

Exercices supplémentaires „D’autres fonctions réelles élémentaires“

Exercice 1. Indiquer le domaine de définition des fonctions données par les équations suivantes et déterminer les zéros de ces fonctions

$$1. f(x) = \frac{5x^3 - 3x + 4}{x^4 + 2x - 8}$$

$$4. f(x) = \frac{\sqrt{5x}}{2^x}$$

$$2. f(x) = \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{4x}}$$

$$5. f(x) = \ln(2x + 5)$$

$$3. f(x) = \frac{5x^2}{\ln(2x+2)}$$

$$6. f(x) = e^{2x+5}$$

Exercice 2. Déterminer les points d’intersection des fonctions données par les équations suivantes sur l’intervalle $[0, 5]$ (utiliser les résultats de l’exercice précédent pour contrôler si les résultats sont admissibles)

$$1. f(x) = \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{4x}} \text{ et } g(x) = \frac{5x^2}{\ln(2x+2)}$$

$$2. f(x) = \frac{\sqrt{5x}}{2^x} \text{ et } g(x) = \ln(2x + 5)$$

Exercice 3. Résoudre les exercices suivants sans l’utilisation de moyens techniques :

$$1. \log_2 16$$

$$4. \log_3 \left(\frac{81}{9} \right)$$

$$2. \log_2 1024$$

$$3. \log_2 (4 \cdot 8)$$

$$5. \log_5 125^4$$

Exercice 4. Résoudre les équations suivantes :

$$1. \log_3 x = -2$$

$$10. \log_3 (5x + 2) = \log_3 (3x + 12)$$

$$2. \log_5 (x + 1) = 2$$

$$11. \log_x 8 = -3$$

$$3. 3 \log_5 (5x) = 9$$

$$12. \log_4 2 + \log_4 x = 15$$

$$4. \log_x 64 = 3$$

$$13. 2 \log_{10} (x^2 - 14) = \log_{10} 5 + \log_{10} (6x^2 - 49)$$

$$5. 2 \log_3 (2x + 1) = 7$$

$$14. 2 \log_7 x = \frac{2}{3}$$

$$6. \log_{10} x^3 + 2 \log_{10} x^2 = 6.426$$

$$15. 2 \log_2 (x - 1) = \log_2 (3x + 1)$$

$$7. \log_4 (3x + 4) = \log_4 (2x + 2)$$

$$16. \log_x \frac{1}{27} = 9$$

$$8. \log_2 (10x + 24) - \log_2 (x - 84) = \log_2 (x - 36)$$

$$17. \log_2 (3x - 1) + \log_2 (x + 5) = 6$$

$$9. \log_7 (7x) = 2$$

$$18. \log_2 (3x - 1) = \log_3 (3x - 1)$$

Exercice 5. Dans un lac surfertilisé le poids des algues augmente de 3 % par jour. Aujourd’hui il contient 27 tonnes d’algues. Combien de tonnes il contenait il y a 100 jours ? Dans quel délais le poids des algues double ?

Exercice 6. De combien de pourcents le nombre des noyaux radioactifs doit diminuer par an, si dans 50 ans leur nombre est inférieur d’un billion de fois (10^{12}) par rapport à l’heure actuelle ?

Exercice 7. Dans un lac la quantité d’algues augmente de 8 à 32 tonnes dans 100 jours. Après combien de jours (à partir des 32 tonnes) on aura 200 tonnes ?

Exercice 8. 1979 l’Europe avait 746 millions d’habitants, l’Afrique 456 millions. Si l’on suppose pour l’Europe un taux de croissance de 0,4 % par année, pour l’Afrique de 2,9 %, quand l’Afrique aura autant d’habitants que l’Europe ? (attention : la surface de l’Afrique se monte à 30.221.532 km², celle de l’Europe à 10.180.000 km²).

Exercice 9. Pour protéger les patients contre le rayonnement lors de la radioscopie on couvre les parties du corps qu'on ne veut pas examiner d'un tablier de plomb. Un mm réduit le rayonnement de 30%. Le rayonnement qui heurte le tablier a une intensité de 55 W/m². Quelle est l'intensité du rayonnement qui heurte le corps si le tablier est épais de 12mm ? De quelle épaisseur le tablier doit être pour qu'il retienne 90% du rayonnement ?

Exercice 10. Si l'on plie une feuille de papier format A4 plusieurs fois au milieu, deux couches, ensuite quatre couches, etc. se superposent. Combien de fois faudrait-il plier la feuille pour obtenir une tour qui atteint la lune ? (distance de la lune : 384000 km, épaisseur du papier 0.2mm) (Est-ce réaliste de supposer qu'on puisse plier autant de fois une feuille de papier ? Essayez pour vous rendre compte du problème !)

Exercice 11. La température d'une tasse de café pleine est de 60°C supérieur à la température de la salle. On mesure les différences δ à la température de la salle à des laps de temps réguliers :

t (minutes)	0	5	10	15	20	25
δ (°C)	60	45	34	25	19	14

Essayer de trouver un modèle (une fonction) pour les données.

