

Recueil de formules, définitions et théorèmes

1 Théorie des ensembles

Définition 1.1. x est un ensemble si et seulement si il existe un y de sorte que $y \in x$, ou $x = \emptyset$ ($\emptyset$ = ensemble vide). $\diamond$

Définition 1.2. $x \notin z$ si et seulement si n'est pas élément de $x \in z$ $\diamond$

Axiome 1 : (Si pour tout x , $x \in A$ si et seulement si $x \in B$), alors $A = B$

Théorème 1.3. Si $A = B$, alors pour tout x , $x \in A$ si et seulement si $x \in B$.

Théorème 1.4. $\{a, a\} = \{a\}$

Théorème 1.5. $\{a, b\} = \{b, a\}$

Définition 1.6. $x \neq y$ si et seulement si il n'est pas le cas que $x = y$ $\diamond$

Définition 1.7. $A \subset B$ si et seulement si pour tout x , si $x \in A$ alors $x \in B$. (sous-ensemble) $\diamond$

Théorème 1.8. (1) Pour tout A , $A \subset A$
(2) Pour tout A , $\emptyset \subset A$
(3) Pour tout A, B , ($A \subset B$ et $B \subset A$) si et seulement si $A = B$
(4) Pour tout A, B, C : si ($A \subset B$ et $B \subset C$), alors $A \subset C$ (transitivité de l'inclusion)
(5) Pour tout A , si $A \subset \emptyset$, alors $A = \emptyset$.

Définition 1.9. $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$ (différence) $\diamond$

Théorème 1.10. (1) $A \setminus A = \emptyset$
(2) $A \setminus \emptyset = A$

Définition 1.11. Si $A \subset B$, alors $(A_B^c = B \setminus A)$ (complément) $\diamond$

Définition 1.12. $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$ (intersection) $\diamond$

Théorème 1.13. (1) $(A \cap B) \subset A$
(2) $(A \cap B) \subset B$
(3) $A \cap A = A$
(4) $A \cap \emptyset = \emptyset$
(5) Si $A \subset B$, alors $A \cap B = A$
(6) $A \cap B = B \cap A$ (commutativité)
(7) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (associativité)

Définition 1.14. Deux ensembles A et B sont disjoints si et seulement si $A \cap B = \emptyset$ $\diamond$

Théorème 1.15. (1) $A \subset (B \cup A)$
(2) $B \subset (B \cup A)$
(3) $A \cup A = A$
(4) $A \cup \emptyset = A$
(5) Si $A \subset B$, alors $(A \cup B = B)$
(6) $A \cup B = B \cup A$ (commutativité)
(7) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (associativité)
(8) $A \cap (B \cup C) = ((A \cap B) \cup (A \cap C))$ (distributivité)
(9) $A \cup (B \cap C) = ((A \cup B) \cap (A \cup C))$ (distributivité)

Définition 1.16. $\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subset A\}$ (l'ensemble des parties) $\diamond$

Définition 1.17. $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$ (couple) $\diamond$

Théorème 1.18. Si $x \neq y$, alors $(x, y) \neq (y, x)$

Théorème 1.19. $(a, a) = \{\{a\}\} \neq \{a\}$

Théorème 1.20. $(a, a, a) \neq (a, a)$

Définition 1.21. A est une relation si et seulement si pour tout x , si $x \in A$, alors il y a un y et un z de sorte que $(y, z) = x$. $\diamond$

Définition 1.22. Si A est une relation, alors pour tout B , si $B \subset A$, alors B est une relation. $\diamond$

Définition 1.23. $A \times B := \{(x, y) \mid x \in A \text{ et } y \in B\}$ (produit cartésien) $\diamond$

Définition 1.24. $|A|$ est le nombre d'éléments de l'ensemble A . $\diamond$

Définition 1.25. $\bigtimes_{i=1}^3 A_i := (A_1 \times A_2) \times A_3$
 $\bigtimes_{i=1}^n A_i := \left(\bigtimes_{i=1}^{n-1} A_i \right) \times A_n$ pour $n > 3$. $\diamond$

Définition 1.26. $A^n := \bigtimes_{i=1}^n A$. (le produit cartésien n -ième de l'ensemble A) $\diamond$

Définition 1.27. g est le graphe d'une fonction de A vers B si et seulement si g est une relation de A vers B et pour tout x, y, z : si $(x, y) \in g$ et $(x, z) \in g$, alors $z = y$. $\diamond$

Définition 1.28. f est une fonction si et seulement s'il y a des ensembles A, B et g de sorte que
(i) $f = (A, B, g)$ et
(ii) g est le graphe d'une fonction de A vers B . $\diamond$

Définition 1.29. A est le domaine de définition de f si et seulement si $f = (A, B, g)$. (domaine de définition = ensemble de définition = ensemble de départ) $\diamond$

Définition 1.30. B est le domaine des valeurs de f si et seulement si $f = (A, B, g)$. (domaine des valeurs = ensemble des valeurs = ensemble d'arrivée) $\diamond$

Définition 1.31. Si $f = (A, B, g)$ alors l'image réciproque de f est identique à $\{x \mid (x, y) \in g\}$ $\diamond$

Définition 1.32. Si $f = (A, B, g)$ alors $\text{Image}(f) := \{y \mid (x, y) \in g\}$ $\diamond$

Définition 1.33. Supposons que $f = (A, B, g)$. $f(x) = y$ si et seulement si $(x, y) \in g$. $\diamond$

Définition 1.34. Une fonction f est une application, si le domaine de définition de f est identique à l'image réciproque de f .

Une fonction f est une surjection, si le domaine des valeurs de f est identique à l'image de f .

