

Factoriser

„factoriser“ signifie la transformation d’une expression en un produit (de facteurs), p.ex.

$$5x + 7x^2 = x(5 + 7x).$$

Pour factoriser on utilise différentes méthodes. On répète quelques-unes de ces méthodes :

Mise en évidence

La mise en évidence utilise la distributivité de la multiplication par rapport à l’addition :

$$ab + ac = a(b + c)$$

Exemple 1. 1. $6x^3 + 4x^2 = 2x^2(3x + 2)$

2. $2x^3y + 3x^2y^2 - x^3y^2 = x^2y(2x + 3y - xy)$

3. $x^{2n} - ax^n = x^n(x^n - a)$

4. $(a + b)x - (a + b)y = (a + b)(x - y)$

5. $(a + b)x + a + b = (a + b)(x + 1)$

6. $2ax + 2ay + 3bx + 3by = 2a(x + y) + 3b(x + y) = (2a + 3b)(x + y)$

Utilisation des identités remarquables

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 + ba - ba - b^2 = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Exemple 2. 1. $4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$

2. $9x^2 - 30x + 25 = (3x - 5)^2$

Factorisation de $x^2 + px + q$

Pour factoriser

$$x^2 + px + q$$

il est utile de connaître l’équation suivante :

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

c. à d. $p = a + b$ et $q = ab$.

Exemple 3. 1. $x^2 + 5x + 6 = x^2 + (3 + 2)x + 3 \cdot 2 = (x + 3)(x + 2)$

Si on ne voit pas toute suite les valeurs de a et de b , on peut poser le système d’équations suivant :

$$a + b = 5$$

$$ab = 6$$

et le résoudre (mène à une équation quadratique, p.ex. avec $a = 5 - b \implies (5 - b)b = 5b - b^2 = 6 \implies -b^2 + 5b - 6 = 0$).

2. $-x^2 + x + 20 = -(x^2 - x - 20) = -(x^2 + (-5 + 4)x + (-5)4) = -(x - 5)(x + 4) = (5 - x)(x + 4)$

3. $3x^2 - 3x - 6 = 3(x^2 - x - 2) = 3(x - 2)(x + 1)$

Par la transformation préalable créative de formules

- Exemple 4.**
1. $2x^2 + 9x + 7 = 2x^2 + 2x + 7x + 7 = 2x(x + 1) + 7(x + 1) = (x + 1)(2x + 7)$
 2. $x^3 + 4x - 5 = x^3 + 5x - x - 5 = (x^3 - x) + (5x - 5) = x(x^2 - 1) + 5(x - 1) =$
 $= x(x + 1)(x - 1) + 5(x - 1) = (x - 1)(x(x + 1) + 5) = (x - 1)(x^2 + x + 5)$
 3. $x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2$
 $= (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy)$

Division de polynômes

Si on veut p.ex. réduire l'expression

$$\frac{x^3 + 6x^2 + 3x - 10}{(x - 1)(x + 2)},$$

on peut essayer de factoriser $3x^3 - 2x^2 + 4x + 5$ en divisant cette expression par $(x - 1)$ ou par $(x + 2)$. Pour l'expression on obtient :

$$\begin{array}{r} (x^3 + 6x^2 + 3x - 10) : (x - 1) = x^2 + 7x + 10 \\ \underline{-x^3 + x^2} \\ 7x^2 + 3x \\ \underline{-7x^2 + 7x} \\ 10x - 10 \\ \underline{-10x + 10} \\ 0 \end{array}$$

On peut alors représenter l'expression $x^3 + 6x^2 + 3x - 10$ par $(x^2 + 7x + 10)(x - 1)$ et on obtient

$$\frac{x^3 + 6x^2 + 3x - 10}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{(x^2 + 7x + 10)(x - 1)}{(x - 1)(x + 2)}.$$

La deuxième expression peut se réduire. Il faut cependant faire attention au fait que l'ensemble des nombres admissibles pour l'expression change par cette opération. L'expression

$$\frac{(x^2 + 7x + 10)}{(x + 2)}$$

est définie pour 1, mais pas l'expression

$$\frac{(x^2 + 7x + 10)(x - 1)}{(x - 1)(x + 2)}$$

(division par 0).