Exercice 12. Déterminer l'équation de la fonction exponentielle $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(x) = a^x$, tel que (3, 5) est élément du graphe de la fonction.

Exercice 13. Déterminer les paramètres a et b tel que le graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(x) = b \cdot a^x$ passe par les points (0, 1.5) et (1, 1.8); $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 14. Supposons la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(x) = 2^{2x+5}$. Réécrire l'équation de la fonction de sorte que $f(x) = a \cdot b^x$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 15. Supposons la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(x) = (\sqrt{2})^{5x+4}$. Réécrire l'équation de la fonction de sorte que $f(x) = a \cdot b^x$; $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 16. Un pavé droit (parallélépipède rectangle) a une largeur de la moitié de la longueur. La hauteur est de 2cm plus longue que la largeur. Son volume se monte à 350cm³. Calculer la largeur, la longueur et la hauteur du pavé droit.

Exercice 17. Indiquer pour une option d'achat (prix d'exercice = 55, prime = 3) la fonction des résultats à l'échéance (fonction des pertes et gains possibles selon le prix du marché S_T de la valeur de l'actif sous-jacent à l'échéance T). Dessiner la fonction et indiquer sur le dessin l'ordonnée à l'origine et le zéro de la fonction.

Exercice 18. Déterminer les équations et les domaines de définition des fonctions réciproques des fonctions données par les équations suivantes :

1. $f(x) = 2x$
2. $f(x) = -x + 3$
3. $f(x) = (x - 1)^2 + 3$
4. $f(x) = -5(x + 1)^2 + 4$
5. $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$
6. $f(x) = x^2 + 4x + 1$
7. $f(x) = 2x^2 - 8x + 7$
8. $f(x) = \sqrt{4 - 3x} + 1$

Solutions Exercices supplémentaires „D’autres fonctions réelles élémentaires“

Solution 1. Indiquer le domaine de définition des fonctions données par les équations suivantes et déterminer les zéros de ces fonctions :

1. $f(x) = \frac{5x^3 - 3x + 4}{x^4 + 2x - 8}$. Pour éviter une division par 0, nous déterminons les zéros du dénominateur : $x^4 + 2x - 8 = 0$. Deux zéros réels : -1.849421 und 1.495954. Le domaine de définition est alors : $D = \mathbb{R} \setminus \{-1.849421, 1.495954\}$
Zéros de f : $5x^3 - 3x + 4 = 0$, seule solution réelle : $-1.1407 \in D$.
2. $f(x) = \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{4x}}$. Pour éviter une division par 0, nous déterminons les zéros du dénominateur : 0. De plus il faut que $\frac{4x^2 + 2}{4x} \geq 0$. Comme $4x^2 + 2 \geq 0$ pour tout x , $\frac{4x^2 + 2}{4x} > 0$ si et seulement si $x > 0$. Le domaine de définition est alors $D = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$
zéros de la fonction : $4x^2 + 2 = 0 \iff x^2 = -\frac{2}{4}$ (pas de zéros réels).
3. $f(x) = \frac{5x^2}{\ln(2x+2)}$. Pour éviter une division par 0, nous calculons le zéro de $\ln(2x+2)$: $\ln(2x+2) = 0$ si et seulement si $x = -\frac{1}{2}$ ($\exp \ln(2x+2) = 2x+2 = \exp 0 = 1$). De plus il faut que $2x+2 > 0$. Cela est le cas pour $x \in]-1, \infty[$. Par conséquent le domaine de définition est $D =]-1, \infty[\setminus \{-\frac{1}{2}\}$.
zéros de la fonction : $5x^2 = 0$, solution : $0 \in D$.
4. $f(x) = \frac{\sqrt{5x}}{2^x}$. Une division par 0 n’est pas possible, car $2^x > 0$ pour tout x . Il faut encore garantir que $5x \geq 0$, ce qui est le cas si $x \geq 0$. Le domaine de définition $D = \mathbb{R}_+$
zéros de la fonction : $\sqrt{5x} = 0$, solution is : $0 \in D$
5. $f(x) = \ln(2x+5)$. $2x+5$ doit être supérieur à 0 : $2x+5 > 0$. Le domaine de définition est alors : $D =]-\frac{5}{2}, \infty[$
zéros de la fonction : $2x+5 = 1$, solution : $-2 \in D$
6. $f(x) = e^{2x+5}$. Tous les nombres réels : $\mathbb{R}$
pas de zéros de la fonction.