Une application $f = (A, B, g)$ est une injection si pour tout $(x, y), (z, r) \in g : y \neq r$

Une injection surjective est une bijection. $\diamond$

Définition 1.35. Pour des $f = (A, B, g)$ bijectives nous définissons :

$f^{-1} := (B, A, g^{-1})$ de sorte que $g^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in g\}$

Nous appelons f^{-1} la fonction réciproque (parfois appelée „fonction inverse“) de f . $\diamond$

Définition 1.36. Intervalles :

$[a, b] := \{x \mid a \leq x \leq b\}$ (intervalle fermé)

$]a, b[:= \{x \mid a < x < b\}$ (intervalle semi-ouvert à gauche = intervalle semi-fermé à droite)

$[a, b) := [a, b[:= \{x \mid a \leq x < b\}$ (intervalle semi-fermé à gauche = intervalle semi-ouvert à droite)

$]a, b[:= \{x \mid a < x < b\}$ (intervalle ouvert)

$]a, \infty[:= \{x \mid a < x\}$ (intervalle non borné à droite - sans ∞)

$] - \infty, a[:= \{x \mid x < a\}$ (intervalle non borné à gauche - sans $-\infty$)

$] - \infty, \infty[:= \mathbb{R}$ (intervalle non borné
- sans les nombres non-réels ∞ et $-\infty$)

$\diamond$

Définition 1.37. $\mathbb{I}_r$ = ensemble des intervalles fermés à droite et des ensembles finis.

$\max : \mathbb{I}_r \rightarrow \mathbb{R}$

$\max(I) = x$ si et seulement si pour tout $y \in I : y \leq x$ et $x \in I$

$\diamond$

Définition 1.38. $\mathbb{I}_l$ = ensemble des intervalles fermés à gauche et des ensembles finis.

$\min : \mathbb{I}_l \rightarrow \mathbb{R}$

$\min(I) = x$ si et seulement si pour tout $y \in I : y \geq x$ et $x \in I$

$\diamond$

Théorème 1.39.

$$\sum_{i=1}^n ax_i = a \sum_{i=1}^n x_i$$

Théorème 1.40.

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i$$

Définition 1.41. Pour $(x_1, \dots, x_n) = (a, \dots, a)$ avec $a \in \mathbb{R}$ nous écrivons

$$\sum_{i=1}^n a := \sum_{i=1}^n x_i$$

◇

Théorème 1.42.

$$\sum_{i=1}^n a = na$$

2 Les ensembles de nombres

Nous utiliserons les ensembles de nombres suivants qu'on peut supposer comme connus. On pourrait définir dans le cadre de la théorie des ensembles les différents types de nombres ce qui mènerait cependant trop loin.

- $\mathbb{N}$ = l'ensemble des nombres naturels : $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{N}^*$ = l'ensemble des nombres naturels sans zéro : $\{1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{N}_n$ = l'ensemble des $n + 1$ nombres naturels de 0 à n : $\{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$
- $\mathbb{N}_n^*$ = l'ensemble des n nombres naturels de 1 à n : $\{1, 2, 3, \dots, n\}$
- $\mathbb{Z}$ = l'ensemble des nombres entiers (exemple d'un nombre entier qui n'est pas naturel : -1).
- $\mathbb{Q}$ = l'ensemble des nombres rationnels (exemples de nombres rationnels qui ne sont pas entiers : $\frac{4}{5}$; $6.77777777\dots$)
- $\mathbb{R}$ = l'ensemble des nombres réels (exemples de nombres réels qui ne sont pas rationnels : π ; $\sqrt{2}$; $\log_{10} 5$)
- $\mathbb{R}_+$ = l'ensemble des nombres positifs réels (avec zéro). D'une manière analogue pour $\mathbb{Z}_+$ et $\mathbb{Q}_+$ (ou aussi $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Z}^+$ et $\mathbb{Q}^+$)

Définition 2.1. Pour $x, y \in \mathbb{R}$ $d : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$; $d(x, y) := \sqrt{(x - y)^2}$ est la distance (euclidienne) entre le nombre x et le nombre y (d pour „distance“). ◇

Théorème 2.2. Pour d selon la définition on peut affirmer :

1. $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie)
2. $d(x, y) \geq 0$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Définition 2.3. La distance (euclidienne) entre deux points $\mathbf{x} := (x_1, x_2)$ et $\mathbf{y} := (y_1, y_2)$ dans l'espace deux-dimensionnel est la la valeur de l'application

$$d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

La distance (euclidienne) entre deux points $\mathbf{x} := (x_1, x_2, x_3)$ et $\mathbf{y} := (y_1, y_2, y_3)$ est la la valeur de l'application

$$d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

La distance (euclidienne) entre deux points $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n)$ und $\mathbf{y} := (y_1, \dots, y_n)$ est la la valeur de l'application

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

◇

3 Polynômes

Définition 3.1. Une application f est un polynôme si est seulement si

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) := \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

pour $a_i \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$

◇

Définition 3.2. f est un polynôme de degré zéro si et seulement si

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = a_0, \quad a_0 \in \mathbb{R}$$

◇

Définition 3.3. (fonction affine polynomiale)

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) := a_1 x + a_0 \text{ avec } a_1 \neq 0 \neq a_0$$

◇

Définition 3.4. Nous appelons $f(0)$ „l'ordonnée à l'origine“ pourvu que $f(0)$ soit défini.

◇

Définition 3.5. Une fonction réelle f a un zéro en x si et seulement si $f(x) = 0$.

◇

Théorème 3.6. La pente m d'une fonction affine : $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Théorème 3.7. Pour $f(x) = a_1 x + a_0$ la pente $m = a_1$

Définition 3.8. f est une fonction linéaire polynomiale si et seulement si

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = a_1 x \text{ avec } a_1 \neq 0$$

◇

Définition 3.9. f est un polynôme du deuxième degré si et seulement si

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

avec $a_2 \neq 0$. a_0 ou a_1 peuvent être identiques à 0

◇

Théorème 3.10. Un polynôme du deuxième degré $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ a deux, un ou aucun zéros réels. Si $a_1^2 - 4a_0a_2 > 0$ il y a exactement deux zéros réels, à savoir

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{a_1}{2a_2} \pm \frac{1}{2a_2} \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2} \\ &= \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} \end{aligned}$$

Si $a_1^2 - 4a_0a_2 = 0$, il y a exactement un zéro réel, à savoir $-\frac{a_1}{2a_2}$.

