

Bearbeitete Vorlesungsnotizen

Stochastische Modelle in

Finanz und Versicherungen

Vorlesung gehalten von Dr. Michael Schmutz, Universität Bern, Institut für mathematische Statistik und Versicherungslehre, WS 2010 auf der Grundlage eines Skriptums von Prof. Ilya Molchanov
Zusammengestellt von Paul Ruppen (ohne Gewähr). Version: 25. Februar 2011

Inhaltsverzeichnis

1	Übersicht	2
1.1	Basics	2
1.2	Basisinstrumente	2
2	Deterministisches Basiswissen	3
2.1	Klassische Bewertung von künftigen Auszahlungen	3
2.2	Zero- und Forward Rates	4
2.3	Forwards and Futures	4
2.3.1	Eigenschaften von Forwards	4
2.3.2	Eigenschaften von Futures	5
2.3.3	Marktteilnehmer	6
2.3.4	Absichern mit Futures	7
2.3.5	Preisbewertungen von Futures	9
2.4	Obligationen (Bonds)	13
2.4.1	Nullkuponanleihen (pure discount bonds; Zero bonds)	13
2.4.2	Kuponbonds (Coupon bonds)	13
2.5	Optionen	14
2.5.1	Hedging mit Optionen	18
2.5.2	Hedging mit Spreads	20
2.5.3	Hedging mit Kombinationen	21
3	Stochastische Prozesse	23
3.1	Ein-Perioden Modelle	23
3.2	Eigenschaften von Optionspreisen	24
3.2.1	Notation	24
3.2.2	Preisfaktoren	24
3.2.3	Voraussetzungen	25
3.2.4	Europäische Call-Put-Parität	25
3.2.5	Schranken (bounds)	25
3.3	Binomialbäume	28
3.3.1	Ein falscher Weg zur Optionsbewertung	28
3.3.2	Risikofreies Portfolio	28
3.3.3	Bewertung von Calls auf Binomialbäumen	29
3.3.4	Risikoneutrale Bewertung	31
3.3.5	Wert einer Call-Option in Zweiperioden Bäumen	31
3.3.6	Wert einer Put-Option in Zweiperioden-Bäumen	33
3.3.7	Delta-Hedging	33
3.4	Stochastische Prozesse auf Binomialbäumen	34
3.4.1	Begriffserklärung filtrierter W-Raum an einen Beispiel	35
3.4.2	Begriffserklärung Bedingte Erwartungswerte auf Binomialbaum an Beispiel	36
3.4.3	Eigenschaften von Bedingten Erwartungswerten	38
3.4.4	Der Binomialdarstellungssatz	39
3.4.5	Selbstfinanzierende Strategie	40
3.5	Stetige Prozesse	43
3.5.1	Heuristische Vorüberlegungen zu Preisprozessen	43
3.5.2	Aktienpreise in stetiger Zeit	47
3.5.3	Stochastische Differentialgleichungen	49
3.6	Die Itô-Formel	50
3.6.1	Geometrische Brownsche Bewegung	53
3.6.2	Itô-Produktregel	54
3.6.3	Schätzen der Volatilität	56
3.7	Martingale	56

3.7.1	Definition und Beispiele Martingale	57
3.7.2	Selbstfinanzierende Portfolios	58
3.7.3	Masswechsel	59
3.7.4	Das Black-Scholes Modell	60
3.7.5	Zusammenfassung	63
3.7.6	Beispiel: Bewertung einer europäischen Call-Option	64
3.7.7	Beispiel: Bewertung einer europäischen Put-Option	66
3.7.8	Weitere Beispiele und Bemerkungen	66
3.7.9	Blacks Formel	67
3.7.10	Fremdwährungen	67
3.7.11	Dividenden	68
3.7.12	Call-Preise während Laufzeit	69
3.7.13	B+S-Differentialgleichungen	69
3.7.14	Greek Letters	70
3.7.15	Amerikanische Optionen	71
3.7.16	Exotische Optionen	71
4	Optimale Portfolios	73
4.1	Erwartungswert-Varianz-Methode	73
4.1.1	Definitionen und Grundbegriffe	73
4.1.2	Erwartungswert-Varianz-Prinzip	74
4.2	Risikofreie Assets und die Kapitalmarktklinie	77
4.3	Das Capital Asset Pricing Model (CAPM)	78
4.4	Absichern des Wertes eines Portfolios	80
4.5	Risiko-Beurteilung von Portfolios	81
4.5.1	Lineares Modell	82
4.5.2	Eigenschaften der VaR	83
4.6	Risikomasse	85
5	Risiko und Versicherungen	86
5.1	Kreditrisiken	86
5.2	Nicht-Lebensversicherungen	86
5.2.1	Risikoprozess	87

1 Übersicht

1. Deterministisches Basiswissen (Zins, Futures, Optionen)
2. Bewertung von Optionen (stochastisch), 60% des Kurses (Mathematisches Basiswissen in „stochastische Prozesse II“).
3. Portfoliooptimierung
4. Risiko und Versicherungen

Skriptum ist „russian style“ (ohne Vorlesung kaum zu verstehen) Literatur: Hull (ökonomisch, sehr angewandt; mathematisch nicht genügend) Baxter (halbmathematisch (nicht risikoneutrale Vorgehensweise; im Handapparat)

1.1 Basics

- equity = Eigenkapital
- debts = Fremdkapital, Schulden
- share = Aktie
- bond = Obligation, Darlehen (weniger risikoreich als Aktie)

Zinssätze sind höher, je länger die Laufzeit eines Darlehens (im Normalfall). Die Darstellung von Zinsen in Abhängigkeit von der Laufzeit nennt man „Zinsstrukturkurve“. Bei hohen Zinssätzen kann die Kurve aber auch sinkend sein. Allgemeine Regel bezüglich Preisen von Aktien und Obligationen: Der Preis eines Papiers ist das, was das Papier abwirft (Zukunft) und nicht, was es gekostet hat (z.B. Hotel: Preis sind nicht die Baukosten, sondern die künftigen diskontierten Einnahmen, die es generiert. Es stellt sich dabei die Frage, was der korrekte Zinssatz ist). Hauptidee: Der Preis der Aktie wird in Abhängigkeit von der Zeit betrachtet. Derivate sind Funktionen des Preises der Aktie (oder anderer Güter (= Basiswert, Bezugswert, Underlying). Die Preisentwicklung von Derivaten hat dieselbe Zufallsquelle wie die Preisentwicklung des „Underlyings“. Der Preis des Derivats f zu Zeitpunkt t ist eine Funktion des Preises S_t des Underlyings zum Zeitpunkt t : $f(S_t)$. Bei der Berechnung von Preisen werden Handelsgewinne (Arbitrage; Gewinne ohne Investition; Geld aus nichts) ausgeschlossen. Die Preise S_T und $f(S_T)$ zum Verfalldatum T müssen im Zeitpunkt t_0 in einer gewissen Beziehung zu einander stehen, um Arbitrage auszuschliessen.

1.2 Basisinstrumente

Basisinstrumente werden auch „Basiswerte“, „Bezugswerte“ oder „Underlyings“ genannt. Es sind dies:

- shares (Aktien)
- foreign currencies (Fremdwährungen)
- bonds (Obligationen)
- commodities (Waren)

Derivat: ein Finanzinstrument, das von einem einfacheren Finanzinstrument oder Underlying abgeleitet ist und dessen Wert vom Wert der einfacheren Finanzinstrumente oder vom Wert der Underlyings abhängt.

2 Deterministisches Basiswissen

r : Zinsraten (Zinssatz)

C_0 : Anfangskapital; Investition

Normalfall: jährliche Verzinsung, am Ende des Jahres zum Kapital hinzuschlagen; d.h.

$$\begin{aligned} C_1 &= C_0(1+r)^1 \\ C_n &= C_0(1+r)^n. \end{aligned}$$

Unterjährige Verzinsung (m mal innerhalb des Jahres; identische Zeitabstände):

$$\begin{aligned} C_{1,m} &= C_0 \left(1 + \frac{r_m}{m}\right)^m \\ C_{n,m} &= C_0 \left(1 + \frac{r_m}{m}\right)^{mn} \end{aligned}$$

(r_m Jahreszins bei m -unterjähriger Verzinsung)

Barwert eines Kapitals $C_{n,m}$, das in n Jahren anfällt bei m -unterjähriger Verzinsung

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{C_{n,m}}{\left(1 + \frac{r_m}{m}\right)^{mn}} \\ \lim_{m \rightarrow \infty} C_0 \left(1 + \frac{r_m}{m}\right)^{mn} &= \lim_{m \rightarrow \infty} C_{n,m} = C_0 e^{r_c n} \end{aligned}$$

r_c Jahreszins bei stetiger Verzinsung

$$C(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} C_0 \left(1 + \frac{r_m}{m}\right)^{mt} = C_0 e^{r_c t}$$

für $t \in \mathbb{R}^+$.

Äquivalente Zinsraten:

$$\begin{aligned} e^{r_c} &= (1+r) \implies \\ r_c &= \ln(1+r) \\ \left(1 + \frac{r_m}{m}\right)^m &= (1+r) \\ r_m &= \left(\sqrt[m]{1+r} - 1\right) m \\ e^{r_c} &= \left(1 + \frac{r_m}{m}\right)^m \implies \\ r_c &= m \ln \left(1 + \frac{r_m}{m}\right) \\ r_m &= \left(\sqrt[m]{e^{r_c}} - 1\right) m \\ &= \left(e^{\frac{r_c}{m}} - 1\right) m \end{aligned}$$

2.1 Klassische Bewertung von künftigen Auszahlungen

Barwert (present value; valeur actuelle)

z.B. $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ seien Finanzflüsse zu den ganzjährigen Zeitpunkten $i \in \mathbb{N}_n^*$. Dann ist der Barwert

$$C_0 = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{(1+r^{(i)})^i}$$

mit dem von der Abzinsungsdauer abhängigen Zinrate $r^{(i)}$ (s. o. Überlegungen zur Zinsstrukturkurve; Geldflüsse zu i werden auch „Cash Flows“ genannt). $r^{(i)}$ sind die (beinahe) risikolosen Zinsraten.

2.2 Zero- und Forward Rates

Sei eine Zinsstruktur $r^{(i)}$, $i \in \mathbb{N}_n^*$, gegeben. Dann nennt man die $r^{(i)}$ „Zero Rates“. Mit $C_i = C_0 (1 + r^{(i)})^i$ und $C_{i+1} = C_0 (1 + r^{(i+1)})^{i+1}$ ist der Forward Rate der Zinssatz x , der nötig ist, um C_i auf C_{i+1} aufzuzinsen, also

$$\begin{aligned} C_i (1 + x) &= C_{i+1} \\ C_i + C_i x &= C_{i+1} \\ C_i x &= C_{i+1} - C_i \\ x &= \frac{C_{i+1} - C_i}{C_i} \end{aligned}$$

Eingesetzt erhält man:

$$\begin{aligned} x &= \frac{C_0 (1 + r^{(i+1)})^{i+1} - C_0 (1 + r^{(i)})^i}{C_0 (1 + r^{(i)})^i} \\ &= \frac{(1 + r^{(i+1)})^{i+1} - (1 + r^{(i)})^i}{(1 + r^{(i)})^i} \\ &= \frac{(1 + r^{(i+1)})^{i+1}}{(1 + r^{(i)})^i} - 1 \end{aligned}$$

Damit wird die Forwardrate durch Abzinsen und Aufzinsen berechnet. Für den stetigen Fall mit $t' > t$ gilt:

$$\begin{aligned} C_0 e^{r(t)t + x(t'-t)} &= C_0 e^{r(t')t'} \\ r(t)t + x(t'-t) &= r(t')t' \\ x &= \frac{r(t')t' - r(t)t}{(t' - t)} \end{aligned}$$

2.3 Forwards and Futures

Forwards heissen auf Deutsch Terminkontrakte (Termingeschäfte). Es wird vereinbart, zu einem gewissen Zeitpunkt ein Basisinstrument (Rohstoff, Aktie, Fremdwährung) zu einem bestimmten Preis zu kaufen oder zu verkaufen. Futures sind eine spezifische Form von Forwards (s. unten). Bei Forwards wird zu Beginn nichts bezahlt (ist ja nur ein Vertrag - allerdings wohl Vertragsabschlusskosten oder bei Futures Gebühren).

2.3.1 Eigenschaften von Forwards

- Wird zum Zeitpunkt $t = 0$ abgeschlossen. Es wird das Liefer- oder Kaufdatum und der Kauf- oder Verkaufspreis fixiert.
- Die Leistung (Lieferung oder Zahlung) erfolgt zum Verfalldatum (also später)
- OTC (over the counter; Abschluss findet außerhalb der Verantwortung der Börse statt, unterliegt aber dennoch den geltenden gesetzlichen Bestimmungen für den Wertpapierhandel; Entsprechend: individuelle Laufzeit, fehlende Börsennotierung, wenig Transparenz und eine geringe Zugangsmöglichkeit für private Investoren)
- Impliziert, dass zum Verfalldatum ein Basisinstrument seinen Eigentümer wechselt.

- Eine gewisse Unsicherheit, ob Eigentümer zum Verfalldatum liefern kann oder Käufer zum Verfalldatum zahlen kann (Bonitätsrisiko).

Beispiel 1. Heute schliesst man den Vertrag ab, dass man in 3 Monaten eine UBS-Aktie zu einem Preis von 14 SFr. kauft.

Kurs von Forwards Ein Forward $F_{0,T}$, der zu t_0 abgeschlossen wird, hat zu diesem Zeitpunkt keinen Kurswert. Wenn man Arbitrage ausschliesst, so wird zum Zeitpunkt t_0 als künftiger Verkaufspreis des Basisinstrumentes $S_0 e^{rT}$ festgelegt (r = risikofreier Marktzins bei stetiger Verzinsung; S_0 aktueller Marktwert des Basisinstrumentes; T = Verfalldatum; keine Carry over Kosten (= Bestandhaltungskosten), d.h. sind Kosten, die entstehen, um z.B. das Basisinstrument bis T zu lagern). Wir nennen $S_0 e^{rT}$ „Preis des Forwards“. In $[t_0, T]$ verändert sich der Wert des Basisinstrumentes. Dadurch erhält der Forward in dieser Zeit einen positiven oder negativen Kurswert - je nach Position (bezüglich Positionen s. bei Futures). Steigt nämlich der Wert des Basisinstrumentes, so gewinnen Long Forwards (= eingegangene Verträge, dass man zu T das Basisinstrument kauft) an Wert, Short Forwards (eingegangene Verträge, dass man zu T etwas verkauft) verlieren an Wert. Dies kann man mit No-Arbitrage-Argumenten zeigen. Gilt nämlich für S_t - auf t_0 abgezinst und dann aufgezinst auf T -

$$\frac{S_t e^{rT}}{e^{rt}} = S_t e^{r(T-t)} > S_0 e^{rT},$$

so muss der allfällige Käufer des Forwards dem Besitzer des Long Forwards

$$K := \frac{S_t e^{r(T-t)} - S_0 e^{rT}}{e^{r(T-t)}}$$

auszahlen (Diskontierte Differenz der beiden Endverkaufspreise des Underlyings; sonst würde die Person, die den Vertrag verkauft besser den Long Forward behalten. Sie verkauft das Underlying leer (s. für Leerverkäufe bei den Futures). Legt das Geld auf die Bank und erhält $S_t e^{r(T-t)}$. Sie kauft dann zu T das Underlying zum Preis $S_0 e^{rT}$ und macht zu T einen Gewinn von $S_t e^{r(T-t)} - S_0 e^{rT}$. Umgekehrt muss der Besitzer eines Short Forwards beim Verkauf des Forwards K auszahlen. Denn sonst würde der Interessent am Forward besser einen neuen Forward zu $S_t e^{r(T-t)}$ abschliessen, da er dann sein Underlying zu $S_t e^{r(T-t)}$ statt zu $S_0 e^{rT}$ verkaufen könnte. Die Überlegungen für $e^{r(T-t)} < S_0 e^{rT}$ verlaufen dann symmetrisch.

2.3.2 Eigenschaften von Futures

- Futures sind standardisierte Forwards (die standardisierten Vertragsbestimmungen betreffen: Quantität, Qualität, Verfalldatum, Lieferbedingungen, Lieferdatum, minimale Preisluktuationen (gemeint ist der „tick“, der minimale Preisunterschiede, der an einer Börse für ein spezifisches Produkt angegeben wird. Z.B. der EUR Futures Markt hat einen Tick von 0.0001, d.h. die kleinste Veränderung von Preisen geht von 1.2902 zu 1.2903 oder zu 1.2901, nicht aber zu Werten dazwischen); tägliche Preisgrenze (Beschränkung der Preisbewegungen an einem einzelnen Tag). Handelstage und Handelsuhrzeiten).
- nicht OTC, sondern börsengehandelt
- Es gibt eine Clearingstelle. Es handelt sich um eine der Börse angeschlossene Institution. Sie bezieht zu jedem Käufer und Verkäufer die rechtliche Gegenposition, d.h. sie kauft Futures und verkauft sie. Sie übernimmt damit das Bonitätsrisiko der Handelsteilnehmer. Beim Kauf eines Futures muss man der Clearingstelle einen bestimmten Betrag, „(initial) Marging“ genannt, abtreten, der dort mehr oder weniger günstig verzinst wird. Der Margin wird auf ein „Margin Account“ einbezahlt. Verändert sich der Wert des Underlyings, so muss der Anleger Sicherheiten nachliefern oder kann welche abziehen (maintenance margin).

- Die Margin-Rate beträgt im Allgemeinen 5% des Verkaufspreises des Underlyings beim Verfalldatum. Da sich die Werte des Underlyings verändern und die 5% sich - je nach Future - z.B. auf den auf T aufgezinsten Wert des aktuellen Wertes des Underlyings berechnet werden, wird die Angemessenheit der Margins jeden Tag überprüft. Bei Unterdeckung, wobei diese oft auf 75% der 5% festgelegt ist, muss der Käufer oder Verkäufer nachzahlen. Die entsprechende Aufforderung der Clearing-Stelle wird „margin call“ genannt. Bei Überdeckung darf Geld bis zu den 5% zurückgezogen werden, d.h. Kursunterschiede bei Futures werden via Margins-Mechanismus gehandhabt.
- Positionen können leicht geschlossen werden.
- Der Futures-Markt ist stark reguliert.

Beispiel 2. *Ein Unternehmer aus der Schweiz verkauft Güter in den USA. In den USA wird er in Dollar bezahlt. Nach der Lieferung beträgt die Zahlungsfrist 30 Tage. Die Unternehmer möchte sich gegen Währungsschwankungen absichern. (1) Er kauft also in den USA Schweizer Franken Futures (d.h. zu einem bestimmten Betrag an US-Dollars erhält er einen festgelegten Betrag Schweizer Franken). Er kann also in einem Monat mit den vom Kunden bezahlten Dollar Schweizer Franken zum festgelegten Betrag kaufen (er erhält i.A. weniger Schweizer Franken als wenn er sich nicht abgesichert hätte. Es wird aber Risiko ausgeschaltet). (2) Er kann auch in der Schweiz US-Dollar Futures verkaufen: zum festgelegten Preis verkauft er zum Verfallsdatum US-Dollars gegen Schweizer Franken.*

2.3.3 Marktteilnehmer

- Hedgers (kommt von hedge = Hecke, die dazu diente, die Schafe auf einer Weide zu behalten. Es geht um die Absicherung von künftigen Erträgen. So möchte z.B. ein Landwirt sicher sein, in drei Monaten einen minimalen Erlös für seine Ernte zu erhalten. Oder ein Exporteur möchte sich gegen Währungsrisiken absichern, s. obiges Beispiel 2).
- Spekulanten (wollen Gewinn machen; Investitionsstrategie; geht Risiko ein. Er spekuliert auf Abwärts- oder Aufwärtsbewegungen des Underlyings und die daraus resultierenden Schwankungen des Preises des Futures, s.u.)
- Händler (Arbitrageurs); Geld aus "nichts". Ihr Handeln bewirkt, dass Arbitrage verschwindet. Händler kaufen Kontrakte in verschiedenen Märkten, um kurz bestehende Preisunterschiede auszunutzen (Preisunterschiede können aber auch auf Transaktionskosten zurückzuführen sein - z.B. Transportkosten)

Positionen der Teilnehmer: Sie kaufen oder verkaufen. Kaufen wird „Einnahme einer long position“ oder „going long“ genannt. Verkaufen wird „Einnahme einer short position“ oder „going short“ genannt. Bei Futures werden zu t_0 keine Güter verkauft oder verkauft. Man versteht unter „Kaufen eines Futures“ (Eingehen einer Long Position bezüglich Futures) das Eingehen eines Vertrags, das Gut zum festgelegtem Preis am Verfalldatum zu übernehmen. Man versteht unter „Verkaufen eines Futures“ das Eingehen eines Vertrages, das Gutes zum festgelegten Preis am Verfalldatum zu liefern. Den festgelegten Preis nennen wir „Preis des Futures“. Hat man einen Future gekauft oder verkauft, so hat man eine offene Handelsposition. **Schliessen einer Future-Position (Glattstellen):** Transaktionen, die zur Schliessung einer offenen Handelsposition dienen, unabhängig davon ob sie Long oder Short sind, werden als Glattstellung bezeichnet. Es gibt zwei Möglichkeiten: (1) Beim Verfalldatum wird je nach Position bezahlt und das Underlying entgegengenommen, beziehungsweise wird Geld entgegengenommen und das Underlying geliefert (nur 1% aller Futures enden so; bei Währungsfutures ca. 2%). (2) Der Future wird vor dem Verfalldatum veräussert: Ein Long Future wird glattgestellt, indem man einen identischen Short Future kauft. Ein Short Future wird glattgestellt, indem man einen identischen Long Future kauft. Beim Glattstellen verliert oder gewinnt man bezüglich der eingezahlten Margin, je nachdem wie sich der Wert

des Basisinstrumentes verändert hat (cash settlement). **Arten von Futures:** Agrar- und Metall-futures. Futures auf zinsabwerfende Assets (Obligationen, treasury bills (= US-Geldmarktpapiere, die Laufzeiten unter einem Jahr haben. Sie werden abgezinst abgegeben und werfen sonst keinen Zins ab. Es handelt sich also um spezielle zero bonds)), Fremdwährungen; Aktienmarktindices (sie können beim Verfalldatum nicht wirklich verkauft oder gekauft werden); Kombinationen verschiedener zusammenhängender Futures werden „spreads“ genannt („Spreads“ wird für verschiedene Zusammenhänge verwendet; gewöhnlich wenn es um Differenzen geht, z.B. Preisdifferenz identischer Futures auf verschiedenen Märkten; hat in diesem Fall also einen Zusammenhang mit Arbitrage; Differenz zwischen risikofreien und risikoreicheren Zinsen, etc.; s. auch „spreads“ bei Optionen). **Portfolio:** eine Kombination von verschiedenen Vermögenswerten (Assets; alle Basiswerte und Derivate, die man besitzt). Ein Portfolio ist eine gewichtete Summe dieser Assets (Summe der - mit der Anzahl Assets pro Typ gewichteten - Werte der Assets). **short selling:** Verkaufen eines Assets, das man nicht besitzt (Leerverkauf). Jemand verkauft etwas zum Spot-Preis, in der Hoffnung, zum Rückkaufzeitpunkt die Ware billiger kaufen zu können. Die Differenz kann er dann als Gewinn einstreichen. Steigt der Preis der Ware, fährt er einen Verlust ein. Beispiel im Skriptum bezüglich offenbar gängige Praktiken (S. 4, Mitte):

Beispiel 3. *Ein Investor kontaktiert einen Händler, damit dieser 500 IBM Aktien verkauft. Der Händler leiht diese von (einem) anderen Kunden, verkauft sie und legt das Geld auf eine Konto des Investors. Für die geliehenen Aktien muss der Investor ein Entgeld zahlen. Zu einem günstigen Zeitpunkt avisiert der Investor den Händler, dass er die Position schliessen wolle. Der Händler kauft mit dem Geld auf dem Konto des Investors 500 IBM-Aktien und gibt diese den anderen Kunden zurück. Sind die Aktien billiger geworden, macht der Investor einen Gewinn. Sind sie teurer geworden, muss er an den Händler die Differenz überweisen (Im Allgemeinen muss man beim Leihen schon Sicherheiten liefern. Die Differenz wird mit diesen abgebucht). (Variante: der Händler hat das Recht, den Investor zum Schliessen der Position zu zwingen, wenn er selber zu wenig IBM Aktien mehr hat - z.B. weil der Kunde diese zurückhaben möchte. In diesem Falle muss der Investor die Position schliessen, obwohl er dies noch nicht möchte).*

Handelsanordnungen (trading orders): verkaufen, kaufen (zu den aktuell besten Preisen; market order); verkaufen, kaufen zu bestimmten minimalen oder maximalen Preisen (limit order); Leerverkaufsaufforderung (short sale); verkaufen oder kaufen wenn eine bestimmte Grenze erreicht ist (stop order).

2.3.4 Absichern mit Futures

Eine Unternehmung, die eine Short Future Position einnimmt, nimmt einen Short Hedge vor, d.h. sie sichert den Preis der zu verkaufenden Ware ab. Es wird nicht immer die gesamte zu verkaufende Ware mit Futures abgesichert. Wenn der Preis des Basisinstrumentes sinkt, so gewinnt die Firma dann bezüglich der Short Futures (kann das Gut zu T zu einem höheren Preis als dem Marktpreis abgeben) und verliert bezüglich der Ware, die sie nicht abgesichert hat. Wenn der Preis des Basisinstrumentes steigt, so verliert die Firma bezüglich Short Futures (muss das Gut zu T zu einem zu tieferen Preis als dem Marktpreis abgeben) und gewinnt bezüglich der nicht abgesicherten Ware. Eine Firma, die eine Long Future Position einnimmt, nimmt einen Long Hedge vor, d.h. sie sichert den Preis der zu kaufenden Ware ab.

Beispiel 4. *Eine US-Firma erwartet auf Ende Juli hin eine Summe von 50 Millionen Yen. Yen Futures haben Verfalldaten (deliveries) im März, Juni, September und Dezember. Die Firma verkauft vier 12.5 Millionen September Yen Futures, d.h. sie muss im September 50 Millionen Yen liefern. Ende Juli erhält die Firma die Yen und schliesst die Future Position, d.h. sie kauft vier 12.5 Millionen September Futures. Der Preis der September Futures im März war 0.78, der Spot und September Future Preis im Juli sind 0.72 respektive 0.7250 (Der Spot Preis ist der augenblickliche Marktpreis des Basisinstrumentes). Es ergibt sich damit eine Differenz von $0.78 - 0.7250 = 0.055$ in den Futurepreisen. Diese Differenz wird der Firma mittels Cash Settlement (= Barabfindung, Barausgleich in BRD) (erfolgt via Abrechnung bezüglich Margin Account) ausbezahlt. Das ergibt*

die folgende Abrechnung: $50000000 \cdot 0.72 + 4 \cdot 12500000 \cdot 0.055 = 38750000$ Dollar. Der mittlere Yenpreis ist damit

$$\frac{38750000}{50000000} = 0.775$$

Dasselbe Resultat erhält man mit $0.72 + 0.055 = 0.775$.

Bemerkung 5. zu Wechselkursen: Die Mengennotierung („indirect quotation“) gibt den Preis einer Einheit der inländischen Währung in Einheiten der ausländischen Währung an (am Beispiel von Europa und den USA aus europäischer Sicht: Dollar je Euro). Dagegen gibt die Preisnotierung („direct quotation“) den Preis einer Einheit der ausländischen Währung in Einheiten der inländischen Währung an (Euro je Dollar aus europäischer Sicht). Die Preisnotierung ist somit definitionsgemäß der Kehrwert der Mengennotierung. Sagt man in der Schweiz, der Kurs des Euros sei 1.35, dann ist damit gemeint, wieviel Franken man für einen Euro aufwenden muss. Entsprechend wird die Preisnotierung verwendet. Der Franken wird stärker, wenn man weniger für einen Euro bezahlen muss. Der Euro wird schwächer, wenn man weniger für ihn bezahlen muss. Wenn der Wechselkurs steigt, so muss man mehr für den Euro bezahlen (der Franken wird schwächer und der Euro stärker) und man erhält mehr Franken für einen Euro.

Beispiel 6. Eine Schweizer Firma weiss, dass Sie in drei Monaten 50000 Dollar einkaufen muss (um eine Lieferung in Dollar zu bezahlen) und geht von steigendem Dollarkurs aus (Preisnotierung). Durch den steigenden Kurs muss sie in Schweizer Franken mehr bezahlen. Die Firma kauft Dollar Futures zum Kurs von 1.1, d.h. sie muss in drei Monaten 55000 CH-Franken für die 50000 liefern. Wir nehmen an, der Kurs des Dollars sei auf 1.2 gestiegen. Dann hätte die Firma $1.2 \cdot 50000 = 60000$ für die 50000 Dollar aufwenden müssen.

Optimaler Hedge-Quotient (Hedge-Ratio) Die Hedge-Ratio h ist das Verhältnis der Position in Futures zur Grösse der Risikoposition (risk exposure). Möchte man z.B. in 3 Monaten 200 Tonnen Getreide verkaufen, so wären diese 200 Tonnen Getreide die abzusichernde Position. h soll bestimmt werden, dass das Risiko minimal ist, wobei Risiko hier durch die Varianz definiert ist. Man möchte also den Erwartungswert mit hoher Wahrscheinlichkeit realisieren (mit möglichst kleiner Volatilität).

Sei $\Delta S := S_2 - S_1$ (die Preisveränderung einer Einheit des Basisinstrumentes über die Hedge-Periode)

Sei $\Delta F := F_2 - F_1$ (die Preisveränderung eines Futures über die Hedge-Periode).

σ_S die Standardabweichung von ΔS

σ_F die Standardabweichung von ΔF .

Bei einem Short Hedge (s. Beispiel 4) ist der effektiv erreichte Verkaufspreis der Risikoposition.

$$\begin{aligned} S_2 + h(F_1 - F_2) &= S_2 - h(F_2 - F_1) \\ &= S_2 - h\Delta F \end{aligned}$$

Die Gesamtpreisveränderung (von Long im Basisinstrument und Short in h Futures = short hedge) ist damit

$$S_2 - h\Delta F - S_1 = \Delta S - h\Delta F.$$

Bemerkung 7. Bei der Gesamtpreisveränderung wirken zwei Einflüsse: Veränderung des Future Preise und Veränderung des Preises des Basisinstrumentes. Bei einem Short Hedge wirkt sich ein Sinken des Basiswertes in einem positiven Cash Settlement aus. Wenn der Basiswert sinkt, so sinken auch die Future Preise, d.h. $F_1 > F_2$. Also ist bei steigendem Cash Settlement $F_1 - F_2 > 0$, $-(F_2 - F_1) > 0$ und damit $-h(F_2 - F_1) > 0$. Steigen die Preise des Basisinstrumentes, so wirkt sich dies bezüglich der gehaltenen Positionen im Underlying positiv auf die Gesamtpreisveränderung aus. Also gilt bei positivem Einfluss $S_2 - S_1 > 0$.

Bei einem Long Hedge (s. Beispiel 6) ist der effektiv erreichte Preis

$$S_1 - S_2 + h(F_2 - F_1) = h\Delta F - \Delta S$$

Bemerkung 8. Bei Long Hedges wirkt sich auf die Gesamtpreisveränderung ein Steigen der Futurepreise positiv aus: $F_2 > F_1$, d.h. wenn der Futurepreis steigt, dann ist $h(F_2 - F_1) > 0$ und man gewinnt auf Futures. Wenn der Preis des Basisinstrumentes sinkt, dann gewinnt man bezüglich der gehaltenen Positionen im Underlying, d.h. $S_1 - S_2 > 0$.

Es gilt mit der Regel ($V(X)$ = Varianz der Zufallsvariable X ; $Cov(X, Y)$ = Kovarianz der ZV X und Y ; $Kor(X, Y)$ = Korrelation der ZV X und Y).

$$\begin{aligned} V(X + Y) &= V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y) \\ &= V(X) + V(Y) + 2Kor(X, Y)\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)} \end{aligned}$$

Denn

$$\begin{aligned} Kor(X, Y) &= \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} \implies \\ Cov(X, Y) &= Kor(X, Y)\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)} \end{aligned}$$

Damit erhält man mit $\rho := Kor(\Delta S, h\Delta F)$:

$$\begin{aligned} V(\Delta S - h\Delta F) &= \sigma_S^2 + h^2\sigma_F^2 - 2h\sigma_S\sigma_F\rho \\ &= V(h\Delta F - \Delta S) \end{aligned}$$

für Long und Short Hedges. Um das optimale h zu berechnen, leitet man $V(\Delta S - h\Delta F)$ nach h ab und setzt mit 0 gleich:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dh}(\sigma_S^2 + h^2\sigma_F^2 - 2h\sigma_S\sigma_F\rho) &= 2h\sigma_F^2 - 2\sigma_S\sigma_F\rho = 0 \implies \\ h &= \frac{2\sigma_S\sigma_F\rho}{2\sigma_F^2} = \rho \frac{\sigma_S}{\sigma_F} \end{aligned}$$

Die zweite Ableitung ergibt:

$$\frac{d}{dh}(2h\sigma_F^2 - 2\sigma_S\sigma_F\rho) = 2\sigma_F^2 > 0$$

Damit nimmt bei $h = \rho \frac{\sigma_S}{\sigma_F}$ die Varianz ein Minimum an. $h = 1$ ist optimal, wenn die Future Preise sich genau gleich wie die Spot Preise (= Kassapreise) verhalten, d.h. $\sigma_S = \sigma_F$ und $\rho = 1$.