Dans un pas supplémentaire on peut essayer de diviser $x^2 + 7x + 10$ par $(x + 2)$:

$$\begin{array}{r} (x^2 + 7x + 10) : (x + 2) = x + 5 \\ \underline{-x^2 - 2x} \\ 5x + 10 \\ \underline{-5x - 10} \\ 0 \end{array}$$

On obtient alors la factorisation

$$x^3 + 6x^2 + 3x - 10 = (x + 5)(x + 2)(x - 1)$$

et en réduisant

$$\frac{x^3 + 6x^2 + 3x - 10}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{(x + 5)(x + 2)(x - 1)}{(x - 1)(x + 2)} = x + 5$$

(changement de l'ensemble des nombres admissibles!).

Exercices

Bloc 1

1. $3x + 6y + 12$
2. $ax + 2ay - az$
3. $25x^3y^2 - 10x^2y$
4. $18x^4y^3z^2 - 6x^2y^2z^2 + 3xyz$
5. $a(x + y) + b(x + y)$
6. $a(x + y) - (x + y)$
7. $(x - y) + a(x - y)$
8. $a(x + y) + b(x + y) + c(x + y)$
9. $a(x + y) - x - y$
10. $x - xy + 5 - 5y$

Bloc 2

1. $x^2 + 10x + 25$
2. $x^2 - 6x + 9$
3. $x^2 + 4xy + 4y^2$
4. $1 - 4x + 4x^2$
5. $x^2 - x + 1/4$
6. $4x^2 + 2x + 1/4$
7. $x^4 - 14x^2 + 49$
8. $(x + y)^2 + 2(x + y) + 1$
9. $(x^2 + y^2)^2 - 4(x^2 + y^2) + 4$
10. $x^{2m} + 2x^m y^n + y^{2n}$
11. $x^{4n} - 6x^{2n} y^n + 9y^{2n}$
12. $5x^2 + 10xy + 5y^2$
13. $xy^2 - 2xyz + xz^2$
14. $x^2 - 9$
15. $25x^2 - 36y^2$
16. $x^2 - y^4$
17. $48x^4 - 3y^2$
18. $x^4 - y^4$
19. $x^4 y^4 z^4 - 1$
20. $x^8 - y^8$
21. $x^{2n} - y^{2n}$
22. $2x^2 y^2 - 18x^2$

Bloc 3

1. $x^2 + 5x + 6$
2. $x^2 - x - 6$
3. $x^2 - 6x + 8$
4. $x^2 - 3x - 18$
5. $-x^2 + 10x - 24$

11. $ax + ay + bx + by$
12. $ax + by - bx - ay$
13. $(x - 1)(y + 3) - (1 - x)$
14. $(x + y)^2 + (x + y)(x - y)$
15. $(x + y - z)(x + 2y + 3z) - (z - x - y)(x - y - 3z)$
16. $1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$
17. $x^n + x^{2n}y$
18. $2x^n y^{2n} + x^{2n} y^n$
19. $x^{4n} y^2 - x^{3n} y$
20. $x^{3n} y^2 - 4x^{5n} y^5 + x^{2n+1} y^3$

23. $5x^3 y - 5xy^3$
24. $x^3 - x^2 - x + 1$
25. $x^2 - 2xy + y^2 - 1$
26. $1 - x^2 - y^2 + x^2 y^2$
27. $x^3 + 2x^2 - x - 2$
28. $(x - y)^2 - z^2$
29. $x^2 - (y - z)^2$
30. $(x + a)^2 - (y - b)^2$
31. $4(2x - 5y)^2 - (3x - 4y)^2$
32. $x^3 - 1$
33. $x^3 + 8$
34. $125x^3 + 64y^3$
35. $xy^4 - x^4 y$
36. $x^6 - 1$
37. $xy^6 - x^7$
38. $x^{18} - y^{12}$
39. $x^{3n} - y^{3n}$
40. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
41. $8 - 12x + 6x^2 - x^3$
42. $x^3 + 3x^2 y^2 + 3xy^4 + y^6$
43. $9x^2 + y^2 + z^2 + 6xy + 6xz + 2yz$
44. $x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy - 6xz - 12yz$