Si $a_1^2 - 4a_0a_2 < 0$, il n'y a pas de zéro réel.

Remarque 3.11. Avec $a := a_2$, $b := a_1$ et $c := a_0$ on obtient pour $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = ax^2 + bx + c$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

◇

Remarque 3.12. f est un polynôme du troisième degré si et seulement si

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) := a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

avec des nombres réelles a_i . $a_3 \neq 0$; a_0 , a_1 ou a_2 peuvent être 0.

◇

4 D'autres fonctions réelles élémentaires

Définition 4.1. Supposons que f soit une fonction réelle $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dans ce cas nous appelons $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ avec $E \subset D$ et $f(x) = g(x)$ pour $x \in E$ la „restriction de f sur E “.

◇

Définition 4.2. f est une fonction rationnelle si et seulement si il y a des fonctions polynomiales g et h tel que

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{x \mid h(x) = 0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &:= \frac{g(x)}{h(x)}. \end{aligned}$$

◇

Définition 4.3. pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}^*$ on définit

$$x^{-n} := \frac{1}{x^n}$$

◇

Définition 4.4. $y = \sqrt[n]{x} =: x^{\frac{1}{n}}$ si et seulement si $y^n = x$ pour $x \in \mathbb{R}_+; n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ◇

Avec cela nous pouvons définir les fonctions racine de la manière suivante :

Définition 4.5. f est une fonction racine si et seulement si pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &:= x^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

◇

Définition 4.6. La composition de f par g pour les deux applications

$$\begin{aligned} g : A &\rightarrow B \\ f : D &\rightarrow C \end{aligned}$$

tel que $\text{Image}(g) \subset D$ est définie par

$$\begin{aligned} h : A &\rightarrow C \\ h(x) &= f(g(x)) \end{aligned}$$

de sorte que f est restreinte à $\text{Image}(g)$. Nous lisons $f(g(x))$ comme „ f de g de x “. Souvent on introduit pour la composition une notation spécifique : $f \circ g$. Nous nous limiterons à écrire $f(g)$ et nous lisons cela comme „ f de g “ ou „ f composée par g “. ◇

Théorème 4.7.

$$\begin{aligned} \sqrt[m]{x^n} &= x^{\frac{n}{m}} \\ (\sqrt[m]{x})^n &= x^{\frac{n}{m}} \end{aligned}$$

Théorème 4.8. $f^{-1} : \text{Image}(f) \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction réciproque de $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ si et seulement si $f^{-1}(f(x)) = x$ pour tout $x \in D \subset \mathbb{R}$.

Théorème 4.9. Si f^{-1} est la fonction réciproque de f , alors f est la fonction réciproque de f^{-1} .

Définition 4.10. Supposons que $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ soit une fonction réelle et que $I \subset D \subset \mathbb{R}$ soit un intervalle ouvert

- f croît sur I d'une manière strictement monotone (f est strictement croissante) si et seulement si pour tout $x, y \in I$ avec $x > y$: $f(x) > f(y)$.
- f croît sur I d'une manière monotone (f est croissante) si et seulement si pour tout $x, y \in I$ avec $x > y$: $f(x) \geq f(y)$.
- f décroît sur I d'une manière strictement monotone (f est strictement décroissante) si et seulement si pour tout $x, y \in I$ avec $x > y$: $f(x) < f(y)$.
- f décroît sur I d'une manière monotone (f est décroissante) si et seulement si pour tout $x, y \in I$ avec $x > y$: $f(x) \leq f(y)$.
- Si f croît d'une manière (strictement) monotone sur I ou décroît d'une manière (strictement) monotone sur I , nous appelons f „(strictement) monotone“.

◇

Théorème 4.11. Une fonction strictement monotone sur un intervalle ouvert I est injective.

Définition 4.12. Supposons que $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, avec intervalle ouvert $I \subset D \subset \mathbb{R}$.

f est strictement concave sur I si et seulement si pour tout $x, y \in I$ avec $y > x$ et la droite g à travers $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$: $g(z) < f(z)$ pour $z \in]x, y[$.

f est strictement convexe sur I si et seulement si pour tout $x, y \in I$ avec $y > x$ et la droite g à travers $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$: $g(z) > f(z)$ pour $z \in]x, y[$ ◇

Théorème 4.13. Les fonctions racine croissent d'une manière strictement monotone et elles sont concaves sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$.

Définition 4.14. f est une fonction exponentielle de base a , $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, si et seulement si

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &:= a^x \end{aligned}$$

◇

$$e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

On peut en déduire : $e := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \approx 2.71828182845905$

Définition 4.15.

$$\begin{aligned} \exp(x) &:= e^x \\ \exp_a(x) &:= a^x \end{aligned}$$

◇

Théorème 4.16. Pour les fonctions exponentielles f tel que $a, b > 0$ on peut affirmer :

- $f(0) = 1$, car $f(0) = a^0 = 1$.
- $\text{Image}(f) =]0, \infty[$, car les nombres positifs puissance un nombre positif quelconque sont positifs.
- Si $a > 1$, alors f est strictement croissante, car avec $a > 1 : a^x > a^y$ pour $x > y$.
- Si $0 < a < 1$, alors f est strictement décroissante, car avec $0 < a < 1 : a^x < a^y$ pour $x > y$.
- f est convexe.
- $a^x a^y = a^{x+y}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $a^x b^x = (ab)^x$
- $1^x = 1$ ($\implies 1^0 = 1$)
- Pour une base $a := \frac{1}{b}$ avec $b > 1 : a^x = \left(\frac{1}{b}\right)^x = \frac{1}{b^x} = b^{-x}$.