2.3.5 Preisbewertungen von Futures

Es wurde bereits von Future Preisen gesprochen, wobei diese einfach der zu zahlende Preis für das Basisinstrument bei Verfall sind. Es geht in der Folge darum, zu untersuchen, was angemessene Future Preise sind. Wenn Arbitrage ausgeschlossen wird (s. dazu Beispiel 9), so sollte der Future Preis

$$\begin{aligned} F_{0,T} &= S_0(1 + C) \\ F_{0,T} &= S_0e^{cT} \end{aligned}$$

betragen, mit $C = R + K - E$ (R für Zinsen; K für Kosten, E für Ertrag (cash settlement)). C drückt diese Finanzflüsse als Anteil an S_0 aus. Die zweite Formulierung rechnet C in eine korrekte Zinsrate um, so dass $c = r + k - e$, r = Marktzins; k misst carry over Kosten; e misst Ertrag, d.h., $(1 + C) = e^{cT} \implies cT = \ln(1 + C) \implies c = \frac{\ln(1+C)}{T}$.

Beispiel 9. Die folgenden Beispiele zeigen, wie die Keine-Arbitrage-Bedingung zum oben angegebenen Preis führt. Es geht darum, billig zu kaufen und teuer zu verkaufen. Ist der Spotpreis im Verhältnis zum Future Preis zu tief, so ergibt sich die **Cash-and-Carry-Strategie**: Der Spotpreis von Gold sei 400 (pro Unze). Der Future Preis von Gold (450; eine Unze) (Lieferung in einem Jahr).

Strategie zu $t = 0$: Man leiht 400 für ein Jahr zu 10% aus. Man kauft eine Unze Gold auf dem Spot Markt für 400. Man verkauft einen Future für 450 (Verfalldatum ein Jahr).

Zu $t = 1$: Man liefert das Gold (Glattstellen des Futures), zahlt das ausgeliehene Geld zurück, inklusive Zinsen. Dies ergibt die folgende Abrechnung:

	Ausgang	Eingang	
t_0		400	Ausgeliehenes Geld
t_0	400		Kauf von Gold
t_0	400	400	Summen
t_0		0	Saldo
t_1		450	Geld für Future
t_1	440		Zurückzahlung Darlehen
t_1	440	450	Summen
t_1		10	Saldo

Da alle diese Gewinnmöglichkeit nutzen möchten, verschwindet sie.

Ist der Spotpreis im Verhältnis zum Future Preis zu hoch, so ergibt sich die

Umgekehrte Cash and Carry Strategie:

Sei der Spotpreis des Goldes 420; der Future Preis 450 (1 Jahre). Zu $t = 0$ verkauft man eine Unze Gold (Leerverkauf). Man legt 420 auf die Bank zu 10%. Man kauft einen Goldfuture zu 450. Zu $t = 1$ nimmt man das Geld von der Bank (samt Zinsen): $420 + 42 = 462$. Man stellt den Future glatt, d.h. man erhält Gold für 450, und gleicht mit dem Gold den Leerverkauf aus.

	Ausgang	Eingang	
t_0		450	Leerverkauf Gold
t_0	450		Anlage auf Bank
t_0	450	450	Summen
t_0		0	Saldo
t_1		462	Geld von Bank
t_1	450		Zahlung für Gold
t_1	450	462	Summen
t_1		12	Saldo

Ist die Preisdifferenz von Futures mit ungleichen Verfalldaten, die aber sonst identisch sind, mit den Gesamtkosten $(r+k)$ zwischen den Verfalldaten identisch (Zins, Versicherungen, Lagerung, Transportkosten, etc.), nennt man den entsprechenden Markt einen „full carry market“ oder „full carrying charge market“.

Beispiel 10. (1) Gut X hat im Mai einen Futurepreis von \$10/Einheit. Wenn die Carry Over Kosten für X \$0.50/Monat sind und der Juni Kontrakt zu einem Wert von \$10.50/Einheit gehandelt wird, liegt ein Full Carry Markt vor. (2) Beispiel des Skripts: Der Preis von Gold Futures September beträgt 410.20, der Preis Dezember 417.9. Die Zinsen für die „Banker's Acceptance“ für 90 Tage beträgt 7.8% Jahreszins (Eine Bankers Acceptance beginnt mit einem Auftrag eines Bankkunden, eine bestimmte Summe in der Zukunft zu zahlen. Wenn die Bank akzeptiert, übernimmt sie die Verantwortung für die Zahlung. Das von der Bank ausgestellt Papier kann gehandelt werden). $\left(\frac{417.9}{410.20}\right)^4 = 1.0772$, entspricht also ungefähr dem Bankzins. Es liegt ein Full Carry Markt vor.

Wenn ein Basisinstrument ein Einkommen I (= Summe der diskontierten Einkommen) während der Laufzeit des Kontraktes generiert, dann gilt

$$F_{0,T} = (S_0 - I) e^{rT}$$

denn: man kaufe eine Einheit des Basisinstrumentes zu S_0 und kaufe einen Future zu $F_{0,T}$. Dieser Vorgang kostet S_0 und sollte identisch sein mit $I + F_{0,T}e^{-rT}$, woraus die Formel folgt.

Preisbewertung bei Transaktionskosten Transaktionskosten und andere Markturnvollkommenheiten führen zu zwei Preisen: Ankaufspreis und Verkaufspreis. Der Ankaufspreis ist tiefer als der Verkaufspreis. So haben Banken für Fremdwährungen zwei Preise. Wer die Bank eine ausländische Währung kauft, zahlt sie weniger, als sie für eine ausländische Währung beim Verkauf verlangt. Oder bei Banken gibt es einen Unterschied zwischen Zinsen für Geld, das man auf der Bank deponiert, und für Kredite, die man bei der Bank aufnimmt (borrowing rate; lending rate). Wenn $\mathcal{T}$ die Transaktionskosten sind (als Anteil am Future Preis), dann gilt

$$S_0(1 + C_L)(1 - \mathcal{T}) \leq F_{0,T} \leq S_0(1 + C_B)(1 + \mathcal{T})$$

wobei C_L der Guthabenzins ist und C_B der Kreditzins ist (dt. Fachbegriffe für borrowing rate; lending rate; Begründung?). Wenn Restriktionen auf Leerverkauf bestehen und nur ein Teil f der Geldmittel verwendet werden darf, ergibt sich:

$$S_0(1 + fC_L)(1 - \mathcal{T}) \leq F_{0,T} \leq S_0(1 + C_B)(1 + \mathcal{T})$$

Angaben zu Futures in Zeitungen Erste Zeile: Kontrakte mit dem nächsten Verfalldatum, dann solche mit weiter weg liegendem Verfalldatum; Eröffnungspreis; höchster und tiefster Preis; Settlement Preis bei Börsenschluss; Differenz zum Settlement Preis des Vortages; offene Long Positionen (open interest) (Beispiel: A kauft und B verkauft einen Future. Dann ist open interest=1; C kauft und D verkauft je drei Kontrakte. Dann ist open interest=4; A verkauft und D kauft einen Kontrakt: open interest=3; wenn D kauft, hebt sich das mit einem Verkauften auf! Durch den Verkauf durch A, geht eine Long Position weg). Die **Basis** ist der gegenwärtige Spotpreis (cash price) minus der Future Preis. Gewöhnlich sind die Preise für Futures mit entfernteren Verfalldaten höher als die mit naheliegenden Verfalldaten (das folgt schon aus der Formel S_0e^{rT}). Die Differenz zwischen Spotpreis und Future Preis verhält sich ebenso. Je kurzfristiger Futures abgeschlossen werden, desto kleiner ist die Differenz zwischen diesen beiden Preisen.

Preise für klassische Beispiele von Futures (1) *Futures auf Aktienindizes*: Der aktuelle Index Wert ist S_0 . Mit der stetigen risikolosen Dividendrendite von q , dem stetigen risikolosen Zinssatz r und der Laufzeit T ergibt sich der Preis

$$F_{0,T} = S_0e^{(r-q)T}$$

($r - q$ steht für die Nettokosten oder die Nettoverzinsung). Klassische Aktienmarktindizes:

$$\text{Index} = \frac{\sum P_i}{\text{Divisor}}$$

mit dem Preis P_i der Aktie i . Der Divisor hält den Index konstant bezüglich Aktiensplits oder Ersetzen von Aktien im Index (stock substitution). Nur absolute Änderungen spielen eine Rolle (der Wechsel von 1 zu 2 hat denselben Effekt wie von 100 zu 101). Beispiele: der Dow Jones Industrial Average (DJIA; 20 grösste Unternehmen der USA); der S&P 100 und S&P 500 (Standard and Pools; US-Index; breiter als DJIA); FTSE 100 (25 Pfund per Index-Punkt; tick ist 12.5; GB; Financial Times); Nikkei Index (225 grösste japanische Firmen - alle gleich bewertet und volatiler als US-Indices); SMI (Schweiz).

Beispiel 11. *Beispiel für Hedge mit Aktienportfolio (S. 10 unten): 5. April: man hält ein Portfolio von UK-Aktien im Wert von 1 Million Pfund und fürchtet einen Fall der Aktien. Der aktuelle Indexstand des FTSE 100 ist 2000. Man verkauft 20 Juni Futures zu einem Preis von 2000 ($25 \cdot 2000 \cdot 20 = 1000\,000$). Am 10 Mai ist der FTSE 100 auf 1900 gefallen, womit sich ein Verlust von 50000 auf das Aktienpaket ergibt. Glattstellen des Futures durch den Kauf von 20 Juni FTSE 100 Futures zum Preis von 1900. Gewinn $25 \cdot (2000 - 1900) \cdot 20 = 50\,000$. Saldo 0. (die 25 kommen von den 25 Pfund per Indexpunkt her).*

Beispiel 12. Beispiel für die Preisbewertung mit und ohne Dividenden: Aktienpreis zu $t = 0$: $S_0 = 41\$$. Stetiger Zinssatz für 6 Monate: $r = 0.05$; (Stetiger Zinssatz für 3 Monate 0.045 für Aufgabe b)).

a) ohne Dividenden:

$$F_{0;\frac{1}{2}} = S_0 e^{rT} = 45e^{0.05 \cdot 0.5} = 46.1392$$

b) mit Dividenden: 5\$ nach 3 Monaten: man muss Forward-Rate für das 2. Quartal berechnen:

$$\frac{0.05 \cdot 0.5 - 0.045 \cdot 0.25}{0.25} = 0.055$$

oder alternativ die folgende Gleichung nach x auflösen:

$$e^{0.05 \cdot 0.5} = e^{0.045 \cdot 0.25 + x \cdot 0.25}$$

Dies ergibt (Endwert von 45 aufgezinst weniger mit Forward-Rate aufgezinsten Dividende):

$$F_{0;\frac{1}{2}}^d = 45e^{0.05 \cdot 0.5} - 5e^{0.055 \cdot 0.25} = 41.070$$

Alternative: Vom heutigen Preis diskontierte Dividende abziehen und dann aufzinsen:

$$F_{0;\frac{1}{2}}^d = (45 - 5e^{-0.045 \cdot 0.25}) e^{0.05 \cdot 0.5}$$

(2) Fremdwährungsfuture: Aktueller Kurs S_0 . Mit dem stetigen risikolosen Zinssatz r , dem stetigen, risikolosen Zinssatz der Fremdwährung r_f ergibt sich der Future Preis

$$F_{0,T} = S_0 e^{(r-r_f)T}$$

(r_f ergibt sich durch den Kauf von Obligationen in der Fremdwährung, statt Horten von Cash).

Auszahlungsdiagramme für Futures Trägt man die Gewinne/Verluste $f(S_T) := S_T - F_{0,T}$ (Long) oder $f(S_T) := F_{0,T} - S_T$ (Short) auf der y-Achse als Funktion der möglichen Preise S_T des Basisinstrumentes zum Zeitpunkt T ab, so erhält man sogenannte Auszahlungsdiagramme (Pay-off-Diagramme). Es handelt sich um die graphische Darstellung von Funktionen

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(S_T) := S_T - F_{0,T}$$

beziehungsweise:

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(S_T) := F_{0,T} - S_T$$

Die Steigung auf nicht-konstanten Abschnitten der Funktion ist -1 oder 1:

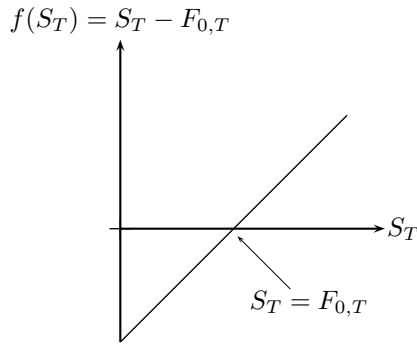


Abbildung 1: Auszahlungsdiagramm für Long Future. Wenn der Preis des Basisinstrumentes über den festgelegten Preis steigt, kann man zu T billiger kaufen als auf dem Markt.

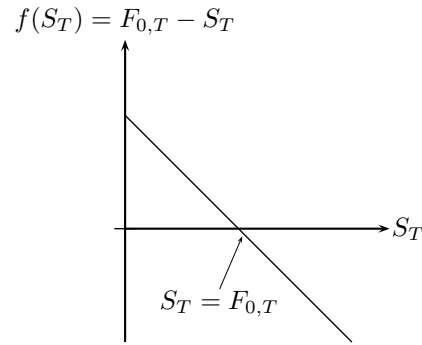


Abbildung 2: Auszahlungsdiagramm für Short Future. Wenn der Preis des Basisinstrumentes über den festgelegten Preis steigt, dann muss man zu T billiger verkaufen als zum Marktpreis.

2.4 Obligationen (Bonds)

2.4.1 Nullkuponanleihen (pure discount bonds; Zero bonds)

Eine Nullkuponanleihe wirft keine regelmässigen Zinsen ab. Die Zinsen sind vielmehr in die Differenz zwischen dem Ausgabepreis der Obligation und dem Verfallpreis eingelagert. Schliesst man Arbitrage aus, so ergibt sich der folgende Preis für eine Nullkuponanleihe:

$$P = \frac{C}{(1+r)^T}$$

$$P = e^{-rT} C$$

wobei C die beim Verfall zu zahlende Summe ist. r ist der jährliche respektive stetige Zinssatz.

Zinsraten für Reine Diskont Bonds

- treasure rates (US-Staatsanleihen; risikofrei)
- Libor rates (London Interbank Offer Rate) - nicht unbedingt risikofrei. Gewöhnlich auf Darlehen in Dollar ausgestellt; wird von vielen Finanzinstituten verwendet.
- Repo rate (repurchase agreement; Zurückkaufübereinkunft). Wenig Risiko. Eine Partei verkauft ein Wertpapier und verpflichtet sich, dieses wieder zurückzukaufen (zu spezifizierter Zeit und Preis; Nationalbanken für Geldmengenpolitik).

2.4.2 Kuponbonds (Coupon bonds)

Es handelt sich um Obligationen, die einen konstanten Zins abwerfen. Um den Barwert zu berechnen ist jede Zinsauszahlung gemäss Marktzins sowie der Geldfluss zum Verfalldatum (= zu Beginn hinterlegter Betrag) zu diskontieren. Dies ergibt

$$B = \sum_{i=1}^n \left(z e^{-r^{(i)} \frac{i}{m}} \right) + C e^{-r^{(n)} \frac{n}{m}} \quad (1)$$

mit dem Geldfluss zum Verfalldatum C und n Anzahl Zinszahlungsflüsse (m = Anzahl Zahlungen pro Jahr, jeweils identische Zahlungszeitpunktabstände). B ist der (theoretische) Preis des

Bonds. Man kann eine mittlere Rendite (yield) r berechnen: man ersetzt $r^{(i)}$ in (1) durch einen einheitlichen Satz r und löst die Gleichung nach r auf (= interner Zinssatz):

$$B = \sum_{i=1}^n \left(z e^{-r \frac{i}{m}} \right) + C e^{-r \frac{n}{m}}$$

Ebenso kann man den mittleren jährlichen Nominalertrag (par yield) berechnen, indem man den Nominalzins in der rechten Seite (1) durch $\frac{c}{m}$ ersetzt, diese Ausdruck mit C identifiziert und dann nach c auflöst:

$$C = \sum_{i=1}^n \left(\frac{c}{m} e^{-r^{(i)} \frac{i}{m}} \right) + C e^{-r^{(n)} \frac{n}{m}}$$

Beispiel 13. Halbjahres Zinsauszahlungen à 6% Jahreszins. Marktzinsen: 5% für erstes Halbjahr; 5.8% für erstes Jahr; 6.4% für 1.5 Jahr und 6.8% für zwei Jahre. $C = 100$.

$$B = 3e^{-0.05 \cdot 0.5} + 3e^{-0.058 \cdot 1} + 3e^{-0.064 \cdot 1.5} + 3e^{-0.068 \cdot 2} + 100e^{-0.068 \cdot 2} = 98.385$$

Um die Rendite zu berechnen wird der Ansatz gemacht:

$$3e^{-r \cdot 0.5} + 3e^{-r \cdot 1} + 3e^{-r \cdot 1.5} + 3e^{-r \cdot 2} + 100e^{-r \cdot 2} = 98.385$$

Diese Gleichung ist mit einem Näherungsverfahren aufzulösen. Es ergibt sich: $r = 6.76\%$.
Die Nominalrendite ergibt sich durch

$$\frac{c}{2} e^{-0.05 \cdot 0.5} + \frac{c}{2} e^{-0.058 \cdot 1} + \frac{c}{2} e^{-0.064 \cdot 1.5} + \frac{c}{2} e^{-0.068 \cdot 2} + 100e^{-0.068 \cdot 2} = 100$$

Es ergibt sich $c = 6.8729$.

2.5 Optionen

Eine (europäische) Option (Vanilla-Option) ist ein Vertrag, der einem Vertragspartner das Recht - aber nicht die Pflicht - gibt, zu einem bestimmten Zeitpunkt (Strike, Ausübungsdatum; maturity; Verfalldatum) und zu einem festgelegten Preis (Strike Preis; Ausübungspreis; exercise price) ein Gut zu kaufen (Call Option) oder zu verkaufen (Put Option). Die Person, die das Recht zu kaufen oder zu verkaufen gewährt, wird „Verkäufer“ oder „writer“ der Option genannt. Der Käufer der Option ist also die Person, die ein Kauf- oder Verkaufsrecht erhält. Sie muss dafür dem Verkäufer ein Entgelt (eine Prämie) zahlen. Amerikanische Optionen können jederzeit bis zum (inklusive) Ausübungsdatum ausgeübt werden, europäische nur am Verfalldatum. Optionen werden an Börsen gehandelt. Es gibt Optionen auf Aktien, Währungen, auf Aktienindices, auf Futures und auf Waren. In Zeitungen werden folgende Angaben gemacht: die Firma; der Aktienpreis bei Börsenschluss; der Strike Preis und das Ausübungsdatum; wenn vor Verfall gehandelt, das Volumen; der Preis für Calls und Puts. Die Verkäufer (writer) müssen einen Margin Account eröffnen. Wenn die Option gekauft wird, muss der Optionspreis voll bezahlt werden (nicht nur vom Margin Account). Die Options Clearing Corporation (OCC) hat bezüglich Optionen die selbe Rolle wie die Clearingstelle für Futures. Wenn die Option ausgeübt wird, kontaktiert der Börsenhändler die OCC. Diese wählt nach Zufallsprinzip einen andern Börsenhändler mit offenen Short Positionen - also Händler, die Personen vertreten, welche Optionen verkauft haben - bezüglich der selben Option aus. Der Börsenhändler - gemäss einer festgelegten Prozedur - wählt einen spezifischen Kunden aus, der eine solche Option geschrieben hat. Man sagt, der Kunde sei „assigned“ (sei zugewiesen worden). Der ausgewählte Kunde muss seinen Verpflichtungen nachkommen. Formal kann eine europäische Long Call-Option (hat Recht gekauft, zu kaufen) als Auszahlungsfunktion

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ f(S_T) = (S_T - k)_+ := \max(S_T - k, 0)$$

definiert werden (k = Strike-Preis; statt k wird oft auch X oder E verwendet). Dabei ist Auszahlung vom Erfolg zu trennen (Erfolg = Auszahlung plus Prämie, wenn Option geschrieben wird, minus Prämie, wenn Option gekauft wird). Eine europäische Long Put-Option (hat Recht gekauft, zu verkaufen) kann als Auszahlungsfunktion

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ f(S_T) = (k - S_T)_+$$

definiert werden. In den Graphiken werden die folgenden Abkürzungen verwendet:

- +c für Long Call (Kauf eines Rechtes auf Kauf des Basiswertes)
- c für Short Call (Verkauf eines Rechtes auf Kauf des Basiswertes)
- +p für Long Put (Kauf eines Rechtes auf Verkauf des Basiswertes)
- p für Short Put (Verkauf eines Rechtes auf Verkauf des Basiswertes)
- +s für Long Stock (Kauf von Aktien)
- s für Short Stock (Verkauf von Aktien; geliehene Aktien verkaufen)

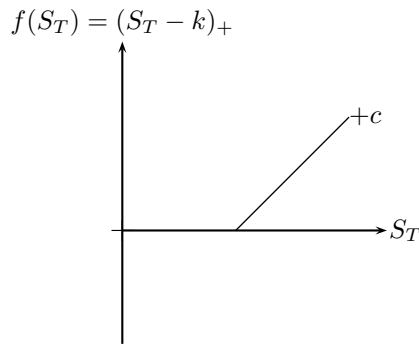


Abbildung 3: Auszahlungsdiagramm für Long Call-Option. Wenn der Preis des Basisinstrumentes über den festgelegten Preis Prämie steigt, kann man zu T billiger kaufen als auf dem Markt.

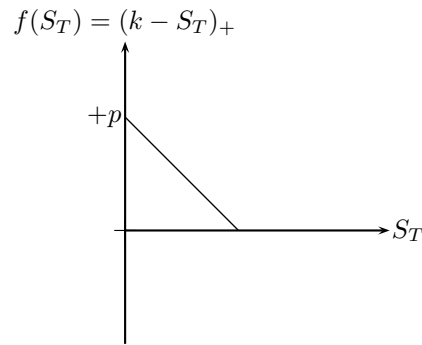


Abbildung 4: Auszahlungsdiagramm für Long Put-Option. Wenn der Preis des Basisinstrumentes unter den festgelegten Preis sinkt, kann man zu T teurer verkaufen als zum Marktpreis.

Brutto (d.h. bis auf die Prämie) kann man bei beiden Optionen nur gewinnen. Die europäische Short Call-Option (hat Recht verkauft, dass der andere Basiswert kauft) kann als Auszahlungsfunktion

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^- \\ f(S_T) = -(S_T - k)_+$$

definiert werden, eine europäische Long Put-Option (hat Recht verkauft, dass der andere Basiswert verkauft) als Auszahlungsfunktion

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^- \\ f(S_T) = -(k - S_T)_+$$

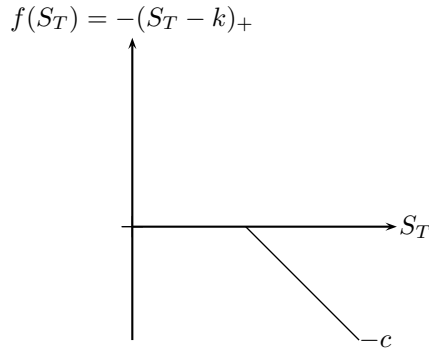


Abbildung 5: Auszahlungsdiagramm für Short Call-Option. Wenn der Preis des Basisinstrumentes über den festgelegten Preis Prämie steigt, muss man zu T für den Basiswert mehr zahlen als auf dem Markt.

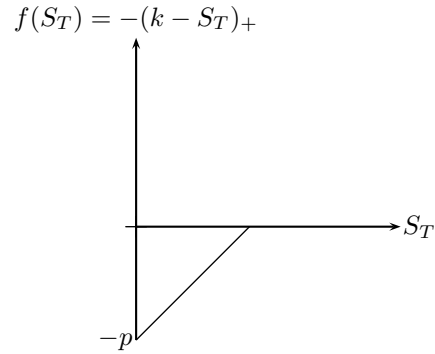


Abbildung 6: Auszahlungsdiagramm für Short Put-Option. Wenn der Preis des Basisinstrumentes unter den festgelegten Preis sinkt, muss man zu T den Basiswert teurer kaufen als zum Marktpreis.

Brutto (d.h. abgesehen von der Prämie) kann man nur verlieren. Erfolgsdiagramme sind für Long Calls definiert als

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(S_T) = (S_T - k)_+ - c$$

mit der Prämie c und der obigen Auszahlungsfunktion $f'(S_T) = (S_T - k)_+$, für Long Puts als

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(S_T) = (k - S_T)_+ - c$$

mit der obigen Auszahlungsfunktion $f'(S_T) = (k - S_T)_+$, Short Calls als

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(S_T) = -(S_T - k)_+ + c$$

mit der obigen Auszahlungsfunktionen $f'(S_T) = -(S_T - k)_+$ und Short Puts als

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(S_T) = -(k - S_T)_+ + c$$

mit der obigen Auszahlungsfunktion $f'(S_T) = -(k - S_T)_+$ (s. folgende Graphiken).

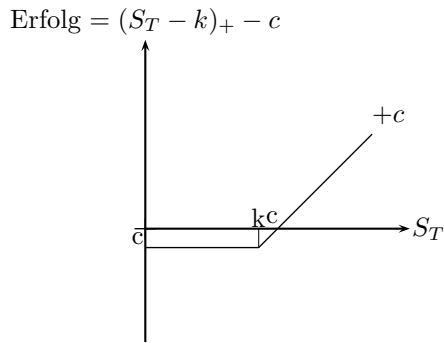


Abbildung 7: Long Call; ist eine Versicherung. Ist $S_T \leq k$ verliert man nur die Prämie c . Ist $k < S_T < k + c$ verliert man nur einen Teil der Prämie. Ist $S_T > k + c$ gewinnt man. Mit steigendem S_T steigt der Gewinn. Es gibt keine Schranke.

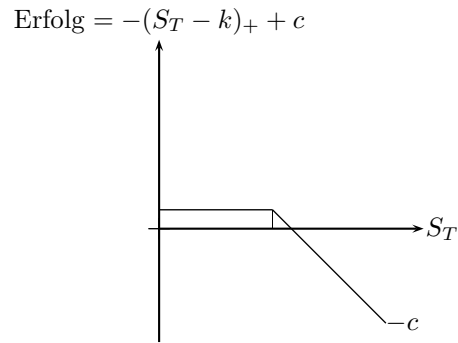


Abbildung 8: Short Call; ist eine heikle Position. Man gewinnt, wenn $S_T \leq k$, die Prämie c , gewinnt bei $k < S_T < k + c$ einen Teil der Prämie und verliert bei $S_T > k + c$. Mit steigendem S_T steigt der Verlust. Es gibt keine Schranke.

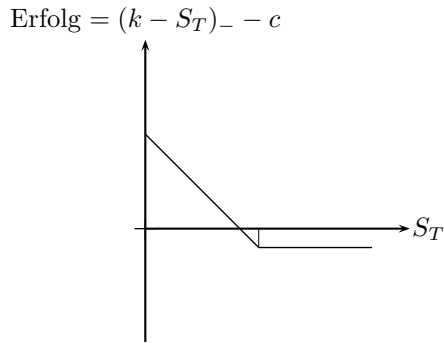


Abbildung 9: Long Put; ist wie eine Versicherung. Man gewinnt, wenn $S_T < k - c$ (mit Schranke: totaler Wertverlust des Basiswertes $(-c)$), man verliert einen Teil der Prämie, wenn $k - c < S_T < k$ und man verliert die Prämie, wenn $S_T \geq k$.

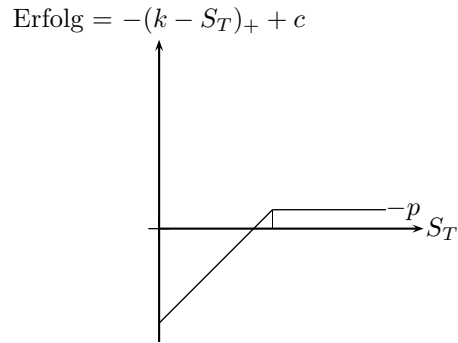


Abbildung 10: Short Put; ist eine heikle Position. Man verliert mit einer tiefen Schranke (Totaler Wertverlust des Basiswertes, $+c$), wenn $S_T < k - c$; man gewinnt einen Teil der Prämie, wenn $k - c < S_T < k$; man gewinnt die Prämie, wenn $S_T \geq k$.

Die Prämie c hängt vom Strike-Preis ab. Je höher der Strike-Preis bei Call-Optionen, desto tiefer die Prämie. Je höher der Strike-Preis bei Put-Optionen, desto höher die Prämie. Der Bezug von Call- und Put-Prämien ist durch die Put-Call-Parität gegeben. Bei gleichem Strike-Preis gilt:
 long put + short put = 0
 long call + short call = 0

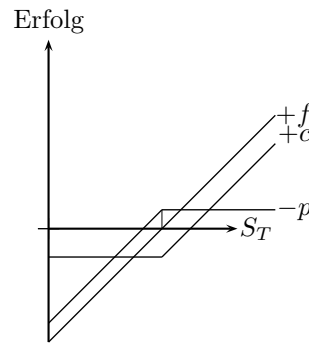


Abbildung 11: Vergleich Long Future ($+f$), Long Call Option ($+c$) und Short Put Option ($-p$).

2.5.1 Hedging mit Optionen

Kombiniert man den Kauf oder Verkauf einer Aktie mit dem Kauf oder dem Verkauf einer Call- oder Put-Option auf diese Aktie, ergeben sich 8 Möglichkeiten:

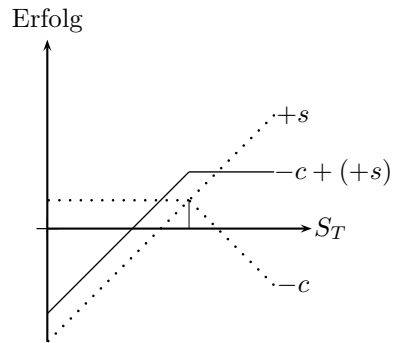


Abbildung 12: Long Stock, Short Call (Kauf von Aktien, Verkauf von Call-Option auf die Aktien; covered call writing; einen gedeckten Call verschreiben); ungünstige Strategie: Obergrenze bei Gewinn, tiefe Untergrenze bei totalem Wertzervall des Basiswertes ($+c$).

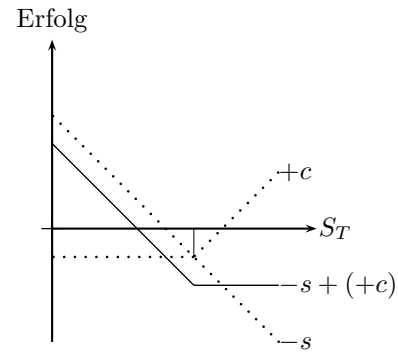


Abbildung 13: Short Stock, Long Call (Verkauf Aktien und Kauf Call-Option); Versicherungsstrategie, die für sinkende Aktienpreise Gewinnmöglichkeiten eröffnet, die durch den totalen Wertverlust des Basiswertes beschränkt sind ($-c$). Günstig bei Erwartung sinkender Aktienpreise

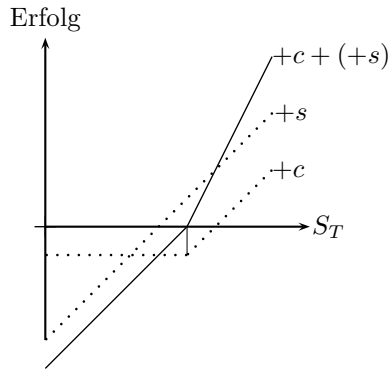


Abbildung 14: Long Stock, Long Call (Kauf von Aktien, Kauf von Call-Option auf die Aktien); ungünstige Strategie: rasch steigender Gewinn nach k und tiefe Untergrenze bei Verlusten - gegeben durch den Totalzerfall des Wertes des Basisinstrumentes $(-c)$.

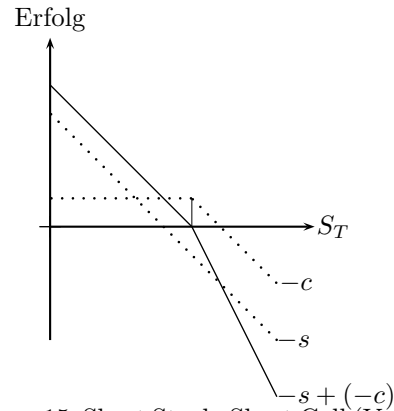


Abbildung 15: Short Stock, Short Call (Verkauf Aktien, Verkauf Call-Option auf die Aktien); Ungünstige Strategie; bei steigenden Aktienpreisen besonders rasch sinkende Verluste. Gewinn bei unter k fallenden Aktienpreisen, Grenze durch totalen Wertzerfall des Underlyings gegeben $(+c)$.