6. $-x^2 + 11x - 30$
7. $3x^2 - 27x + 54$
8. $2x^2 - 10x + 8$
9. $ax^2 + a(b - c)x - abc$
10. $x^4 + 3x^2 - 4$
11. $x^4 - 17x^2 + 16$

12. $x^{2n} - 12x^n + 32$
13. $x^2 - 4xy + 3y^2$
14. $x^2 - xy - 20y^2$
15. $(x-y)^2 + 7(x-y) + 12$ (man setze $z = x-y$)
16. $(x-y)^2 - 6(x-y) - 16$
17. $(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) - 12$ (man setze $y = x^2 + x$)
18. $(x^2 - x)^2 - 14(x^2 - x) + 24$
19. $6x^2 + 15x + 6$
20. $2x^2 - 5x - 3$
21. $x^3 - 7x - 6$
22. $x^3 - 13x + 12$
23. $12x^2 - 2x - 2$
24. $2x^3 + 3x^2 - 23x - 12$

Bloc 4

1. $48ab^3 + 36a^3b$
2. $5w^6 + 10w^4$
3. $6az^3 - 3az^2 + 9az$
4. $a^3 + a^2 - a$
5. $x^4 - 25y^6$
6. $9b^5 - 4b$
7. $25x^4 + 40x^2y^2 + 16y^4$
8. $44x^3y^3 - 77x^2y^4$
9. $4ab^2c^2 - 6a^2bc^2 - 8a^2b^2c$
10. $2x^2 - 12x + 18$
11. $18a^2 + 6ab - 3a - b$
12. $x^4 - x^3 + 2x - 2$
13. $50x^2 - 2y^2$
14. $z(x^2 + y^2 - z^2) - (x^2 + y^2 - z^2)$
15. $12a^4 + 36a^3 + 27a^2$
16. $2u^3 - 8u^2v + 8uv^2$
17. $80a^2 - 120ab + 45b^2$
18. $(x-y)(x^2 - z^2) - (x-z)(x^2 - y^2)$
19. $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$
20. $4a^3 - 4ab^2 - a^2c + b^2c$
21. $2x^4 - 162$
22. $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$
23. $ac - a - bc + b - c + 1$
24. $5mr + 2np - 5nr + n - 2mp - m$
25. $(2a - 3b)(4a^2 - 19ab) - (2a - 3b)(-9b^2 - 7ab)$

Bloc 5 Essaer de réduire les fractions suivantes :

1.

$$\frac{3x + x^2 - 10}{(x + 5)}$$

2.

$$\frac{11x - 7.5x^2 - 4}{(2.5x - 2)}$$

3.

$$\frac{9x - 14x^2 + 6x^3 - 10}{x - 2}$$

4.

$$\frac{8x^2 - 6x + 2x^3 - 8x^4 + 20x^5 - 2}{4x^2 - 2}$$

Solutions**Solutions Bloc 1**

1. $3(x + 2y + 4)$
2. $a(x + 2y - z)$
3. $5x2y(5xy - 2)$
4. $3xyz(6x^3y^2z - 2xyz + 1)$
5. $(x + y)(a + b)$
6. $(x + y)(a - 1)$
7. $(x - y)(1 + a)$
8. $(x + y)(a + b + c)$
9. $(x + y)(a - 1)$
10. $(1 - y)(x + 5)$
11. $(x + y)(a + b)$
12. $(x - y)(a - b)$
13. $(x - 1)((y + 3) + 1) = (x - 1)(y + 4)$

14. $(x + y)(2x)$
15. $(x + y - z)(2x + y)$
16. $(1 + x^2)(1 + x^3 + x^4)$
17. $x^n(1 + x^n y)$