Définition 4.17.

$$\begin{aligned} \log_a : \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \log_a(y) = x &: \iff y = a^x. \end{aligned}$$

„ $\log_a$ “ se lit comme „logarithme de base a “, „ $\log_a(y) = x$ “ se lit comme „le logarithme de base a de y est x “. Le logarithme x est l'exposant, à la puissance duquel il faut élever la base a pour obtenir y . Au lieu de $\log_a(y)$ nous écrivons en général $\log_a y$. Pour la base e on écrit (sauf dans la littérature anglo-saxonne où l'on utilise $\log x := \log_e x$) :

$$\ln x := \log_e x$$

On appelle $\ln x$ „logarithme naturel“.

◇

Théorème 4.18. Pour les fonctions logarithme $\log_a$ avec $a > 0$:

- Le zéro unique des fonctions logarithme est 1, car $\log_a y = 0$ si et seulement si $y = a^0 = 1$.

- Les fonctions logarithme sont strictement croissantes pour $a > 1$.
- Les fonctions logarithme sont concaves pour $a > 1$.
- Si $a > 1$, alors pour $x > 1 : \log_a x > 0$ et pour $0 < x < 1 : \log_a x < 0$.
- Les fonctions logarithme sont strictement décroissantes pour $0 < a < 1$.
- Si $0 < a < 1$, alors pour $x > 1 : \log_a x < 0$ et pour $0 < x < 1 : \log_a x > 0$.
- Les fonctions logarithme sont convexes pour $0 < a < 1$.

Théorème 4.19. $\log_a a^x = x$

Théorème 4.20. $a^{\log_a x} = x$

Théorème 4.21.

$$\ln(\exp x) = x$$

$$\exp(\ln x) = x$$

Théorème 4.22. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

Théorème 4.23. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

Théorème 4.24. $\log_a x^y = y \log_a x$

Théorème 4.25. $\log_a a = 1$

Théorème 4.26. $\ln e = 1$

Théorème 4.27. Pour des fonctions réelles f et g avec $f(x) = g(x)$ et $f(x), g(x) > 0$ on peut affirmer

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

Théorème 4.28. $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

Théorème 4.29. $a^x = e^{x \ln a}$

Définition 4.30. Nous supposons que Z soit l'union d'intervalles réels I_i tel que $I_i \cap I_j = \emptyset$ pour $i \neq j$ et $i, j \in \mathbb{N}_n^*$. De plus nous considérons les fonctions $f_i : I_i \rightarrow \mathbb{R}$. Nous appelons la fonction $f : Z \rightarrow \mathbb{R}$ „définie par intervalles I_i par f_i “ si et seulement si f est identique à f_i sur I_i pour tout $i \in \mathbb{N}_n^*$. On fournit les fonctions définies par intervalles en général en indiquant une expression définissant f_i pour chaque intervalle I_i après une accolade. Si l'on veut calculer la valeur de la fonction f de x il faut d'abord vérifier dans quel intervalle x se trouve. Si $x \in I_i$, alors $f(x) = f_i(x)$. $\diamond$

5 Limites d'une fonction

Définition 5.1. Pour „ a est la limite de la fonction f pour x vers l'infini“ on écrit :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$$

◇

L'abréviation provient du mot latin „limes“ pour „limite“, „frontière“. Pour „ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ “ nous écrivons entre autre aussi „ $f(x) \rightarrow a$ pour $x \rightarrow \infty$ “ (à lire comme „ $f(x)$ tend vers a pour x qui tend vers l'infini“).

Définition 5.2. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ si et seulement si pour tout $k > 0$, il existe un x' tel que pour tout $x : si $x > x'$, alors $|f(x) - a| < k$
($f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle ; D n'est pas borné à droite ; $x, x' \in D ; a \in \mathbb{R}$).$

◇

Théorème 5.3. Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \in \mathbb{R}$, alors

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow \infty} g(x),$$

Théorème 5.4. Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x), a \in \mathbb{R}$, alors

$$a \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (af(x))$$

Théorème 5.5. Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \in \mathbb{R}$, alors

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$$

Théorème 5.6. Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \neq 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)}$$

Théorème 5.7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x^n} = 0$ ($n > 0, a \in \mathbb{R}$).

Théorème 5.8. $\lim_{x \rightarrow \infty} a = a$ pour $a \in \mathbb{R}$

Définition 5.9. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ si et seulement si pour tout $k > 0$ il existe un x' tel que pour tout $x : si $x > x'$, alors $f(x) > k$.
($f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle ; D n'est pas borné à droite ; $x, x' \in D ; a \in \mathbb{R}$).$

◇

Nous donnons un exemple du fonctionnement de la définition :

Définition 5.10. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ si et seulement si pour tout $k < 0$ il existe un x' tel que pour tout $x : si $x > x'$, alors $f(x) < k$.
($f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle ; D n'est pas borné à droite ; $x, x' \in D ; a \in \mathbb{R}$).$

◇

Théorème 5.11. – Pour $a \in \mathbb{R}$: $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{pour } a > 1 \\ 1 & \text{pour } a = 1 \\ 0 & \text{pour } 0 < a < 1 \end{cases}$

– Pour $a \in \mathbb{R}$: $\lim_{x \rightarrow \infty} a^{-x} = \begin{cases} 0 & \text{pour } a > 1 \\ 1 & \text{pour } a = 1 \\ \infty & \text{pour } 0 < a < 1 \end{cases}$

– Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, alors $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x)} = 0$.