Solution 2. Déterminer les points d’intersection des fonctions données par les équations suivantes sur l’intervalle $[0, 5]$ (utiliser les résultats de l’exercice précédent pour contrôler si les résultats sont admissibles)

1. $f(x) = \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{4x}}$ et $g(x) = \frac{5x^2}{\ln(2x+2)}$

$$\sqrt{\frac{4x^2 + 2}{4x}} = \frac{5x^2}{\ln(2x+2)} \iff$$

$$\frac{4x^2 + 2}{4x} = \frac{25x^4}{(\ln(2x+2))^2} \iff$$

$$(4x^2 + 2)(\ln(2x+2))^2 = 4x(25x^4) = 100x^5$$

$$(4x^2 + 2)(\ln(2x+2))^2 - 100x^5 = 0$$
avec $R : f = \text{function}(x)(4*x^2+2)*(log(2*x+2))^2 - 100*x^5$
 $\text{plot}(f, \text{xlim}=c(0.001, 5.5), \text{ylim}=c(-5, 5))$ (pour xlim bord inférieur on tient compte du domaine de définition ; un seul zéro)
 $\text{abline}(0, 0)$
 $\text{uniroot}(f, c(0.4, 1))$ donne : 0.5202736
élément du domaine de définition des deux fonctions :
y-coordonnée du point d’intersection : $\sqrt{\frac{4 \cdot 0.5202736^2 + 2}{4 \cdot 0.5202736}} = 1.2171$
le point d’intersection est alors (0.5202736, 1.2171)
2. $f(x) = \frac{\sqrt{5x}}{2^x}$ et $g(x) = \ln(2x+5)$

$$\frac{\sqrt{5x}}{2^x} = \ln(2x+5) \iff$$

$$\sqrt{5x} = 2^x \ln(2x+5)$$
avec $R : f = \text{function}(x)(5*x)^(1/2) - 2^x * log(2*x+5)$

$\text{plot}(f, \text{xlim}=c(0, 5.5))$ (pour xlim bord inférieur on tient compte du domaine de définition)
 $\text{abline}(0, 0)$

Il n'y a pas de zéros réels dans l'intervalle (pas de point d'intersection)

Solution 3. Résoudre les exercices suivants sans l'utilisation de moyens techniques :

1. $\log_2 16 = 4$ (car $2^4 = 16$)
2. $\log_2 1024 = 10$ (car $2^{10} = 1024$)
3. $\log_2 (4 \cdot 8) = \log_2 4 + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$.
4. $\log_3 \left(\frac{81}{9}\right) = \log_3 81 - \log_3 9 = 4 - 2 = 2$
5. $\log_5 125^4 = 4 \log_5 125 = 4 \cdot 3 = 12$

Solution 4. Résoudre les équations suivantes :

1. domaine de définition de $f(x) = \log_3 x : \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$
domaine de définition de $g(x) = -2 : \mathbb{R}$
domaine de définition D de l'équation : $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$.
 $\log_3 x = -2 \iff 3^{-2} = \frac{1}{9} = x \in D$
(contrôle : $\log_3 \frac{1}{9} = -2$)
2. domaine de définition de $f(x) = \log_5 (x+1) : x+1 > 0$ si et seulement si $x \in]-1, \infty[$
domaine de définition de $g(x) = 2 : \mathbb{R}$
domaine de définition D de l'équation : $] -1, \infty[\cap \mathbb{R} =] -1, \infty[$
 $\log_5 (x+1) = 2 \iff 5^2 = 25 = x+1 \iff x = 24 \in D$
(contrôle : $\log_5 (24+1) = 2$)
3. domaine de définition de $f(x) = 3 \log_5 (5x) : \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$
domaine de définition de $g(x) = 9 : \mathbb{R}$
domaine de définition D de l'équation : $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$
 $3 \log_5 (5x) = 9 \iff \log_5 (5x) = 3 \iff 5^3 = 125 = 5x \iff x = 25 \in D$
(contrôle : $3 \log_5 (5 \cdot 25) = 9$)
4. domaine de définition de $f(x) = \log_x 64 : \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ (la base doit être positive)
domaine de définition de $g(x) = 3 : \mathbb{R}$
domaine de définition D de l'équation : $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$
 $\log_x 64 = 3 \iff x^3 = 64 \iff x = \sqrt[3]{64} = 4 \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$
(contrôle : $\log_4 64 = 3$)
5. domaine de définition de $f(x) = 2 \log_3 (2x+1) : 2x+1 > 0$ si et seulement si $x \in]-\frac{1}{2}, \infty[$
domaine de définition de $g(x) = 7 : \mathbb{R}$
domaine de définition D de l'équation : $] -\frac{1}{2}, \infty[\cap \mathbb{R} =] -\frac{1}{2}, \infty[$
 $2 \log_3 (2x+1) = 7 \iff \log_3 (2x+1) = 3.5 \iff 3^{3.5} = 46.765 = 2x+1 \iff x = \frac{46.765-1}{2} = 22.883 \in D$;
(contrôle : $2 \log_3 (2 \cdot 22.883 + 1) = 7$)
6. domaine de définition de $f(x) = \log_{10} x^3 + 2 \log_{10} x^2 : \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$
domaine de définition de $g(x) = 6.426 : \mathbb{R}$
domaine de définition D de l'équation : $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$
 $\log_{10} x^3 + 2 \log_{10} x^2 = 6.426 \iff \log_{10} x^3 + \log_{10} x^4 = 6.426 \iff \log_{10} (x^3 x^4) = 6.426$
 $\iff \log_{10} x^7 = 6.426 \iff 10^{6.426} = x^7 \iff x = \sqrt[7]{10^{6.426}} = 8.2794 \in D$
(contrôle : $\log_{10} 8.2794^3 + 2 \log_{10} 8.2794^2 = 6.426$)
7. domaine de définition de $f(x) = \log_4 (3x+4) : 3x+4 > 0$ si et seulement si $x \in]-\frac{4}{3}, \infty[$
domaine de définition de $g(x) = \log_4 (2x+2) : 2x+2 > 0$ si et seulement si $x \in]-1, \infty[$
domaine de définition D de l'équation : $] -\frac{4}{3}, \infty[\cap] -1, \infty[=] -1, \infty[$
 $\log_4 (3x+4) = \log_4 (2x+2) \iff \exp_4 \log_4 (3x+4) = \exp_4 \log_4 (2x+2) \iff$
 $3x+4 = 2x+2 \iff x = -2 \notin D$.
ensemble solution $L = \{\}$.