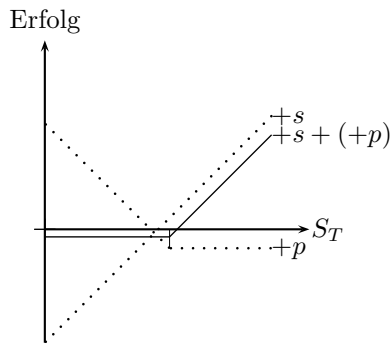


Abbildung 16: Long Stock, Long Put (Kauf von Aktien, Kauf von Put-Option auf die Aktien); Versicherungsstrategie. Bei Steigen der Aktien Gewinnmöglichkeiten (keine Schranke). Höchstens Prämienverlust beim Fallen der Aktienpreise unter k .

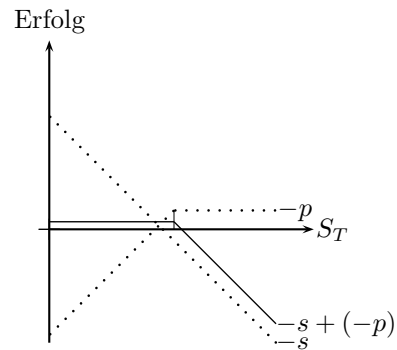


Abbildung 17: Short Stock, Short Put (Verkauf Aktien, Verkauf Put); ungünstige Strategie. Wenn die Aktien unter k fallen, gibt es einen maximalen Gewinn der Prämie. Bei steigenden Aktien Verluste (ohne Schranke).

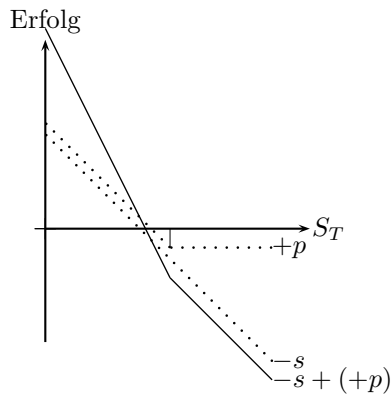


Abbildung 18: Short Stock und Long Put. Keine günstige Strategie. Stark steigende Gewinne bei unter k sinkenden Aktienkursen - beschränkt durch den doppelten möglichen Wertzerfall des Underlyings ($-c$); bei Verlusten keine Schranke.

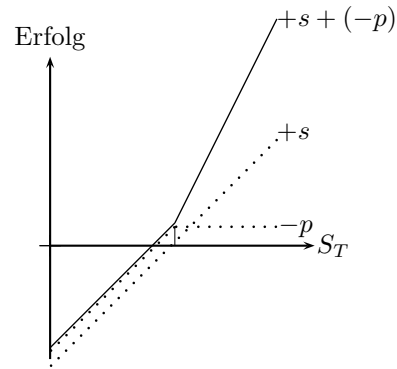


Abbildung 19: Long Stock und Short Put (Kauf Aktien und Short Put auf diese). Ungünstige Strategie. Rasch wachsende Gewinne nach k . Verluste unter k , beschränkt durch totalen Wertverlust des Basisinstrumentes ($+c$).

Unter den acht Möglichkeiten hat es nur zwei wirkliche Hedge-Strategien: Short Stock und Long Call, sowie Long Stock und Long Put.

2.5.2 Hedging mit Spreads

Spread-Strategien beinhalten die Einnahme von zwei oder mehr Positionen des selben Typs (nur Puts oder nur Calls). Bull-Spreads werden verwendet, wenn man von einer steigenden Entwicklung der Märkte ausgeht. Bei Calls und bei Puts werden ein tiefer Strike Long und ein hoher Strike Short mit demselben Verfalldatum verwendet, wobei bei Calls tiefe Strikes teurer sind als hohe, bei Puts hohe Strikes teurer als tiefe. Bei Einrichten ergibt sich deshalb bei Call-Bulls eine negative Differenz der Prämien, bei Puts eine positive:

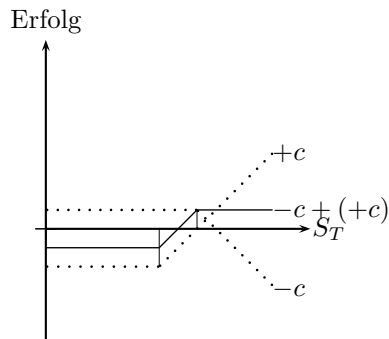


Abbildung 20: Bull-Spread mit Calls: Short Call mit hohem Strike und Long Call mit tiefem Strike. Beim Einrichten zahlt man netto (Differenz der Prämien).

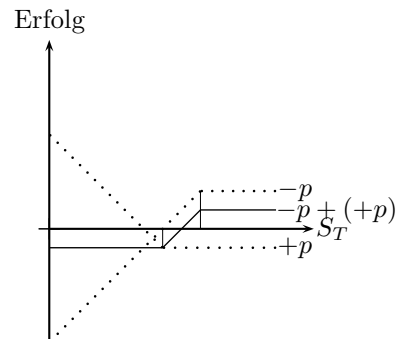


Abbildung 21: Bull-Spread mit Puts: Short Put mit hohem Strike und Long Put mit tiefem Strike. Beim Einrichten erhält man netto die Differenz der Prämien

In den Graphiken führt die Summenlinie manchmal die Call/Put-Linie fort. Dies liegt daran, dass die grössere Prämie doppelt so hoch gewählt wurde wie die kleinere - was nicht unbedingt typisch ist. Bear-Spreads werden verwendet, wenn man von fallenden Märkten ausgeht. Es wird

ein tiefer Short Strike mit einem hohen Long Strike gemischt. Dabei werden wiederum je zwei Calls oder je zwei Puts verwendet.

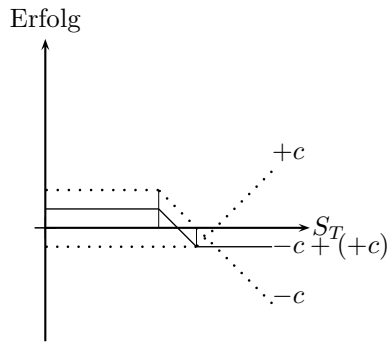


Abbildung 22: Bear-Spread mit Calls: Short Call mit tiefem Strike und Long Call mit hohem Strike. Beim Einrichten erhält man netto (Differenz der Prämien).

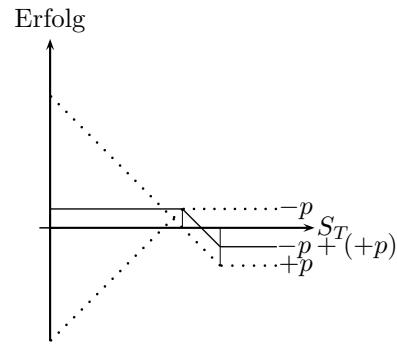


Abbildung 23: Bear-Spread mit Puts: Short Put mit tiefem Strike und Long Put mit höherem Strike. Beim Einrichten bezahlt man netto die Differenz der Prämien

Butterfly-Spreads werden verwendet, wenn man von stabilen Märkten ausgeht. Es werden drei Calls (oder drei Puts) verwendet: jeweils ein Long mit tiefem und einer mit hohem Strike und zwei Short mit identischem Strike dazwischen. Die umgekehrte Strategie (Spiegelung an S_T -Achse) geht davon aus, dass der Markt sich verändert (aber man weiss nicht, in welche Richtung; allerdings geringe Gewinnmöglichkeiten).

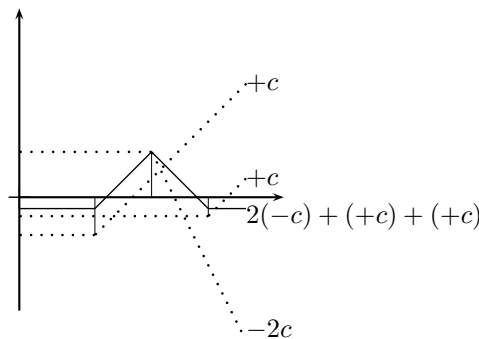


Abbildung 24: Butterfliespread mit Calls, äquidistante Strikes; Gewinnmöglichkeiten bei stabilen Märkten. Verlust von Prämienanteilen bei Marktveränderungen.

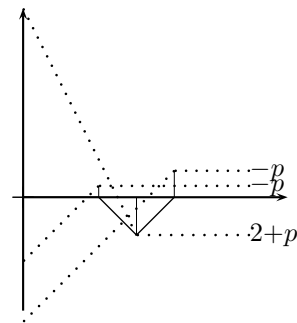


Abbildung 25: Gespiegelter Butterfliespread mit Puts; allerdings bei der vorgenommenen Wahl der Prämien keine Gewinnmöglichkeiten

2.5.3 Hedging mit Kombinationen

Bei Kombinationen mischt man Puts und Calls. Der Straddle verwendet einen Long Call und einen Long Put zum selben Strike. Mässige Verluste bei stabilen Märkten, Gewinn bei genügend starken Marktbewegungen unabhängig von der Richtung.

$$|S_T - k| = (S_T - k)_+ + (k - S_T)_+$$

Der Strangle mischt einen Long Call und einen Long Put ohne identische Strikes (Put Strike tiefer als Call Strike).

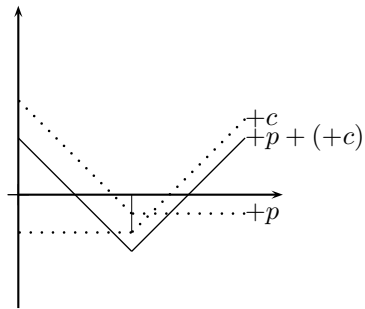


Abbildung 26: Straddle

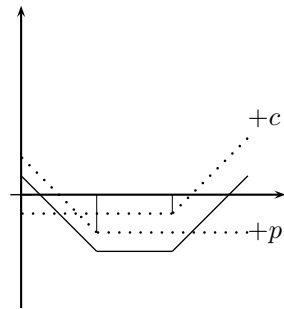


Abbildung 27: Strangle

3 Stochastische Prozesse

Es geht in der Folge um eine Festlegung von Options-Prämien, die dem Kriterium „keine Arbitrage“ genügt.

3.1 Ein-Perioden Modelle

Es geht um die Preisentwicklung von $t = 0$ zu $t = 1$ (zwei Handelszeitpunkte). Es wird dabei folgendes Modell vorausgesetzt: Ein Wahrscheinlichkeitsraum (W-Raum)

$$(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

mit der Ergebnismenge Ω , der σ -Algebra $\mathcal{F}$ von Ereignissen und dem Wahrscheinlichkeitsmass (W-Mass) P . Darauf ist die Zufallsvariable (ZV)

$$B_t$$

definiert (Bank Konto; Bond), $t \in \{0, 1\}$, $B_0 = 1$, $B_1 > 0$ f.s. (fast sicher = fast überall, d.h. bis auf P -Nullmengen). B_1 ist der Wert des Bankkontos, auf das zu $t = 0$ 1 GE deponiert wird. Oft ist $B_1 = e^r$, mit $r \geq 0$, d.h. deterministisch (wird „Numéraire“ genannt, weitere Numéraire sind möglich, sollten aber strikt positiv sein). Ferner sei Preisprozess

$$S_t,$$

$t \in \{0, 1\}$ gegeben, wobei S_0 der aktuelle Aktienpreis repräsentiert und S_1 den künftigen Aktienpreis (in der Regel ist S_i ein Vektor von Aktienpreisen). S_t ist eine Zufallsvariable (Zufallsvektor). Zudem sei die Handelsstrategie

$$H = (H_0, \dots, H_N)$$

gegeben. Gibt die Anzahl der jeweiligen Vermögenswerte im Portfolio (PF) an. N = Anzahl riskanter Anlagen (H_0 = Bonds). Negative Werte H_i entsprechen aufgenommenen Krediten oder Leerverkäufen. Der Wertprozess (Valueprozess)

$$V_t := H_0 B_t + \sum_{i=1}^N H_i S_t^{(i)}$$

mit $t \in \{0, 1\}$ ist der gesamte Wert des PF. Diskontierter Valueprozess:

$$V_t^* = V_t B_t^{-1}$$

Diskontierter Preisprozess:

$$S_t^* = B_t^{-1} S_t$$

Das W-Mass Q auf die vorläufig diskrete Ergebnismenge Ω wird risikoneutral genannt (keine Arbitrage) wenn

$$\begin{aligned} Q(\{\omega\}) &> 0 \text{ für } \omega \in \Omega \\ E_Q(S_1^* - S_0) &= 0 \end{aligned}$$

Q ist von den Markterwartungen unabhängig. Es gilt:

$$E_Q(V_t^*) = V_0$$

Im Beispiel mit einem Bond und einer Aktie:

$$\begin{aligned} E_Q(V_t^*) &= E_Q\left(H_0 B_t B_t^{-1} + H_1 S_t^{(1)} B_t^{-1}\right) \\ &= \begin{cases} E_Q(V_0 B_0) = V_0 \cdot 1 = V_0 & \text{für } t = 0 \\ H_0 + H_1 E\left(S_t^{(1)*}\right) = H_0 + H_1 S_0 = V_0 & \text{für } t = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Contingent claim X (Achtung: hier ist X nicht der Strike): ZV, welche die Auszahlung zum Zeitpunkt T repräsentiert. Bei Call

$$X = (S_T - k)_+$$

Bei Put:

$$X = (k - S_T)_+$$

Bei einer Aktie:

$$S_T.$$

Attainable (marketable) Contingent Claim: Es gibt H (Replikations-PF) mit $V_1 = X$. Es geht darum, den Wert von Finanzinstrumenten zu bestimmen (Finanzinstrumente preisen). Man sucht Aktienportfolio, dessen Preis man kennt und bei Verfall mit dem Wert des Finanzinstrumentes übereinstimmt. Entsprechend müssen die Preise identisch sein (= „Risk-neutral valuation“; eigentlich aber no arbitrage).

3.2 Eigenschaften von Optionspreisen

3.2.1 Notation

S_0 gegenwärtiger Aktienpreis

S_t Aktienpreis zum Zeitpunkt t

X Strikepreis einer Option (auch k)

T Verfallszeitpunkt einer Option r risikofreier Zinssatz

C Wert einer Amerikanischen Call-Option

P Wert einer Amerikanischen Put-Option

c Wert einer Europäischen Call Option zum Zeitpunkt t : $c_t = (S_t - Xe^{-r(T-t)})_+$ also zu $t = 0$:

$c = (S_0 - Xe^{-rT})_+$

p Wert einer Europäischen Put Option zum Zeitpunkt t : $p = (Xe^{-r(T-t)} - S_t)_+$ also zu $t = 0$:

$p = (S_0 - Xe^{-rT})_+$

3.2.2 Preisfaktoren

Folgende Faktoren beeinflussen Optionspreise (= Prämien).

- Bei Optionen auf Aktien der augenblickliche Aktienpreis und der Strike-Preis (so sind Call Optionen teurer, wenn der Aktienpreis steigt und umgekehrt. Put-Optionen sind billiger, wenn der Aktienpreis steigt und umgekehrt).

$$S \uparrow \implies C, c \uparrow; \quad P, p \downarrow$$

$$k \uparrow \implies C, c \downarrow; \quad P, p \uparrow$$

- Die Zeit bis zum Verfall (Amerikanische Put und Call-Optionen sind teurer, wenn die Zeit bis zum Verfall länger ist; Europäische Optionen sind nicht unbedingt teurer).

$$T \uparrow \implies C \uparrow; \quad P \downarrow$$

- Die Volatilität des Aktienpreises σ , definiert durch die Standardabweichung $\sigma\sqrt{\Delta t}$ der Aktienrendite in einer kurzen Zeitlänge Δt . Der Besitzer eines Calls profitiert von Preiszuwachsen, hat aber begrenztes Verlustrisiko. Der Besitzer eines Puts profitiert von Preiszerfall und hat beschränktes Risiko beim Steigen der Aktien. Entsprechend wächst der Wert von Puts und von Calls, wenn die Volatilität steigt.

$$\sigma\sqrt{\Delta t} \uparrow \implies C, c \uparrow; \quad P, p \uparrow$$

- Die risikofreie Zinsrate (wenn diese steigt, tendiert die Wachstumsrate der Aktienpreise ebenfalls zu steigen. Umgekehrt verringert sich der Barwert künftiger Zahlungen. Entsprechend verringert sich der Wert einer Put-Option (beide Effekte wirken in dieselbe Richtung). Für Calls steigert der erste Effekt im Allgemeinen den Preis, während der zweite ihn eher senkt. Der erste dominiert jedoch, so dass der Wert von Calls tendenziell steigt).

$$r \uparrow \implies C, c \nearrow; \quad P, p \downarrow$$

- die erwarteten Dividenden während der Laufzeit einer Option (am Ex-Tag (ex-dividend date), es handelt sich in der Regel um den Tag nach der Hauptversammlung, bei der die Dividende festgelegt worden ist. Anleger, die bis einen Tag vor dem Ex-Tag die Aktie erworben haben, bekommen die Dividende ausgeschüttet. Dies reduziert den Aktienpreis, verringert den Call-Preis und erhöht den Put-Preis.

$$\text{Dividende} \uparrow \implies C, c \downarrow; \quad P, p \uparrow$$

3.2.3 Voraussetzungen

Es werden in der Folge im Allgemeinen die folgenden Voraussetzungen getroffen: keine Transaktionskosten. Alle Handelsgewinne (Verluste) sind dem selben Steuersatz unterworfen; Kreditaufnahme und Kreditvergabe zur risikofreien Zinsrate ist möglich.

3.2.4 Europäische Call-Put-Parität

Für Europäische Calls und Puts gilt (X ist der Strikepreis):

$$c + Xe^{-rT} = p + S_0$$

Beweis

PF A	PF B
$-c$ (short call)	$+p$ (long put)
Xe^{-rT} (Bond)	$+s$ (long Aktie)

In T gilt $((S_T - X)_+)$ Wert von c zu T ; X Wert von Xe^{-rT} zu T ($X = \text{Strike}$); $(X - S_T)_+$ Wert von p zu T ; S_T Wert von S_0 zu T).

$$\text{Wert von PF A} = (S_T - X)_+ + X \stackrel{(1)}{=} \max(S_T, X) \stackrel{(2)}{=} (X - S_T)_+ + S_T = \text{Wert von PF B}$$

denn entweder ist (a) $S_T \leq X$ oder (b) $S_T > X$.

(a) $S_T \leq X$: dann ist $(S_T - X)_+ = 0$ und damit $(S_T - X)_+ + X = X$. Zudem gilt in diesem Fall $\max(S_T, X) = X$. Damit gilt Gleichheit (1)).

In diesem Fall ist aber auch $(X - S_T)_+ = X - S_T$ und damit wird $(X - S_T)_+ + S_T$ zu X . Damit gilt die Gleichung (2).

(b) $S_T > X$: Dann gilt mit $(S_T - X)_+ = S_T - X$ und $(S_T - X)_+ + X = S_T$

Dann ist aber auch $\max(S_T, X) = S_T$, womit die Gleichung (1) gilt. In diesem Fall ist aber auch $(X - S_T)_+ = 0$ und damit wird $(X - S_T)_+ + S_T = S_T$. Damit gilt die Gleichung (2). Wenn beide PF zu T denselben Wert haben, dann haben sie heute denselben Wert (no arbitrage), d.h. (c = Wert des Calls heute; p Wert des Puts heute; S_0 Wert der Aktie heute).

$$c + Xe^{-rT} = p + S_0$$

3.2.5 Schranken (bounds)

Ohne Costs of Carry. Es gilt: $c = \max\{S_T - X, 0\} \implies c \geq 0$

$p = \max\{0, X - S_T\} \implies p \geq 0$. Zudem gilt:

$$\begin{array}{ll} c \leq S_0 & C \leq S_0 \\ p \leq Xe^{-rT} & P \leq X \end{array}$$

denn:

Ist $c > S_0$, dann verkauft man c , kauft S_0 und legt die Differenz $E > 0$ auf die Bank. Auszahlung bei Verfall: Es ist $S_T \leq X$ oder $S_T > X$. Im ersten Fall wird die Option nicht ausgeübt und der Erlös ist S_T . Im zweiten Fall wird die Option ausgeübt und es bleibt X . Damit gilt für die Auszahlung: $\min(S_T, X) + Ee^{rT} > 0$ (also Arbitrage).

Ist $p > Xe^{-rT}$, verkauft man p und legt Xe^{-rT} samt der Differenz $p - Xe^{-rT} > 0$ auf die Bank. In T ist $S_T \leq X$ oder $S_T > X$. Im ersten Fall wird die Option ausgeübt und man kann den Verkaufspreis $X^{-rT}e^{rT} = X$ mit dem angelegten Geld bezahlen. Es bleibt $e^{rT}(p - Xe^{-rT}) + S_T > 0$. Im zweiten Fall wird die Option nicht ausgeübt. Es bleibt $X^{-rT}e^{rT} + e^{rT}(p - Xe^{-rT}) > 0$.

Im zweiten Fall wird die Option ausgeübt und es bleibt X . Damit ergibt sich: $\min(S_T, X)$

Im zweiten Fall mit: $X^{-rT}e^{rT} = X$ ergibt sich $X + e^{rT} - (X - S_T)_+ \geq Ee^{rT} > 0$, wobei $(X - S_T)_+ \leq X$. Also Arbitrage.

$$\begin{aligned} c &\geq S_0 - Xe^{-rT} \\ p &\geq Xe^{-rT} - S_0 \end{aligned}$$

denn:

Aus der Call-Put-Parität folgt: $c = p + S_0 - Xe^{-rT} \geq S_0 - Xe^{-rT}$

Ebenso folgt: $p = c + Xe^{-rT} - S_0 \geq Xe^{-rT} - S_0$

Alternative Überlegung für Call:

PF A	PF B
$-c$ (short call)	$+s$ (long Aktie)
Xe^{-rT} (Bond)	

Zu T ist der Wert von A $\max(S_T, X) + X$, während B den Wert S_T aufweist. Entsprechend ist heute A mehr Wert als B , d.h. $c + Xe^{-rT} > S_0$

Alternative Überlegung für Put:

PF A	PF B
p (put)	Xe^{-rT} (Bond)
s (Aktie)	

Zu T ist der Wert von A $\max(S_T, X) + S_T$ und der Wert von B X . Entsprechend ist A mehr Wert als B , d.h. $p + S_0 \geq Xe^{-rT}$.

Beispiel 14. Wichtiges Zahlen-Beispiel für untere Schranke bei Europäischen Calls (S. 17 oben). Wenn die untere Schranke unterschritten wird, dann gibt es Arbitrage-Möglichkeit, wie das Beispiel zeigt:

$S_0 = 20$; $X = 18$; $r = 0.1$ (p.a.); $T = 1$; Dann ist $S_0 - Xe^{-rT} = 20 - 18e^{-0.1} = 3.7129$

Wert des Calls sei 3, womit $c \geq S_0 - Xe^{-rT}$ verletzt ist.

Wie kann man Arbitrage herausschlagen? Mit folgenden Geldflüsse (cash flows)

zu t_0 : 20 (verkaufe Aktie) - 3 (kaufe Call) = 17 (auf Bank)

zu T : $17e^{0.1} = 18.788$ aus Bank. Aus Option erhält man:

Fall 1) $S_T > X$, dann Call ausüben; Ergebnis $S_T - X + 18.788 - 18$ (Aktie zu 18 kaufen, zurückgeben, und die Differenz zur verzinnten Bankguthaben einstreichen)

Fall 2) $S_T \leq X$, dann wird der Call nicht ausgeübt. Aktie wird zu $S_T < 18$ gekauft und zurückgegeben. Differenz $18.788 - S_T$ einstreichen. Damit gibt es so oder so Gewinn (ohne Investition), also Arbitrage.

Untere Schranken im Dividendenfall:

$$c = S_0 - D - Xe^{-rT} + p \geq S_0 - D - Xe^{-rT}$$

Gilt, da $p \geq 0$.

$$p = D + Xe^{-rT} - S_0 + c \geq D + Xe^{-rT} - S_0$$

Gilt, da $c \geq 0$.

Alternative Überlegung für untere Schranke für europäische Calls mit Dividenden:

PF A	PF B
$-c$ (short call)	$+s$ (long Aktie)
Xe^{-rT} (Bond)	

Cash Flows zum Verfalldatum: $(S_T - X)_+ + X + De^{rT} = \max(S_T, X) + De^{rT} \geq S_T + De^{rT}$.
 Entsprechend gilt zu t_0 ($c = (S_T - X)_+ e^{-rT}$): $c + Xe^{-rT} + D \geq S_0 \implies c > S_0 - Xe^{-rT} - D$.

Call-Put-Parität bei Dividenden

$$c + D + Xe^{-rT} = p + S_0$$

Beweis: Mit den diskontierten Dividenden D :

PF A	PF B
call	Put
$D + Xe^{-rT}$	Aktie

Auszahlung PF A in T :

$$\begin{aligned} \max\{S_T - X, 0\} + X + De^{rT} &= \max\{S_T, X\} + De^{rT} \\ &= \max\{X - S_T, 0\} + S_T + De^{rT} \end{aligned}$$

wobei der letzte Term der Auszahlung des PF B zu T darstellt (für Beweis, s. die obigen Überlegungen: Entweder $S_T \leq X$ oder $S_T > X$).

Amerikanische Optionen ohne Dividenden

$$C \geq c \stackrel{(1)}{=} S_0 - Xe^{-rT} + p \geq S_0 - Xe^{-rT} \stackrel{(2)}{\geq} S_0 - X$$

(1) Put-Call-Parität für Europäische Optionen;

(2) $r \geq 0$.

Der Ausdruck $S_0 - X$ wird „innerer Wert“ genannt.

Damit ist $C \geq S_0 - X$ und wenn, wie üblich, $r > 0$ gilt $C > S_0 - X$.

Es macht also keinen Sinn, C auszuüben (höchstens zu verkaufen), denn es ist besser, X auf die Bank zu legen. Zudem hat man eine Versicherung gegen fallende Aktienpreise. Es ist also besser, einen solchen Call zu verkaufen (als ihn auszuüben) oder die Option zu behalten und die Aktie zu verkaufen. Entsprechend ist C bewertet, wenn c bekannt ist.

Bei Dividenden kann es sich lohnen, den Call vorzeitig auszuüben. Beim Amerikanischen Put kann es sich hingegen lohnen, frühzeitig auszuüben. Es gilt $P \geq p = Xe^{-rT} - S_0 + c \geq Xe^{-rT} - S_0 \geq X - S_0$.

Ist nun z.B. $X = 10$, $S_0 = 0$, dann ist der Gewinn maximal in $t = 0$ und man übt sofort aus. Die Bewertung von P ist im allgemeinen schwierig (in zeitstetigen Modellen). In realistischen Fällen gibt es keine Parität für Amerikanische Optionen.

3.3 Binomialbäume

3.3.1 Ein falscher Weg zur Optionsbewertung

Die Verwendung der Wahrscheinlichkeiten, dass eine Option hinauf- oder hinuntergeht mittels Berechnung des Erwartungswertes ist der falsche Weg, um den Wert von Optionen zu berechnen. Dies zeigt das folgende Beispiel. Sei heute 1 Euro 1.15 Dollar Wert und in einem Monat entweder 0.75 Dollar oder 1.45 Dollar mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Die Zinsrate sei 0. Gegeben sei weiter eine Europäische Call Option mit dem Strike-Preis 1.15. Dann ist der erwartete Gewinn der Option

$$c = 0.5 \cdot (1.45 - 1.15) + 0.5 \cdot 0 = 0.15$$

Dies stellt aber nicht den angemessenen Preis für die Option dar, weil dieser Preis Arbitrage ermöglicht. Man könnte nämlich wie folgt vorgehen:

Kaufe eine Option zu 0.15. Lege x Dollars auf die Bank und nehme einen Kredit von y Euros zu 1.15 auf. Die Bilanz zum Zeitpunkt 0 ist damit

$$-0.15 + x + 1.15y.$$

Im Falle einer Investition von 0 sollte die Bilanz zu t_0 auch 0 sein, d.h.

$$-0.15 + x + 1.15y = 0,$$

woraus

$$x = 0.15 - 1.15y$$

folgt. In T ist folgendes möglich:

- Der Euro hat an Wert zugelegt. Die Option wird ausgeübt (Gewinn: $1.45 - 1.15 = 0.3$). Der Investor kauft y Euros zu 1.45 und zahlt den Kredit zurück. Dies ergibt die Bilanz:

$$\begin{aligned} 0.3 - 1.45y + x &= 0.3 - 1.45y + 0.15 - 1.15y \\ &= 0.15 - 0.3y \end{aligned}$$

- Der Euro hat an Wert verloren. Die Option ist wertlos. Der Investor kauft y Euro zu 0.75 und zahlt den Kredit zurück. Die Bilanz ist:

$$\begin{aligned} -0.75y + x &= -0.75y + 1.15y - 0.15 \\ &= 0.4y - 0.15. \end{aligned}$$

Es gibt Werte von y , so dass die Schlussbilanz so oder so positiv ist. Für diese y gilt:

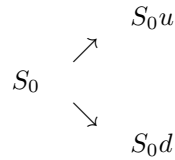
$$\begin{aligned} 0.4y - 0.15 &> 0 \\ 0.15 - 0.3y &> 0 \end{aligned}$$

Die Lösung ist $0.375 < y < 0.5$. Es gibt also positiven Gewinn, obwohl nichts investiert wurde. Entsprechend geht es in der Folge darum, eine Bewertungsmethode zu finden, welche Arbitrage ausschliesst (s. folgendes Beispiel).

3.3.2 Risikofreies Portfolio (wichtiges Beispiel)

Im Beispiel geht es darum, einen angemessenen Preis (Wert; Auszahlung) für eine Call-Option zu finden. Angemessenheit schliesst Arbitrage aus. Sei eine Call-Option $(S_T - X)_+$ gegeben mit $X = 21 = k$; $T = 0.25$; $r_c = 0.12$; $S_0 = 20$; Es gibt nur zwei Varianten: Der Aktienpreis geht

hinauf ($S_T = S_0 \cdot u = 22$) oder der Aktienpreis geht hinunter ($S_T = S_0 \cdot d = 18$). Der Wert der Option bei $S_T = 22$ ist $22 - 21 = 1$, der Wert bei $S_T = 18$ ist $(18 - 21)_+ = 0$.



Sei ein PF gegeben mit einer Anzahl Δ von Long Aktien und einer Short Call Option. Damit PF risikofrei ist, muss gelten (der Schreiber des Calls muss bei Preis der Aktie von 22 zu 21 verkaufen, verliert also 1 GE):

$$\Delta \cdot 22 - 1 = \Delta \cdot 18 - 0$$

Nach Δ aufgelöst ergibt sich:

$$\Delta = \frac{1}{4}.$$

Mit diesem Δ ist die Auszahlung in T konstant, unabhängig davon, ob der Aktienpreis hinauf oder hinunter ging:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \cdot 18 &= 4.5 \\ \frac{1}{4} \cdot 22 - 1 &= 4.5 \end{aligned}$$

Entsprechend verhält sich das PF wie ein Bond, muss also denselben Zinssatz haben. Der Barwert des PF ist damit

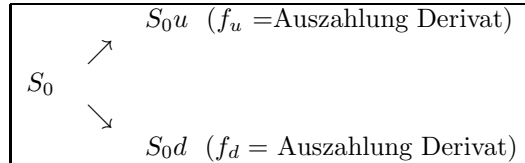
$$4.5 \cdot e^{-0.12 \cdot 0.25} = 4.367$$

Gefragt ist nun der Preis f der Call-Option zu t_0 . Der Wert der Aktien im Augenblick ist $\frac{1}{4} \cdot 20 = 5$. Um ein risikofreies PF zu erhalten, das einen Barwert von 4.367 aufweist, müsste ich also ohne Prämie für die Call-Option auf 0.633 verzichten. Diesen Betrag wird man beim Verkauf der Call-Option verlangen, damit kein Verlust im Wert des PF zu t_0 entsteht:

$$\begin{aligned} \Delta \cdot 20 - f &= 4.367 \\ \frac{1}{4} \cdot 20 - f &= 4.367 \\ f &= 0.633 \end{aligned}$$

3.3.3 Bewertung von Calls auf Binomialbäumen

Das vorangegangene Beispiel wird nun allgemein behandelt. Gegeben ist der Aktienpreis S_0 und zwei mögliche Ausgänge S_0u und S_0d (u und d sind Faktoren, $u > 1$, $0 < d < 1$). Gesucht ist der Derivatpreis f . S_T ist eine ZV mit den Werten S_0u und S_0d .