– $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$

– Pour $a \in \mathbb{R}$: $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty$ ($a > 1$) et $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = -\infty$ ($0 < a < 1$)

– Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ et $a \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{x \rightarrow \infty} (af(x)) = \begin{cases} \infty & \text{pour } a > 0 \\ -\infty & \text{pour } a < 0 \end{cases}$

– Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ et $a \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{x \rightarrow \infty} (af(x)) = \begin{cases} \infty & \text{pour } a < 0 \\ -\infty & \text{pour } a > 0 \end{cases}$

– Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ et $a \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{x \rightarrow \infty} (a + f(x)) = \infty$

– Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ et $a \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{x \rightarrow \infty} (a + f(x)) = -\infty$

– $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)^n) = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \right)^n$ ($n \in \mathbb{N}$)

– $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{g(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)}$ (pour $(x) \geq 0$)

– $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)}$

– $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(f(x)) = \ln(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x))$ (pour $f(x) > 0$)

– Si $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow \infty} a^{g(x)} = 0$. ($a > 1, a \in \mathbb{R}$)

Définition 5.12. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$ si et seulement si pour tout $k > 0$ il existe un x' tel que pour tout x : si $x < x'$, alors $|f(x) - a| < k$.
($f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle ; D n'est pas borné à gauche ; $x, x' \in D ; a \in \mathbb{R}$). $\diamond$

Définition 5.13. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ si et seulement si pour tout $k > 0$ il existe un x' tel que pour tout $x < x'$: $f(x) > k$.
($f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle ; $x, x' \in D ; D$ n'est pas borné à gauche). $\diamond$

Définition 5.14. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ si et seulement si pour tout $k < 0$ il existe un x' tel que pour tout $x < x'$: $f(x) < k$.
($f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle ; $x, x' \in D ; D$ n'est pas borné à gauche). $\diamond$

Définition 5.15. Un voisinage de x_0 est un intervalle $]x_0 - r ; x_0 + r[$ avec $r > 0$. On écrit souvent pour un voisinage de x_0 : $V(x_0)$ et si le voisinage est spécifié par un r : $V_r(x_0)$ $\diamond$

Définition 5.16. $x_0 \in \mathbb{R}$ est un point d'accumulation d'un ensemble $D \subset \mathbb{R}$ si et seulement si dans tout voisinage de x_0 il existe un $x \in D$, $x_0 \neq x$. La définition ne réclame pas que $x_0 \in D$ mais ne l'exclue pas. $\diamond$

Définition 5.17. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ si et seulement si pour tout $k > 0$ il existe un $r > 0$ tel que pour tout x avec $0 < |x_0 - x| < r$: $|f(x) - a| < k$
($f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle ; $x \in D ; a \in \mathbb{R} ; x_0$ est un point d'accumulation de $D ; x_0$ peut, mais ne doit pas être élément de $D ; k, r > 0 ; k, r \in \mathbb{R}$). $\diamond$

Théorème 5.18. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ pour $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \in \mathbb{R}$

Théorème 5.19. $\lim_{x \rightarrow x_0} (bf(x)) = b \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ pour $b, \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R}$

Théorème 5.20. $\lim_{x \rightarrow x_0} a = a$ (pour $a \in \mathbb{R}$)

Théorème 5.21. $\lim_{x \rightarrow x_0} fg(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ pour $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \in \mathbb{R}$

Théorème 5.22. $\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$ pour $x, x_0 \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

Théorème 5.23. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$ pour $g(x) \neq 0$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \in \mathbb{R}$.

Théorème 5.24. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ vaut pour les fonctions exponentielles, pour les fonctions rationnelles ainsi que pour les fonctions racine et logarithme dans leur domaines de définitions.

Théorème 5.25. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = b$, pour $a, b \in \mathbb{R}$ (composition)

Il faut souligner que cette règle de composition n'est pas valable pour $x \rightarrow \pm\infty$.

Théorème 5.26. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h)$

Définition 5.27. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$ si et seulement si pour tout $k > 0$ il existe un $r > 0$ tel que :

si $0 < x - x_0 < r$, alors $|f(x) - a| < k$.

($f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle ; $x \in D ; a \in \mathbb{R} ; x_0$ est un point d'accumulation de $D \cap [x_0, \infty[$ pouvant être élément de D ou non). $\diamond$

Définition 5.28. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a$ si et seulement si pour tout $k > 0$ il existe un $r > 0$ tel que :

si $0 < x_0 - x < r$, alors $|f(x) - a| < k$. $\diamond$

Définition 5.29. Pour $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle ; $x \in D$, x_0 est un point d'accumulation de $D \cap [x_0, \infty[$ pour $x \rightarrow x_0^+$ et de $D \cap]-\infty, x_0]$ pour $x \rightarrow x_0^-$ pouvant être élément de D ou non :

- $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ si et seulement si pour tout $k > 0$ il existe un $r > 0$ tel que : si $0 < x - x_0 < r$, alors $f(x) > k$.

- $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$ si et seulement si pour tout $k < 0$ il existe un $r > 0$ tel que : si $0 < x - x_0 < r$, alors $f(x) < k$.

- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ si et seulement si pour tout $k > 0$ il existe un $r > 0$ tel que : si $0 < x_0 - x < r$, alors $f(x) > k$.

- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$ si et seulement si pour tout $k < 0$ il existe un $r > 0$ tel que : si $0 < x_0 - x < r$, alors $f(x) < k$. $\diamond$

Théorème 5.30. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = \infty$

Théorème 5.31. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{pour } n \text{ pair} \\ -\infty & \text{pour } n \text{ impair} \end{cases}$

Théorème 5.32. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$ pour $a > 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = \infty$ pour $0 < a < 1$.

Théorème 5.33. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

Théorème 5.34. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ existent.

6 Continuité

Définition 6.1. – Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $x_0 \in I \subset D$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ($D \subset \mathbb{R}$, I est un intervalle)

- Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est en $x_0 \in I \subset D$ continue à droite si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$
- Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est en $x_0 \in I \subset D$ continue à gauche si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$
- Une fonction f est continue sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $x \in I$: f est continue en x .
- Une fonction f est continue si et seulement si elle est continue sur $\mathbb{R}$.

