq 2) \leq 0.05$. Somit muss die Nullhypothese abgelehnt werden. Mit der Hypergeometrischen Verteilung erhalten wir für $P(X \geq 2) = 0.001566215$ für $X \sim H(10000, 12, 50)$

Beispiel 10 Von 300 dürfen bei der Endkontrolle höchstens 3 Endprodukte fehlerhaft sein. Wieviele fehlerhaft Stücke dürfen bei einer Stichprobe von 50 Stücken auftreten, damit die Produktion die Anforderungen erfüllt? Ziehen wir 50 auf 300 ohne Zurücklegen, müssen wir die Hypergeometrische Verteilung verwenden, bei Zurücklegen die Binomialverteilung (fehlerhafte Stücke möchte man ja im Allgemeinen nicht zurücklegen!!!). $\alpha = 0.05$. Wir berechnen somit das maximale x_i , so dass $P(X \geq x_i) \leq 0.05$ für $X \sim H(300, 3, 50)$.

Wir erhalten: $P(X \geq 3) = 0.004399$. Es darf höchstens zwei fehlerhafte Endprodukt in der Stichprobe haben. Sonst muss die Nullhypothese verworfen werden.

Mit der Binomialverteilung (samt Zurücklegen) erhalten wir: $P(X \leq 1) = 0.910564687$ und $P(X \leq 2) = 0.986182729$ für $X \sim B(50, 0.01)$. Somit darf die Stichprobe bei Verwendung dieser Verteilung höchstens ein fehlerhaftes Stück aufweisen.

Beispiel 11 Typfehler bei der Eingabe von Buchungen. Von der Lehrtochter wurden 200 Buchungen vorgenommen. Diese werden vom Ausbildungschef stichprobenweise überprüft. Es wird eine Zufallsstichprobe von 20 gezogen, wobei entdeckte Fehler jeweils korrigiert werden. Der Ausbildungschef betrachtet bei Anfängerinnen und Anfängern Buchungen, die höchstens 2% Fehler aufweisen, als knapp akzeptabel. In der Stichprobe entdeckt der Ausbildungschef 3 Fehler.

H_0 : Die Lehrtochter macht nicht zuviele Fehler.

H_A : Die Lehrtochter macht zuviele Fehler ($\Rightarrow$ rechtsseitiger Test).

Wollen wir eine Hypergeometrische Verteilung verwenden, müssten wir die Versuchsanordnung ändern: Die Fehler dürften nicht nur korrigiert werden, sondern müssten auch der Grundgesamtheit entnommen werden. Dies gilt auch für fehlerlose Buchungen. Man sieht ohne Rechnung, dass es nicht möglich ist, 3 Fehler zu machen, wenn in der Grundgesamtheit 2 vorkommen. Entsprechend gilt für $p(X \geq 3) = 0$ für $X \sim H(200, 2, 20)$. Die Nullhypothese muss verworfen werden.

Verwenden wir einen Binomialtest müssen die gezogenen Buchungen jeweils in die Grundgesamtheit "zurückgelegt" werden. Damit der Ausbildungschef die Fehler trotzdem verbessern kann, kann er Buchungen verbessern und sie entsprechend markieren. Wird eine solche Buchung nochmals gezogen, gilt sie für die Berechnung als fehlerhaft. Wir erhalten: $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - 0.992931307 = 0.0070687$ für $X \sim B(20, 0.02)$. Die Lehrtochter macht zuviele Fehler (Befinden sich zwei Fehler in der Stichprobe, wäre das auch schon zuviel! Nur bei einem Fehler, muss die Nullhypothese knapp nicht verworfen werden).