PF mit Δ Aktien Long und einer Call Option Short (Europäisches Derivat). Es geht darum, aus zwei risikohaften Papieren (mit identischer Risikoquelle) etwas Sicheres zu machen. Es muss also gelten:

$$\begin{aligned} \Delta S_0u - f_u &= \Delta S_0d - f_d \implies \\ \Delta S_0u - \Delta S_0d &= f_u - f_d \implies \\ \Delta &= \frac{f_u - f_d}{S_0u - S_0d} \end{aligned}$$

(Δ = diskrete Ableitung; Verhältnis der Auszahlungsdifferenz bei Up und Down zur Wertdifferenz des Underlyings zu T bei Up und Down). Mit diesem Δ wird das PF risikofrei (wie ein Bond; ermöglicht also keine Arbitrage), d. h. heisst der Wert der beiden möglichen Ausgänge ist identisch ($\Delta S_0 u - f_u = \Delta S_0 d - f_d$). Es gilt also für den Barwert des PF und den Preis f des Calls:

$$(\Delta S_0 u - f_u) e^{-rT} = \Delta S_0 - f \implies$$

$$\begin{aligned} f &= \Delta S_0 - (\Delta S_0 u - f_u) e^{-rT} \\ &= \frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d} S_0 - \left(\frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d} S_0 u - f_u \right) e^{-rT} \\ &= \frac{f_u - f_d}{u - d} - \left(\frac{f_u - f_d}{u - d} u - f_u \right) e^{-rT} \\ &= e^{-rT} \left(\frac{e^{rT} f_u - e^{rT} f_d}{u - d} - \frac{f_u - f_d}{u - d} u + f_u \right) \\ &= e^{-rT} \left(\frac{e^{rT} f_u - e^{rT} f_d - f_u u + f_d u + f_u u - f_u d}{u - d} \right) \\ &= e^{-rT} \left(\frac{e^{rT} f_u - e^{rT} f_d + f_d u - f_u d}{u - d} \right) \\ &= e^{-rT} \left(\frac{(e^{rT} - d) f_u + (u - e^{rT}) f_d}{u - d} \right) \end{aligned}$$

Mit

$$q := \frac{e^{rT} - d}{u - d}$$

gilt

$$\begin{aligned} 1 - q &= 1 - \frac{e^{rT} - d}{u - d} \\ &= \frac{u - d - e^{rT} + d}{u - d} \\ &= \frac{u - e^{rT}}{u - d}, \end{aligned}$$

womit

$$\begin{aligned} f &= e^{-rT} \left(\frac{(e^{rT} - d) f_u + (u - e^{rT}) f_d}{u - d} \right) \\ &= e^{-rT} (q f_u + (1 - q) f_d), \end{aligned}$$

wobei $q \in [0, 1]$, denn sonst würde es Arbitrage-Möglichkeiten geben. Denn wenn $q > 1$, dann $\frac{e^{rT} - d}{u - d} > 1$, und damit $e^{rT} > u$ (d.h. der Bond ist immer mehr Wert als die Aktie; also ist $q \leq 1$). Wenn $q < 0$ wäre, gälte $\frac{e^{rT} - d}{u - d} < 0$, also $e^{rT} < d$ (die Aktie ist immer mehr Wert als der Bond; also ist $q \geq 0$). Damit ist q eine Wahrscheinlichkeit. Wir können mit q eine W-Mass Q definieren

und z.B. Erwartungswerte rechnen:

$$\begin{aligned}
 E_Q(S_T) &= qS_0u + (1 - q)S_0d \\
 &= S_0 \left(\frac{e^{rT} - d}{u - d}u + \frac{u - e^{rT}}{u - d}d \right) \\
 &= S_0 \left(\frac{e^{rT}u - ud + ud - e^{rT}d}{u - d} \right) \\
 &= S_0 \left(\frac{e^{rT}u - e^{rT}d}{u - d} \right) \\
 &= S_0 \left(\frac{e^{rT}(u - d)}{u - d} \right) \\
 &= S_0e^{rT}
 \end{aligned}$$

Damit ist der Erwartungswert des PF mit dem Endwert der Aktie identisch, die mit dem risikofreien Zinssatz aufgezinst wird, d.h. der implizite Zins des PF ist mit dem risikofreien Zins identisch. Risikofrei hat dabei nichts mit „Risikoaversion“ zu tun, sondern folgt aus dem Keine-Arbitrage-Argument.

3.3.4 Risikoneutrale Bewertung

Wenn P das W-Mass ist mit $P(S_T = S_0u)$ und $P(S_T = S_0d)$, den realen Wahrscheinlichkeiten, dass der Aktienwert S_0u oder S_0d wird, so hat dieses W-Mass nichts mit dem obigen W-Mass Q zu tun. Q ist das „risikoneutrale Mass“. Man kann bei der Optionsbewertung annehmen, dass die Investoren risikoneutral sind (keine Kompensation für Risiken verlangen). Der erwartete Gewinn entspricht der risikofreien Zinssrate. Damit ist der Wert einer Option der erwartete Gewinn in einer risikoneutralen Welt, der mit der risikofreien Zinssrate abgezinst wird. Die entsprechend berechneten Preise stimmen auch in der realen Welt. Man erhält als Preis:

$$f = e^{-rT} (qf_u + (1 - q)f_d)$$

Beispiel 15. Sei q die Wahrscheinlichkeit einer Aufwärtsbewegung (in der risikoneutralen Welt) (Ausgänge zu t_1 : 22 und 18; $S_0 = 20$; $r = 0.12$; $\Delta t = 0.25$; $X = 21$). Dann gilt für

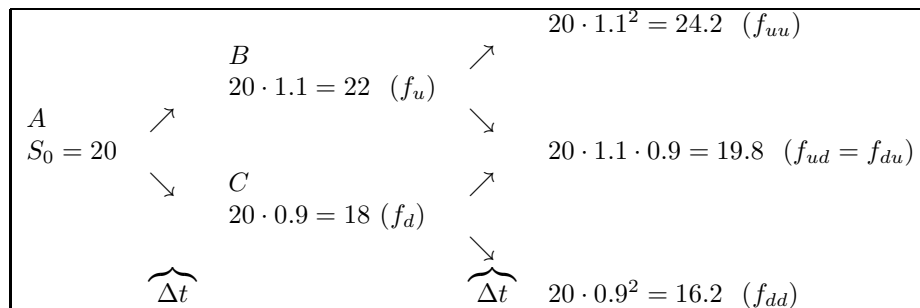
$$22q + 18(1 - q) = 20e^{0.12 \cdot 0.25}$$

$q = 0.65227$, was im Beispiel dem erwarteten Wert der Option entspricht (denn $0.65227 \cdot 1 + (1 - 0.65227) \cdot 0 = 0.65227$). Mit der risikofreien Zinssrate diskontiert ergibt sich:

$$0.65227e^{-0.12 \cdot 0.25} = 0.63299$$

3.3.5 Wert einer Call-Option in Zweiperioden Bäumen

Beispiel 16. $u = 1.1$; $d = 0.9$; $\Delta t = 0.25$; $r = 0.12$; $X = 21$; $S_0 = 20$ (Call-Option)



$$q = \frac{e^{0.12 \cdot 0.25} - 0.9}{1.1 - 0.9} = 0.65227267$$

$$(S_T - 21)_+ = \begin{cases} 3.2 & \text{bei } f_{uu} \\ 0 & \text{bei } f_{ud} = f_{du} \\ 0 & \text{bei } f_{dd} \end{cases}$$

Wert in B:

$$e^{0.12 \cdot 0.25} (q \cdot 3.2 + (1 - q) \cdot 0) = e^{0.12 \cdot 0.25} (0.65227267 \cdot 3.2 + (1 - 0.65227267) \cdot 0) \\ = 2.1508$$

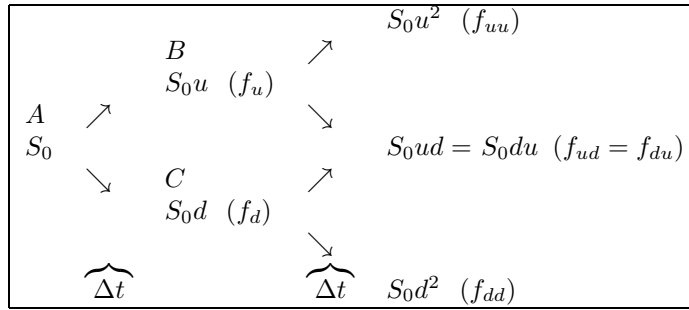
Wert in C :

$$e^{0.12 \cdot 0.25} (q \cdot 0 + (1 - q) \cdot 0) = 0$$

Wert in A = c = f:

$$e^{0.12 \cdot 0.25} (q \cdot 3.2 + (1 - q) \cdot 0) = e^{0.12 \cdot 0.25} (0.65227267 \cdot 2.1508 + (1 - 0.65227267) \cdot 0) \\ = 1.4456$$

Allgemein: Sei $f = c$ gesucht (Wert einer Call Option) und der folgende Binomialbaum gegeben:



Wenn u und d fest sind, ist q fest.

$$f_u = e^{-r \cdot \Delta t} (q f_{uu} + (1 - q) f_{ud}) \\ f_d = e^{-r \cdot \Delta t} (q f_{du} + (1 - q) f_{dd})$$

$$f = e^{-r \cdot \Delta t} (q f_u + (1 - q) f_d) \\ = e^{-r \cdot \Delta t} (q e^{-r \cdot \Delta t} (q f_{uu} + (1 - q) f_{ud}) + (1 - q) e^{-r \cdot \Delta t} (q f_{du} + (1 - q) f_{dd})) \\ = e^{-2r \cdot \Delta t} (q (q f_{uu} + (1 - q) f_{ud}) + (1 - q) (q f_{du} + (1 - q) f_{dd})) \\ = e^{-2r \cdot \Delta t} (q^2 f_{uu} + q (1 - q) f_{ud} + q (1 - q) f_{du} + (1 - q)^2 f_{dd}) \\ = e^{-2r \cdot \Delta t} (q^2 f_{uu} + 2q (1 - q) f_{ud} + (1 - q)^2 f_{dd})$$

3.3.6 Wert einer Put-Option in Zweiperioden-Bäumen

$u = 1.2; d = 0.8; X = 52; r = 0.05; \Delta t = 1; S_0 = 50$

					$(X - S_T)_+$
A 50		B 60 (f_u)	$\nearrow$ $\searrow$	72 48	$f_{uu} = 0$ $f_{ud} = f_{du} = 4$
		C 40 (f_d)	$\nearrow$ $\searrow$	48 32	$f_{dd} = 20$
	$\underbrace{\hspace{1.5cm}}$ Δt		$\underbrace{\hspace{1.5cm}}$ Δt		

$$q = \frac{e^{0.05 \cdot 1} - 0.8}{1.2 - 0.8} = 0.62818$$

$$1 - q = 1 - 0.62818 = 0.37182$$

Wert in B:

$$e^{0.05 \cdot 1} (0 \cdot 0.62818 + 4 \cdot 0.37182) = 1.5635$$

Wert in C:

$$e^{0.05 \cdot 1} (4 \cdot 0.62818 + 20 \cdot 0.37182) = 10.459$$

Wert in A:

$$e^{0.05 \cdot 1} (1.5635 \cdot 0.62818 + 10.459 \cdot 0.37182) = 5.1208$$

Amerikanischer Put kann schon vorher ausgeübt werden: Geht der Wert des Underlyings nach C, so gilt dort $f_d = \max\{(52 - 40), 10.459\} = 12$. Entsprechend ist

$$f = e^{0.05 \cdot 1} (1.5635 \cdot 0.62818 + 12 \cdot 0.37182) = 5.7231$$

3.3.7 Delta-Hedging

Delta (s. Seite 29) ist das Verhältnis der Auszahlungsdifferenz $f_u - f_d$ zur Preisdifferenz der darunterliegenden Aktien $S_{T_u} - S_{T_d}$:

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_{T_u} - S_{T_d}}$$

Ist z.B. $S_{T_u} = 22$, $S_{T_d} = 18$ und $f_u = 1$ und $f_d = 0$ (Strike der Call-Option ist 21). Dann gilt

$$\Delta = \frac{1 - 0}{22 - 18} = \frac{1}{4}$$

Ein Delta-Hedging verlangt, dass man $\Delta \cdot S$ kauft (S = Wert der Aktien). Im stetigen Fall ist Δ definiert als

$$\Delta = \frac{\partial f}{\partial S},$$

also als Veränderung des Wertes des Derivats in Abhängigkeit von der Veränderung des Wertes des Underlyings.

Beispiel 17. Aktienpreis = 100; $\Delta = 0.6$; Preis der Option: 10; Ein Investor verkauft 20 Call-Optionen. Um sich abzusichern, sind Aktien im Wert von $0.6 \cdot 2000 = 1200$ zu kaufen. Die Gewinne oder Verluste der Position in Optionen wird durch die Verluste oder Gewinne in der Aktienposition wettgemacht. Geht der Aktienpreis z.B. um 1 Franken hinauf, so gewinnt man auf die Aktien 12 GE. Der Optionspreis geht um 0.6 hinauf, woraus ein Verlust auf die Optionen von $0.6 \cdot 20 = 12$ resultiert.

Bemerkung 18. Durch Δ wird die Wertveränderung des Calls linear approximiert. Vor dem Hintergrund, dass es sich beim Delta - zumindest im zeitstetigen Fall genau / im Binomialmodell diskretisiert - um die partielle Ableitung der Bewertungsformel bezüglich dem Basisinstrument handelt, ist das Δ als partielle Ableitung zu interpretieren: wenn wir $y = f(x)$ und $f'(x)$ kennen, können wir lokal die linear approximative Aussage machen, wie sich y verändern wird, wenn sich x von x_0 ganz wenig weg bewegt. Der Aktienpreis S_0 kann sich natürlich nur über die Zeit von S_0 weg bewegen, was dann potentiell zu Veränderungen in praktisch allen Grössen führt (inklusive Delta, für die folgenden Perioden). Falls man diese zeitliche Komponente ganz genau verstehen willst, muss man die Seite 26 des Skripts (Molchanov) ganz genau durcharbeiten, wobei zu beachten ist, dass φ dem jeweiligen Δ entspricht. Dort ist mathematisch alles ganz genau begründet (s. in diesem Skript Binomialdarstellungssatz, S. 39).

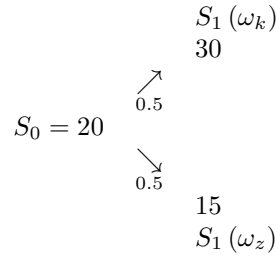
Bemerkung 19. Da Δ sich verändert, bleiben die Positionen eines Investors nur während kurzer Zeit abgesichert. Entsprechend muss man die Absicherung immer anpassen - bekannt als Rebalancierung (rebalancing).

3.4 Stochastische Prozesse auf Binomialbäumen

Für die Beschreibung von stochastischen Prozessen auf Binomialbäumen werden die folgenden Hauptkonzepte verwendet:

- S : (Familie von ZV, Werte von Aktien), hier diskrete Zeit, d.h. S ist eine Folge von ZV.
- P, Q : W-Masse. p = Wahrscheinlichkeit, dass Aktienpreis hinaufgeht in der realen Welt. q = Wahrscheinlichkeit, dass Aktienpreis hinauf geht in der risikoneutralen Welt.
- $\mathcal{F}_i$: Folge von σ -Algebren (Filtration; filtrierter W-Raum $= (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_i)_i^n, P)$ mit $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_{i+1} \subset \mathcal{F}$): jeweilige Geschichte des Prozesses bis zum Zeitpunkt t_i .
- X : (contingent Claim, hier also nicht Strike, sondern z.B. Wert einer Call-Option), $\mathcal{F}_T$ -messbare ZV (angenommener Wert hängt von Knoten bis T ab; wenn man weiss, welche Knoten durchlaufen wurden, kann man Wert von X berechnen).
- $E_Q(\cdot | \mathcal{F}_i)$: Bedingte Erwartungswerte; sind ZV; $E_Q(X | \mathcal{F}_i)$ für $i = 0, \dots$ ist selber eine stochastischer Prozess.
- $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \dots)$: Vorhersagbare Prozesse (previsible): Folge von ZV. Der Prozess zum Zeitpunkt i hängt nur von letzten vorangegangenen Knoten des Baums ab. Bei uns wird es um Handelsstrategien gehen, die nur vom vorausgegangenen $\mathcal{F}_{i-1}$ abhängen. Formal: φ_i ist $\mathcal{F}_i$ -messbar.
- Ein Prozess S ist ein Martingal bezüglich eines W-Masses Q und einer Filtration $\mathcal{F}_i$ genau dann, wenn
 - (i) $E|S_j| < \infty$ für alle j und
 - (ii) $E_Q(S_j | \mathcal{F}_i) = S_i$ für alle $i \leq j$.
 Das bedeutet, dass S keinen Drift unter Q hat. Q wird Martingal-Mass für S genannt und S wird Q -Martingal genannt.

Beispiel 20. Folge ist nicht P -Martingal; Folge ist Q -Martingal. Im folgenden Baum



ist $E_P(S_1|\mathcal{F}_0) = 30 \cdot 0.5 + 15 \cdot 0.5 = 22.5 \neq 20 = S_0$, also ist $S = (S_0, S_1)$ kein P -Martingal.
Für $E_Q(S_1|\mathcal{F}_0) = 30q + 15(1-q) = 20 = S_0 \quad (\implies q = \frac{1}{3})$ ergibt sich, dass $S = (S_0, S_1)$ ein Q -Martingal ist.

Bemerkung 21. Für Claims X (z.B. Calls) gilt: $M_i := E(X|\mathcal{F}_i)$ ist ein Martingal, denn

$$\begin{aligned}
 E(M_{i+1}|\mathcal{F}_i) &= E(E(X|\mathcal{F}_{i+1})|\mathcal{F}_i) \\
 &= E(X|\mathcal{F}_i) \\
 &= M_i
 \end{aligned}$$

3.4.1 Begriffserklärung filtrierter W-Raum an einen Beispiel

Definition 22. Eine Menge $\mathcal{A}$ von Mengen $A, A \subset \Omega$, ist eine σ -Algebra auf Ω genau dann, wenn

- (i) mit $A \in \mathcal{A}$ gilt $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- (ii) für jede Folge $(A_i)_{i=1}^\infty$, $A_i \in \mathcal{A}$, gilt $\bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{A}$.

Definition 23. Eine Unter- σ -Algebra $\mathcal{G}$ einer σ -Algebra $\mathcal{A}$ auf Ω ist eine σ -Algebra auf Ω für die gilt $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$.

Definition 24. Sei f ein Abbildung von Ω nach Ω' und $f^{-1}(A') = \{\omega | f(\omega) \in A'\}$. Ist $\{A | f^{-1}(A') = A \text{ und } A' \in \mathcal{A}' \text{ und } \mathcal{A}' \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra auf } \Omega'\}$ eine σ -Algebra $\mathcal{A}$ auf Ω , so wird $\mathcal{A}$ die durch f induzierte σ -Algebra genannt.

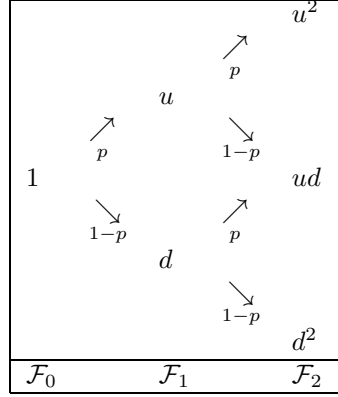
Es wird zweimal eine Münze geworfen mit den möglichen Ausgängen k und z . Entsprechend ist

$$\Omega = \{(k, k), (k, z), (z, k), (z, z)\}$$

mit $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ (ω_1 = Resultat erster Wurf; ω_2 = Resultat zweiter Wurf).
 $\eta_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ seien ZV, so dass

$$\begin{aligned}
 \eta_2((k, k)) &= u^2 \\
 \eta_2((k, z)) &= \eta_2((z, k)) = ud \\
 \eta_2((z, z)) &= d^2 \\
 \eta_1((k)) &= u \\
 \eta_1((z)) &= d
 \end{aligned}$$

Am Baum:



Man betrachtet den filtrierten W-Raum

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_i)_{i=0}^2, P \right)$$

mit $p = P(\{k\}) := P(\{\text{Es wird Kopf geworfen}\})$ und der aufsteigenden Familie von σ -Algebren $(\mathcal{F})_{i=0}^2$, welche die vorliegende Information zum Zeitpunkt $t \in \{0, 1, 2\}$ beinhalten.

- $\mathcal{F}_0 = \{\{\}, \Omega\}$

$P(\{\}) = 0; P(\Omega) = 1$; (wir kennen die möglichen Realisierungen);

- $\mathcal{F}_1 = \{\{\}, \Omega, A_k, A_z\}$

Mit $A_k = \{(k, k), (k, z)\}$ (=die Menge aller Wurffolgen, die mit Kopf beginnen) und

$A_z = \{(z, z), (z, k)\}$ (=die Menge aller Wurffolgen, die mit Zahl beginnen) gilt

$$P(A_k) = p^2 + p(1-p) = p^2 + p - p^2 = p$$

$$P(A_z) = (1-p)^2 + (1-p)p = 1-p$$

Man beachte: $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1$.

- $\mathcal{F}_2 = \text{Potenzmenge von } \Omega$.

Mit $A_{kk} = \{(k, k)\}; A_{zk} = \{(z, k)\}; A_{kz} = \{(k, z)\}; A_{zz} = \{(z, z)\}$ gilt: $P(A_{kk}) = p^2; P(A_{kz} \cup A_{zk}) = p(1-p); P(A_{zz}) = (1-p)^2$

$\mathcal{F}_2$ ist nicht die durch η_2 induzierte σ -Algebra auf Ω , da $\eta_2((k, z)) = \eta_2((z, k)) = ud$, so dass $\eta_2^{-1}(\{ud\}) = \{(k, z), (z, k)\}$. Die durch η_2 induzierte σ -Algebra ist

$$\{\{\}, \{(k, k)\}, \{(k, z), (z, k)\}, \{(k, k), (z, z)\}, \{(z, z)\}, \{(k, k), (k, z), (z, k)\}, \{(z, z), (k, z), (z, k)\}, \Omega\} \neq \mathcal{F}_2.$$

$\mathcal{F}_0$ sagt aus, was man am Anfang weiss, nämlich nur, dass ein Element von Ω angenommen wird. $\mathcal{F}_1$ sagt aus, was man zur Zeit 1 weiss (man weiss, dass sich k oder z ereignet hat. Entsprechend sind dann nur noch Elemente aus A_k oder dann aus A_z möglich). $\mathcal{F}_2$ sagt aus, was man zur Zeit 2 weiss (man weiss, was sich ereignet hat. Es handelt sich um ein Element von $\mathcal{F}_2$)

3.4.2 Begriffserklärung Bedingte Erwartungswerte auf Binomialbaum an Beispiel

Definition 25. X sei eine einmal Lebesgue-integrierbare ZV, die auf den W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ definiert ist. Der bedingte Erwartungswert einer ZV X bezüglich der Menge $A \in \mathcal{A}$ ist definiert als

$$E(X|A) = \frac{E(1_A \cdot X)}{P(A)} = \frac{\int_A X dP}{P(A)}$$

Im diskreten Fall erfüllt X :

$$E(X|A) = \frac{\sum_{x \in X(A)} x \cdot P(X = x)}{P(A)}$$

mit $X(A) = \{x | x = X(\omega) \text{ für } \omega \in A\}$.

Definition 26. X sei eine einmal lebesgue-integrierbare ZV, die auf den W -Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ definiert ist. Y sei eine $\mathcal{G}$ -messbare Funktion. Y ist ein bedingter Erwartungswert von X genau dann, wenn Y auf einer Unter- σ -Algebra $\mathcal{G}$ der σ -Algebra $\mathcal{A}$ im folgenden Sinne mit X übereinstimmt:

$$\int_G Y dP = \int_G X dP$$

für alle $G \in \mathcal{G}$. Abkürzung für $Y : E(X|\mathcal{G})$. Y ist eine ZV.

Im diskreten Fall:

$$\sum_{y \in G} y \cdot P(Y = y) = \sum_{x \in G} x \cdot P(X = x)$$

Beim Vorliegen einer Folge $(\mathcal{F}_i)_{i=0}^T$ von σ -Unter- σ -Algebren einer σ -Algebra $\mathcal{F}_T$ ($T \in \mathbb{N}^*$), repräsentieren die verschiedenen Folgenglieder $\mathcal{F}_i$ die einzelnen Schritte auf dem Binomialbaum, wobei $E(X|\mathcal{F}_T) = X$ und $E(X|\mathcal{F}_0) = E(X)$, denn $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

Entsprechend gilt:

$$E(\eta_2|\mathcal{F}_2) = \eta_2$$

wobei der Graph von η_2

$$\{(k, k, u^2), (k, z, ud), (z, k, ud), (z, z, d^2)\}$$

und der Graph der W -Funktion des Bildmasses

$$\{(u^2, 0.25), (ud, 0.5), (d^2, 0.25)\}$$

ist. Der Graph von

$$Y := E(\eta_2|\mathcal{F}_1)$$

mit $\mathcal{F}_1 = \{\{\}, \Omega, A_k, A_z\}$ ist

$$\{(k, k, pu^2 + ud(1-p)), (k, z, pu^2 + ud(1-p)), (z, z, udp + d^2(1-p)), (z, k, udp + d^2(1-p))\}$$

Diese ZV induziert $\mathcal{F}_1$, d.h. für $Y^{-1}(A)$ mit

$$A \subset \{pu^2 + ud(1-p), udp + d^2(1-p)\}$$

gilt $Y^{-1}(A) \in \mathcal{F}_1$.

Die Werte der ZV $Y = E(\eta_2|\mathcal{F}_1)$ sind die bedingten Erwartungswerte $E(\eta_2|A_k)$ und $E(\eta_2|A_z)$ von η_2 bezüglich der Mengen A_k und A_z , denn mit $P(A_k) = p$ und $P(A_z) = 1-p$ gilt

$$E(\eta_2|A_k) = \frac{\sum_{x \in A_k} x \cdot P(X = x)}{P(A_k)} = \frac{(pu^2 + ud(1-p))p}{p}$$

$$E(\eta_2|A_z) = \frac{\sum_{x \in A_z} x \cdot P(X = x)}{P(A_z)} = \frac{(udp + d^2(1-p))(1-p)}{1-p}$$

Der Graph der W -Funktion des Bildmasses von $E(\eta_2|A_z)$ ist:

$$\{(pu^2 + ud(1-p), p), (udp + d^2(1-p), 1-p)\}$$

und es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{A_k} Y dP &= [pu^2 + ud(1-p)] p \\
&= [p\eta_2(k, k) + \eta_2(k, z)(1-p)] p \\
&= p^2\eta_2(k, k) + \eta_2(k, z)p(1-p) \\
&= \int_{A_k} \eta_2 dP
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{A_z} Y dP &= [udp + d^2(1-p)] (1-p) \\
&= [\eta_2(z, k)p + \eta_2(z, z)(1-p)] (1-p) \\
&= \eta_2(z, k)p(1-p) + \eta_2(z, z)(1-p)^2 \\
&= \int_{A_z} \eta_2 dP
\end{aligned}$$

womit die bedingende Eigenschaft der Definition im Beispiel gilt. $E(\eta_2|\mathcal{F}_0) = E(\eta_2)$, da in der σ -Algebra $\mathcal{F}_0$ nur Ω als von der leeren Menge verschiedene Menge vorkommt.

Bemerkung 27. *Intuitive Interpretation von $E(\eta_2|\mathcal{F}_1)$: Aus Sicht zu t_0 sind die möglichen Erwartungswerte zu t_1 Werte einer Zufallsvariable, da man noch nicht weiss, ob als erster Wurf Kopf oder Zahl auftauchen wird. Je nachdem was sich ergibt, sehen die Erwartungswerte für die zweite Runde anders aus, nämlich $E(\eta_2|A_k)$ oder $E(\eta_2|A_z)$.*

Die bisherigen Ausführungen zeigen, dass $(\mathcal{F}_i)_{i=1}^2$ selber einen Prozess darstellt:

	WK	Werte der ZV	WK	Werte der ZV
				u^2
			$\nearrow$	
		$u^2p + ud(1-p)$	p	
			$\searrow$	
			$1-p$	
$E(\eta_2)$	$\nearrow$			
	p			
	$\searrow$			
	$1-p$			
		$udp + d^2(1-p)$	$\nearrow$	
			p	
			$\searrow$	
			$1-p$	
				d^2
$\mathcal{F}_0$	$\mathcal{F}_1$		$\mathcal{F}_2$	

Zusatzbemerkung Totale Wahrscheinlichkeit (WK)

$$\begin{aligned}
E(\eta_2) &= E(\eta_2|A_k)P(A_k) + E(\eta_2|A_z)P(A_z) \\
&= p(u^2p + ud(1-p)) + (1-p)(udp + d^2(1-p)) \\
&= u^2p^2 + udp(1-p) + (1-p)pud + d^2(1-p)^2 \\
&= u^2p^2 + 2p(1-p)ud + (1-p)^2u^2
\end{aligned}$$

3.4.3 Eigenschaften von Bedingten Erwartungswerten

Sei eine Folge $(\mathcal{F}_i)_{i=1}^t$ von σ -Algebren $\mathcal{F}_i$ mit $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_{i+1} \subset \mathcal{F}$ auf den W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ gegeben. Dann gilt:

$$E(X|\mathcal{F}_s) = E(E(X|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_s) \text{ f.s. für } s \leq t$$

$$E(c_1X + c_2Y|\mathcal{F}) = c_1E(X|\mathcal{F}) + c_2E(Y|\mathcal{F})$$

$$E(XY|\mathcal{F}) = XE(Y|\mathcal{F}) \text{ falls } X \text{ } \mathcal{F}\text{-messbar ist.}$$

$$E(X|\mathcal{F}) = E(X), \text{ falls } \sigma(X) \text{ unabhängig von } \mathcal{F}.$$

Dabei ist $\sigma(X)$ die von X induzierte σ -Algebra. Diese ist unabhängig von $\mathcal{F}$ genau dann, wenn alle Ereignisse von $\sigma(X)$ und von $\mathcal{F}$ bezüglich P unabhängig sind.

3.4.4 Der Binomialdarstellungssatz

Satz 28. Ist $S = (S_0, S_1, \dots)$ ein Q -Martingal und $E = (E_0, E_1, \dots)$ ist ein anderes Q -Martingal, dann gibt es einen voraussehbaren Prozess $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots)$ so dass

$$E_i = E_0 + \sum_{k=1}^i \varphi_k \Delta S_k$$

mit

$$\Delta S_k = S_k - S_{k-1}$$

Beweis. Allgemeine Beobachtung: $\Omega = \{\omega_k, \omega_z\}$. Bei einer ZV X von Ω nach $\{x_k, x_z\}$ mit dem Graphen $\{(\omega_k, x_k), (\omega_z, x_z)\}$ und einer zweiten injektiven ZV Y von Ω nach $\{y_k, y_z\}$ mit dem Graphen $\{(\omega_k, y_k), (\omega_z, y_z)\}$ gilt mit

$$a := \frac{y_k - y_z}{x_k - x_z}$$

$$Y = aX + b,$$

da durch die Punkte (x_k, y_k) und (x_z, y_z) eine Gerade mit der Steigung a festgelegt ist.

Betrachte man nun die ZV $\Delta E_i := E_i - E_{i-1}$ und ΔS_i , auf Ω definiert, gilt analog

$$\Delta E_i = \varphi \Delta S_i + k$$

wobei φ bereits vor dem Münzwurf bekannt ist (nämlich Steigung, die durch die Werte der Zufallsvariablen bestimmt ist).

Es gilt nun

$$\begin{aligned} E(\Delta E_i | \mathcal{F}_{i-1}) &= E(E_i - E_{i-1} | \mathcal{F}_{i-1}) \\ &= E(E_i | \mathcal{F}_{i-1}) - E(E_{i-1} | \mathcal{F}_{i-1}) \\ &= E_{i-1} - E_{i-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

da E_{i-1} als Folgenglied eines Martingal $\mathcal{F}_{i-1}$ -messbar ist. Analog gilt:

$$\begin{aligned} E(\varphi_i \Delta S_i | \mathcal{F}_{i-1}) &= E(\varphi_i (S_i - S_{i-1}) | \mathcal{F}_{i-1}) \\ &= E(\varphi_i S_i | \mathcal{F}_{i-1}) - E(\varphi_i S_{i-1} | \mathcal{F}_{i-1}) \\ &= \varphi_i E(S_i | \mathcal{F}_{i-1}) - \varphi_i E(S_{i-1} | \mathcal{F}_{i-1}) \\ &= \varphi_i S_{i-1} - \varphi_i S_{i-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Auf die Gleichung $\Delta E_i = \varphi \Delta S_i + k$ angewandt gilt:

$$\begin{aligned} E(\Delta E_i | \mathcal{F}_{i-1}) &= E(\varphi_i \Delta S_i | \mathcal{F}_{i-1}) + k \\ 0 &= 0 + k \end{aligned}$$

Also ist $k = 0$. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
E_i &= E_0 + (E_1 - E_0) + (E_2 - E_1) + \dots + (E_{i-1} - E_{i-2}) + (E_i - E_{i-1}) \\
&= E_0 + \Delta E_1 + \Delta E_2 + \dots + \Delta E_{i-1} + \Delta E_i \\
&= E_0 + \varphi_1 \Delta S_1 + \varphi_2 \Delta S_2 + \dots + \varphi_{i-1} \Delta S_{i-1} + \varphi_i \Delta S_i \\
&= E_0 + \sum_{k=1}^i \varphi_k \Delta S_k
\end{aligned}$$

□

3.4.5 Selbstfinanzierende Strategie

Hauptidee Es geht darum, den Wert eines Derivats heute zu bestimmen ($t = 0$). Bekannt ist der Preis von Aktien (Basiswert), auf denen das Derivat beruht, und der Preis eines risikolosen Bonds heute. Es wird nach einer Strategie gesucht, die

- selbstfinanzierend ist, d.h. es wird nur zu Beginn investiert, nachher nicht mehr,
- die *rechtzeitig* bekannt ist. In jedem Knoten weiss man über die möglichen Ausgänge in den zwei folgenden Knoten Bescheid.
- Es wird jeweils ein Portfolio aus Aktien und Bonds zusammengestellt, wobei in jedem t_i der Wert des Portfolios aus Aktien und Bonds mit dem Wert des Derivats zu diesem Zeitpunkt identisch ist.