8. domaine de définition de $f(x) = \log_2(10x + 24) - \log_2(x - 84) : 10x + 24 > 0$ si et seulement si $x \in]-\frac{12}{5}, \infty[$ et $x - 84 > 0$ si et seulement si $x \in]84, \infty[$. Domaine de définition de f est alors $] -\frac{12}{5}, \infty[\cap]84, \infty[=]84, \infty[$.
domaine de définition de $g(x) = \log_2(x - 36) : x - 36 > 0$ si et seulement si $x \in]36, \infty[$.
domaine de définition D de l'équation est alors $] -\frac{12}{5}, \infty[\cap]36, \infty[\cap]84, \infty[=]84, \infty[$.
 $\log_2(10x + 24) - \log_2(x - 84) = \log_2(x - 36) \iff$
 $\log_2 \frac{(10x+24)}{(x-84)} = \log_2(x - 36) \iff$
 $\exp_2 \log_2 \frac{(10x+24)}{(x-84)} = \exp_2 \log_2(x - 36) \iff$
 $\frac{(10x+24)}{(x-84)} = (x - 36) \iff$
 $(10x + 24) = (x - 36)(x - 84) = x^2 - 120x + 3024 \iff$
 $10x + 24 - (x^2 - 120x + 3024) = -x^2 + 130x - 3000 = 0$
deux zéros réels : $100 \in D, 30 \notin D$
(contrôle : $\log_2(10 \cdot 100 + 24) - \log_2(100 - 84) = 6$
 $\log_2(100 - 36) = 6$)
9. domaine de définition de $f(x) = \log_7(7 \cdot x) : \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$
domaine de définition de $g(x) = 2 : \mathbb{R}$
domaine de définition D de l'équation : $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$.
 $\log_7(7 \cdot x) = 2 \iff 7^2 = 7x \iff x = 7 \in D$
(contrôle : $\log_7(7 \cdot 7) = 2$)
10. domaine de définition de $f(x) = \log_3(5x + 2) : 5x + 2 > 0$ si et seulement si $x \in]-\frac{2}{5}, \infty[$
domaine de définition de $g(x) = \log_3(3x + 12) : 3x + 12 > 0$ si et seulement si $x \in]-4, \infty[$
domaine de définition D de l'équation : $] -\frac{2}{5}, \infty[\cap]-4, \infty[=]-\frac{2}{5}, \infty[$.
 $\log_3(5x + 2) = \log_3(3x + 12) \iff 5x + 2 = 3x + 12 \iff x = 5 \in D$
(contrôle : $\log_3(5 \cdot 5 + 2) = 3$
 $\log_3(3 \cdot 5 + 12) = 3$)
11. domaine de définition de $f(x) = \log_x 8 : \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ (la base doit être positive)
domaine de définition de $g(x) = 3 : \mathbb{R}$
domaine de définition D de l'équation : $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$
 $\log_x 8 = -3 \iff x^{-3} = 8 \iff \frac{1}{x^3} = 8 \iff x^3 = \frac{1}{8} \iff x = \frac{1}{2} \in D$.
(contrôle : $\log_{0.5} 8 = -3$)
12. domaine de définition de $f(x) = \log_4 2 + \log_4 x : \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$
domaine de définition de $g(x) = 15 : \mathbb{R}$
domaine de définition D de l'équation : $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$
 $\log_4 2 + \log_4 x = 15 \iff \log_4(2x) = 15 \iff 4^{15} = 2x \iff x = \frac{4^{15}}{2} = \frac{2^{30}}{2} = 2^{29} = 536\,870\,912 \in D$
(contrôle : $\log_4 2 + \log_4 536\,870\,912 = 15$)
13. domaine de définition de $f(x) = 2 \log_{10}(x^2 - 14) : x^2 - 14 > 0$ si et seulement si $x \in]\sqrt{14}, \infty[\cup]-\infty, -\sqrt{14}[= D_1$ ($\sqrt{14} = 3.741\,7$)
domaine de définition de $g(x) = \log_{10} 5 + \log_{10}(6x^2 - 49) : 6x^2 - 49 > 0$ si et seulement si $x \in]-\infty, -\frac{7}{6}\sqrt{6}[\cup]\frac{7}{6}\sqrt{6}, \infty[= D_2$. ($\frac{7}{6}\sqrt{6} = 2.857\,7$)
domaine de définition D de l'équation est alors $D = D_1 \cap D_2 = D_1$.
 $2 \log_{10}(x^2 - 14) = \log_{10} 5 + \log_{10}(6x^2 - 49) \iff$
 $\log_{10}(x^2 - 14)^2 = \log_{10} 5(6x^2 - 49) \iff (x^2 - 14)^2 = 30x^2 - 245$
 $\iff (x^2 - 14)^2 - (30x^2 - 245) = x^4 - 58x^2 + 441 = 0$
zéros réels : $3, -3, -7, 7$
 3 et -3 ne sont pas éléments de D ($(-3)^3 - 14 = 3^2 - 14 < 0$)
 $L = \{-7, 7\}$
(contrôle : $2 \log_{10}(7^2 - 14) = 3.088\,1$
 $\log_{10} 5 + \log_{10}(6 \cdot 7^2 - 49) = 3.088\,1$) ($(-7)^2 = 7^2$)
14. domaine de définition de $f(x) = 2 \log_7 x : \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$
domaine de définition de $g(x) = \frac{2}{3} : \mathbb{R}$