◇

Théorème 6.2. – Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = a$, f est continue ($a \in \mathbb{R}$; fonction constante)

- $f(x) = x^n$ est continue sur $\mathbb{R}$
- La somme $f + g$ de fonctions f et g continues sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est continue sur I
- Si f est continue sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$, af est continue sur I ($a \in \mathbb{R}$) (A partir de ces trois théorèmes on peut conclure que tous les polynômes sont continus).
- Le produit fg de fonctions continues f et g sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est continu sur I .
- Si f est continue sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$, f est continue sur l'intervalle $J \subset I$.
- $\log_a x$ est continue sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ et $\exp_a(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1, 0\}$.
- Si f est continue sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$, f^n est continue sur I pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
- Si f est continue sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$, $\log_a f$ est continue sur $I \setminus \{x : f(x) \leq 0\}$ pour $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1, 0\}$.
- Si f est continue sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$, $\exp_a f$ est continue sur I pour $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1, 0\}$.
- Si f est continue sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$, $\sqrt[n]{f}$ est continue sur $I \setminus \{x : f(x) < 0\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- $\frac{f}{g}$ pour des fonctions continues sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est continue sur $I \setminus \{x | g(x) = 0\}$

Théorème 6.3. (théorème de Bolzano, théorème des zéros intermédiaires) (i) Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur l'intervalle I avec $a, b \in I$, $a < b$, $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, alors il existe au moins un zéro de la fonction entre a et b .

(ii) Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur l'intervalle I avec $a, b \in I$, $a < b$, $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$, alors il existe au moins un zéro entre a et b .

Théorème 6.4. (Zéros de fonctions strictement monotones) (i) Si une fonction f est continue sur l'intervalle I , $f(x_1) < 0$, $f(x_2) > 0$ pour $x_i \in I$ et f est strictement croissante sur l'intervalle I , alors il existe exactement un zéro entre x_1 et x_2 .

(ii) Si une fonction f est continue sur l'intervalle I , $f(x_1) > 0$, $f(x_2) < 0$ pour $x_i \in I$ et f est strictement décroissante sur l'intervalle I , alors il existe exactement un zéro entre x_1 et x_2 .

Théorème 6.5. (théorème des valeurs intermédiaires) (i) Si une fonction f est continue sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ ($I \neq \emptyset$), alors pour $x_1 < x_2$ ($x_1, x_2 \in I$) avec $f(x_1) < f(x_2)$ il existe pour tout y avec $f(x_1) < y < f(x_2)$ au moins un $x_3 \in [x_1, x_2]$ tel que $f(x_3) = y$

(ii) Si une fonction f est continue sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ ($I \neq \emptyset$), alors pour $x_1 < x_2$ ($x_1, x_2 \in I$) avec $f(x_1) > f(x_2)$, il existe pour tout y avec $f(x_1) > y > f(x_2)$ au moins un $x_3 \in [x_1, x_2]$ tel que $f(x_3) = y$

Théorème 6.6. Supposons que f soit continue sur l'intervalle I et que $c \in I$ et $f(c) > 0$. Il existe dans ce cas un voisinage V de c tel que $f(x) > 0$ pour tout $x \in V$.

Théorème 6.7. Entre deux zéros avoisinants, une fonction continue est soit partout positive soit partout négative.

7 La pente d'une fonction continue en un point

Définition 7.1. Supposons que f soit continue en x_0 . Nous définissons la pente m de f en x_0 par

$$m(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

pourvu que cette limite soit définie. ◇

Définition 7.2.

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{df(x)}{dx} \end{aligned}$$

◇

Théorème 7.3. Si $f(x) = x^n$, alors $f'(x) = nx^{n-1}$ pour $n > 0$.

Théorème 7.4. Si $h(x) = f(x) + g(x)$, alors $h'(x) = f'(x) + g'(x)$ (pourvu que $f'(x)$ et $g'(x) \in \mathbb{R}$).

Théorème 7.5. Si $f(x) = a$, alors $f'(x) = 0$ (a est un nombre réel).

Théorème 7.6. Si $h(x) = af(x)$, alors $h'(x) = af'(x)$ (si a et $f'(x) \in \mathbb{R}$).

Théorème 7.7. Si f est dérivable en x_0 , alors f est continue en x_0

Théorème 7.8. Supposons que f soit sur $]a, b[$ continue et dérivable :

- Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est sur $]a, b[$ strictement croissante
- Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est sur $]a, b[$ strictement décroissante.

Définition 7.9. La fonction f atteint en x_0 un minimum (strict) local si et seulement si il existe un voisinage V de x_0 tel que pour tout $x \in V$ avec $x \neq x_0$: $f(x) > f(x_0)$

- La fonction f atteint en x_0 un maximum (strict) local si et seulement si il existe un voisinage V de x_0 tel que pour tout $x \in V$ avec $x \neq x_0$: $f(x) < f(x_0)$
- La fonction f atteint en x_0 un extremum (strict) local si et seulement si elle atteint en x_0 un minimum local ou un maximum local.

◇

Théorème 7.10. Une sécante g à travers deux points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ d'une fonction f est donnée par :

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Définition 7.11. Nous supposons que f soit dérivable dans l'intervalle ouvert I . ◇

Théorème 7.12. – Une fonction f est strictement concave dans l'intervalle ouvert I si et seulement si $f'(x)$ est strictement décroissant sur I .

– Une fonction f est strictement convexe dans l'intervalle ouvert I si et seulement si $f'(x)$ est strictement croissant sur I .

Définition 7.13. Nous appelons désormais la dérivée d'une fonction „première dérivée“ et la dérivée de la première dérivée „deuxième dérivée“, etc. Nous utilisons les notations suivantes : f'' pour la deuxième dérivée et f''' pour la troisième dérivée. La notation suivante s'utilise aussi : $f^{(n)}$ pour la n -ième dérivée. ◇

Théorème 7.14. Supposons que f soit deux fois dérivable et que V soit un voisinage de x_0 : Si

$f'(x_0) = 0$
$f''(x) < 0$ pour $x \in V$,

alors il se trouve un maximum local en x_0 .