Gibt es eine solche Strategie, lässt sich der Wert des Derivats heute bestimmen. Das Derivat hat nämlich zu T denselben Wert wie das Portfolio zu T , das aber heute zusammengestellt wird und dessen heutigen Wert man kennt. Entsprechend hat das Derivat heute denselben Wert wie das heutige Portfolio. Allgemein kann man das Vorgehen wie folgt charakterisieren:

- Der abgezinste Aktienpreisprozess Z_i wird in ein Martingal umgewandelt.
- Bis auf einen Zinsfaktor ist die schliesslich resultierende PF-Wertentwicklung ebenfalls ein Martingal.
- Durch den Binomial-Darstellungssatz kann damit die Existenz einer selbstfinanzierenden, replizierenden Handelsstrategie nachgewiesen werden.
- Damit muss die Derivat-Wertentwicklung der PF-Wertentwicklung entsprechen, d.h.

$$V_i(X) = B_i E_Q(B_T^{-1} X | \mathcal{F}_i)$$

- φ und ψ können berechnet werden.

Zusammenfassung verwendeter Grundbegriffe S_i ein Aktienwertprozess (Preisprozess) B_i^{-1} ein Diskontierungsprozess, z.B. $B_i^{-1} = e^{-r\Delta t}$ für alle i .
 $Z_i := B_i^{-1} S_i$ ein abgezinster Preisprozess, $Z = (Z_0, Z_1, \dots)$ als Q -Martingal vorausgesetzt.
 $B_T^{-1} X$ eine abgezinste Auszahlung einer Option (X-Claim).
 $E_i = E_Q(B_T^{-1} X | \mathcal{F}_i)$, $E = (E_0, E_1, \dots)$ ist ein Q -Martingal.
 q ist die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit, dass Aktienpreis hinaufgeht. q bestimmt Q :

$$q = \frac{e^{rT} S_{now} - S_{down}}{S_{up} - S_{down}}$$

$$f_{now} = e^{-rT} (q f_{up} + (1 - q) f_{down}) = E_Q(B_T^{-1} X)$$

$$\varphi = \frac{f_{up} - f_{down}}{S_{up} - S_{down}} \quad (\text{wie beim Delta-Hedging})$$

$$\psi = B_{now}^{-1} (f_{now} - \varphi S_{now})$$

Durchführung Es gilt gemäss Darstellungssatz

$$E_i = E_0 + \sum_{k=1}^i \varphi_k \Delta Z_k$$

Daraus ergibt sich die folgende Anlagestrategie:

Kaue zu t_i ein Portfolio Π_i mit φ_{i+1} Aktien und ψ_{i+1} Bonds, so dass

$$\psi_{i+1} = E_i - \varphi_{i+1} Z_i$$

womit

$$\begin{aligned} V_i &= \varphi_{i+1} S_i + \psi_{i+1} B_i \\ &= \varphi_{i+1} S_i + (E_i - \varphi_{i+1} Z_i) B_i \\ &= \varphi_{i+1} S_i + E_i B_i - \varphi_{i+1} Z_i B_i \\ &= \varphi_{i+1} S_i + E_i B_i - \varphi_{i+1} B_i^{-1} S_i B_i \\ &= E_i B_i. \end{aligned}$$

Zu t_{i+1} hat das Portfolio dann den Wert

$$\begin{aligned} V_{i+1} &= \varphi_{i+1} S_{i+1} + \psi_{i+1} B_{i+1} \\ &= \varphi_{i+1} S_{i+1} + (E_{i+1} - \varphi_{i+1} Z_{i+1}) B_{i+1} \\ &= \varphi_{i+1} S_{i+1} + E_{i+1} B_{i+1} - \varphi_{i+1} Z_{i+1} B_{i+1} \\ &= E_{i+1} B_{i+1} \end{aligned}$$

womit die neue Zusammensetzung des Portfolios finanziert wird. Nach Umschichtung gilt dann:

$$V_{i+1} = \varphi_{i+2} S_{i+1} + \psi_{i+2} B_{i+1}$$

Zu Beginn sieht der Prozess wie folgt aus:

Zu t_0 kauft man φ_1 Aktien und ψ_1 Bonds, wobei $Z_0 = S_0$ ($= S_0 B_0^{-1} = S_0$ mit $B_0^{-1} = B_0 = 1$) und $\psi_1 = E_0 - \varphi_1 Z_0 = E_0 - \varphi_1 S_0$. Damit gilt:

$$\begin{aligned} V_0 &= \varphi_1 S_0 + \psi_1 B_0 \\ &= \varphi_1 S_0 + (E_0 - \varphi_1 Z_0) B_0 \\ &= E_0 \\ &= E_Q (B_T^{-1} X | \mathcal{F}_0) \\ &= E_Q (B_T^{-1} X) \end{aligned}$$

(vorletzter Schritt gilt auf Grund der Definition, der letzte Schritt gilt, da $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$) Zu t_1 hat dieses Portfolio den folgenden Wert:

$$\begin{aligned} V_1 &= \varphi_1 S_1 + \psi_1 B_1 \\ &= \varphi_1 Z_1 B_1 + (E_1 - \varphi_1 Z_1) B_1 \\ &= B_1 (\varphi_1 (Z_1 - Z_0) + E_0) \\ &= B_1 (\varphi_1 \Delta E_i + E_0) \\ &= B_1 E_1 \end{aligned}$$

Damit kann ein neues Portfolio Π_2 gekauft werden mit (φ_2, ψ_2) Aktien und Bonds, so dass

$$V_1 = \varphi_2 S_1 + \psi_2 B_1$$

etc.

in T: $V_T = B_T E_T = B_T E_Q (B_T^{-1} X | \mathcal{F}_T) = X$ (z.B. für $X = (S_T - k)_+$). Wert des Claims X zum Zeitpunkt i , ist $B_i E_i = B_i E_Q (B_i^{-1} X | \mathcal{F}_i)$, insbesondere zu $i = 0 : E_Q (B_T^{-1} X)$

Beispiel (Serie 4, Übung 5) Es wird der folgende Binomialbaum gegeben ($\Delta t = 1$ Monat; $r = 0.2$, $u = 1.1$, $d = 0.9$, Strike = 50).

t=0	1	2	3	4
				73.205
			66.55	
		60.5		59.895
	55		54.45	
		49.5		49.005
	45		44.55	
		40.5		40.095
			36.45	
				32.805

Tabelle 1: Aktienkurse zu t_i

Es gilt

$$\begin{aligned}
 q &= \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \\
 &= \frac{e^{-0.2 \cdot \frac{1}{12}} - 0.9}{1.1 - 0.9} \\
 &= 0.584031652
 \end{aligned}$$

und mit

$$f_{Tx} = (S_T - k)_+ \text{ mit } x = u \text{ oder } x = d$$

ergibt sich für die oberste Zeile in $t = 3$ z.B.

$$f_{Tu} = (S_T - k)_+ = 73.205 - 50 = 23.205 \text{ und}$$

$$f_{Td} = (S_T - k)_+ = 59.895 - 50 = 9.895.$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned}
 f_i &= e^{-r\Delta t} (q f_{iu} - (1 - q) f_{id}) \\
 &= e^{-0.2 \cdot \frac{1}{12}} (0.584031652 f_{iu} - (1 - 0.584031652) f_{id})
 \end{aligned}$$

Für $t = 3$ mit den obigen f_{Tu} und f_{Td} ergibt sich z.B.

$$e^{-0.2 \cdot \frac{1}{12}} (0.584031652 \cdot 23.205 + (1 - 0.584031652) \cdot 9.895) = 17.37642731$$

t=0	1	2	3	4
			17.37642731	23.205
		12.30571527		9.895
	8.403607736		5.68347484	
5.593916438	0	3.264465514		0
	1.875038667		0	
		0		0
			0	
				0

Tabelle 2: Optionswerte f_i zur Zeit t_i

Zu erstellen ist damit die folgende Tabelle für die Replikationsstrategie des folgenden Pfads u, d, u, u im Binomialbaum:

i		S_i	$V_i = f_i$	$\varphi_{i+1} = \frac{f_{i,u} - f_{i,d}}{S_i(u-d)}$	$\psi_{i+1} = E_i - \varphi_{i+1}Z_i$	$E_i = f_i e^{-ri\Delta t}$	$Z_i = e^{-ri\Delta t} S_i$
0		50	5.593916438			5.593916438	50
1	u	55	8.403607736	0.652856907	-27.04892891	8.264708318	54.09092996
2	d	49.5	3.264465514	0.821931796	-36.19434689	3.157443604	47.87719697
3	u	54.45	5.68347484	0.574088368	-24.32829826	5.406288501	51.79444216
4	u	59.895	9.895	0.908631772	-41.65578728	9.256841617	56.03219087

Zu beachten ist, das $\varphi_i S_i + \psi_i e^{ri\Delta t} = \varphi_{i+1} S_i + \psi_{i+1} e^{ri\Delta t} = V_i = f_i$

Zum Schluss noch eine formelle Definition:

Definition 29. (φ_i, ψ_i) heisst selbstfinanzierende Strategie genau dann, wenn

- (φ_i, ψ_i) ist vorhersehbar (previsible)
- PF Wertveränderung finanziert jeweils die notwendige (von der Strategie verlangte) Umschichtung (muss nach $t = 0$ kein Geld mehr einzahlen).
- $\varphi_T S_T + \psi_T B_T = X$.

Damit haben wir eine selbstfinanzierende Strategie im Binomialmodell gefunden, wobei der PF-Wert jeweils $B_t E_Q(B_t^{-1} X | \mathcal{F}_t)$ ist. Dieser Wert ist gleich dem Wert des Derivats zu diesem Zeitpunkt (wenn Arbitrage ausgeschlossen wird). Im Binomialmodell existiert immer ein Martingalmass. Die Wahrscheinlichkeiten der realen Welt (dass ein Aktie oder ein Basisinstrument hinauf oder hinunter gehen) spielen bei der Bewertung von Derivaten keine Rolle.

3.5 Stetige Prozesse

3.5.1 Heuristische Vorüberlegungen zu Preisprozessen

Sei $B_t = e^{rt}$ und S_0 der Wert der Aktie zu $t = 0$. Stetige Zeit, $S_t, t \geq 0$

Wähle n so, dass Δt klein ist:

$$\Delta t = \frac{t}{n}$$

Wir gehen davon aus, dass μ die konstante Rendite ist, sich der Preis einer Aktie um $\mu\Delta t$ - in Abhängigkeit von Intervalllänge Δt - verändert. Hinzu kommt die Volatilität σ . Die Streuung ist

dann $\sigma\sqrt{\Delta t}$ (die Streuung hängt nicht nur von σ , sondern auch von der Zeit ab. Je länger das Zeitintervall, desto grösser die Streuung):

$$\begin{array}{ccc}
 & & S_0 e^{\mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}} = S_u \\
 & \nearrow^p & \\
 S_0 & & \\
 & \searrow_{1-p} & \\
 & & S_0 e^{\mu\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}} = S_d
 \end{array}$$

Der Erwartungswert von S_1 ist in der „realen Welt“ $S_0 e^{\mu\Delta t}$, d.h.

$$p \cdot S_0 e^{\mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}} + (1-p) S_0 e^{\mu\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}} = S_0 e^{\mu\Delta t}$$

Nach p aufgelöst, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{S_0 e^{\mu\Delta t} - S_0 e^{\mu\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}}}{S_0 e^{\mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}} - S_0 e^{\mu\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}}} \\
 &= \frac{1 - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} \\
 &= \frac{1 - \left(1 - \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t + \dots\right)}{\left(1 + \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t + \dots\right) - \left(1 - \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t + \dots\right)} \\
 &\approx \frac{\sigma\sqrt{\Delta t} - \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t}{2\sigma\sqrt{\Delta t}} \\
 &= \frac{1 - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\Delta t}}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\Delta t}\right)
 \end{aligned}$$

mittels Taylor-Entwicklung (bis zum zweiten Grad; Potenzreihe von e).

Mit $n = \frac{t}{\Delta t} \in \mathbb{N}$ ($\implies \Delta t = \frac{t}{n}$) und $X_n :=$ Anzahl der Aufwärtsbewegungen und $X_i \sim B(1, p)$ gilt

$$X_n \sim B(n, p)$$

$$\begin{aligned}
 S_t &= S_0 e^{\mu\Delta t \pm \sigma\sqrt{\Delta t}} \cdot e^{\mu\Delta t \pm \sigma\sqrt{\Delta t}} \cdot \dots \cdot e^{\mu\Delta t \pm \sigma\sqrt{\Delta t}} \\
 &= S_0 e^{n\mu\Delta t + X_n\sigma\sqrt{\Delta t} - (n-X_n)\sigma\sqrt{\Delta t}} \\
 &= S_0 e^{\mu t + \sigma\sqrt{\Delta t}(X_n - (n-X_n))} \\
 &= S_0 e^{\mu t + \sigma\sqrt{\frac{t}{n}}(2X_n - n)} \\
 &= S_0 e^{\mu t + \sigma\sqrt{t}\frac{(2X_n - n)}{\sqrt{n}}}
 \end{aligned}$$

Da $X_n \sim B(n, p)$ gilt:

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{2X_n - n}{\sqrt{n}}\right) &= \frac{2E(X_n) - n}{\sqrt{n}} \\
&= \frac{2np - n}{\sqrt{n}} \\
&= \frac{2n\left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\Delta t}\right)\right) - n}{\sqrt{n}} \\
&= \frac{n\left(1 - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\Delta t}\right) - n}{\sqrt{n}} \\
&= \frac{n - n\frac{1}{2}\sigma\sqrt{\Delta t} - n}{\sqrt{n}} \\
&= \frac{-n\frac{1}{2}\sigma\sqrt{\Delta t}}{\sqrt{n}} \\
&= -\sqrt{n}\frac{1}{2}\sigma\sqrt{\Delta t} \\
&= -\frac{1}{2}\sigma\sqrt{n\Delta t} \\
&= -\frac{1}{2}\sigma\sqrt{t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V\left(\frac{2X_n - n}{\sqrt{n}}\right) &= \frac{4}{n}V(X_n) \\
&= \frac{4}{n}np(1-p) \\
&= 4p(1-p) \\
&= 4\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\Delta t}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\Delta t}\right)\right) \\
&= 4\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\Delta t}\right)\left(1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sigma\sqrt{\Delta t}\right)\right) \\
&= 4\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\Delta t}\right)\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\Delta t}\right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\Delta t}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\Delta t}\right) \\
&= 1 - \left(\frac{1}{2}\sigma\sqrt{\Delta t}\right)^2 \\
&= 1 - \frac{1}{4}\sigma^2\Delta t \\
&\approx 1 \text{ (da } \Delta t \text{ genügend klein)}
\end{aligned}$$

Mit dem zentralen Grenzwertsatz gilt damit für

$$\frac{2X_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X \sim N\left(-\frac{1}{2}\sigma\sqrt{t}, 1\right)$$

und

$$Z := \frac{X - \left(-\frac{1}{2}\sigma\sqrt{t}\right)}{1} = X + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t} \sim N(0, 1)$$

Entsprechend gilt

$$Z - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t} \sim N\left(-\frac{1}{2}\sigma\sqrt{t}, 1\right)$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 e^{\mu t + (Z - \frac{\sigma}{2}\sqrt{t}) \cdot \sigma\sqrt{t}} \\ &= S_0 e^{\mu t + Z\sigma\sqrt{t} - \frac{\sigma^2}{2}t} \\ &= S_0 e^{\mu t + Z\sigma\sqrt{t} - \frac{\sigma^2}{2}t} \\ &= S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + Z\sigma\sqrt{t}} \end{aligned}$$

Entsprechend gilt:

$$\ln S_t = \ln S_0 \left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + Z\sigma\sqrt{t} \right)$$

ist normalverteilt.

Also sind Aktienpreisentwicklungen gemäss diesen Überlegungen lognormal verteilt - denn ist $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, dann ist $\exp(X)$ lognormal verteilt, wobei $e^X > 0$). Man kann die Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Normalverteilung berechnen: Ist X lognormalverteilt, so gilt $P(X \leq x) = P(Y \leq \ln x)$ mit $Y \sim N(0, 1)$.

In der risikoneutralen Welt kann man μ durch r (den risikofreien Zins) ersetzen und erhält:

$$S_t = S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \tilde{Z}\sigma\sqrt{t}}$$

$$\tilde{Z} \sim N(0, 1).$$

Bemerkung 30. Die charakteristische Funktion der P -verteilten ZV X ist definiert als

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{\Omega} e^{itx} dP.$$

Mit der Verteilungsfunktion F_X der P -verteilten ZV X gilt

$$E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_X(x) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

Mit $i := \sqrt{-1}$ gilt $i \cdot -i = 1$ und damit

$$\begin{aligned} E_P(S_t) &= E_P\left(S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + Z\sigma\sqrt{t}}\right) \\ &= S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} E_P\left(e^{Z\sigma\sqrt{t}}\right) \\ &= S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} E_P\left(e^{i(-i\sigma\sqrt{t})Z}\right) \\ &= S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} e^{-\frac{1}{2}(i\sigma\sqrt{t})^2} \\ &= S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t} \\ &= S_0 e^{\mu t} \end{aligned}$$

Analog gilt für mit dem risikofreien Zinssatz

$$E_P(S_t) = S_0 e^{rt}$$

3.5.2 Aktienpreise in stetiger Zeit

Ein deterministische Preismodell besteht darin, dass die Volatilität 0 ist. In diesem Fall gilt

$$dS_t = \mu S_t dt$$

wobei man dS_t und dt als durch eine Art Grenzwertbildung der Differenzengleichung

$$\Delta S_t = \mu S_t \Delta t$$

hervorgegangen betrachten kann, d.h. es wird die Veränderung im Aktienpreis zu Zeitpunkt t als Funktion der erwarteten Rendite μ , dem Aktienpreis zu t und dem Zeitintervall Δt dargestellt. Aus

$$dS_t = \mu S_t dt$$

folgt

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt$$

und

$$\int \frac{dS_t}{S_t} = \int \mu dt \implies$$

$$\ln(S_t) = \mu t + c \implies$$

$$\begin{aligned} S_t &= e^{\mu t + c} \\ &= e^{\mu t} e^c \end{aligned}$$

Mit $S_0 = e^c$ gilt

$$S_t = S_0 e^{\mu t}.$$

Die Volatilität wird mit der Brownschen Bewegung (auch Wiener-Prozess genannt; Robert Brown (1773-1858), schottischer Botaniker; Norbert Wiener (1894-1964), US-amerikanischer Mathematiker) modelliert. Die Brownsche Bewegung ist ein stochastischer Prozess, so dass

- $W_0 = 0$, f.s.
- $W_t - W_s$ ist normalverteilt mit dem Erwartungswert 0 und der Varianz $s - t$ für $t \geq s$.
- W_t hat unabhängige Zuwächse, d.h. $W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, \dots, W_{t_2} - W_{t_1}$ sind gemeinsam unabhängig für alle Zeitmomente $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ ($t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ stellt eine beliebige Zerlegung von t dar).

Die Brownsche Bewegung ist

- stetig
- ist nirgends differenzierbar. Hierzu kann man bemerken: Da $W_{t+\Delta t} - W_t \sim N(0, \Delta t)$ ist

$$\frac{W_{t+\Delta t} - W_t}{\Delta t} \sim N\left(0, \frac{\Delta t}{(\Delta t)^2}\right) = N\left(0, \frac{1}{\Delta t}\right).$$

Für $\Delta t \rightarrow 0$ „explodiert“ die Varianz!

- ist selbstähnlich (im beliebig Kleinen - hineinzoomen - sieht sie aus wie im Grossen, vgl. Fraktalgeometrie. Vorteil von Selbstähnlichkeit: man kann von kleinen Abschnitten auf das Verhalten im Grössern schliessen. Nachteil: man kann nicht lokal linear approximieren).

Wenn W_t die Standard-Brownsche Bewegung ist, kann man schreiben:

$$\begin{aligned} dS &= \mu S dt + \sigma S dW \\ dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \end{aligned}$$

Die Brownsche Bewegung kann man mittels Random Walk $W_n(t)$ approximieren. Dieser ist wie folgt definiert:

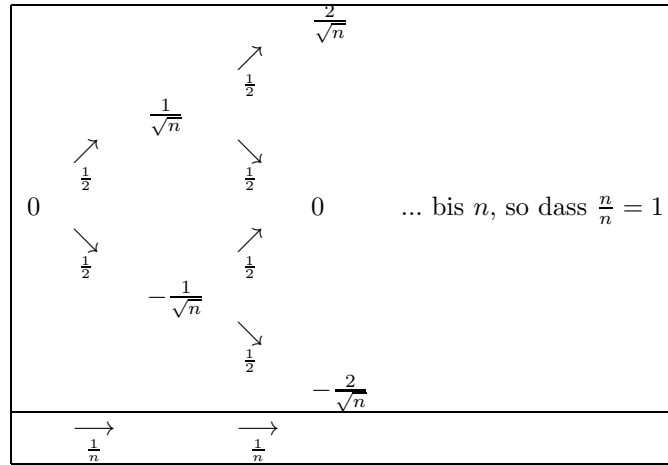
Definition 31. Für $n \in \mathbb{N}$ definiert man den folgenden Binomialprozess $W_n(t)$ durch die Eigenschaften:

- $W_1(t) = 0$
- Länge der Intervalle $\frac{1}{n}$
- Δ Höhe $\frac{1}{\sqrt{n}}$ für hinauf oder hinunter.
- P , so dass $p = 1 - p$ konstant.

Das heisst, für $X_1, X_2, \dots$, unabhängig, $P(X_i = 1) = \frac{1}{2}$ und $P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$, ist

$$W_n\left(\frac{i}{n}\right) = W_n\left(\frac{i-1}{n}\right) + \frac{X_i}{\sqrt{n}}$$

In einem Baumdiagramm sieht das wie folgt aus:



Da die X_i i.i.d und $V(X_i) < \infty$, gilt für die Summe $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$

$$E(S_n) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = 0,$$

da $E(X_i) = 0.5 \cdot 1 + 0.5 \cdot (-1) = 0$. Zudem gilt:

$$V(S_n) = \sum_{i=1}^n V(X_i) = n$$

da $V(X_i) = 0.5(1 - 0)^2 + 0.5(-1 - 0)^2 = 1$.

Mit dem Zentralen Grenzwertsatz gilt also

$$\frac{S_n - 0}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Z \sim N(0, 1)$$

Da für $t_n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} W_n(t_n) &= \frac{X_1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{X_{t_n}}{\sqrt{n}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{t_n} X_i}{\sqrt{n}} \\ &= \sqrt{t} \frac{\sum_{i=1}^{t_n} X_i}{\sqrt{nt}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Z \sim N(0, 1) \end{aligned}$$

konvertiert $W_n(t)$ gegen die Brownsche Bewegung.

Durch den Random Walk kann man viel Wesentliches der Brownschen Bewegung zeigen.

3.5.3 Stochastische Differentialgleichungen

Modellidee Man möchte die Entwicklung von Aktienpreisen und von Derivaten darstellen durch:

1. Brownsche Bewegung mit Drift (Tendenz; Problem: Aktienkurse können nicht negativ sein $\Rightarrow$ etwas mit $\exp()$).
2. $\Delta S_t = \mu S_t \Delta t + \sigma S_t \Delta W_t$, mit der Volatilität σ , und einer ZV $W_t \sim N(0, t)$ (Risikoquelle).
 $\frac{\Delta S_t}{S_t}$ ist die lokale Rendite und $\frac{\Delta S_t}{S_t} = \mu \Delta t + \sigma \Delta W_t$
Macht man das stetig, erhält man eine Differentialgleichung für die Modelldefinition:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Es handelt sich um eine partielle Differentialgleichung mit einem stochastischen Term. Für solche Gleichungen gibt es keine kanonische Lösungstheorie.

Beispiel: Eine Aktie hat Dividenden von 15% p.a. mit stetiger Verzinsung und hat eine Volatilität von 30% p.a. Dann ist

$$dS_t = 0.15 S_t dt + 0.30 S_t dW_t$$

oder diskret ausgedrückt:

$$\frac{\Delta S_t}{S_t} = 0.15 \Delta t + 0.30 Z \sqrt{\Delta t}$$

mit $Z \sim N(0, 1)$.

3. X_t ist ein stochastischer Prozess, so dass

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

Dabei ist $\sigma_t dW_t$ möglicherweise zufällig, aber nur von Ereignissen bis t abhängig. μ ist abhängig von X_t und t , ebenso σ . Damit kann man $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$ schreiben als

$$dX_t = \mu(X_t, t) dt + \sigma(X_t, t) dW_t.$$

Der Prozess X_t ist hier ein stetiger Prozess X , so dass man X_t schreiben kann als

$$X_t = \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s$$

σ und μ sollten $\mathcal{F}$ -vorhersehbar sein, so dass

$$P\left(\int_0^t (\sigma_s^2 + \mu_s) ds\right) = 1$$

für alle $0 \leq t < \infty$.

X ist eindeutig, falls σ_t, μ_t und X_0 gegeben sind. Ist der Prozess X mit $X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s$ für alle $0 \leq t < \infty$ gegeben, so existieren σ_t, μ_t für X .

Es stellt sich die Frage, was

$$\int_0^t \sigma_s dW_s$$

bedeutet.

Dazu eine Erläuterung zum Riemann-Stieltjes-Integral. Sei $f(x) \geq 0$ gegeben. Dann ist

$$\int_a^b f(t) dt \approx \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i) (t_{i+1} - t_i)$$

mit $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$ und $t_1 = 1, t_2, \dots, t_n = b$ ist eine Zerlegung von $[a, b]$. Und analog:

$$\int_a^b f(t) dg(t) \approx \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i) (g(t_{i+1}) - g(t_i))$$

Schreibt man das für $f(W_t)$, erhält man (indem man in $f(W_{t_i})$ jeweils die untere Grenze des Intervalls wählt):

$$\int_a^b f(W_t) dW_t \approx \sum_{i=1}^{n-1} f(W_{t_i}) (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

$f(W_{t_i}) (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$ ist etwas Zufälliges. Man kann sich damit $\int_0^t \sigma_s dW_s$ als Grenzwert der Folge von Flächen unter Treppenfunktionen *vorstellen*, wobei man jeweils den unteren Rand des Intervalls der Treppen wählt. Diese Ausführungen sind nicht exakt. Es geht darum, der Intuition auf die Sprünge zu helfen.

3.6 Die Itô-Formel

Die Itô-Formel (Itô Kiyoshi, 1915 - 2008, japanischer Mathematiker) stellt eine Art Kettenregel für Formeln dar, die stochastische Prozesse beschreiben. Ist ein stochastischer Prozess als Differentialgleichung gegeben und ein zweiter, der eine deterministische Funktion des ersten ist, kann man mit Hilfe der Itô-Formel die Differentialgleichung des zweiten berechnen. Zu beachten ist, dass die ZV W_t quadriert nicht mehr eine Zufallsvariable ist. Werden die Werte der ZV $\pm \frac{1}{\sqrt{n}}$ quadriert, erfolgt immer derselbe Ausgang, nämlich $\frac{1}{n} = \Delta t$.

Satz 32. (Itô-Formel) Ist $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$ die Differentialgleichung eines stochastischen Prozesses (wobei μ_t und σ_t gewisse Bedingungen erfüllen müssen, die hier immer gegeben sind, W_t ist ein Wienerprozess, μ_t die Tendenz und σ_t die Volatilität) und ist Y_t eine deterministische, zweimal stetig differenzierbare Funktion F von X_t , dann gilt

$$\begin{aligned} dY_t &= dF(t, X_t) \\ &= \mu_t F'(X_t) + \frac{1}{2} \sigma_t^2 F''(X_t) dt + \sigma_t F'(X_t) dW_t \end{aligned} \quad (2)$$

oder allgemeiner

$$dY_t = \frac{\partial F}{\partial X_t} dX_t + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial X_t^2} \sigma_t^2 dt \quad (3)$$

$$= \left[\frac{\partial F}{\partial X_t} \mu_t + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial X_t^2} \sigma_t^2 \right] dt + \frac{\partial F}{\partial X_t} \sigma_t dW_t \quad (4)$$

Begründung der Formel: Mit Taylor gilt

$$dF(t, X_t) = \frac{\partial F}{\partial X_t} dX_t + \frac{\partial^2 F}{\partial X_t^2} (dX_t)^2 + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} (dt)^2 + \frac{1}{2} 2 \frac{\partial^2 F}{\partial X_t \partial t} dt dX_t + \dots$$

Indem man nur die ersten drei Terme berücksichtigt:

$$\begin{aligned}
dF(t, X_t) &\approx \frac{\partial F}{\partial X_t} (\mu_t dt + \sigma_t dW_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial X_t^2} (\mu_t dt + \sigma_t dW_t)^2 + \frac{\partial F}{\partial t} dt \\
&= \frac{\partial F}{\partial X_t} \mu_t dt + \frac{\partial F}{\partial X_t} \sigma_t dW_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial X_t^2} \left(\mu_t^2 (dt)^2 + 2\mu_t \sigma_t dt dW_t + \sigma_t^2 (dW_t)^2 \right) + \frac{\partial F}{\partial t} dt \\
&= \frac{\partial F}{\partial X_t} \mu_t dt + \frac{\partial F}{\partial X_t} \sigma_t dW_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial X_t^2} \mu_t^2 (dt)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial X_t^2} \mu_t \sigma_t dt dW_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial X_t^2} \sigma_t^2 (dW_t)^2 + \frac{\partial F}{\partial t} dt
\end{aligned}$$

Mittels Ignorierung der Ausdrücke die kleiner als dt sind und unter Berücksichtigung von

$$\sigma_t^2 (dW_t)^2 \approx \sigma_t^2 dt$$

$$\begin{aligned}
dF(t, X_t) &\approx \frac{\partial F}{\partial X_t} \mu_t dt + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial X_t^2} \sigma_t^2 dt + \frac{\partial F}{\partial X_t} \sigma_t dW_t \\
&= \left[\frac{\partial F}{\partial X_t} \mu_t + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial X_t^2} \sigma_t^2 \right] dt + \frac{\partial F}{\partial X_t} \sigma_t dW_t \\
&= \mu_t F'(X_t) dt + \frac{1}{2} \sigma_t^2 F''(X_t) dt + \sigma_t F'(X_t) dW_t
\end{aligned}$$

Beispiel 33. Sei $(X_t)_{t \in [0, T]}$, kurz $X_t = W_t$ ein stochastischer Prozess und $Y_t := X_t^2$. Dann ist

$$dX_t = 0dt + 1dW_t$$

$$\frac{\partial Y}{\partial X_t} = 2X_t; \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial X_t^2} = 2 \quad ; \quad \frac{\partial Y}{\partial t} = 0.$$

Mit der Itô-Formel (Version (3)) ergibt sich ($\sigma = 1$):

$$\begin{aligned}
dY_t &= 2X_t dX_t + 0 \cdot dt + \frac{1}{2} 2 \cdot 1^2 dt \\
&= 2X_t (0dt + 1dW_t) + 0 \cdot dt + \frac{1}{2} 2 \cdot 1^2 dt \\
&= 2X_t dW_t + dt \\
&= 2W_t dW_t + dt
\end{aligned}$$

(letzter Schritt weil $dX_t = 0dt + 1dW_t = W_t$). Damit kann man $\int_0^T W_t dW_t$ berechnen:

$$\int_0^T d(Y_t) = \int_0^T d(W_t^2) = \int_0^T dt + \int_0^T 2W_t dW_t = T + W_t^2$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
\int_0^T 2W_t dW_t &= W_T^2 - T \implies \\
\int_0^T W_t dW_t &= \frac{1}{2} W_T^2 - \frac{1}{2} T
\end{aligned}$$

Beispiel 34. (Übung 5. 4.b) $Y_t = F(X_t, t) = 1 + t + e^{W_t}$. Gesucht dY_t . Da

$$dX_t = 0dt + 1dW_t = dW_t,$$

kann man die Itô-Formel anwenden. Es gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(X_t, t)}{\partial X_t} &= e^{X_t} = e^{W_t} \\ \frac{\partial^2 F(X_t, t)}{\partial (X_t)^2} &= e^{X_t} = e^{W_t} \\ \frac{\partial F(X_t, t)}{\partial t} &= 1\end{aligned}$$

Mit der Itô-Formel gilt damit:

$$\begin{aligned}dY_t &= e^{W_t} dX_t + 1dt + \frac{1}{2} 1^2 e^{W_t} dt \\ &= e^{W_t} dW_t + \left(1 + \frac{1}{2} e^{W_t}\right) dt\end{aligned}$$

Beispiel 35. (Übung 5.4.c) $Y_t = g(t) W_t$ mit $g \in C^1$ (= einmal stetig differenzierbar); g beschränkt ($\|g\|_\infty < \infty$); Gesucht dY_t . Da

$$dX_t = 0dt + 1dW_t$$

kann man die Itô-Formel anwenden. Man erhält mit

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(X_t, t)}{\partial X_t} &= g(t) \\ \frac{\partial^2 F(X_t, t)}{\partial (X_t)^2} &= 0 \\ \frac{\partial F(X_t, t)}{\partial t} &= g'(t) W_t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}dY_t &= g(t) dX_t + g'(t) W_t dt + \frac{1}{2} 1^2 \cdot 0 \cdot dt \\ &= g(t) dW_t + g'(t) W_t dt\end{aligned}$$

Beispiel 36. (Übung 5.5.a) $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$. Gesucht $dF(S_t, t) = dS_t^n$. Setzt man $\mu_t := \mu S_t$ und $\sigma_t = \sigma S_t$ hat dS_t die Form, um Itô anwenden zu können. Mit

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(S_t, t)}{\partial S_t} &= n S_t^{n-1} \\ \frac{\partial^2 F(S_t, t)}{\partial (S_t)^2} &= n(n-1) S_t^{n-2} \\ \frac{\partial F(S_t, t)}{\partial t} &= 0\end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned}
dS_t^n &= \mu S_t n S_t^{n-1} dS_t + 0 + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 n(n-1) S_t^{n-2} dt \\
&= n S_t^n dS_t + \frac{1}{2} \sigma^2 n(n-1) S_t^n dt \\
&= n S_t^n \left(dS_t + \frac{1}{2} \sigma^2 (n-1) dt \right) \\
&= n S_t^n \left(\mu dt + \sigma dW_t + \frac{1}{2} \sigma^2 (n-1) dt \right) \\
&= n S_t^n \left(\left(\mu + \frac{1}{2} \sigma^2 (n-1) \right) dt + \sigma dW_t \right) \\
&= n Y \left(\left(\mu + \frac{1}{2} \sigma^2 (n-1) \right) dt + \sigma dW_t \right)
\end{aligned}$$

Beispiel 37. $Y_t = F(S_t, t) = \ln(S_t)$; für

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

hat dS_t die erforderliche Gestalt. Mit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(S_t, t)}{\partial S_t} &= \frac{1}{S_t} \\
\frac{\partial^2 F(S_t, t)}{\partial (S_t)^2} &= -\frac{1}{S_t^2} \\
\frac{\partial F(S_t, t)}{\partial t} &= 0
\end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned}
dY_t &= \frac{1}{S_t} dS_t + 0 + \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{S_t^2} \sigma^2 S_t^2 dt \\
&= \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2} \sigma^2 dt \\
&= \frac{1}{S_t} (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) - \frac{1}{2} \sigma^2 dt \\
&= (\mu dt + \sigma dW_t) - \frac{1}{2} \sigma^2 dt \\
&= \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t
\end{aligned}$$

3.6.1 Geometrische Brownsche Bewegung

Ein weiteres Anwendungsbeispiel für die Itô-Formel ist:

Beispiel 38. $S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right) = S_0 e^{X_t}$ mit

$$dX_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dW_t.$$

$$\frac{\partial S_t}{\partial X_t} = S_t, \quad \frac{\partial^2 S_t}{\partial X_t^2} = S_t, \quad \frac{\partial S_t}{\partial t} = 0$$

Damit ist dann mit der Itô-Formel:

$$\begin{aligned}
dS_t &= S_t dX_t + 0 + \frac{1}{2} S_t \sigma_t^2 dt \\
&= S_t \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t \right) + \frac{1}{2} \sigma_t^2 S_t dt \\
&= S_t \mu dt - \frac{1}{2} \sigma^2 S_t dt + \sigma dW_t + \frac{1}{2} \sigma_t^2 S_t dt \\
&= S_t \mu dt + \sigma dW_t
\end{aligned}$$

Der Rückfluss einer Aktie ist also Ertrag mal kurze Zeit + stochastischer Aspekt.