domaine de définition D de l'équation : $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$

$$2 \log_7 x = \frac{2}{3} \iff 7^{\frac{2}{3}} = x^2 \iff x = 7^{\frac{1}{3}} = 1.9129 \in D$$

$$(\text{contrôle} : 2 \log_7 7^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3})$$

15. domaine de définition de $f(x) = 2 \log_2(x-1) : x-1 > 0$ si et seulement si $x \in]1, \infty[$
 domaine de définition de $g(x) = \log_2(3x+1) : 3x+1 > 0$ si et seulement si $x \in]-\frac{1}{3}, \infty[$
 domaine de définition D de l'équation : $]1, \infty[\cap]-\frac{1}{3}, \infty[=]1, \infty[$.

$$2 \log_2(x-1) = \log_2(3x+1) \iff (x-1)^2 = 3x+1 \iff$$

$$(x-1)^2 - (3x+1) = x^2 - 5x = x(x-5) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 5$$

$$x = 0 \notin D; 5 \in D$$

$$(\text{contrôle} : 2 \log_2(5-1) = 4$$

$$\log_2(3 \cdot 5 + 1) = 4)$$

16. domaine de définition de $f(x) = 2 \log_x \frac{1}{17} : \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$

$$\text{domaine de définition de } g(x) = 9 : \mathbb{R}$$

$$\text{domaine de définition } D \text{ de l'équation : } \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$$

$$\log_x \frac{1}{27} = 9 \iff x^9 = \frac{1}{27} \iff x = 27^{-\frac{1}{9}} = 3^{3 \cdot -\frac{1}{9}} = 3^{-\frac{1}{3}} = 0.69336 \in D$$

$$(\text{contrôle} : \log_{0.69336} \frac{1}{27} = 9)$$

17. domaine de définition de $f(x) = \log_2(3x-1) + \log_2(x+5) : 3x-1 > 0$ si et seulement si $x \in]\frac{1}{3}, \infty[$

domaine de définition de $g(x) = 6$ est $\mathbb{R}$. domaine de définition de l'équation est alors $]\frac{1}{3}, \infty[\cap \mathbb{R} =]\frac{1}{3}, \infty[$.

$$\log_2(3x-1) + \log_2(x+5) = 6 \iff (3x-1)(x+5) = 2^6 = 64 \iff$$

$$(3x-1)(x+5) - 64 = 3x^2 + 14x - 5 - 64 = 3x^2 + 14x - 69 = 0$$

$$\text{zéros réels} : 3 \in]\frac{1}{3}, \infty[; -7.666667 \notin]\frac{1}{3}, \infty[$$

$$(\text{contrôle} : \log_2(3 \cdot 3 - 1) + \log_2(3 + 5) = 6).$$

18. domaine de définition : $3x-1 > 0, x \in]\frac{1}{3}, \infty[$. $\log_3(x-1) = \frac{\log_2(3x-1)}{\log_2(3)}$ et avec cela

$$\log_2(3x-1) = \frac{\log_2(3x-1)}{\log_2 3}. \text{ Par conséquent } \log_2(3) \log_2(3x-1) = \log_2(3x-1) \text{ et avec}$$

$$\log_2(3) = 1.5850 : \log_2(3x-1)^{1.585} = \log_2(3x-1). \text{ En appliquant la fonction réciproque}$$

$$\exp_2 \text{ de } \log_2 \text{ des deux côtés : } (3x-1)^{1.585} = 3x-1 \implies \frac{(3x-1)^{1.585}}{3x-1} = 1 \implies (3x-1)^{1.585-1} =$$

$$(3x-1)^{0.585} = 1 \implies 0.585 \ln(3x-1) = \ln 1 = 0 \implies \ln(3x-1) = 0 \implies 3x-1 =$$

$$\exp(0) = 1 \implies x = \frac{2}{3} \in \text{domaine de définition.}$$

Solution 5. Dans un lac surfertilisé le poids des algues augmente de 3 % par jour. Aujourd'hui il contient 27 tonnes d'algues. Combien de tonnes il contenait il y a 100 jours ? Dans quel délais le poids des algues double ? $A_{t_0-100} (1.03)^{100} = 27 \implies A_{t_0-100} = \frac{27}{(1.03)^{100}} = 1.4049$.