Théorème 7.15. Supposons que f soit deux fois dérivable et que V soit un voisinage de x_0 : Si

$f'(x_0) = 0$
$f''(x) > 0$ pour $x \in V$,

alors en x_0 se trouve un minimum local.

Définition 7.16. Le point d'inflexion est le point où une fonction devient concave (après un intervalle convexe) ou elle devient convexe (après un intervalle concave). ◇

Théorème 7.17. Si f est dérivable en a et que g est la tangente à travers le point $(a, f(a))$, alors $g(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$

Théorème 7.18. Supposons que f soit continue dans un voisinage V de a et que f' soit définie en a . Sous ces conditions il y a une fonction $r : V \rightarrow \mathbb{R}$ avec :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + r(x).$$

Théorème 7.19. Supposons que $f(x) = f(a) + \beta(x - a) + r(x)$.
 $\beta = f'(a)$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{x - a} = 0$.

8 Règles supplémentaires du calcul différentiel

Théorème 8.1. règles de dérivation

		$f(x)$	$f'(x)$
1	polynômes	x^n	$nx^{n-1}; \quad n \in \mathbb{N}$
2	constante	a	0
3	produit avec constante	$ag(x)$	$ag'(x)$
4	somme de fonctions	$g(x) + h(x)$	$g'(x) + h'(x)$
5	produit de deux fonctions	$g(x) \cdot h(x)$	$(g'(x) \cdot h(x)) + (g(x) \cdot h'(x))$
6	Quotient de deux fonctions	$\frac{g(x)}{h(x)}; h(x) \neq 0$	$\frac{(g'(x) \cdot h(x)) - (g(x) \cdot h'(x))}{[h(x)]^2}$
7	règle de la chaîne	$g(h(x))$	$g'(h(x)) \cdot h'(x)$
8	fonction logarithme (base e)	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
9	fonctions logarithme (base a)	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
10	fonction logarithme de $g(x)$	$\log_a g(x)$	$\frac{g'(x)}{g(x) \cdot \ln a}$
11	fonction exponentielle (base e)	e^x	e^x
12	fonction exponentielle (base a)	a^x	$a^x \ln a$
13	fonction exponentielle ($g > 0$)	$g(x)^{h(x)}$	$g(x)^{h(x)} \cdot \left[h'(x) \cdot \ln g(x) + h(x) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)} \right]$
14	fonction racine	$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$	$\frac{m}{n} x^{\left(\frac{m}{n}-1\right)} = \frac{m}{n} x^{\left(\frac{m-n}{n}\right)}, m \in \mathbb{N}^*; n \in \mathbb{N}^*, x \geq 0$

9 Extrema locaux et absolus

Définition 9.1. – Une fonction atteint le maximum absolu strict par rapport à l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ en $x_0 \in I$ si et seulement si pour $x \in I$ avec $x \neq x_0 : f(x) < f(x_0)$;
– Une fonction atteint le maximum absolu par rapport à l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ en $x_0 \in I$ si et seulement si pour $x \in I$ avec $x \neq x_0 : f(x) \leq f(x_0)$;
– Une fonction atteint le minimum absolu strict par rapport à l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ en $x_0 \in I$ si et seulement si pour $x \in I$ avec $x \neq x_0 : f(x) > f(x_0)$;
– Une fonction atteint le minimum absolu par rapport à l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ en $x_0 \in I$ si et seulement si pour $x \in I$ avec $x \neq x_0 : f(x) \geq f(x_0)$;
– Une fonction atteint un extremum absolu par rapport à l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ en $x_0 \in I$ si et seulement si elle y atteint un maximum ou un minimum absolu.

◇

Définition 9.2. La partie ouverte d'un intervalle $[a, b]$ est $]a, b[$

La partie ouverte d'un intervalle $[a, b[$ est $]a, b[$

La partie ouverte d'un intervalle $]a, b]$ est $]a, b[$

La partie ouverte d'un intervalle $]a, b[$ est $]a, b[$.

◇

Théorème 9.3. Supposons que f soit définie sur l'intervalle fermé $I \subset \mathbb{R}$ et que f soit continue dans la partie ouverte de I et que f soit continue à droite au bord droit de I et continue à gauche au bord gauche de I .

– La fonction f atteint en I un maximum absolu et un minimum absolu.

- Si f est en I strictement croissante, elle atteint son maximum au bord droit de I , et au bord gauche son minimum absolu.
- Si f est en I strictement décroissante, f atteint au bord droit de I son minimum absolu et au bord gauche de I son maximum absolu.

Théorème 9.4. Si a est le bord d'un intervalle qui est ouvert en a , il n'y a pas de maximum ou de minimum local en a .

10 Fonctions marginales

Définition 10.1. Fonctions marginales (définition discrète) :

$$C_m(x) := C(x+1) - C(x)$$

définition continue :

$$C_m(x) = \frac{d}{dx}C(x)$$

◇

Définition 10.2. - fonction de coût : $C = C_v + C_f$, C exprime les coûts en fonction de la quantité produite ; C_v est la fonction de coût variable, C_f la fonction de coût fixe ;

fonction de coût marginal : $C'(x) = \frac{d}{dx}C(x)$

fonction de coût unitaire : $c(x) = \frac{C(x)}{x}$

à relever : $C'(x) = C'_v(x)$

fonction de coût unitaire marginal : $c'(x) = \frac{d}{dx}c(x)$

- fonction de demande : $p_D(x)$

- fonction de recette : $R(x) = x \cdot p_D(x)$, R exprime la recette en fonction de la quantité vendue ;

fonction de recette marginale : $R'(x) = \frac{d}{dx}R(x)$

pour un prix constant : $R'(x) = p$

- fonction de production $x(r)$, qui exprime la quantité produite en fonction des facteurs de production (matières premières, biens intermédiaires, capital ou travail).