Damit ist $S_t = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right)$ eine Lösung von $dS_t = S_t \mu dt + \sigma dW_t$. Sie wird geometrische oder exponentielle Brownsche Bewegung genannt. Die Lösung stellt den Aktienpreis in der realen Welt dar, wenn der Aktienpreis einer geometrischen Brownschen Bewegung mit μ und σ folgt. Wiederholende Bemerkung: W_t ist normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz t , so dass $S_t = S_0 e^\eta$, wobei η normalverteilt ist mit Erwartungswert $\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t$ und der Varianz $\sigma^2 t$.

Bemerkung 39. Wieso ist $\frac{\partial S_t}{\partial t} = 0$? Erste Begründung: $S_t = F(X_t) = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right)$ mit $X_t = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t$ ist immer noch ein Itô-Prozess, aber mit einem Drift. Die deterministische Funktion F hängt nicht mehr von t ab. Zweite Begründung (ungeschickt aber vielleicht erhellend): In $S_t = F(X_t, t) = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + X_t \right)$ ist X_t ist von der Form $dX_t = 0dt + \sigma dW_t$. Man kann also Itô anwenden (weil alles glatt genug). Die Funktion F hängt von X_t und von t ab, wobei man bei der Differentiation die „gewöhnlichen“ partiellen Ableitungen der deterministischen Funktion F betrachtet (das t ist im Itô-Prozess nicht relevant für die partielle Ableitung nach t). Also ist hier (mit der Formulierung (4) der Ito-Regel):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial X_t} &= S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + X_t \right) = S_t = \frac{\partial^2 F}{\partial X_t^2} \\
\frac{\partial F}{\partial t} &= \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) S_t \\
dF(t, X_t) &= \left(0 \cdot S_t + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) S_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t \right) dt + \sigma S_t dW_t \\
&= \mu S_t + \sigma S_t dW_t
\end{aligned}$$

3.6.2 Itô-Produktregel

Klassisch ist $d(fg) = f dg + g df$. Die Itô-Produktregel für

$$\begin{aligned}
dX_t &= \mu_{X_t,t} dt + \sigma_{X_t,t} dW_t \\
dY_t &= \mu_{Y_t,t} dt + \sigma_{Y_t,t} dW_t
\end{aligned}$$

ist demgegenüber für unabhängige X_t und Y_t :

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + dX_t dY_t$$

Sei die folgenden Kurznotation

$$\begin{aligned}
\mu_X &:= \mu_{X_t,t}; \sigma_X := \sigma_{X_t,t} \\
\mu_Y &:= \mu_{Y_t,t}; \sigma_Y := \sigma_{Y_t,t}.
\end{aligned}$$

Wir betrachten mit

$$\tilde{X}_t := X_t + Y_t$$

$$\begin{aligned} d\tilde{X}_t &= \mu_X dt + \sigma_X dW_t + \mu_Y dt + \sigma_Y dW_t \\ &= (\mu_X + \mu_Y) dt + (\sigma_X + \sigma_Y) dW_t \end{aligned}$$

und

$$F(\tilde{X}_t) = \frac{1}{2} \tilde{X}_t^2,$$

womit gilt

$$\frac{\partial F}{\partial \tilde{X}_t} = \tilde{X}_t; \quad \frac{\partial F}{\partial t} dt = 0; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{X}_t^2} = 1.$$

Mit dem Itô-Lemma erhält man dann:

$$\begin{aligned} dF(\tilde{X}_t) &= \tilde{X}_t d\tilde{X}_t + 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (\sigma_X + \sigma_Y)^2 dt \\ &= \tilde{X}_t ((\mu_X + \mu_Y) dt + (\sigma_X + \sigma_Y) dW_t) + \frac{1}{2} (\sigma_X + \sigma_Y)^2 dt \\ &= (\mu_X + \mu_Y) \tilde{X}_t dt + (\sigma_X + \sigma_Y) \tilde{X}_t dW_t + \frac{1}{2} (\sigma_X + \sigma_Y)^2 dt \\ &= \mu_X \tilde{X}_t dt + \mu_Y \tilde{X}_t dt + \sigma_X \tilde{X}_t dW_t + \sigma_Y \tilde{X}_t dW_t + \frac{1}{2} (\sigma_X^2 + 2\sigma_X \sigma_Y + \sigma_Y^2) dt \\ &= \left(\mu_X \tilde{X}_t + \mu_Y \tilde{X}_t + \frac{1}{2} \sigma_X^2 + \sigma_X \sigma_Y + \frac{1}{2} \sigma_Y^2 \right) dt + (\sigma_X \tilde{X}_t + \sigma_Y \tilde{X}_t) dW_t \\ &= \left(\mu_X (X_t + Y_t) + \mu_Y (X_t + Y_t) + \frac{1}{2} \sigma_X^2 + \sigma_X \sigma_Y + \frac{1}{2} \sigma_Y^2 \right) dt \\ &\quad + (\sigma_X (X_t + Y_t) + \sigma_Y (X_t + Y_t)) dW_t \\ &= \left(\mu_X X_t + \mu_X Y_t + \mu_Y X_t + \mu_Y Y_t + \frac{1}{2} \sigma_X^2 + \sigma_X \sigma_Y + \frac{1}{2} \sigma_Y^2 \right) dt \\ &\quad + (\sigma_X X_t + \sigma_X Y_t + \sigma_Y X_t + \sigma_Y Y_t) dW_t \end{aligned}$$

und für

$$F(X_t) = \frac{1}{2} X_t^2,$$

mit

$$\frac{\partial F}{\partial X_t} = X_t; \quad \frac{\partial F}{\partial t} dt = 0; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial X_t^2} = 1.$$

$$\begin{aligned} d(X_t^2) &= X_t dX_t + 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sigma_X^2 dt \\ &= X_t (\mu_X dt + \sigma_X dW_t) + \frac{1}{2} \sigma_X^2 dt \\ &= X_t \mu_X dt + X_t \sigma_X dW_t + \frac{1}{2} \sigma_X^2 dt \\ &= \left(X_t \mu_X + \frac{1}{2} \sigma_X^2 \right) dt + \sigma_X X_t dW_t \end{aligned}$$

und analog

$$d(Y_t^2) = \left(\mu_Y Y_t + \frac{1}{2} \sigma_Y^2 \right) dt + \sigma_Y Y_t dW_t$$

Durch Ergänzen mit Term, der 0 ergibt, erhält man:

$$\begin{aligned} d(X_t Y_t) &= d\left(\frac{1}{2} [X_t^2 + 2X_t Y_t + Y_t^2 - X_t^2 - Y_t^2]\right) \\ &= \left(d\frac{1}{2} (X_t + Y_t)^2 - d\frac{1}{2} (X_t^2) - d\frac{1}{2} (Y_t^2)\right) \end{aligned}$$

und durch Einsetzen der obigen Resultate

$$\begin{aligned} d(X_t Y_t) &= \left(\mu_X X_t + \mu_X Y_t + \mu_Y X_t + \mu_Y Y_t + \frac{1}{2}\sigma_X^2 + \sigma_X \sigma_Y + \frac{1}{2}\sigma_Y^2\right) dt \\ &\quad + (\sigma_X X_t + \sigma_X Y_t + \sigma_Y X_t + \sigma_Y Y_t) dW_t \\ &\quad - \left(X_t \mu_X + \frac{1}{2}\sigma_X^2\right) dt + \sigma_X X_t dW_t \\ &\quad - \left(\mu_Y Y_t + \frac{1}{2}\sigma_Y^2\right) dt + \sigma_Y Y_t dW_t \\ &= (0 + \mu_X Y_t + \mu_Y X_t + 0 + 0 + 0 + \sigma_X \sigma_Y) dt \\ &\quad + (0 + \sigma_X Y_t + \sigma_Y X_t + 0) dW_t \\ &= X_t (\mu_Y dt + \sigma_Y dW_t) + Y_t (\mu_X dt + \sigma_X dW_t) + \sigma_X \sigma_Y dt \\ &= X_t dY_t + Y_t dX_t + \sigma_X \sigma_Y dt \end{aligned}$$

Bemerkung 40. *Es gilt*

$$\begin{aligned} dX_t dY_t &= (\mu_X dt + \sigma_X dW_t) (\mu_Y dt + \sigma_Y dW_t) \\ &= \mu_X \mu_Y (dt)^2 + \mu_X \sigma_Y dt dW_t + \sigma_X \mu_Y dW_t dt + \sigma_X \sigma_Y (dW_t)^2 \\ &\approx \sigma_X \sigma_Y dt \end{aligned}$$

3.6.3 Schätzen der Volatilität

Man betrachte eine Stichprobe von täglichen returns

$$\mu_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$$

für $i = 1, \dots, n$. Dann kann man die Standardabweichung der Stichprobe schätzen durch $\sigma\sqrt{\tau}$, mit $\tau = 1/252$ (252 ist die Länge des Jahres = Anzahl Handelstage). Die Wahl von n ist wesentlich, mehr Beobachtungen führen nicht unbedingt zu einer besseren Schätzung, da sich die Volatilität über die Zeit hinweg verändern kann. Bei μ_t sollte man spätere Beobachtungen mehr gewichten. Man kann verschiedenen Modelle der Zeitreihenanalyse verwenden.

3.7 Martingale

In der Folge geht es darum ein Aktienpreismodell zu wählen, einen Masswechsel vorzunehmen, so dass $Z_t = S_t B^{-1}$ ein Marginal ist, und dann das Martingal-Repräsentations-Theorem zu verwenden (analog zum Binomialdarstellungssatz), um die Existenz einer replizierenden Strategie für den Claim zu zeigen. In der Folge muss eine solche dann noch konstruiert werden.

3.7.1 Definition und Beispiele Martingale

Definition 41. Ein Prozess M_t (mit einer Filtrierung $\mathcal{F}_t$) ist ein stetiges Martingal genau dann, wenn

- M_t ist $\mathcal{F}_t$ -messbar für alle t
- $E_Q(M_t) < \infty$ für alle t .
- $E_Q(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s$ für alle $s \leq t$.

Beispiel 42. $M_t = c \in \mathbb{R}$ (trivial)

Beispiel 43. $M_t = W_t$ für $t \geq 0$ (wichtiges Beispiel; Brownsche Bewegung W_t)
denn

$$\begin{aligned} E_Q(W_t|\mathcal{F}_s) &= E_Q(W_t - W_s + W_s|\mathcal{F}_s) \\ &= E_Q(W_t - W_s|\mathcal{F}_s) + E_Q(W_s|\mathcal{F}_s) \\ &= 0 + W_s \\ &= W_s \end{aligned}$$

mit $E_Q(W_t - W_s|\mathcal{F}_s) = E_Q(W_t - W_s) = E_Q(W_t) - E_Q(W_s) = 0 - 0 = 0$. Dabei gilt $E_Q(W_t - W_s|\mathcal{F}_s) = E_Q(W_t - W_s)$, da $W_t - W_s$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$.

Beispiel 44. $M_t = e^{\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}$ (wichtiges Martingal)
denn

$$\begin{aligned} E_Q(M_t|\mathcal{F}_s) &= E_Q\left(e^{\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}|\mathcal{F}_s\right) \\ &= E_Q\left(e^{\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t - \sigma W_s + \sigma W_s}|\mathcal{F}_s\right) \\ &= e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_s} E_Q\left(e^{\sigma W_t - \sigma W_s}|\mathcal{F}_s\right) \\ &= e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_s} E_Q\left(e^{\sigma(W_t - W_s)}|\mathcal{F}_s\right) \end{aligned}$$

$W_t - W_s$ sind unabhängige Zuwächse. Entsprechend gilt

$$E_Q(M_t|\mathcal{F}_s) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_s} E_Q\left(e^{\sigma(W_t - W_s)}\right)$$

Da die exponentiellen Momente von W_t existieren, gilt mit Hilfe der charakteristischen Funktion (s. Seite 46, Bemerkung 30) und mit $W_t - W_s \sim W_{(t-s)}$

$$\begin{aligned} E_Q(M_t|\mathcal{F}_s) &= e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_s} E_Q\left(e^{\sigma W_{(t-s)}}\right) \\ &= e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_s} E_Q\left(e^{i(-i)\sigma W_{(t-s)}}\right) \\ &= e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_s} E_Q\left(e^{i(-i)\sigma W_{(t-s)}}\right) \\ &= e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_s} e^{-\frac{1}{2}(i\sigma)^2(t-s)} \\ &= e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_s} e^{\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)} \\ &= e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_s} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t - \frac{1}{2}\sigma^2 s} \\ &= e^{\sigma W_s - \frac{1}{2}\sigma^2 s} \\ &= M_s \end{aligned}$$

Beispiel 45. $M_t = E(X|\mathcal{F}_t)$
denn

$$\begin{aligned} E_Q(M_t|\mathcal{F}_s) &= E_Q(E_Q(X|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_s) \\ &= E_Q(X|\mathcal{F}_s) \\ &= M_s \end{aligned}$$

Beispiel 46. $X_t = X_0 + \int_0^t \varphi_s dW_s$
denn (heuristisch)

$$\begin{aligned} E_Q(X_t|\mathcal{F}_s) &= E_Q\left(\left(X_0 + \int_0^s \varphi_u dW_u + \int_s^t \varphi_u dW_u\right) \middle| \mathcal{F}_s\right) \\ &= X_0 + \int_0^s \varphi_u dW_u + 0 \\ &= M_s \end{aligned}$$

3.7.2 Selbstfinanzierende Portfolios

Sei φ_t die Anzahl Aktien und ψ_t die Anzahl Bonds, φ_t vorhersehbar. Ein Portfolio ist ein Paar von Prozessen (φ_t, ψ_t) . Positive und negative Wert sind zugelassen (Leerverkauf zugelassen). Sei zudem der selbstfinanzierte Wertprozess

$$V_t = \varphi_t S_t + \psi_t B_t$$

gegeben.

Definition 47. Ein Portfolio (φ_t, ψ_t) ist selbstfinanzierend genau dann, wenn der Wertwechsel nur von der Wertveränderung des Basisinstrumentes abhängt, d.h. wenn

$$dV_t = \varphi_t dS_t + \psi_t dB_t$$

Beispiel 48. $S_t = W_t$; $B_t = 1$ (d.h. kein Zins):
Portfolio mit $\varphi_t = \psi_t = 1$ ist selbstfinanzierend, denn

$$\begin{aligned} V_t &= W_t + 1 \implies \\ dV_t &= dW_t \\ &= 1 \cdot dW_t + 1 \cdot 0 \\ &= \varphi_t dS_t + \psi_t dB_t \end{aligned}$$

Beispiel 49. Portfolio mit $\varphi_t = 2W_t$; $\psi_t = -t - W_t^2$; ($S_t = W_t$; $B_t = 1$) ist selbstfinanzierend, denn

$$\begin{aligned} V_t &= 2W_t W_t + (-t - W_t^2) \cdot 1 \\ &= 2W_t^2 - t - W_t^2 \\ &= W_t^2 - t. \end{aligned}$$

Mit

$$dS_t = (-1)dt + 1dW_t$$

und $F(S_t, t) := F(W_t, t) = W_t^2 - t$ kann man Itô-Formel anwenden:

$$\frac{\partial F}{\partial W_t} = 2W_t; \frac{\partial F}{\partial W_t^2} = 2; \frac{\partial F}{\partial t} = 1$$

$$\begin{aligned}
dV_t &= 2W_t dW_t + 1dt + \frac{1}{2}2(-1)^2 dt \\
&= 2W_t dW_t + 0dt \\
&= \varphi_t dW_t + \psi_t \cdot 0 \\
&= \varphi_t dW_t + \psi_t dB_t
\end{aligned}$$

Damit ist V_t ein selbstfinanzierendes Portfolio.

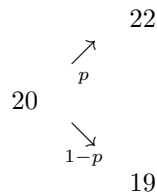
Wenn X ein Claim ist (z.B. $X = (S_T - k)_+$, d.h. europäische Call-Option, $\mathcal{F}_T$ -messbare ZV) der von Ereignissen bis zur Zeit T abhängt, dann ist eine replizierende Strategie für X eine selbstfinanzierendes Portfolio (φ, ψ) , so dass $E_Q\left(\int_0^T \sigma_t \varphi_t dt\right) < \infty$ und $X = \varphi_T S_T + \psi_T B_T$. Dann muss der Preis von X zur Zeit $t \leq T$ der Replikationsstrategie

$$V_t = \varphi_t S_t + \psi_t B_t$$

zu t entsprechen.

3.7.3 Masswechsel

Zur Erinnerung an den diskreten Fall: es geht darum, ein Mass so zu finden, dass der Erwartungswert zum Zeitpunkt t dem Wert zu t entspricht.



So ist z.B. bei $p = 0.5$

$$0.5 \cdot 22 + 0.5 \cdot 19 = 20.5 \neq 20$$

Will man den gewünschten Erwartungswert erhalten, dann wählt man q so, dass

$$q \cdot 22 + (1 - q) \cdot 19 = 20$$

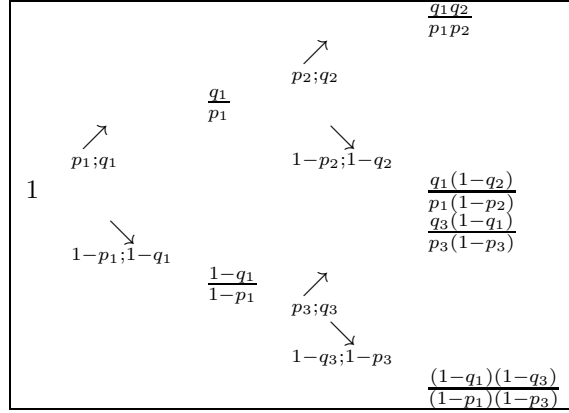
$$q = \frac{1}{3}.$$

Bemerkung 50. P und Q sind hier diskret mit denselben Atomen (gleiche Ereignisse sind möglich), d.h. die (implizite) Risikoprüfung ändert, ich kann aber keine Zweige löschen; ökonomisch eher irreführend.

Zu beachten ist, dass

$$q_{w_k} = \frac{q_{w_k}}{p_{w_k}} p_{w_k} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

Entsprechend kann man den Masswechsel auf einem Baum wie folgt darstellen (Radon-Nikodym-Prozess auf Baum):



Es stellt sich die Frage, wie man das auf den stetigen Fall verallgemeinern kann. Mit

$$\delta(\omega) = \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

gilt im diskreten Fall für $A \in \mathcal{F}$

$$Q(A) = \sum_{\omega \in A} \delta(\omega) P(\omega)$$

und im stetigen Fall:

$$Q(A) = \int_A \delta(\omega) dP(\omega)$$

Sei W_t eine P -Brownsche Bewegung. $W_t + \gamma t \neq 0$ ist dann keine P -Brownsche Bewegung (γ ist der Drift). Aus dem Cameron-Martin-Girsanov-Satz folgt: es existiert ein Mass Q , so dass $\tilde{W}_t = W_t + \gamma t$ ist eine Q -Brownsche Bewegung (kill the drift), wobei P und Q Masse auf dieselben σ -Algebren sind (und damit dieselben Ereignisse möglich sind. Man nennt P und Q äquivalente Masse und schreibt $P \sim Q$). Dabei ändert sich die Volatilität nicht.

Beispiel 51. Sei $X_t = \mu_t t + \sigma W_t$ mit der P -Brownschen Bewegung W_t . Man setzt $\gamma := \frac{\mu}{\sigma}$ so dass

$$\begin{aligned} X_t &= \mu_t t + \sigma W_t \\ &= \gamma \sigma t + \sigma W_t \\ &= \sigma (\gamma t + W_t) \end{aligned}$$

Es gibt nun ein Q , so dass

$$\tilde{W}_t = W_t + \frac{\mu}{\sigma} t$$

eine Q -Brownsche Bewegung ist. Entsprechend ist

$$X_t = \sigma \tilde{W}_t.$$

Diese Elemente werden nun zum Derivat-Preis-Modell von Black und Scholes zusammengesetzt (Fischer Sheffey Black (1938-1995), US-amerikanischer Wirtschaftswissenschaftler; Myron Samuel Scholes (1941-), kanadischer Wirtschaftswissenschaftler).

3.7.4 Das Black-Scholes Modell

(geht auf das Jahr 1973 zurück; verschaffte den Autoren den Nobel-Preis. Es wird von folgenden Annahmen ausgegangen:

- Leerverkäufe sind erlaubt

- keine Transaktionskosten; keine Steuern;
- Zinsen für Geldaufnahme und Geldanlage sind gleich und konstant
- beliebig teilbare Anlagen (z.B. 1/1000 einer Aktie)
- stetige Zeit (permanenter Handel)
- keine Arbitrage
- keine Dividenden (kann ohne Problem weggelassen werden)

Ein vernünftiges Aktienpreismodell ist gegeben durch

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

und damit

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t.$$

Die Lösung ist

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}$$

mit der P-Brownschen Bewegung W_t und $t \in [0, T]$, $T = \text{Verfallzeitpunkt}$.

Erster Schritt Sei Z_t der abdiskontierte Aktienpreisprozess. Es gilt diesen in ein Q -Martingal zu verwandeln:

$$\begin{aligned} Z_t &:= S_t e^{-rt} \\ &= e^{-rt} S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t} \\ &= S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t - rt} \\ &= S_0 e^{(\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t} \\ &= S_0 e^{(\mu - r)t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t} \\ &= S_0 e^{\frac{(\mu - r)}{\sigma} \sigma t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t} \\ &= S_0 e^{\sigma \left(\frac{(\mu - r)}{\sigma} t + W_t \right) - \frac{1}{2}\sigma^2 t} \end{aligned}$$

Gemäss Girsanov-Satz gibt es Q -Brownsche Bewegung $\tilde{W}_t = \gamma t + W_t$, so dass der Drift weg ist (hier $\gamma = \frac{(\mu - r)}{\sigma}$, d.h. $\tilde{W}_t = \frac{(\mu - r)}{\sigma} t + W_t$) und bezüglich Q dieselben Ereignisse möglich sind wie bezüglich P . Damit gilt dann

$$Z_t = S_0 e^{\sigma \tilde{W}_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}$$

für eine Q -Brownsche Bewegung $\tilde{W}_t$. Z_t ist mit $\tilde{W}_t$ ein Q -Martingal. Damit ist dann mit $B_t = e^{rt}$

$$\begin{aligned} S_t &= B_t Z_t = e^{rt} Z_t \\ &= e^{rt} S_0 e^{\sigma \tilde{W}_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t} \\ &= S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma \tilde{W}_t} \end{aligned}$$

der Aktienpreisprozess in der risikoneutralen Welt.
Mit Itô ist die dazugehörige Differentialgleichung

$$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

wobei r für risikolose Rendite steht (ersetzt μ in Formel bezüglich P).

Zweiter Schritt $E_t = E_Q(B_T^{-1}X|\mathcal{F}_t)$ ist der Wert des diskontierten Claims X ($\mathcal{F}_t$ -messbare ZV, z.B. Call Option) zu t . Ist ein Q -Martingal. $B_T^{-1} = e^{-rT}$.

Dritter Schritt Gemäss Martingal-Repräsentations-Theorem - das nicht für alle Martingale gilt - gibt es φ_t , so dass $\varphi_t(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ -vorhersehbar (previsible) ist und

$$dE_t = \varphi_t dZ_t. \quad (5)$$

(für die Intuition sei auf die Anwendung Binomialdarstellungssatz auf Seite 3.4.5 (Durchführung) verwiesen), mit

$$Z_t = S_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma \tilde{W}_t\right)$$

Der Ansatz ist damit: φ_t Aktien; ψ_t Bonds mit

$$\psi_t = E_t - \varphi_t Z_t. \quad (6)$$

Der Wert V_t des Replikationsportfolios zu t ist

$$\begin{aligned} V_t &= \varphi_t S_t + \psi_t B_t \\ &= \varphi_t S_t + (E_t - \varphi_t Z_t) B_t \\ &= \varphi_t S_t + E_t B_t - \varphi_t Z_t B_t \\ &= E_t B_t \end{aligned}$$

mit dem Bondpreis B_t zu t und $Z_t B_t = S_t$. Insbesondere ist

$$\begin{aligned} E_T B_T &= B_T E_Q(B_T^{-1}X|\mathcal{F}_T) \\ &= B_T B_T^{-1}X \\ &= X \end{aligned}$$

(mit dem Pay-off X).

Es fehlt noch die Selbstfinanzierung der Strategie (d.h. nur Finanzierung zu Beginn). Man muss zeigen, dass

$$dV_t = \varphi_t dS_t + \psi_t dB_t$$

gilt, was nicht trivial ist und mit dem Itô-Lemma berechnet wird, nämlich mit Hilfe der Itô-Produktregel:

$$d(E_t B_t) = B_t dE_t + E_t dB_t + dE_t dB_t$$

wobei $dE_t dB_t = 0$, weil B_t nicht stochastisch ist. Es gilt also mit (5) und (6):

$$\begin{aligned} d(E_t B_t) &= B_t \varphi_t dZ_t + (\psi_t + \varphi_t Z_t) dB_t \\ &= B_t \varphi_t dZ_t + \psi_t dB_t + \varphi_t Z_t dB_t \\ &= \varphi_t (B_t dZ_t + Z_t dB_t) + \psi_t dB_t \end{aligned}$$

Mit $B_t dZ_t + Z_t dB_t = Z_t dB_t$ ($dB_t = 0$) gilt

$$d(E_t B_t) = \varphi_t (Z_t dB_t) + \psi_t dB_t$$

und mit $Z_t B_t = S_t$

$$d(E_t B_t) = \varphi_t dS_t + \psi_t dB_t.$$

Also ist die Strategie selbstfinanzierend.

3.7.5 Zusammenfassung

- X claim
- S_t so dass $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$; $B_t = e^{rt}$
- Es gibt genau ein PF (φ_t, ψ_t) selbstfinanzierend, so dass

$$V_t = B_t E_Q (B_T^{-1} X | \mathcal{F}_t) = B_t E_t = \varphi_t S_t + \psi_t B_t$$

für alle $t \in [0, T]$ mit Q ist äquivalent mit P .

- Wert von X zu t :

$$V_t = B_t E_Q (B_T^{-1} X | \mathcal{F}_t)$$

- Mit

$$\varphi_t = \frac{\partial V}{\partial S_t},$$

und

$$\begin{aligned} \psi_t &= E_Q (B_T^{-1} X | \mathcal{F}_t) - \varphi_t S_t B_t^{-1} \\ &= E_t - \varphi_t Z_t \end{aligned}$$

ergibt sich Rezept für Bewertung (z.B. von europäischen Derivaten mit Auszahlungsfunktion $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$) zu $t = 0$

$$V_0 = E_Q (f(S_T)) e^{-rT}$$

mit

$$S_T = S_0 \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma \tilde{W}_T \right)$$

und

$$\tilde{W}_T \sim N(0, T)$$

Bemerkung 52. Als Bank möchte man noch φ_t konkret kennen. Zu finden ist φ_t , wobei

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_T \\ B_t &= e^{rt} \end{aligned}$$

Mittels Itô gilt für den Preis

$$V_t(S_t, t)$$

des Portfolios

$$dV_t(S_t, t) = \left(rS_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S_t} \sigma S_t d\tilde{W}_T$$

mit Selbstfinanzierung

$$dV_t(S_t, t) = \varphi_t \sigma S_t d\tilde{W}_T + \psi_t r B_t dt$$

wobei

$$\begin{aligned} rB_t dt &= dB_t \\ \varphi_t &= \frac{\partial V}{\partial S_t}. \end{aligned}$$

$\varphi_t \sigma S_t d\tilde{W}_T$ ist eindeutig bis auf Anfangswert.