$$2A_{t_0} = A_{t_0} (1 + 0.03)^t \iff 2 = (1 + 0.03)^t \iff \ln 2 = t \ln 1.03 \iff \frac{\ln 2}{\ln 1.03} = 23.450 = t$$

Solution 6. De combien de pourcents le nombre des noyaux radioactifs doit diminuer, si dans 50 ans leur nombre est inférieur d'un billion de fois (10^{12}) par rapport à l'heure actuelle ?

$$\frac{K_h}{10^{12}} = K_h (1-p)^{50} \iff \frac{1}{10^{12}} = (1-p)^{50} \iff 1-p = \sqrt[50]{\frac{1}{10^{12}}} = 10^{-\frac{12}{50}} \iff p = 1 - 10^{-\frac{12}{50}} =$$

$$0.42456$$

$$\text{alors } 42.456\%$$

$$\text{contrôle} : (1 - 0.42456)^{50} = 10^{-12}$$

Solution 7. Dans un lac la quantité d'algues augmente de 8 à 32 tonnes dans 100 jours. Après combien de jours (à partir des 32 tonnes) on aura 200 tonnes ?

$$8(1+r)^{100} = 32 \iff 4^{\frac{1}{100}} = 1+r \iff r = 4^{\frac{1}{100}} - 1 = 0.013959. \text{ La croissance en pourcent par jour est alors } 1.3959\%$$

$$\text{On obtient : } 32(1 + 0.013959)^t = 200 \iff \ln \frac{200}{32} = t \ln 1.013959 \iff t = \frac{\ln \frac{200}{32}}{\ln 1.013959} = 132.20$$

(jours)

Solution 8. En 1979 l'Europe avait 746 millions d'habitants, l'Afrique 456 millions. Si l'on suppose pour l'Europe un taux de croissance de 0,4 % par année, pour l'Afrique de 2,9 %, quand

l'Afrique aura autant d'habitants que l'Europe ? (attention : la surface de l'Afrique se monte à 30.221.532 km², celle de l'Europe à 10.180.000 km²).

$$\begin{aligned} 746 (1 + 0.004)^t &= 456 (1 + 0.029)^t \iff \\ \frac{(1 + 0.004)^t}{(1 + 0.029)^t} &= \frac{456}{746} \iff \\ t \ln \left(\frac{1.004}{1.029} \right) &= \ln \frac{456}{746} \iff \\ t &= \frac{\ln \frac{456}{746}}{\ln \left(\frac{1.004}{1.029} \right)} = 20.013 \end{aligned}$$

alors en 1999.

Solution 9. Pour protéger les patients contre le rayonnement lors de la radioscopie on couvre les parties du corps qu'on ne veut pas examiner d'un tablier de plomb. Le rayonnement qui heurte le tablier a une intensité de 55 W/m². Quelle est l'intensité du rayonnement qui heurte le corps si le tablier est épais de 12mm ? De quelle épaisseur le tablier doit être pour qu'il retienne 90% du rayonnement ? (m pour le nombre de millimètre ; I pour l'intensité) $55 (1 - 0.3)^{12} = 0.76127$ (en W/m²).

$$0.1I = I(1 - 0.3)^m \iff 0.1 = (1 - 0.3)^m \iff m = \frac{\ln 0.1}{\ln 0.7} = 6.4557 \text{ (en mm)}$$

Solution 10. Si l'on plie une feuille de papier format A4 plusieurs fois au milieu, deux couches, ensuite quatre couches, etc. se superposent. Combien de fois faudrait-il plier la feuille pour obtenir une tour qui atteint la lune ? (distance de la lune : 384000 km, épaisseur du papier 0.2mm)

$$0.2 \cdot 2^x = 384000000000 \iff x = \frac{\ln \frac{384000000000}{0.2}}{\ln 2} = 40.804$$

(Est-ce réaliste de supposer qu'on puisse plier autant de fois une feuille de papier ? Essayez pour vous rendre compte du problème !) Non. En pliant on a besoin de plus en plus de surface aux bords. Il faudrait alors couper le papier. Cela n'est pas non plus réaliste, car la surface des bouts de papier devient trop petite : une feuille format A4 est large de 210 mm et haut de 297 mm. Le 4 dans le noms „A4“ se réfère au fait qu'on obtient la feuille en pliant quatre fois une feuille A0 (841 mm $\times$ 1189 mm = 1 m²; rapport qui correspond en théorie à 1 : $\sqrt{2}$). On obtient une surface de 210 $\cdot$ 297 = 62370 mm². Il faut $\frac{384000000000}{0.2} = 1.92 \cdot 10^{12}$ bout de papier. Ceux-ci auraient une surface de $\frac{62370}{1.92 \cdot 10^{12}} = 3.2484 \cdot 10^{-8}$ mm² (pas perceptible par nos sens !)