Solutions Bloc 2

1. $(x + 5)^2$
2. $(x - 3)(x - 3)$
3. $(x + 2y)^2$
4. $(2x - 1)^2$
5. $(x - \frac{1}{2})^2$
6. $(2x + \frac{1}{2})^2$
7. $(x^2 - 7)^2$
8. $((x + y) + 1)^2$
9. $((x^2 + y^2) - 2)^2$
10. $(x^m + y^n)^2$
11. $(x^{2n} - 3y^n)^2$
12. $5(x + y)^2$
13. $(xy - xz)(y - z) = x(y - z)^2$
14. $(x + 3)(x - 3)$
15. $(5x + 6y)(5x - 6y)$
16. $(x + y^2)(x - y^2)$
17. $(12x^2 + 3y)(4x^2 - y)$
18. $(x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$
19. $(x^2 y^2 z^2 + 1)(x^2 y^2 z^2 - 1)$
20. $(x^4 + y^4)(x^4 - y^4)$
21. $(x^n + y^n)(x^n - y^n)$
22. $(2xy + 6x)(xy - 3x)$
23. $5xy(x^2 - y^2) = 5xy(x - y)(x + y)$

Solutions Bloc 3

1. $(x + 2)(x + 3)$
2. $(x + 2)(x - 3)$
3. $(x - 4)(x - 2)$
4. $(x + 3)(x - 6)$
5. $(x - 6)(4 - x)$
6. $-(x - 5)(x - 6)$
7. $3(x - 3)(x - 6)$
8. $2(x - 1)(x - 4)$
9. $a(x + b)(x - c)$
10. $(x^2 + 4)(x^2 - 1)$
11. $(x^2 - 1)(x^2 - 16)$
12. $(x^n - 4)(x^n - 8)$

$$18. x^n y^n (2y^n + x^n)$$

$$19. x^{3n} y (x^n y - 1)$$

$$20. x^{2n} y^2 (x^n - 4x^{3n} y^3 + xy)$$

$$24. (x - 1)(x^2 - 1) = (x + 1)(x - 1)^2$$

$$25. ((x - y) + 1)((x - y) - 1)$$

$$26. (x^2 - 1)(y^2 - 1)$$

$$27. (x + 2)(x^2 - 1)$$

$$28. ((x - y) + z)((x - y) - z)$$

$$29. (x + (y - z))(x - (y - z))$$

$$30. ((x + a) + (y - b))((x + a) - (y - b))$$

$$31. (2(2x - 5y) + (3x - 4y))(2(2x - 5y) - (3x - 4y))$$

$$32. (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

$$33. (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$34. (5x + 4y)(25x^2 - 20xy + 16y^2)$$

$$35. xy(y - x)(x^2 + xy + y^2)$$

$$36. (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) \quad (= (x^3 + 1)(x^3 - 1))$$

$$37. x(y^2 - x^2)(y^4 + y^2 x^2 + x^4) \quad (= x(y^3 + x^3)(y^3 - x^3))$$

$$38. (x^6 - y^4)(x^{12} + x^6 y^4 + y^8) \quad (= (x^9 - y^6)(x^9 + y^6))$$

$$39. (x^n - y^n)(x^{2n} + x^n y^n + y^{2n})$$

$$40. (x - 1)^3$$

$$41. (2 - x)^3$$

$$42. (x + y^2)^3$$

$$43. (3x + y + z)^2$$

$$44. (x + 2y - 3z)^2$$

$$13. (x - y)(x - 3y)$$

$$14. (x - 5y)(x + 4y)$$

$$15. ((x - y) + 3)((x - y) + 4)$$

$$16. ((x - y) - 8)((x - y) + 2)$$

$$17. ((x^2 + x) + 6)((x^2 + x) - 2)$$

$$18. ((x^2 - x) - 2)((x^2 - x) - 12)$$

$$19. (6x + 3)(x + 2)$$

$$20. (2x + 1)(x - 3)$$

$$21. (x + 1)(x^2 - x - 6)$$

$$22. (x - 1)(x^2 + x - 12)$$

$$23. 2(1 - 2x)(-3x - 1)$$

$$24. (2x + 1)(x^2 + x - 12)$$

Solutions Bloc 4

$$\begin{array}{r}
 1. \quad (x^2 + 3x - 10) : (x + 5) = x - 2 \\
 \underline{-x^2 - 5x} \\
 -2x - 10 \\
 \underline{2x + 10} \\
 0
 \end{array}$$