3.7.6 Beispiel: Bewertung einer europäischen Call-Option

Gegeben:

$$V_0 = e^{-rT} E_Q(f(S_T)); T > 0$$

$$f(S_T) = X = (S_T - k)_+ = \max(S_T - k, 0), k > 0, k \text{ ist Strike}$$

Man möchte die Martingal-Verteilung von S_T unter Q finden.

$$S_T = S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma \tilde{W}_T}$$

Da

$$\tilde{W}_T \sim N(0, T)$$

unter Q , gilt

$$\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma \tilde{W}_T \stackrel{d}{=} Z + rT$$

mit ($\stackrel{d}{=}$ identisch in Verteilung) und

$$Z \sim N\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 T, \sigma^2 T\right)$$

Die Dichtefunktion von Z ist also

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \exp\left(-\frac{(z + \frac{1}{2}\sigma^2 T)^2}{2\sigma^2 T}\right).$$

Damit gilt dann:

$$S_T = S_0 e^{Z + rT}$$

und

$$\begin{aligned} V_0 &= e^{-rT} E_Q((S_T - k)_+) \\ &= e^{-rT} E_Q\left(S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma \tilde{W}_T} - k\right)_+ \\ &= e^{-rT} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \int_{-\infty}^{\infty} (S_0 e^{z + rT} - k)_+ \exp\left(-\frac{(z + \frac{1}{2}\sigma^2 T)^2}{2\sigma^2 T}\right) dz \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} (S_0 e^{z - rT} - k)_+ > 0 &\iff \\ S_0 e^{z - rT} - k > 0 &\iff \\ e^{z - rT} > \frac{k}{S_0} &\iff \\ z > \ln\left(\frac{k}{S_0}\right) - rT \end{aligned}$$

und damit

$$V_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \int_{\ln\left(\frac{k}{S_0}\right) - rT}^{\infty} (S_0 e^z - k e^{-rT}) \exp\left(-\frac{(z + \frac{1}{2}\sigma^2 T)^2}{2\sigma^2 T}\right) dz.$$

Mittels Substitution mit

$$\begin{aligned} v &= -\frac{z + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \\ \iff z &= -\sigma\sqrt{T}v - \frac{1}{2}\sigma^2 T \end{aligned}$$

erhält man mit

$$a := \frac{\ln\left(\frac{k}{S_0}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a \left(S_0 e^{-\sigma\sqrt{T} - \frac{1}{2}\sigma^2 T} - k e^{-rT} \right) e^{-\frac{1}{2}v^2} dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a \left(S_0 e^{-\sigma\sqrt{T} - \frac{1}{2}\sigma^2 T - \frac{1}{2}v^2} - k e^{-rT} e^{-\frac{1}{2}v^2} \right) dv \end{aligned}$$

Mit

$$-\sigma\sqrt{T}v - \frac{1}{2}\sigma^2 T - \frac{1}{2}v^2 = -\frac{1}{2}(v + \sigma\sqrt{T})^2$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a \left(S_0 e^{-\frac{1}{2}(v + \sigma\sqrt{T})^2} - k e^{-rT} e^{-\frac{1}{2}v^2} \right) dv \\ &= \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{1}{2}(v + \sigma\sqrt{T})^2} dv - \frac{k e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{1}{2}v^2} dv \end{aligned}$$

und wiederum mit Substitution $w := v + \sigma\sqrt{T}$

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a + \sigma\sqrt{T}} e^{-\frac{1}{2}w^2} dw - \frac{k e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{1}{2}v^2} dv \\ &= S_0 \Phi(a + \sigma\sqrt{T}) - k e^{-rT} \Phi(a) \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} a + \sigma\sqrt{T} &= \frac{\ln\left(\frac{S_0}{k}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T}{\sigma\sqrt{T}} + \sigma\sqrt{T} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{S_0}{k}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T + \sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{S_0}{k}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right) T}{\sigma\sqrt{T}} \end{aligned}$$

Mit $d_1 := a + \sigma\sqrt{T}$ gilt $d_2 := a = d_1 - \sigma\sqrt{T}$. Es gilt also (Black-Scholes-Formel)

$$\begin{aligned} V_0 &= S_0 \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{k}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right) T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - k e^{-rT} \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{k}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\ &= S_0 \Phi(d_1) - k e^{-rT} \Phi(d_2) \end{aligned}$$

Dabei setzt man nur voraus, dass der Drift konstant ist. Sein genauer Wert spielt keine Rolle.

Bemerkung 53. (für die Intuition): Sei

$$V_T = \varphi_t S_t + \psi_t B_t$$

und

$$dV_s = \varphi_s dS_s + \psi_s dB_s$$

(ist also selbstfinanzierend).

$$\int_0^t dV_s = \int_0^t \varphi_s dS_s + \int_0^t \psi_s dS_s$$

$$\int_0^t dV_s = V_t - V_0 \implies V_t = V_0 + \int_0^t \varphi_s dS_s + \int_0^t \psi_s dS_s. \text{ Damit ist } \int_0^t \varphi_s dS_s + \int_0^t \psi_s dS_s \text{ der Gewinn.}$$

3.7.7 Beispiel: Bewertung einer europäischen Put-Option

Kann wie oben durchgerechnet werden:

$$p = e^{-rT} E_Q((k - S_T)_+)$$

oder man kann die Put-Call-Parität verwenden:

$$p = c - S_0 + ke^{-rT}$$

Dies ergibt dann:

$$\begin{aligned} p &= S_0 \Phi(a + \sigma\sqrt{T}) - ke^{-rT} \Phi(a) - S_0 + ke^{-rT} \\ &= ke^{-rT} (1 - \Phi(a)) - S_0 (1 - \Phi(a + \sigma\sqrt{T})) \\ &= ke^{-rT} \Phi(-a) - S_0 \Phi(-(a + \sigma\sqrt{T})) \\ &= ke^{-rT} \Phi(-d_2) - S_0 \Phi(-d_1) \end{aligned}$$

$$\text{mit } a := \frac{\ln\left(\frac{k}{S_0}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_2 \text{ und } d_1 = a + \sigma\sqrt{T}.$$

3.7.8 Weitere Beispiele und Bemerkungen

- $S_0 = 40$, $r = 5\%$ (p.s. stetig); $T = 2Mt$, $k = 42$; $\mu = 20\%$
 $\sigma = 20\%$, call option;

$$c = 40 \cdot \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{40}{42}\right) + (0.05 + \frac{1}{2} \cdot 0.2^2) \cdot \frac{1}{6}}{0.2\sqrt{\frac{1}{6}}}\right) - 42e^{-0.05 \cdot \frac{1}{6}} \cdot \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{40}{42}\right) + (0.05 - \frac{1}{2} \cdot 0.2^2) \cdot \frac{1}{6}}{0.2\sqrt{\frac{1}{6}}}\right)$$

$$\frac{\ln\left(\frac{40}{42}\right) + (0.05 + \frac{1}{2} \cdot 0.2^2) \cdot \frac{1}{6}}{0.2\sqrt{\frac{1}{6}}} = -0.45467$$

$$\Phi(-0.45467) = 0.324673333$$

$$\frac{\ln\left(\frac{40}{42}\right) + (0.05 - \frac{1}{2} \cdot 0.2^2) \cdot \frac{1}{6}}{0.2\sqrt{\frac{1}{6}}} = -0.53632$$

$$\Phi(-0.53632) = 0.295868705$$

$$c = 40 \cdot 0.324673333 - 42e^{-0.05 \cdot \frac{1}{6}} \cdot 0.295868705 = 0.66357$$

- Bewerte Straddle

$$|k - S_t|_+ = (S_T - k)_+ + (k - S_T)_+$$

Zu berechnen ist

$$E^{-rT} E_Q(|k - S_t|_+) = e^{-rT} E_Q\left(\left|S_0 e^{(r + \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\tilde{W}_T} - k\right|\right)$$

- Variante der Fragestellung: Finde WK, so dass europäische Call in der realen Welt ausgeübt wird. Hier ist μ wichtig.

$$P\left(S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T} > 42\right)$$

Achtung, hier wird P und nicht Q verwendet. Achtung: Black-Scholes (B-S) ist für Europäische Optionen.

- Oft ist c_m (call Marktpreis) bekannt. Dann kann man die B-S-Formel numerisch nach σ_T auflösen (= implizite Volatilität)
- Probleme (empirisch). Empirisch beschreibt die Brownsche Bewegung Märkte nicht wirklich. Die Volatilität ist für steigende k bei Fremdwährungsmärkten zuerst sinkend, dann steigend (Vola-Smile) - also nicht konstante Volatilität. Bei Aktienpreismärkten ist die Volatilität eine strikt monoton sinkende Funktion (also auch nicht konstant).

3.7.9 Blacks Formel

Man kann die B+S-Formel umschreiben, so dass sie allgemeiner anwendbar ist. Die Formel wird „Blacks Formel“ genannt. Man klammert in der Black-Scholes-Formel

$$c = S_0 \Phi(d_1) - ke^{-rT} \Phi(d_2)$$

im rechten Term

$$e^{-rT}$$

aus und erhält

$$c = e^{-rT} (S_0 e^{rT} \Phi(d_1) - k \Phi(d_2)) .$$

Mit

$$F := S_0 e^{rT}$$

und

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{F}{k}\right) &= \ln\left(\frac{S_0 e^{rT}}{k}\right) = \ln\left(\frac{S_0}{k}\right) + rT \implies \\ \ln\left(\frac{S_0}{k}\right) &= \ln\left(\frac{F}{k}\right) - rT \end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned} c &= e^{-rT} \left(F \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{k}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - k \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{k}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \right) \\ &= e^{-rT} \left(F \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{F}{k}\right) - rT + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - k \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{F}{k}\right) - rT + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \right) \\ c &= e^{-rT} \left(F \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{F}{k}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - k \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{F}{k}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \right) \end{aligned}$$

Dabei ist F der Futures Preis von S_0 . Die Formel funktioniert auch für Fremdwährungsmärkte mit

$$F = S_0 e^{(r-u)t}$$

mit dem Zins u der Fremdwährung oder für stetige Dividenden:

$$F = S_0 e^{(r-q)T}$$

3.7.10 Fremdwährungen

Man betrachtet folgende Instrumente:

- Bond $B_t = e^{rt}$ (in einheimischer Währung)
- Bond $D_t = e^{ut}$ (in Fremdwährung; u Fremdzinssatz)

- Wechselkurs $C_t = C_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right)$

(C = currency).

$$\begin{aligned} dC_t &= \mu C_t dt + \sigma C_t dW_t \\ \frac{dC_t}{C_t} &= \mu dt + \sigma dW_t \end{aligned}$$

gelöst durch Itô:

$$C_t = C_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right)$$

mit dem P -B-Prozess W_t . Handelbar ist

$$S_t = C_t D_t$$

Nun wird ein Q gesucht, so dass

$$\begin{aligned} Z_t &= B_t^{-1} S_t = B_t^{-1} C_t D_t \\ &= e^{-rt} C_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right) \cdot e^{ut} \\ &= C_0 \exp\left(\left(\mu + u - r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right) \end{aligned}$$

ein Martingal wird. Dies ergibt:

$$\begin{aligned} Z_t &= C_0 \exp\left(\sigma W_t + \left(\mu + u - r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right) \\ &= C_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma\left(W_t + \frac{\mu + u - r}{\sigma}t\right)\right) \end{aligned}$$

Und mit dem Maswechseltheorem

$$Z_t = C_0 \exp\left(\sigma \tilde{W}_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right),$$

$$C_t = B_t D_t^{-1} Z_t = C_0 \exp\left(\left(r - u - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma \tilde{W}_t\right)$$

Der Forward Preis ist $F = e^{(r-u)T} C_0$ und damit ist der Preis einer Europäischen Call-Option auf eine Fremdwährung

$$V_0 = e^{-rT} \left(F \Phi\left(\frac{\ln \frac{F}{k} + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma \sqrt{T}}\right) - k \Phi\left(\frac{\ln \frac{F}{k} - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma \sqrt{T}}\right) \right)$$

3.7.11 Dividenden

Beispiel 54. Europäische Call-Option mit Dividende. Dividendenauszahlung in 2 Mt und in 5 Mt. Erwartete Dividende 0.5 (für beide Auszahlungszeitpunkte). Aktienpreis = 40; Volatilität 30%; risikofreie Zinsrate 9% (p.a.). Verfall in 6 Mt. Barwert der Dividenden:

$$D = 0.5e^{-\frac{2}{12} \cdot 0.09} + 0.5e^{-\frac{5}{12} \cdot 0.09} = 0.97415$$

Der Optionspreis kann berechnet werden mit der B+S-Formel mit $S_0 = 39.0259$; $k = 40$; $r = 0.09$; $\sigma = 0.3$; $T = 0.5$; Resultat: 3.67.

$$\begin{aligned}
& 39.0259 \cdot \Phi \left(\frac{\ln\left(\frac{39.0259}{40}\right) + \left(0.09 + \frac{1}{2}0.3^2\right)0.5}{0.3\sqrt{0.5}} \right) - 40e^{-0.09 \cdot 0.5} \Phi \left(\frac{\ln\left(\frac{39.0259}{40}\right) + \left(0.09 - \frac{1}{2}0.3^2\right)0.5}{0.3\sqrt{0.5}} \right) \\
& \frac{\ln\left(\frac{39.0259}{40}\right) + \left(0.09 + \frac{1}{2}0.3^2\right)0.5}{0.3\sqrt{0.5}} = 0.20198 \\
& \frac{\ln\left(\frac{39.0259}{40}\right) + \left(0.09 - \frac{1}{2}0.3^2\right)0.5}{0.3\sqrt{0.5}} = -0.010154 \\
& \Phi(0.20198) = 0.58003382 \\
& \Phi(-0.010154) = 0.49594921 \\
& 39.0259 \cdot 0.58003382 - 40e^{-0.09 \cdot 0.5} 0.49594921 = 3.6713
\end{aligned}$$

Stetige Dividenden werden sofort reinvestiert. Ein Aktien-PF mit Reinvestition der Dividenden q kann behandelt werden wie Fremdwährungen: Man ersetzt u durch q . Der Forward-Preis ist $F = e^{(r-q)T} S_0$ und man verwendet die Blackformel. Man kann auch die ursprüngliche Call-B+S-Formel verwenden, wobei man S_0 durch $S_0 e^{-qT}$ ersetzt.

3.7.12 Call-Preise während Laufzeit

Man ersetzt in B+S S_0 durch S_t und berechnet den Wert für die restliche Laufzeit (mit $\sigma(S_t)$, der durch S_t induzierten σ -Algebra).

$$\begin{aligned}
V_t &= e^{-r(T-t)} E_Q((S_T - k)_+ | \mathcal{F}_t) \\
&= e^{-r(T-t)} E_Q(f(S_T) | \mathcal{F}_t) \\
&= e^{-r(T-t)} E_Q\left(f\left(S_0 \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W_T\right)\right) | \mathcal{F}_t\right) \quad (\text{weil Markovprozess}) \\
&= e^{-r(T-t)} E_Q\left(f\left(S_0 \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W_T\right)\right) | \sigma(S_t)\right) \\
&= e^{-r(T-t)} E_Q\left(f\left(S_0 \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W_T + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) + \sigma(W_T - W_t)\right)\right)\right) | \sigma(S_t)\right) \\
&= e^{-r(T-t)} E_Q\left(f\left(S_0 \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma(W_T - W_t)\right)\right) | \sigma(S_t)\right)
\end{aligned}$$

Da $f \circ \sigma(S_t)$ -messbar ist und $(W_T - W_t)$ unabhängig von $\sigma(S_t)$ ist, und $W_T - W_t$ verteilt ist wie W'_{T-t} , ist $(W'_t)_t$ unabhängig von $(W_t)_t$. Man kann also S_0 durch S_t ersetzen und B+S für die restliche Laufzeit berechnen (man ersetzt T durch $T - t$).

3.7.13 B+S-Differentialgleichungen

(andere Herleitung der B+S-Diff-Gleichungen)

Sei ein PF Π mit Long Call Option und Short Δ Aktien gegeben (Δ = Anzahl Aktien):

$$\begin{aligned}
\Pi &= V(S_t, t) - \Delta S \implies \\
d\Pi &= dV - \Delta dS
\end{aligned}$$

Mit Itô für $V(S_t, t)$ erhält man

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt$$

Also ist

$$\begin{aligned}
d\Pi &= dV - \Delta dS \\
&= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt - \Delta dS
\end{aligned}$$

wobei $\frac{\partial V}{\partial S}$ und ΔdS risikobehaftet sind. Falls

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

gilt

$$\begin{aligned} d\Pi &= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt - \frac{\partial V}{\partial S} dS \\ &= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt \end{aligned}$$

Das Risiko verschwindet, d.h.

$$\begin{aligned} d\Pi &= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt \end{aligned}$$

ist wie ein Bond. Entsprechend muss

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt = r(V - \Delta S) = r \left(V - S \frac{\partial V}{\partial S} \right) dt$$

sein und man erhält die Black-Scholes Gleichung

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt - r \left(V - S \frac{\partial V}{\partial S} \right) dt &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - r \left(V - S \frac{\partial V}{\partial S} \right) &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV - rS \frac{\partial V}{\partial S} &= 0 \end{aligned}$$

Diese Differentialgleichung ist unter der Bedingung

$$V(S_T, T) = f(S_T, T)$$

zu lösen, was auf die $B + S$ -Formel für Calls führt.

3.7.14 Greek Letters

Sei Π ein Portfolio.

$$\Delta = \frac{\partial \Pi}{\partial S}$$

drückt die Empfindlichkeit der Wertentwicklung des Portfolios gegenüber der Wertentwicklung der Komponenten des Portfolios aus. Die Grösse ist definiert, da diese mit $\Pi = V_1 + V_2 + \dots + V_n$ definiert ist (Additivität). $\Delta_i = \frac{\partial \Pi}{\partial S_i}$ (Delta einer spezifischen Option).

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\partial \Pi}{\partial t} \\ \Gamma &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2} \end{aligned}$$

eines Portfolios. Die Griechischen Buchstaben erfüllen die B+S-Differentialgleichung

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \Gamma + rS \Delta + \theta = r\Pi$$

Zudem werden verwendet

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma} \quad (\text{Vega}) \\ \rho &= \frac{\partial \Pi}{\partial r} \quad (\text{rho}). \end{aligned}$$

3.7.15 Amerikanische Optionen

Der Käufer einer Amerikanischen Option hat die Wahl, wann er ausüben will, hat aber nur die Preisinformation bis zum jeweils gegenwärtigen Zeitpunkt.

Der Pay-Off einer Put-Option ist

$$(k - S_\tau)_+$$

mit dem zufälligen Ausübungszeitpunkt τ . Der Barwert der Auszahlung ist

$$e^{-\tau r} (k - S_\tau)_+$$

wobei τ nun zufällig ist. Man möchte

$$\sup_{\tau \in [0, T]} (E(e^{-\tau r} (k - S_\tau)_+))$$

kennen. Eine schwierige Aufgabe (es gibt keine Formel, noch ungelöst).

Der Pay-Off einer Call-Option ist

$$(S_\tau - k)_+$$

Der Writer der Option muss sich bei der Festlegung der Prämie auf den schlimmsten Fall einstellen, nämlich auf

$$V_0 = \sup_{\tau \in [0, T]} E(e^{-\tau r} (S_\tau - k)_+)$$

3.7.16 Exotische Optionen

Oft kann man komplizierte Derivate als Combinationen von Call und Put Optionen darstellen und damit gemäss entwickelten Methoden bewerten.

Beispiel im Skript (S. 37). Ein 5-Jahres Kontrakt hat als Ertrag (1) 90% der Ratio von End- und Anfangswert des FTSE. Der Pay off ist 130%, wenn der Ertrag weniger ist als gemäss (1) und 180% wenn er mehr ist. Der FTSE Drift sei $\mu = 7\%$, die Volatilität 15%. Die FTSE Dividendenrate 4%. Die Zinsrate r ist 6.5%. Der Claim ist

$$X = \min(\max(1.3, 0.9S_T), 1.8)$$

mit $T = 5$ und $S_0 = 1$. Hier das entsprechende Integral auszurechnen wäre etwas mühsam. Nützlich sind die folgenden Zusammenhänge:

$$\begin{aligned}\max(a, b) &= (a - b)_+ + b \\ \min(a, b) &= a - (a - b)_+\end{aligned}$$

Damit ist dann mit $0.9 \cdot 1.\bar{4} = 1.3$

$$\begin{aligned}X &= \min(\max(1.3, 0.9S_T), 1.8) \\ &= \min(0.9 \max(S_T, 1.\bar{4}), 1.8) \\ &= \min(0.9(S_T - 1.\bar{4})_+ + 1.3, 1.8) \\ &= 1.3 + \min(0.9(S_T - 1.\bar{4})_+, 1.8 - 1.3) \\ &= 1.3 + 0.9 \min\left((S_T - 1.\bar{4})_+, \frac{5}{9}\right) \\ &= 1.3 + 0.9 \left((S_T - 1.\bar{4})_+ - \left((S_T - 1.\bar{4})_+ - \frac{5}{9} \right)_+ \right) \\ &= 1.3 + 0.9 \left((S_T - 1.\bar{4})_+ - (S_T - 2)_+ \right)\end{aligned}$$

mit $1.\bar{4} + \frac{5}{9} = 2$.

Damit ist X die Differenz von zwei FTSE Calls plus Cash. Der Forward-Preis $F = e^{(r-q)T} S_0 = 1.133$. Die beiden Calls haben einen Wert von 0.0422 und 0.0067, so dass

$$V_0 = 1.3e^{-rT} + 0.9(0.0422 - 0.0067) = 0.9712$$

Bemerkung 55. *(Schlussbemerkung) Mathematisch und fundamental in der ganzen Theorie ist die Maxime „no arbitrage“, d.h.*

$$e^{-rT} E_Q(X) = r$$

Intuitiv ist das durchaus problematisch. Wer möchte Aktien kaufen, wenn der Barwert einer solcher Investition identisch ist mit dem Barwert eines entsprechenden Bonds.

4 Optimale Portfolios

Wenn richtig abgesichert, liefern Derivate risikolose Erträge. Die Banken machen sich das zunutze, wobei sie zusätzlich für Ihre Produkte etwas mehr verlangen, als sie Wert sind. Fond Manager kaufen und verkaufen Assets und Derivate mit dem Ziel, die Raten der Bank-Erträge zu schlagen. Dies erfordert, ein gewisses Risiko einzugehen.

4.1 Erwartungswert-Varianz-Methode

4.1.1 Definitionen und Grundbegriffe

Die Methode wurde von H. Markowitz (Harry Max Markowitz (August 1927 -) US-amerikanischer Ökonom. 1990 Nobel-Preis-Gewinner Ökonomie) entwickelt. Sei $P_i(t)$ der Preis eines Assets i zur Zeit t , so dass $P_i(0)$ sein Startpreis ist. Die Ertragsraten (=: Ertrag; return)

$$R_i := \frac{P_i(t) - P_i(0)}{P_i(0)}$$

werden als Zufallsvariablen modelliert mit

$$\begin{aligned}\mu_i &:= E(R_i) \\ \sigma_{ij} &:= \text{Cov}(R_i, R_j).\end{aligned}$$

Die Kovarianzmatrix wird mit Σ symbolisiert. Wenn ein Asset risikofrei ist, dann sind die Varianz und die Kovarianzen 0. π_i sei das Verhältnis der Aktien eines Types zur Gesamtinvestition eines Investors:

$$\pi_i = \frac{\psi_i P_i(0)}{X}$$

mit der Anzahl ψ_i Aktien $P_i(0)$.

$$\pi = (\pi_1, \dots, \pi_d)$$

ist der Portfolio-Vektor mit

$$\sum_{i=1}^d \pi_i = 1.$$

Wenn Leerverkauf nicht erlaubt ist, dann sollten alle Komponenten des Portfolios nicht negativ sein. Solche Portfolios werden „zulässig“ (admissible) genannt. Die gesamte Ertragsrate ist gegeben durch

$$R = \sum_{i=1}^d \pi_i R_i.$$

Entsprechend ist

$$E(R) = E\left(\sum_{i=1}^d \pi_i R_i\right) = \sum_{i=1}^d \pi_i E(R_i) = \sum_{i=1}^d \pi_i \mu_i$$

$$\begin{aligned}
V(R) &= E\left((R - E(R))^2\right) \\
&= E\left(\left(\sum_{i=1}^d \pi_i R_i - \sum_{i=1}^d \pi_i \mu_i\right)^2\right) \\
&= E\left(\left(\sum_{i=1}^d \pi_i (R_i - \mu_i)\right)^2\right) \\
&= E\left(\left(\sum_{i=1}^d \pi_i (R_i - \mu_i)\right)\left(\sum_{j=1}^d \pi_j (R_j - \mu_j)\right)\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^d \pi_i \pi_j E((R_i - \mu_i)(R_j - \mu_j)) \\
&= \sum_{i,j=1}^d \pi_i \pi_j \text{Kov}(R_i, R_j) \\
&= \sum_{i,j=1}^d \pi_i \sigma_{ij} \pi_j.
\end{aligned}$$

4.1.2 Erwartungswert-Varianz-Prinzip

Man möchte für ein PF einen maximalen Erwartungswert und ein minimales Risiko (Varianz) erreichen. Man kann nicht beides optimieren, sondern muss eine optimale Mischung der beiden erwirken. Man kann

- für ein festgelegtes $\sigma_{\max}^2$ ein zulässiges Portfolio wählen, so dass $\mu(\pi)$ maximal wird oder man kann
- für ein festgelegtes $\mu_{\min}$ ein zulässiges Portfolio wählen mit minimaler Varianz.

Die mathematische Formulierung des Problems führt auf ein quadratisches Optimierungsproblem.

Beispiel 56. (Standardprüfungsbeispiel) mit zwei unkorrelierten R_i und $0 \leq \pi_i \leq 1$:

$$\begin{array}{lll}
\mu_1 = 0.5 & \sigma_{11} = 0.3 & \sigma_{12} = 0 \\
\mu_2 = 0.2 & \sigma_{22} = 0.5 & \sigma_{21} = 0
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\mu &:= E(R) \\
&= 0.1\pi_1 + 0.2\pi_2 \\
&= 0.1\pi_1 + 0.2(1 - \pi_1) \\
&= 0.1\pi_1 + 0.2 - 0.2\pi_1 \\
&= 0.2 - 0.1\pi_1 \\
\sigma &:= V(R) \\
&= 0.3\pi_1^2 + 0.5\pi_2^2 \\
&= 0.3\pi_1^2 + 0.5(1 - \pi_1)^2 \\
&= 0.8\pi_1^2 - \pi_1 + 0.5
\end{aligned}$$

Man kann nun μ als Funktion von σ ausdrücken, indem man in

$$\sigma = 0.8\pi_1^2 - \pi_1 + 0.5$$

nach π_1 auflöst und dann in

$$\mu = 0.2 - 0.1\pi_1$$

π_1 ersetzt. Man erhält:

$$\pi_{1_1} = 0.625 \sqrt{3.2\sigma - 0.6} + 0.625$$

$$\pi_{1_2} = 0.625 - 0.625 \sqrt{3.2\sigma - 0.6}$$

und eingesetzt:

$$\mu(\sigma) = 0.2 - 0.1 (0.625 \sqrt{3.2\sigma - 0.6} + 0.625)$$

$$\mu(\sigma) = 0.2 - 0.1 (0.625 - 0.625 \sqrt{3.2\sigma - 0.6})$$

Die beiden Funktionen schneiden sich in 0.1875 (Dort liegt das PF mit der minimalen Varianz. Für eine alternative Berechnungsweise siehe Entwicklungen nach dem Beispiel). Dies ergibt die Graphik:

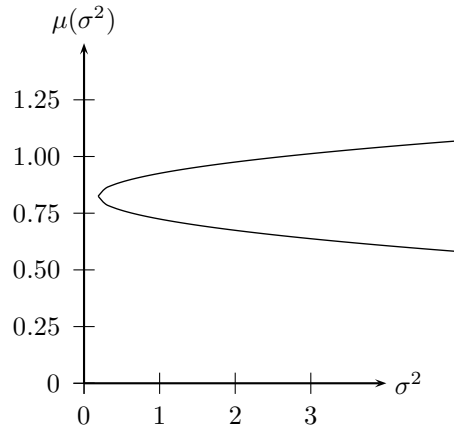


Abbildung 28: Quadratisches Restriktionssystem (Risiko-Return-Diagramm)

Allgemeiner gilt bei zwei R_i und $0 \leq \pi_i \leq 1$ für die Berechnung des PF mit minimaler Varianz:

$$\begin{aligned} \mu(\pi_1) &= \mu_1\pi_1 + \mu_2(1 - \pi_1) \\ \sigma^2(\pi_1) &= \sigma_{11}^2\pi_1^2 + \sigma_{22}^2(1 - \pi_1)^2 + 2\sigma_{12}(\pi_1(1 - \pi_1)) \\ &= \sigma_{11}^2\pi_1^2 + \sigma_{22}^2(1 - \pi_1)^2 + 2\sigma_{12}\pi_1 - 2\sigma_{12}\pi_1^2 \end{aligned}$$

(es gilt $\sigma_{12} = \sigma_{21}$). Leitet man $\sigma^2(\pi_1)$ nach π_1 ab, ergibt sich

$$\frac{d}{d\pi_1}\sigma^2(\pi_1) = 2\sigma_{11}^2\pi_1 - 2\sigma_{22}^2(1 - \pi_1) + 2\sigma_{12} - 4\sigma_{12}\pi_1$$

Setzt man mit 0 gleich:

$$2\sigma_{11}^2\pi_1 - 2\sigma_{22}^2(1 - \pi_1) + 2\sigma_{12} - 4\sigma_{12}\pi_1 = 0 \implies$$

$$\pi_1^* = \frac{\sigma_{22}^2 - \sigma_{12}}{\sigma_{11}^2 - 2\sigma_{12} + \sigma_{22}^2}$$

Mit der Korrelation ρ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}\sigma_{22}} \implies \\ \sigma_{12} &= \rho\sigma_{11}\sigma_{22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_1^* &= \frac{\sigma_{22}^2 - \sigma_{12}}{\sigma_{11}^2 - 2\sigma_{12} + \sigma_{22}^2} \\ &= \frac{\sigma_{22}^2 - \rho\sigma_{11}\sigma_{22}}{\sigma_{11}^2 - 2\rho\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2}\end{aligned}$$

(Ergibt Schnittpunkt der beiden obigen Kurven. Es ist noch zu prüfen, ob $0 \leq \pi_1 \leq 1$, denn ausserhalb dieser Grenzen nur bei Leerverkäufen möglich).

Beispiel 57. Für Berechnung des PF mit minimaler Varianz:

$$\begin{array}{lll}\mu_1 = 0.1 & \sigma_{11}^2 = 0.3 & \rho = -0.8 \\ \mu_2 = -0.2 & \sigma_{22}^2 = 0.5 & \end{array}$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned}\pi_1^* &= \frac{0.5 + 0.8 \cdot \sqrt{0.3} \cdot \sqrt{0.5}}{0.3 + 0.5 - 2 \cdot -0.8 \sqrt{0.3} \cdot \sqrt{0.5}} \\ &= 1.6649.\end{aligned}$$

Man kann nun μ und σ berechnen:

$$\begin{aligned}\mu(1.6649) &= \mu_1 1.6649 + \mu_2 (1 - 1.6649) \\ &= 0.1 \cdot 1.6649 + -0.2 \cdot (1 - 1.6649) \\ &= 0.29947\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma^2(1.6649) &= \sigma_{11}^2 1.6649^2 + \sigma_{22}^2 (1 - 1.6649)^2 + 2\sigma_{12} (1.6649 (1 - 1.6649)) \\ &= 0.3 \cdot 1.6649^2 + 0.5 (1 - 1.6649)^2 + 2(-0.8) \sqrt{0.3} \sqrt{0.5} (1.6649 (1 - 1.6649)) \\ &= 1.7386\end{aligned}$$

Wenn $0 \leq \pi_1^* \notin [0, 1]$ und Leerverkäufe nicht erlaubt sind, dann wählt man für π_1 0 oder 1. Für $\pi_1 = 1$:

$$\begin{aligned}\mu(1) &= \mu_1 \\ &= 0.1\end{aligned}$$

$$\sigma^2(1) = \sigma_{11}^2 = 0.3$$

Für $\pi_1 = 0$ würde man einen negativen Erwartungswert mit grösserem Risiko erhalten - keine vernünftige Wahl.

Die Zielfunktion (objective function) kann man schreiben als

$$f(\pi_1) = AE(R) + \sigma_R^2,$$

wobei f zu minimieren ist. $A \geq 0$ ist ein Faktor, der die Einstellung zum Risiko repräsentiert. Mit $A = 0$ wird das PF mit der kleinsten Varianz gewählt. Wenn A steigt, akzeptiert der Investor ein höheres Risiko, um den Erwartungswert des Ertrags zu steigern. Mit $A = 1$ werden der Erwartungswert und das Risiko gleich stark bewertet. Mit den obigen Formeln ergibt sich als Zielfunktion:

$$f(\pi_1) = A(\mu_1 \pi_1 + \mu_2 (1 - \pi_1)) + \sigma_{11}^2 \pi_1^2 + \sigma_{22}^2 (1 - \pi_1)^2 - 2\rho\sigma_{11}\sigma_{22}\pi_1 (1 - \pi_1)$$

Je nach dem A ergibt sich ein anderer Punkt auf dem Rand des Restriktionssystem (eine andere Tangente an das Restriktionssystem). Durch Ableiten erhält man:

$$\frac{df(\pi_1)}{d\pi_1} = -A(\mu_1 - \mu_2) + 2\pi_1\sigma_{11}^2 - 2(1 - \pi_1)\sigma_{22}^2 + 2(1 - 2\pi_1)\rho\sigma_{11}\sigma_{22}$$

Mit 0 identifiziert ergibt:

$$\pi_1^* = \frac{\frac{1}{2}A(\mu_1 - \mu_2) + \sigma_{22}^2 - \rho\sigma_{11}\sigma_{22}}{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - 2\rho\sigma_{11}\sigma_{22}}$$

Wenn Leerverkäufe verboten sind und $0 \leq \pi_1^* \notin [0, 1]$, wird 0 oder 1 gewählt.