Solution 11. La température d'une tasse de café pleine est de 60°C supérieur à la température de la salle. On mesure les différences δ à la température de la salle à des laps de temps réguliers :

t (minutes)	0	5	10	15	20	25
δ (°C)	60	45	34	25	19	14

Essayer de trouver un modèle (une fonction) pour les données.

On essaie : $\frac{45}{60} = \frac{3}{4} = 0.75$. $\frac{34}{45} = \frac{34}{45} = 0.75556$; $\frac{25}{34} = 0.73529$; $\frac{19}{25} = 0.76$

Jusqu'à des fautes d'arrondis et de mesure on peut supposer une décroissance constante de 25% en 5 minutes. On obtient le modèle $T(t) = T_a (0.75)^t$ (une unité de t correspond à 5 minutes).

contrôle : $60 (0.75)^1 = 45$; $60 (0.75)^2 = 33.75$; $60 (0.75)^3 = 25.313$, etc.

Si on veut une formule pour t en minutes :

$$45 = 60 (1 - p)^5 \iff \frac{3}{4} = (1 - p)^5 \iff 1 - 0.75^{\frac{1}{5}} = 5.5912 \times 10^{-2} = p.$$

contrôle : $60 (1 - 5.5912 \times 10^{-2})^5 = 45.0$; $60 (1 - 5.5912 \times 10^{-2})^{10} = 33.75$; etc.

Solution 12. Déterminer l'équation de la fonction exponentielle $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(x) = a^x$, tel que (3, 5) est élément du graphe de la fonction. $a^3 = 5$. Alors $a = 5^{\frac{1}{3}} = 1.7100$

contrôle : $(5^{\frac{1}{3}})^3 = 5$.

Solution 13. Déterminer les paramètres a et b tel que le graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(x) = b \cdot a^x$ passe par les points $(0, 1.5)$ et $(1, 1.8)$. $ba^0 = b = 1.5$; $ba^1 = 1.5a = 1.8 \implies a = \frac{1.8}{1.5} = \frac{6}{5} = 1.2$ Avec cela : $f(x) = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^x$
 contrôle : $f(0) = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^0 = 1.5$; $f(1) = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^1 = \frac{9}{5} = 1.8$

Solution 14. Supposons la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(x) = 2^{2x+5}$. Réécrire l'équation de la fonction de sorte que $f(x) = a \cdot b^x$, $a, b \in \mathbb{R}$. $2^{2x+5} = 2^{2x} 2^5 = 4^x 2^5 = 32 \cdot 4^x$ ($a = 32$; $b = 4$)

Solution 15. Supposons la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(x) = (\sqrt{2})^{5x+4}$. Réécrire l'équation de la fonction de sorte que $f(x) = a \cdot b^x$; $a, b \in \mathbb{R}$. $(\sqrt{2})^{5x+4} = 2^{\frac{5x+4}{2}} = 2^{2.5x+2} = 2^{2.5x} 2^2 = 4 \cdot (2^{2.5})^x$ (avec $a = 4$; $b = 2^{2.5} = 5.6569$)

Solution 16. Un pavé droit (parallélépipède rectangle) a une largeur de la moitié de la longueur. La hauteur est de 2cm plus longue que la largeur. Son volume se monte à 350cm^3 . Calculer la largeur, la longueur et la hauteur du pavé droit.

$$b = \frac{l}{2}$$

$$h = 2 + b$$

$$b \cdot l \cdot h = 350$$

$$l = 2b; b \cdot l \cdot h = b \cdot 2b \cdot (2 + b) = 2b^3 + 4b^2 = 350$$

$$\text{Alors } 2b^3 + 4b^2 - 350 = 0$$

$$\text{zéros réels : } 5 \implies l = 2b = 10; h = 5 + 2 = 7$$

Solution 17. Indiquer pour une option d'achat (prix d'exercice = 55, prime = 3) la fonction des résultats à l'échéance (fonction des pertes et gains possible selon le prix du marché S_T de la valeur de l'actif sous-jacent à l'échéance T). Dessiner la fonction et indiquer sur le dessin l'ordonnée à l'origine et le zéro de la fonction. On obtient un gain si $S_T > k$ (on peut acheter l'actif sous-jacent au prix de k et le vendre sur le marché au prix de S_T). La fonction des résultats à l'échéance est alors :

$$f(S_T) = \begin{cases} S_T - k - c = S_T - 55 - 3 & \text{pour } S_T > 55 \\ -c = -3 & \text{pour } S_T \leq 55 \end{cases}$$

La représentation graphique est donnée par l'ordonnée à l'origine -58 et le zéro $S_T - 55 - 3 = 0$: 58

On obtient une parallèle à l'axe des x donnée par la constante -3 jusqu'à 55 , ensuite une droite de pente 1 , qui passe par $(0, -58)$ et $(58, 0)$.