On peut alors affirmer

$$\frac{3x + x^2 - 10}{(x + 5)} = \frac{(x + 5)(x - 2)}{x - 2} = x + 5$$

(changement de l'ensemble des nombres admissibles : 2 ajoutée pour la dernière expression)

$$\begin{array}{r}
 -7.5x^2 + 11x - 4 : (2.5x - 2) = -3x + 2 \\
 \underline{-7.5x^2 + 6x} \\
 5x - 4
 \end{array}$$

Il en résulte

$$\frac{11x - 7.5x^2 - 4}{2.5x - 2} = \frac{(-3x + 2)(2.5x - 2)}{2.5x - 2} = -3x + 2$$

(changement de l'ensemble des nombres admissibles : $2.5x - 2 = 0$; 0.8 ajoutée pour la dernière expression)

$$\begin{array}{r}
 (6x^3 - 14x^2 + 9x - 10) : (x - 2) = 6x^2 - 2x + 5 \\
 \underline{-6x^3 + 12x^2} \\
 -2x^2 + 9x \\
 \underline{2x^2 - 4x} \\
 5x - 10 \\
 \underline{-5x + 10} \\
 0
 \end{array}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
 \frac{9x - 14x^2 + 6x^3 - 10}{x - 2} &= \frac{(6x^2 - 2x + 5)(x - 2)}{x - 2} \\
 &= (6x^2 - 2x + 5)
 \end{aligned}$$

(changement de l'ensemble des nombres admissibles : 2 ajoutée pour la dernière expression)

$$\begin{array}{r}
 (20x^5 - 8x^4 + 2x^3 + 8x^2 - 6x - 2) : (4x^2 - 2) = 5x^3 - 2x^2 + 3x + 1 \\
 \underline{-20x^5 + 10x^3} \\
 -8x^4 + 12x^3 + 8x^2 \\
 \underline{8x^4 - 4x^2} \\
 12x^3 + 4x^2 - 6x \\
 \underline{-12x^3 + 6x} \\
 4x^2 - 2 \\
 \underline{-4x^2 + 2} \\
 0
 \end{array}$$

On peut affirmer

$$\begin{aligned}
 \frac{20x^5 - 8x^4 + 2x^3 + 8x^2 - 6x - 2}{4x^2 - 2} &= \frac{(5x^3 - 2x^2 + 3x + 1)(4x^2 - 2)}{4x^2 - 2} \\
 &= 5x^3 - 2x^2 + 3x + 1
 \end{aligned}$$

(changement de l'ensemble des nombres admissibles : $4x^2 - 2 = 0$. $\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.70711$ et $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ ajoutées pour la dernière expression)

Solutions Bloc 5

1. $12ab(4b^2 + 3a^2)$
2. $5w^4(w^2 + 2)$
3. $3az(2z^2 - z + 3)$
4. $a(a^2 + a - 1)$
5. $(x^2 - 5y^3)(x^2 + 5y^3)$
6. $b(9b^4 - 4) = b(3b^2 - 2)(3b^2 + 2)$
7. $(5x^2 + 4y^2)^2$
8. $11x^2y^3(4x - 7y)$
9. $2abc(2bc - 3ac - 4ab)$
10. $2(x - 3)^2$
11. $6a(3a^2 + b) - (3a + b)$
12. $(x - 1)(x^3 + 2)$
13. $2(5x - y)(5x + y)$
14. $(x^2 + y^2 - z^2)(z - 1)$
15. $3a^2(2a + 3)^2$
16. $2u(u - 2v)^2$
17. $5(4a - 3b)^2$
18. $(x - y)(x + z)(x - z) - (x - z)(x + y)(x - y)$
 $= (x - y)(x - z)(x + z - x - y)$
 $= (x - y)(x - z)(z - y)$
19. $a^2 - (b^2 - 2bc + c^2) = a^2 - (b - c)^2$
 $= (a + b - c)(a - b + c)$
20. $4a(a^2 - b^2) - c(a^2 - b^2) = (4a - c)(a^2 - b^2)$
 $(4a - c)(a - b)(a + b)$
21. $2(x^4 - 81) = 2(x^2 + 9)(x^2 - 9)$
22. $(x^2 - y^2)^2 = ((x - y)(x + y))^2$
 $= (x - y)^2(x + y)^2$
23. $a(c - 1) - b(c - 1) - (c - 1) =$
 $(c - 1)(a - b - 1)$