4.2 Risikofreie Assets und die Kapitalmarktklinie

Ein Portfolio mit dem Return R_p enthalte zwei Assets, eines davon risikofrei. Das andere kann als Portfolio mit dem Return R bestehend aus mehreren risikobehafteten Assets betrachtet werden, mit dem erwarteten Ertrag $E(R)$ und der Varianz $V(R)$. Sei x der Anteil an Geld, der in das risikobehaftete Asset investiert wird. Zudem werfe das risikofreie Asset einen Ertrag von r ab. Dann gilt für das kombinierte PF

$$\begin{aligned} E(R_p) &= xE(R) + (1-x)r \\ V(R_p) &= x^2V(R) \end{aligned}$$

Damit ist

$$x = \sqrt{\frac{V(R_p)}{V(R)}}$$

Mit $\sigma(R) := \sqrt{V(R)}$ und $\sigma(R_p) := \sqrt{V(R_p)}$ erhält man

$$\begin{aligned} E(R_p) &= \frac{\sigma(R_p)}{\sigma(R)}E(R) + r - \frac{\sigma(R_p)}{\sigma(R)}r \\ &= r + \frac{\sigma(R_p)}{\sigma(R)}(E(R) - r) \end{aligned}$$

- eine Funktion in $\sigma(R_p)$ (r , $E(R)$ und $\sigma(R)$ sind Konstanten). Damit ist ein PF mit einem risikofreien und einem risikobehafteten Anteil eine Gerade. Der Tangentialpunkt M auf dem Rand der Menge zulässiger PFs repräsentiert das Marktportfolio oder die beste Kombination von risikobehafteten Assets. Die optimale Position auf der Kapitalmarktklinie entspricht dem Grad des bevorzugten Risikos. Wenn über M hinaus investiert wird, entspricht das zu Investitionszwecken geliehenen Geldern.

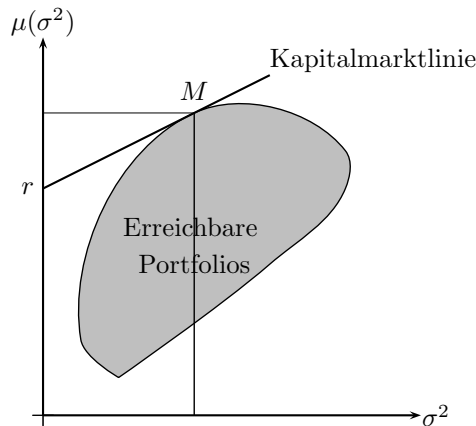


Abbildung 29: Kapitalmarktklinie

Wenn die Kreditzinsen r_B von Sparzinsen r_L auf der Bank verschieden sind, dann gibt es zwei Tangenten.

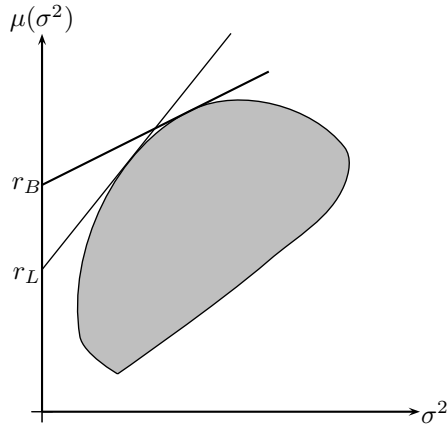


Abbildung 30: Kapitalmarktklinien bei unterschiedlichen Zinsen für Kredite oder Spareinlagen

4.3 Das Capital Asset Pricing Model (CAPM)

Man geht davon aus, dass der Ertrag (Return) eines Assets linear modelliert werden kann mittels des Marktindex und Zufallsfaktoren, d.h.

$$R_j = \alpha_j + \beta_j R_M + \varepsilon_j$$

mit dem Ertrag R_M des Marktportfolios (zufällig) und dem Zufalls-Fehler-Term ε_j mit $E(\varepsilon_j) = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} Kov(R_j, R_M) &= E(R_j R_M) - E(R_j) E(R_M) \\ &= E(\alpha_j R_M + \beta_j R_M^2 + \varepsilon_j R_M) - E(\alpha_j + \beta_j R_M + \varepsilon_j) E(R_M) \\ &= E(\alpha_j R_M) + E(\beta_j R_M^2) + E(\varepsilon_j R_M) - E(\alpha_j) E(R_M) - E(\beta_j) E(R_M) - E(\varepsilon_j) E(R_M) \\ &= \beta_j E(R_M^2) - (E(R_M))^2 \\ &= \beta_j Var(R_M) \end{aligned}$$

Entsprechend kann man β_j von R_j definieren durch

$$\beta_j = \frac{Kov(R_j, R_M)}{Var(R_M)}.$$

Es gilt die folgende wichtige Darstellung von $E(R_j)$ (hängt nicht mehr von α_j ab; mit der risikofreien Zinsrate r ; $E(R_M) - r$ ist die Risikoprämie; β_j drückt aus: je risikobehafteter, desto mehr schwankt die Rendite)

Satz 58. $E(R_j) = r + \beta_j (E(R_M) - r)$

Beweis. Sei M' ein PF, das Asset A_j enthält. Die konvexen Kombinationen von A_j und M' (d.h. $t(A_j) + (1-t)M'$ mit $t \in [0, 1]$) können in der (σ, μ) -Ebene als Kurven gezeichnet werden. Diese Kurve geht durch M derart, dass die Tangente auf die Kurve auf M mit der Kapitalmarktklinie übereinstimmt (s. folgende Bemerkung). Deren Steigung beträgt (s. Abbildung 29)

$$\frac{E(R_M) - r}{\sigma_M}$$

Die Kurve, die M und A_j durchläuft, hat die folgende parametrische Darstellung:

$$\begin{aligned} r_t &= (1-t) E(R_M) + t E(R_j) \\ \sigma_t &= \sqrt{(1-t)^2 \sigma_M^2 + t^2 \sigma_j^2 + 2(1-t)t Kov(R_j, R_M)} \end{aligned}$$

Durch Differentiation nach t (in $t = 0$) ergibt sich

$$\begin{aligned} r'_t &= -E(R_M) + E(R_j) \\ \sigma'_t &= -\sigma_M + \beta_j \sigma_M \end{aligned}$$

Da

$$\frac{r'_t}{\sigma'_t} = \frac{E(R_M) - r}{\sigma_M}$$

in $t = 0$, erhält man

$$\begin{aligned} \frac{-E(R_M) + E(R_j)}{-\sigma_M + \beta_j \sigma_M} &= \frac{E(R_M) - r}{\sigma_M} \implies \\ \sigma_M (-E(R_M) + E(R_j)) &= (-\sigma_M + \beta_j \sigma_M) (E(R_M) - r) \implies \\ -\sigma_M E(R_M) + \sigma_M E(R_j) &= -\sigma_M E(R_M) + \beta_j \sigma_M E(R_M) + r \sigma_M - r \beta_j \sigma_M \implies \\ E(R_j) &= \frac{\beta_j \sigma_M E(R_M) + r \sigma_M - r \beta_j \sigma_M}{\sigma_M} \\ &= \beta_j E(R_M) + r - r \beta_j \\ &= r + \beta_j (E(R_M) - r) \end{aligned}$$

□

Bemerkung 59. Man nehme ein PF aus M , z.B. $M = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, $M' = (\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3})$ und $A_j = (0, 1, 0)$. Fürs Beispiel gilt $\frac{1}{4}(0, 1, 0) + \frac{3}{4}(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}) = M$

Das β_j kann man mit dem folgenden linearen Model schätzen:

$$r_{j,t} = \alpha_j + \beta_j r_{M,t} + \varepsilon_{j,t}$$

wobei $r_{j,t}$ der Return des Assets j in der t -ten Periode ist, $r_{M,t}$ ist der Return des Marktportfolios in der t -ten Periode. α_j ist der Ordinatenabschnitt, $\varepsilon_{j,t}$ ist das Residuum für die Periode t . Oder man kann β_j schätzen durch

$$\hat{\beta}_j = \frac{\widehat{Kov}(R_j, R_M)}{\widehat{Var}(R_M)}.$$

Zusätzlich gilt

$$V(R_j) = \beta_j^2 V(R_M) + V(\varepsilon_j)$$

und unter Voraussetzung der Unabhängigkeit der R_i für $i \neq j$

$$\begin{aligned} Kov(R_i, R_j) &= Kov(\alpha_i + \beta_i R_M + \varepsilon_i, \alpha_j + \beta_j R_M + \varepsilon_j) \\ &= \beta_i \beta_j V(R_M) \end{aligned}$$

Zuletzt kann das Beta des Portfolios als gewichtete Summe der Betas der individuellen Assets geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \beta_\Pi &= \frac{Kov(R_\Pi, R_M)}{V(R_M)} \\ &= \frac{Kov(\sum \pi_i R_i, R_M)}{V(R_M)} \\ &= \sum \pi_i \frac{Kov(R_i, R_M)}{V(R_M)} \\ &= \sum \pi_i \beta_i \end{aligned}$$

4.4 Absichern des Wertes eines Portfolios

Sei

$$E(R_j) = r + \beta_j (E(R_M) - r)$$

wie im vorherigen Kapitel. R_M ist die Markttrendite, approximiert durch Indexentwicklung. Man verkauft Index-Futures (short futures, d.h. Kontrakt, dass man in Zukunft etwas verkauft), um risikolos zu werden. Wenn $\beta_{\Pi} = 2$ werden mehr Index-Futures verkauft als wenn $\beta_{\Pi} = 1$ und es werden weniger Index-Futures verkauft, wenn $\beta_{\Pi} = \frac{1}{2}$. Wenn $\beta_{\Pi} = 0$, werden keine Index-Futures verkauft.

Die korrekte Anzahl Kontrakte für die Absicherung des Wertes eines PF ist

$$\beta \frac{P}{A}$$

mit dem Wert P des Portfolios und dem Wert A des Assets, das einem Future-Kontrakt unterliegt (Börsen-Index). Bei Verfall gilt

$$\tilde{\beta} = \beta \frac{P}{P - \beta P} + \frac{-\beta P}{P - \beta P} = 0$$

mit der Short Position $-\beta P$.

Beispiel 60. *Man kauft eine Aktie, verkauft einen Future auf die Aktie (zu Preis, der abgezinst dem Wert der Aktie heute entspricht). Wenn korrekt verzinst ist das ganze risikolos.*

Beispiel 61. *(Beispiel aus dem Skript) PF von 2'100'000\$. $T = 3$ Mt; $\beta = 1.5$ (d.h. PF verändert sich stärker als Markt). Auf dem Markt hat es 4 Mt S&P-500-Index-Futures (1 Pt = 250\$), deren Wert im Augenblick t_0 $S_0 = 900$ beträgt. Der Wert der Assets, die einem Future unterliegen, ist damit $900 \cdot 250 = 225\,000$.*

Anzahl zu verkaufender Futures:

$$\beta \frac{P}{A} = \frac{2100000}{900 \cdot 250} = 14$$

Sei $r = 4\%$ p.a. (risikofrei; in 3 Monaten 1%) und der Marktreturn der nächsten 3 Mt -7% , wobei sich der Return des PF entsprechend verhält. Das gibt dann gemäss $E(R_{\Pi}) = r + \beta(E(R_M) - r)$

$$1 + 1.5(-7 - 1) = -11$$

Als nächstes sei angenommen, dass die unterliegenden Assets eine Dividende von 2% abwerfen (also 0.5% in 3 Mt). Damit sinkt der Index statt um -7% um -7.5% , d.h. der Wert des Futures in 3 Mt ist

$$F_{3Mt} = (900 - 0.075 \cdot 900) \cdot e^{(0.04 - 0.02) \cdot \frac{1}{12}} = 833.89$$

(Der S&P ist ein Kursindex, Dividenden werden nicht reinvestiert). Der Futures-Preis in 4 Mt ist

$$\begin{aligned} F_{4Mt} &= S_0 e^{(r-d)4Mt} \\ &= 900 e^{(0.04 - 0.02) \cdot \frac{1}{3}} \\ &= 906.02 \end{aligned}$$

Dies ergibt den folgenden Futures-Gewinn

$$(906.02 - 833.89) \cdot 250 \cdot 14 = 252455$$

Der totale Verlust/Gewinn des PF ist damit

$$0.11 \cdot 2100000 = 231000$$

Dies ergibt einen Netto-Gewinn des PF von

$$252455 - 231000 = 21455$$

was nahe an den risikolosen Marktzinssatz herankommt:

$$0.01 \cdot 2100000 = 21000$$

Es stellt sich die Frage, wieso man in diesem Falle absichert und nicht risikofrei investiert. Wenn der Investor glaubt, dass das PF gut gewählt ist, kann er durch Absichern die Risiken der Marktbewegungen abfangen. Das verbleibende Risiko ist die Performance des PF relativ zum Markt.

4.5 Risiko-Beurteilung von Portfolios

Sei X ein Verlust. Das Risiko der Investition ist um so höher, je höher die Wahrscheinlichkeit hoher Verluste ist. Es stellt sich die Frage, wie man das quantifizieren kann. Der Erwartungswert $E(X)$ ist nicht so günstig (hat nicht genug Wiederholungen, weswegen das Risiko bleibt). Entsprechend wurden verschiedene Risikomasse entwickelt. Ein erstes solches Mass ist der Value at Risk (VaR), dessen Angabe oft gesetzlich vorgeschrieben ist. Es handelt sich um den maximalen Verlust, der mit einer WK von α nicht überschritten wird:

$$\begin{aligned} \text{VaR}_\alpha(X) &= \inf\{x | P(X > x) \leq 1 - \alpha\} \\ &= \inf\{x | 1 - P(X < x) \leq 1 - \alpha\} \\ &= \inf\{x | -P(X < x) \leq -\alpha\} \\ &= \inf\{x | P(X < x) \geq \alpha\} \end{aligned}$$

Beispiel 62. Gelte für die ZV Verlust $X \sim N(0, 1)$ und sei $\alpha = 0.95$. Dann ist

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{0.95}(X) &= \inf\{x | P(X > x) \leq 1 - 0.95\} \\ &= \inf\{x | P(X > x) \leq 0.05\} \\ &= \Phi^{-1}(0.95) \\ &= 1.644853627 \end{aligned}$$

Problem mit VaR: Bei Glockenkurven wie der Normalverteilung geeignet, bei anderen Verteilungen nicht unbedingt (z.B. bei einer Dichtefunktion, die im rechten 0.05-Bereich noch einen Buckel hat).

Bemerkung 63. Wieso Definition mittels $\inf$? Verteilungsfunktionen sind hier als rechtsstetig definiert. Es geht darum, bei konstanten Teilstücken der Verteilungsfunktion den Wert links zu erwischen.

Bemerkung 64. (prüfungsrelevant) Ist X (Verlust) normalverteilt mit Erwartungswert 0, so ist die VaR proportional zur Standardabweichung (Volatilität). Für die tägliche Volatilität normalverteilter X gilt

$$\sigma_{\text{day}} = \frac{\sigma_{\text{yr}}}{\sqrt{252}} \approx 0.06\sigma_{\text{yr}}$$

bei 252 Handelstagen. Bei der geometrischen Brownschen Bewegung mit

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW_t$$

ist der erste Term bei kurzen Fristen viel kleiner als der Term mit der Volatilität, weshalb er vernachlässigt wird. Damit wird die Veränderung ΔS approximiert durch $\sigma S Z \sqrt{\Delta t}$, wobei dW_t als Produkt der standardnormalverteilten ZV Z und dem Zeitintervall Δt geschrieben wird. Bei der Verwendung der täglichen Volatilität sollte die Zeit ebenfalls in Tagen gemessen werden. Damit wird der VaR der Preisveränderung zum Produkt $\sigma S Z \sqrt{\Delta t}$ und dem entsprechenden Quantil der Standardnormalverteilung. Bei $\Delta t = 5$ Tagen, $\sigma_{\text{day}} = 0.02$; $S = 1000$, wäre $\text{VaR}_{0.95} = 1000 \cdot 0.02 \cdot \sqrt{5} \cdot 1.65 = 73.79$

Beispiel 65. PF mit 10 Millionen IBM Aktien, $\sigma_{day} = 0.02$. Die erwarteten Returns der Aktien sind kleiner als die Volatilität (z.B. 13% pa. ergibt 0.05% p.d.). Die Standardabweichung des Wertes des PF über $N = 10$ Tagen sei

$$\begin{aligned}\sigma_{day} \cdot \sqrt{10} \cdot 10 \cdot 10^6 &= 0.02 \cdot 10 \cdot 10^6 \\ &= 632456\end{aligned}$$

Da $\Phi(-2.33) = 0.01$, ist der $VaR_{0.99}(PF) = 2.33 \cdot 632456 = 1473621$.

4.5.1 Lineares Modell

Die Veränderung des Wertes einer Option erfüllt

$$\frac{\delta f}{\delta S} = \Delta$$

wobei Δ „Delta der Option f “ genannt wird. Damit gilt

$$\delta f = \Delta \delta S$$

und unter Hinzunahme des stochastischen Terms:

$$\delta f = \Delta \sigma S Z \sqrt{\delta t}$$

Wenn das PF Π verschiedene Optionen enthält, erhält man

$$\delta \Pi = \sum_{i=1}^n \Delta_i S_i \delta x_i,$$

mit Δ_i dem Delta des PF in Bezug auf die i -te Marktvariable (die partielle Ableitung des Werte nach der i -ten Aktienpreis), S_i dem Werte der i -ten Marktvariable und $\delta x_i = \sigma_i Z_i \sqrt{\delta t}$, der zufälligen, relativen Veränderung des Wertes der i -ten Marktvariable. δx_i muss nicht unabhängig sein. $\delta x_i \sim N(0, \sigma_i^2 \delta t)$; $Z_i \sim N(0, 1)$.

Beispiel 66. (wichtiges Beispiel) Optionen auf IBM-Aktien; $\Delta = 1000$ bei 120\$ pro Aktie; AT&T : $\Delta = 20000$ bei 30\$ pro Aktie. Dann ist

$$\begin{aligned}\delta \Pi &= 120 \cdot 1000 \cdot \delta x_1 + 30 \cdot 20000 \cdot \delta x_2 \\ &= 120000 \delta x_1 + 600000 \delta x_2\end{aligned}$$

Ist nun die tägliche Volatilität der IBM-Aktie 2% und des AT&T 1%, sowie die Korrelation 0.7, ergibt sich die folgende Standardabweichung des PF (in 1000):

$$\sqrt{(120 \cdot 0.02)^2 + (600 \cdot 0.01)^2 + 2 \cdot 120 \cdot 0.02 \cdot 600 \cdot 0.01 \cdot 0.7} = 7.8689$$

Damit ist die 5-Tage $VaR_{0.95}$

$$1.65 \cdot \sqrt{5} \cdot 7.8689 = 29033$$

Zu beachten ist, dass dabei dreimal Approximationen exakte Werte ersetzen. Entsprechend kann man versuchen, bessere Näherungen zu erwirken, durch Approximation höherer Ordnung (s. Skript S. 44, quadratisches Modell, führt allerdings zu Problemen wegen Cross-Gammas).

4.5.2 Eigenschaften der VaR

Positive Homogenität Für alle $\lambda > 0$ gilt: $VaR_\alpha(\lambda X) = \lambda VaR_\alpha(X)$
denn

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(\lambda X) &= \inf\{x | P(\lambda X > x) \leq 1 - \alpha\} \\ &= \inf\{x | P(X > \frac{x}{\lambda}) \leq 1 - \alpha\} \end{aligned}$$

Mit $y = \frac{x}{\lambda} \implies x = y\lambda$ gilt

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(\lambda X) &= \inf\{\lambda y | P(X > y) \leq 1 - \alpha\} \\ &= \lambda \inf\{y | P(X > y) \leq 1 - \alpha\} \\ &= \lambda VaR_\alpha(X) \end{aligned}$$

Addition einer Konstante Für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt: $VaR_\alpha(X + c) = c + VaR_\alpha(X)$
denn

$$VaR_\alpha(X + c) = \inf\{x | P(X + c > x) \leq 1 - \alpha\}$$

Mit $y := x - c$

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(X + c) &= \inf\{y + c | P(X > x - c) \leq 1 - \alpha\} \\ &= \inf\{y + c | P(X > y) \leq 1 - \alpha\} \\ &= c + \inf\{y | P(X > y) \leq 1 - \alpha\} \\ &= c + VaR_\alpha(X) \end{aligned}$$

Monotonie Wenn $X \leq Y$ dann $VaR_\alpha(X) \leq VaR_\alpha(Y)$

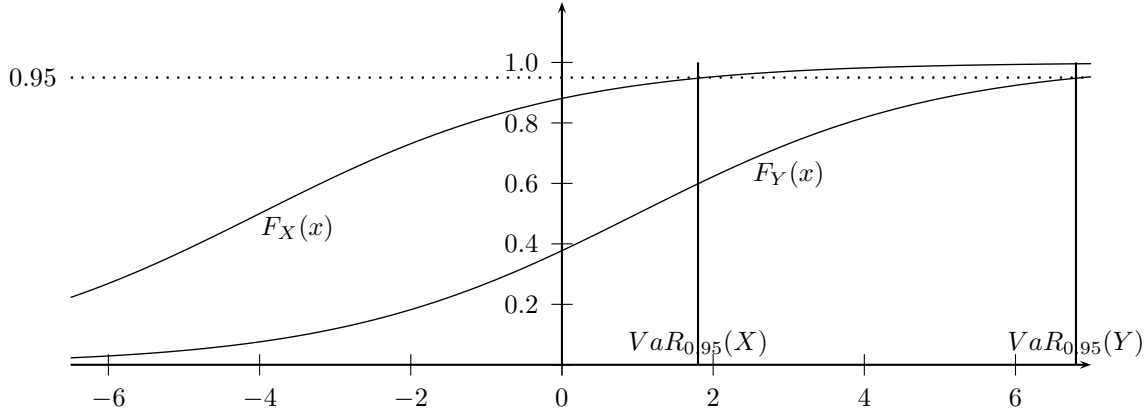


Abbildung 31: Graphik zur Monotonie: Verteilungsfunktionen F_X und F_Y für $X \leq Y$; gestrichelte Linie = 0.95

Fehlende Subadditivität Subadditivität würde bedeuten, dass

$$VaR_\alpha(X + Y) \leq VaR_\alpha(X) + VaR_\alpha(Y).$$

Die Subadditivität gilt für Standardabweichungen, da

$$\sigma_{X+Y} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\rho\sigma_X\sigma_Y} \leq \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} \leq \sqrt{(\sigma_X + \sigma_Y)^2} = \sigma_X + \sigma_Y.$$

Inhaltlich besagt sie die Risikoreduktion durch Diversifikation. Die Subadditivität gilt zwar für normalverteilte X (da wie oben bemerkt, VaR in diesem Fall zur Standardabweichung proportional ist) und nahe verwandte Verteilungen, aber z.B. nicht für binomialverteilte ZV, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 67. Sei der Graph der W -Funktion von zwei identisch verteilter ZV X und Y jeweils

$$\{(0, 0.98), (1, 0.02)\}.$$

Entsprechend ist der Graph von F_X und F_Y $\{(0, 0.98), (1, 1)\}$. Sei $\alpha = 0.975$. Dann ist

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{0.975}(X) &= \inf\{x | P(X > x) \leq 0.025\} \\ &= 0 = \text{VaR}_{0.97}(Y) \end{aligned}$$

Für unabhängige derart verteilte X und Y gilt

$$\begin{aligned} P(X = 0, Y = 0) &= 0.98 \cdot 0.98 = 0.9604 \\ P(X = 1, Y = 0) &= P(X = 0, Y = 1) = 0.98 \cdot 0.02 = 0.0196 \\ P(X = 1, Y = 1) &= 0.02^2 = 0.0004 \end{aligned}$$

Damit ist der Graph der Verteilungsfunktion der Faltung dieser ZV:

$$\{(0, 0.9604), (1, 0.9604 + 2 \cdot 0.0196), (2, 1)\} = \{(0, 0.9604), (1, 0.9996), (2, 1)\}$$

Damit ist $\text{VaR}_{0.975}(X + Y) = 1$.

Beispiel 68. realistischeres Beispiel s. Skript (S. 45, 100 unabhängige risikobehaftete Bonds). Der Preis sei 100 pro Bond, nach einer gewissen Zeit erhält man 105 mit $p = 0.98$ oder 0 mit $1 - p = 0.02$. Die Verlust ist damit

$$L_i = \begin{cases} 100 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0.02 \\ -5 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0.98 \end{cases}$$

Es werden zwei PF verglichen, beide mit einem Startwert von 10000. PF A besteht nur aus einem Typ von Bonds (mit gleichem Risikoverhalten). PF B ist diversifiziert auf alle 100 Bonds.

$$\text{VaR}_{0.95}(L_A) = \text{VaR}(100L_i) = 100\text{VaR}(L_i) = 100 \cdot -5 = -500$$

Im $\text{VaR}(L_B)$ zu berechnen, wird die bernoulli-verteilte Zufallsvariable Y_i definiert (Y_i nimmt den Wert 1 an, wenn Bond verliert, 0 sonst). Damit gilt

$$L_i = 100Y_i - 5(1 - Y_i) = 105Y_i - 5.$$

Der Gesamtverlust des PF ist also

$$L_B = \sum_{i=1}^{100} L_i = \sum_{i=1}^{100} (105Y_i - 5) = 105 \sum_{i=1}^{100} Y_i - 500.$$

Damit ist

$$\text{VaR}(L_B) = 105\text{VaR}\left(\sum_{i=1}^{100} Y_i\right) - 500,$$

wobei $\sum_{i=1}^{100} Y_i$ binomialverteilt ist mit $n = 100$ und $p = 0.02$. Entsprechend ist

$$\text{VaR}\left(\sum_{i=1}^{100} Y_i\right) = 5$$

und

$$VaR(L_B) = 105 \cdot 5 - 500 = 25.$$

Damit ist das $VaR_{0,95}$ im diversifizierten Fall höher als im nicht diversifizierten, was der Finanzwirklichkeit widerspricht.

Das Problem mit VaR führt zu allgemeineren Überlegungen zu Risikomassen.

4.6 Risikomasse

Man kann Risikomasse wie folgt definieren. Sei

$$\rho(X)$$

eine reellwertige Funktion (= Risikomass), welche das Risiko einer ZV X definiert, wobei X den Gewinn ausdrücke. Dann nennt man ein Risikomass monetär, wenn gilt

- wenn $X \leq Y$, dann $\rho(X) \geq \rho(Y)$ (Monotonie)
- $\rho(X + a) = \rho(X) - a$ für $a \in \mathbb{R}$

Es wird normalisiert genannt, wenn

- $\rho(X) = 0$

Es wird kohärent genannt, wenn es monetär ist und zudem die folgenden Bedingungen erfüllt:

- $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$ für $\lambda \geq 0$ (positive Homogenität)
- $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ für alle X, Y (Subadditivität)

Beispiel 69. Für Gewinne

$$TVaR_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 VaR_t(x) dt$$

und für Verluste

$$\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha VaR_t(x) dt$$

5 Risiko und Versicherungen

5.1 Kreditrisiken

Es gibt Bonds mit mehr oder weniger Risiko. Regierungsanleihen gelten als relativ risikolos (je nach Staat). Die Bonds stabiler Staaten werden entsprechend als Referenzpunkt gewählt, um die Risiken anderer Bonds zu bewerten. Die Bewertung erfolgt mittels „Default Losses“. Es handelt sich um die Kosten, welche bei der Ausschüttung von Bonds für das höhere Risiko bezahlt werden müssen. Sie sind definiert als

$$\frac{\text{Barwert risikoloser Bond} - \text{Barwert risikobehafteter Bond}}{\text{Barwert risikoloser Bond}}$$

und werden gewöhnlich in % angegeben.

Beispiel 70. *Sei z.B.*

$$100 \cdot e^{-0.05} = 95.1229$$

der Barwert einer risikolosen Obligation und

$$100 \cdot e^{-0.0525} = 94.8854$$

der Barwert einer risikobehafteteren Obligation. Dann ist der Default Loss

$$\frac{95.1229 - 94.8854}{95.1229} \cdot 100 = 0.24968\%$$

5.2 Nicht-Lebensversicherungen

Das Alter spielt bei Nicht-Leben keine Rolle - im Gegensatz zu Lebensversicherungen.

P_t : Summe der Prämien bis t , d.h. im Intervall $]0, t]$

C_t : Summe der Schäden bis t , d.h. im Intervall $]0, t]$

Die Prämien sind einfach zu modellieren:

$$P_t = ct + u$$

mit c und u konstant. u ist das Anfangskapital. Die Prämien werden also als deterministischer Prozess dargestellt: C_t ist schwieriger zu modellieren: zufällige Zeitpunkte und zufällige Höhen der Schäden. Die Zeitpunkte werden mit einem homogenen Poissonprozess mit Intensität λ modelliert:

$$N_t : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$N_t = \#\{\text{Schäden bis Zeitpunkt } t\}$$

Es handelt sich um eine Treppenfunktion, mit Treppenstufenhöhen 1. Der Prozess ist nicht stetig, aber P -fast überall stetig. Zudem gilt:

- $N_0 = 0$
- $N_t - N_s \sim P(\lambda(t-s))$ (der Parameter ist also von der betrachteten Zeitspanne $t-s$ abhängig, P für Poisson-Verteilung)
- unabhängige Zuwächse: für eine beliebige Zerlegung $0 < t_1 < \dots < t_{i+1} < \infty$ von $\mathbb{R}^+$ gilt, $N_{t_{i+1}} - N_{t_i}$ ist gemeinsam unabhängig von $N_{t_{j+1}} - N_{t_j}$ für $i \neq j$.

Die Zeiten, an denen Schäden (Forderungen) erfolgen, seien Werte der Zufallsvariablen $S_1, S_2, \dots$. $T_i = T_{i+1} - T_i$ für $i > 0$ seien die Zufallsvariablen, welche die Zeitspannen zwischen den Schäden

annehmen, d.h. $T_i = S_{i+1} - S_i$. Dann ist

$$\begin{aligned} P(T_1 > t) &= P(S_1 > t) \\ &= P(N_t = 0) \\ &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^0}{0!} \\ &= e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Die Verteilungsfunktion ist damit

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda t},$$

womit T_1 exponentialverteilt mit Parameter λ . Sind die T_i i.i.d. sind, gilt entsprechend allgemein, dass T_i exponentialverteilt sind - mit Parameter λt . Die identische Verteiltheit wird durch die konstante Intensitätsfunktion $\lambda(t)$ gewährleistet.

Weiterhin gilt für i.i.d. Zufallsvariablen T_i (Parameter λt):

$$\begin{aligned} P(T_1 + T_2 > t) &= P(N_t \leq 1) \\ &= e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \frac{\lambda t^1}{1!} \\ &= e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Die Ableitung nach t ergibt

$$\frac{d}{dt} (e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t}) = -\lambda e^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t} - \lambda^2 t e^{-\lambda t} = -\lambda^2 t e^{-\lambda t}$$

Dies ist die Dichtefunktion der Gamma-Verteilung mit den Parametern λ und 2. Damit ist die Summe von i.i.d. exponentialverteilten ZV mit dem λ Gammaverteilt mit dem Parametervektor $(2, \lambda)$. Allgemein gilt für i.i.d. $T_i \sim \text{Exp}(\lambda)$:

$$\sum T_i \sim \text{Ga}(n, \lambda)$$

Es gilt

$$S_n = \sum_{i=1}^n T_i.$$

Die Summe C_t der Schadens-Auszahlungen Z_i (Z_i ist i.i.d. ZV, welche die Schadenshöhe als Wert annimmt) ist

$$C_t = \sum_{i=1}^{N_t} Z_i$$

Es handelt sich um einen zusammengesetzten Poissonprozess (compound Poisson process).

5.2.1 Risikoprozess

Der Risikoprozess X_t ist definiert als

$$X_t = u + P_t - C_t.$$

Für Interpretation der Symbole s. vorangegangene Ausführungen dieses Kapitels. Es handelt sich um einen stochastischen Prozess (Levi-Prozess). Wird $X_t < 0$, ist die Versicherung ruiniert. Wann tritt dieser Fall ein?

Vorüberlegung (letzter Schritt mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit):

$$E(C_t) = E\left(\sum_{i=1}^{N_t} Z_i\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(E\left(\sum_{i=1}^k Z_i \mid N_t = k\right) \cdot P(N_t = k) \right)$$

Damit ist dann wegen $Z_0 = 0$ und der Unabhängigkeit und identischen Verteiltheit der ZV Z_i und N_t

$$\begin{aligned} E(C_t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^k (E(Z_i) \cdot P(N_t = k)) \\ &= E(Z_i) \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(N_t = k) \\ &= E(Z_i) E(N_t) \\ &= \mu \cdot \lambda t \end{aligned}$$

mit $\mu := E(Z_i)$ (= erwarteter typischer Schaden; $N_t \sim P(\lambda t)$). Damit gilt dann für den Erwartungswerte des Risikoprozesses

$$\begin{aligned} E(X_t) &= u + ct - \mu \cdot \lambda t \\ &= u + t(c - \mu\lambda) \end{aligned}$$

Ist $c < \lambda\mu$ so ist die Versicherung *f.s.* irgendwann ruiniert. Ist $c = \lambda\mu$, so gilt $E(X_t) = u$. Ist $X_t - \mu \sim N(0, ..)$, so besteht Möglichkeit des Ruins. Um den Ruin möglichste zu vermeiden, braucht es Prämien $c > \lambda\mu$ mit

$$\begin{aligned} c &:= (1 + \delta) \lambda\mu \\ \delta &> 0. \end{aligned}$$

δ wird „safetyloading“ genannt. Die Sicherheit dabei ist aber nicht vollkommen. Man möchte WK berechnen, dass trotzdem ein Ruin erfolgt.