Solution 18. Déterminer les équations et les domaines de définition des fonctions réciproques des fonctions données par les équations suivantes :

1. $f(x) = 2x$; $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est injective et surjective sur $\mathbb{R}$. On peut choisir comme domaine de définition de la fonction réciproque $\mathbb{R}$. $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée par $f^{-1}(y) = \frac{y}{2}$ (car $y = 2x \iff x = \frac{y}{2}$)
2. $f(x) = -x + 3$; $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est injective et surjective sur $\mathbb{R}$. Comme domaine de définition de la fonction réciproque on peut choisir $\mathbb{R}$. $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée par $f^{-1}(y) = 3 - y$ (car $y = -x + 3 \iff y - 3 = -x \iff x = 3 - y$)
3. $f(x) = (x - 1)^2 + 3 = x^2 - 2x + 4$. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est ni injective ni surjective. Le minimum de la fonction est en $x = 1$ (avec la formule $-\frac{b}{2a}$), et $f(1) = 1^2 - 2 + 4 = 3$. La fonction est convexe (a est positif) et à droite de 1 strictement croissante. Par conséquent il y a une restriction f_1 de f sur $[1, \infty[$, qui est injective et surjective, à savoir $f_1 : [1, \infty[\rightarrow [3, \infty[$. Pour $f_1^{-1} : [3, \infty[\rightarrow [1, \infty[$ on obtient : $y = x^2 - 2x + 4 \iff x^2 - 2x + 4 - y = 0 \iff \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4 - y)}}{2 \cdot 1} = \pm \sqrt{y - 3} + 1$;
 Avec cela : $f_1^{-1}(y) = \sqrt{y - 3} + 1$ pour $y \geq 3$.

A gauche de 1 la fonction est strictement décroissante. Par conséquent il y a une restriction f_2 de f sur $] -\infty, 1]$, tel que $f_2 :] -\infty, 1] \rightarrow [3, \infty[$ est injective et surjective. $f_2^{-1}(y) = -\sqrt{y-3} + 1$ pour $y \geq 3$.

attention : Il n'y a pas pour f une fonction réciproque, mais uniquement pour des restrictions bien choisies de f .

4. $f(x) = -5(x+1)^2 + 4 = -5x^2 - 10x - 1$. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est ni injective ni surjective. Le maximum de la fonction est en $x = -\frac{-10}{-10} = -1$, et $f(-1) = -5 \cdot (-1)^2 - 10(-1) - 1 = 4$. La fonction est concave (a est négatif) et à droite de -1 strictement décroissante. Par conséquent il y a une restriction f_1 de f sur $[-1, \infty[$, qui est injective et surjective, à savoir $f_1 : [-1, \infty[\rightarrow] -\infty, 4]$. Pour $f_1^{-1} :] -\infty, 4] \rightarrow [-1, \infty[$ on obtient : $y = -5x^2 - 10x - 1$; $-5x^2 - 10x - 1 - y = 0$; $\frac{-(-10) - \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot (-5) \cdot (-1-y)}}{2 \cdot (-5)} = \frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{4-y} - 1 = f_1^{-1}(y)$ pour $y \leq 4$.

A gauche de -1 la fonction est strictement croissante. Par conséquent il y a une restriction f_2 de f sur $] -\infty, -1]$, tel que $f_2 :] -\infty, -1] \rightarrow] -\infty, 4]$ est injective et surjective.

$f_2^{-1}(y) = \frac{-(-10) - \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot (-5) \cdot (-1-y)}}{2 \cdot (-5)} = -\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{4-y} - 1$ pour $y \leq 4$.

attention : Il n'y a pas pour f une fonction réciproque, mais uniquement pour des restrictions bien choisies de f .

5. $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ ($f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une droite, voir la solution de l'exercice 18.2)
 6. $f(x) = x^2 + 4x + 1$ (est un polynôme du degré 2, voir les solutions 18.3 et 18.4)
 7. $f(x) = 2x^2 - 8x + 7$ (est un polynôme du degré 2, voir les solutions 18.3 et 18.4)
 8. $f(x) = \sqrt{4-3x} + 1$ est définie pour $4-3x \geq 0$, alors pour $x \in] -\infty, \frac{4}{3}]$. Pour $x_2 > x_1$:

$$\begin{aligned} -3x_2 &< -3x_1 \\ 4-3x_2 &< 4-3x_1 \\ \sqrt{4-3x_2} &< \sqrt{4-3x_1} \\ \sqrt{4-3x_2} + 1 &< \sqrt{4-3x_1} + 1 \\ f(x_2) &< f(x_1) \end{aligned}$$

Ainsi f est strictement monotone sur le domaine de définition et $f :] -\infty, \frac{4}{3}] \rightarrow [1, \infty[$

(car $\sqrt{4-3 \cdot \frac{4}{3}} + 1 = 1$) est surjective et injective. Ainsi il existe une fonction réciproque

$f^{-1} : [1, \infty[\rightarrow] -\infty, \frac{4}{3}]$ avec $y = \sqrt{4-3x} + 1$; $y-1 = \sqrt{4-3x}$; $(y-1)^2 = y^2 - 2y + 1 = 4-3x$; $y^2 - 2y + 1 - 4 = -3x$;

$$\frac{y^2 - 2y - 3}{-3} = -\frac{1}{3}y^2 + \frac{2}{3}y + 1 = f^{-1}(y)$$