

Zéro de polynômes avec R

Pour un polynôme du n-ième degré

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

on écrit :

`polyroot(c(a0, a1, a3, a4, ..., an))`

(si $a_i = 0$, il faut mettre 0 ; si $a_i = 1$, il faut mettre 1)

(exemple : pour $f(x) = x^5 + 3x^2 - 5$ on écrit : `polyroot(c(-5,0,3,0,0,1))`)

zéros réels : accompagnés par +0000000i ou -0000000i.

Zéros d'autres fonctions continues

Par un graphique ou un tableau des valeurs trouver un intervalle où il y a un zéro.

graphique de la fonction

On écrit :

`f=function(x)` expression décrivant la fonction

p.ex. pour

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x^5}{\ln(5x^3) + 3} - 4$$

on écrit :

`f=function(x) (2*x^2+3*x^5)/(log(5*x^3)+3)-4`

Chercher le domaine de définition. En l'occurrence, il faut enlever $] -\infty, 0]$.

Ensuite on peut dessiner par ex. (graphique entre 0.0000001 et 2 sur l'axe des x) :

`plot(f,xlim=c(0.0000001,2))`

(on peut ajouter l'axe des x par „`abline(0,0)`“ et l'axe des y par „`lines(c(0,0),c(y1,y2))`“ en choisissant des y_i convenables à l'aide du graphique déjà dessiné).

tableau des valeurs :

écrire : `x=seq(0.01,3,0.01)`

(produit un vecteur (= n-uplet) de valeurs d'une suite arithmétique de -0.01 à 3, par pas de 0.01)

Continuer par

`cbind(x,f(x))`

($f(x)$ doit être défini, voir sous „graphique de la fonction“)

On peut voir pour l'exemple ci-dessus : Il y a un zéro entre 1.44 et 1.45.

calcul du zéro

`uniroot(f,c(1.44,1.45),tol=10^-20)` # tol pour la précision (tolérance)

le zéro est 1.441467 (précision : `f(1.441467)=1.776357e-15`)

Coefficient d'un polynôme à travers des points avec Excel

On a des points $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, trouvés par l'expérience. Si c'est raisonnable de supposer que les x_i et les y_i sont reliés par une fonction, on cherche une fonction qui traverse ces points. Souvent on pense à un polynôme (simplicité du choix, assez flexible). Ce choix n'est pas d'une nécessité logique, mais d'ordre pragmatique : on essaie de trouver un modèle raisonnable. Il faut par la suite contrôler si le modèle est acceptable (p.ex. pour une fonction de coût, le polynôme doit entre autre être strictement croissant dans le premier quadrant). n points déterminent un polynôme du $(n - 1)$ -ième degré, si le système d'équations suivant a une solution unique.

$$\begin{aligned} y_1 &= a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x_1^{n-2} + a_{n-2}x_1^{n-1} \\ &\vdots \\ y_n &= a_0 + a_nx + \dots + a_{n-2}x_n^{n-2} + a_nx_n^{n-1} \end{aligned}$$

On peut représenter ce système par $Ac = y$ en posant :

A = Tableau ($n \times n$ -matrice) des valeurs résultant de l'utilisation des x_i donnés par les points (premières composantes des points)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

c = vecteur (= n-uplet) des coefficients (les inconnus) comme colonne

y = vecteur $(y_1, \dots, y_n) = (f(x_1), \dots, f(x_n))$ comme colonne - valeurs données par les points (deuxièmes composantes des points) !

et en définissant la „multiplication“ suivante : $\sum_j a_{ij}c_j = y_i$ pour tout ligne i de A .

On cherche un B , tel que $BA = E$ (E est la matrice qui contient partout des zéros, sauf dans la diagonale principale où il y a des 1. p.ex.

$$E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme $Ec = c$ pour tout vecteur c de longueur adaptée, on obtient pour ce cas : $BAc = Ec = c$ et par conséquent :

$$\begin{aligned} Ac &= y \iff \\ BAc &= By \iff \\ c &= By \end{aligned}$$

On traitera le calcul de B plus tard. Avec Excel on peut procéder de la manière suivante :

Ecrire la matrice A dans $n \times n$ cellules.

Marquer $n \times n$ cellules vides et écrire „=inversemat(A)“ (pour A on met la référence à la matrice A)

ctrl, shift, enter.

Ecrire y comme colonne de n cellules.

Ensuite on multiplie B avec y : On marque une colonne de n cellules vides et on écrit „produitmat(B ; y)“ (pour B on met la référence à la matrice B , pour y la référence au vecteur y)

ctrl, shift, enter.