productivité marginale : $x'(r) = \frac{d}{dr}x(r)$

fonction de production moyenne ou productivité moyenne : $\bar{x}(r) = \frac{x(r)}{r}$

productivité moyenne marginale : $\bar{x}'(r) = \frac{d}{dr}\frac{x(r)}{r}$

- fonction de profit : P , exprime le profit en fonction de la quantité vendue.

fonction de profit marginal : $P'(x) = \frac{d}{dx}P(x)$.

fonction de profit unitaire : $g(x) = \frac{P(x)}{x}$

fonction de profit unitaire marginal : $g'(x) = \frac{d}{dx}\frac{P(x)}{x}$

- fonction de marge sur coût variable : $P_V(x) = R(x) - C_v(x)$

fonction de marge sur coût variable marginale : $P'_V(x) = \frac{d}{dx}(R(x) - C_v(x)) = R'(x) - C'_v(x) = R'(x) - C'(x)$

fonction de marge sur coût variable unitaire : $p_V(x) = \frac{P_V(x)}{x}$

fonction de marge sur coût variable unitaire marginale : $p'_V(x) = \frac{d}{dx}\frac{P_V(x)}{x}$

- fonction de consommation : C^o qui exprime la consommation mesurée en argent en fonction du revenu Y . Fonction de consommation marginale (propension marginale à consommer) :

$C^{o'}(Y) = \frac{dC^o(Y)}{dY} > 0$ (quand on gagne plus, on consomme plus)

fonction d'épargne : E , exprime l'épargne en fonction du revenu Y .

Fonction d'épargne marginale (propension marginale à épargner) : $E'(Y) = \frac{dE(Y)}{dY} > 0$ (quand on gagne plus on épargne plus)

On peut affirmer : $Y = C^o(Y) + E(Y)$ et avec cela : $\frac{d}{dY}Y = 1 = \frac{d}{dY}C^o(Y) + \frac{d}{dY}E(Y)$

Il en résulte $C^{o'}(Y) \leq 1$ et $E'(Y) \leq 1$

11 Construction de fonctions économiques

Fonction d'utilité néoclassique :

1. L'utilité marginale est positive.
2. La croissance de l'utilité baisse (première loi de Gossen).
3. La fonction dispose d'un zéro en 0 (l'utilité d'une consommation de 0 unité est 0).

Fonction de production respectant la loi des rendements non-proportionnels :

1. Dans un premier intervalle les rendements marginaux sont positifs et croissants.
2. Dans le deuxième intervalle les rendements marginaux sont positifs, mais décroissants.
3. Dans le troisième intervalle les rendements marginaux sont négatifs et décroissants.
4. La fonction a un zéro en 0.

Pour un polynôme du troisième degré il en résulte :

$$a < 0, b > 0, c > 0, d = 0$$

Fonction de coût respectant la loi des rendements non-proportionnels :

1. Pour les coûts fixes $d : d \geq 0$
2. Les coûts marginaux sont partout positifs (la première dérivée est partout positive et il n'y a pas de zéro de la première dérivée dans l'intervalle $]0, \infty[$).
3. Les coûts marginaux baissent d'abord pour augmenter par la suite, c. à d. il y a un point d'inflexion concave-convexe dans l'intervalle $]0, \infty[$.

Pour un polynôme du troisième degré il en résulte :

$$a > 0, b < 0, c > 0, d \geq 0, b^2 < 3ac$$

Fonction de consommation keynésienne :

1. La propension marginale à la consommation ($C'(Y)$) est positive pour chaque revenu Y , c. à d. si quelqu'un gagne plus, il dépense plus pour la consommation. Formellement : $C'(Y) > 0$
2. La propension marginale à la consommation est inférieure à 1, c. à d. le revenu supplémentaire n'est pas dépensé entièrement pour la consommation. Formellement : $C'(Y) < 1$
3. La propension marginale à la consommation est inférieure à la consommation moyenne $c(Y) := \frac{C(Y)}{Y}$. Formellement : $C'(Y) < c(Y) = \frac{C(Y)}{Y}$

Fonction de production néoclassique :

$x(r)$ est caractérisée par des rendements marginaux positifs mais décroissants. De plus pour $r > 0 : x(r) \geq 0$.

12 Applications économiques supplémentaires du calcul différentiel

Définition 12.1. g_x est la droite radiale de la fonction f en x si et seulement si g est une droite qui passe par $(0, 0)$ et $(x, f(x))$ $\diamond$

- optimum de production (seuil de rentabilité) se trouve en x_0 tel que $C'(x_0) = \frac{C(x_0)}{x_0}$ (C = fonction de coûts)
- minimum de production (seuil de fermeture) se trouve en x_0 tel que $C'_v(x_0) = \frac{C_v(x_0)}{x_0}$ (C'_v = fonction de coûts variables)

Concurrence parfaite et fonction de coût respectant la loi des rendements non-proportionnels

En x_0 il y a un profit maximal si et seulement si $p = C'(x_0)$ et $C''(x_0) > 0$.
 $P(x) = x(p - c(x))$ (alors : si le profit est maximal en x_0 , $P(x_0) = x_0(p - c(x_0))$)

Elasticité

Définition 12.2. L'élasticité $E_f(x_0)$ de f en x_0 est égale à $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{f(x_0)}}{\frac{x - x_0}{x_0}}$ $\diamond$

Théorème 12.3. $E_f(x) = \frac{f'(x) \cdot x}{f(x)}$

Définition 12.4. – f est élastique en x_0 si et seulement si $|E_f(x_0)| > 1$ (approximativement le changement d'un pourcent mène à un changement de plus d'un pourcent).
– f n'est pas élastique en x_0 si et seulement si $|E_f(x_0)| < 1$ (approximativement un changement d'un pourcent en x mène à un changement de moins d'un pourcent en f).
– f est proportionnellement élastique en x_0 si et seulement si $|E_f(x_0)| = 1$
– f est absolument élastique en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} |E_f(x)| = +\infty$.
– f est complètement inélastique en x_0 si et seulement si $|E_f(x_0)| = 0$. $\diamond$