

Zusatzaufgaben „Weitere elementare reelle Funktionen“

Übung 1. Geben Sie den Definitionsbereich der Funktionen an, die durch die folgenden Funktionsgleichungen gegeben sind (bestimmen Sie jeweils die Nullstellen)

1. $f(x) = \frac{5x^3 - 3x + 4}{x^4 + 2x - 8}$

4. $f(x) = \frac{\sqrt{5x}}{2^x}$

2. $f(x) = \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{4x}}$

5. $f(x) = \ln(2x + 5)$

3. $f(x) = \frac{5x^2}{\ln(2x+2)}$

6. $f(x) = e^{2x+5}$

Übung 2. Bestimmen Sie allfällige Schnittpunkte der Funktionen im Intervall $[0, 5]$, die durch folgende Funktionsgleichungen gegeben sind (nutzen Sie dabei die Resultate der vorangegangenen Übung, um die Zulässigkeit der Resultate zu überprüfen)

1. $f(x) = \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{4x}}$ und $g(x) = \frac{5x^2}{\ln(2x+2)}$

2. $f(x) = \frac{\sqrt{5x}}{2^x}$ und $g(x) = \ln(2x + 5)$

Übung 3. Lösen Sie die folgenden Aufgaben ohne Verwendung von technischen Hilfsmitteln:

1. $\log_2 16$

4. $\log_3 \left(\frac{81}{9}\right)$

2. $\log_2 1024$

3. $\log_2 (4 \cdot 8)$

5. $\log_5 125^4$

Übung 4. Lösen Sie die folgenden Gleichungen auf:

1. $\log_3 x = -2$

10. $\log_3 (5x + 2) = \log_3 (3x + 12)$

2. $\log_5 (x + 1) = 2$

11. $\log_x 8 = -3$

3. $3 \log_5 (5x) = 9$

12. $\log_4 2 + \log_4 x = 15$

4. $\log_x 64 = 3$

13. $2 \log_{10} (x^2 - 14) = \log_{10} 5 + \log_{10} (6x^2 - 49)$

5. $2 \log_3 (2x + 1) = 7$

14. $2 \log_7 x = \frac{2}{3}$

6. $\log_{10} x^3 + 2 \log_{10} x^2 = 6.426$

15. $2 \log_2 (x - 1) = \log_2 (3x + 1)$

7. $\log_4 (3x + 4) = \log_4 (2x + 2)$

16. $\log_x \frac{1}{27} = 9$

8. $\log_2 (10x + 24) - \log_2 (x - 84) = \log_2 (x - 36)$

17. $\log_2 (3x - 1) + \log_2 (x + 5) = 6$

9. $\log_7 (7x) = 2$

18. $\log_2 (3x - 1) = \log_3 (3x - 1)$

Übung 5. In einem überdüngten See nimmt das Gewicht der Algen pro Tag um 3 % zu. Heute enthält er 27 Tonnen Algen. Wie viele Tonnen waren es vor 100 Tagen? Innert welcher Zeit verdoppelt sich das Gewicht der Algen?

Übung 6. Um wie viele Prozent müsste die Zahl der radioaktiven Kerne einer Substanz pro Jahr abnehmen, wenn ihre Zahl in 50 Jahren 1 Billion (10^{12}) Mal kleiner sein soll als heute?

Übung 7. In einem See wuchs die Algenmenge innert 100 Tagen von 8 Tonnen auf heute 32 Tonnen. Nach wie vielen Tagen (von heute an gerechnet) sind es 200 Tonnen?

Übung 8. 1979 hatte Europa 746 Millionen Einwohner, Afrika 456 Millionen. Es wird für Europa eine jährliche Zuwachsrate von 0,4 %, für Afrika von 2,9 % angenommen. Wann haben in Afrika gleichviel Menschen gelebt wie in Europa? (Achtung: Afrika ist $30.221.532 \text{ km}^2$ gross, Europa: $10.180.000 \text{ km}^2$).

Übung 9. Zum Schutz vor der Strahlung hängt man bei Röntgenaufnahmen Patienten Bleischürzen über die Körperteile, die nicht untersucht werden. Jeder mm hält 30% der noch verbleibenden Strahlung ab. Die Strahlung, die auf die Schürze auftrifft, hat eine Intensität von 55 W/m^2 . Welche Intensität trifft den Körper, wenn die Schürze 12mm dick ist? Wie dick muss die Schürze sein, damit sie 90% der Strahlung abhält?

Übung 10. Faltet man ein Stück Papier im A4 DIN-Format mehrfach längs einer Mittellinie, so liegen erst zwei, dann vier Schichten übereinander. Es wird dabei immer kleiner und dicker. Wie oft müsste man es falten können, um einen Turm zu erhalten, der bis zum Mond reicht? (Entfernung des Mondes: 384000 km , Papierdicke $0,2 \text{ mm}$) (Ist es realistisch, ein Blatt Papier so oft falten zu können?)

Übung 11. Die Temperatur einer vollen Kaffetasse ist um 60°C höher als die Zimmertemperatur. Nun wird der Temperaturunterschied δ zur Zimmertemperatur in gleichmässigen Zeitabständen gemessen:

$t \text{ in min}$	0	5	10	15	20	25
$\delta \text{ in } ^\circ\text{C}$	60	45	34	25	19	14

Versuchen Sie ein Modell (Funktion) für die Daten zu finden.

Übung 12. Bestimmen Sie die Gleichung einer Exponentialfunktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = a^x$, deren Graph durch den Punkt $(3, 5)$ verläuft.

Übung 13. Bestimmen Sie die Parameter a und b so, dass der Graph der Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = b \cdot a^x$ durch die Punkte $(0, 1.5)$ und $(1, 1.8)$ verläuft.

Übung 14. Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2^{2x+5}$. Schreiben Sie die Funktionsgleichung in der Form $f(x) = a \cdot b^x$.

Übung 15. Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = (\sqrt{2})^{5x+4}$. Schreiben Sie die Funktionsgleichung in der Form $f(x) = a \cdot b^x$.

Übung 16. Ein Quader hat eine Breite, die halb so groß ist wie die Länge. Die Höhe ist um 2 cm länger als die Breite. Der Quader hat das Volumen 350 cm^3 . Geben Sie die Breite, die Länge und die Höhe an.

Übung 17. Geben Sie für eine Call-Option (Ausübungspreis = 55, Prämie = 3), die Auszahlungsfunktion an (Funktion der möglichen Gewinne und Verluste in Abhängigkeit vom Marktpreis S_T des Basiswertes zum Ausübungszeitpunkt T). Zeichnen Sie die Funktion und beschriften Sie den Ordinatenabschnitt und die Nullstelle der Funktion.

Übung 18. Bestimmen Sie Funktionsgleichung und Definitionsbereich der Umkehrfunktion der Funktionen, die durch die folgenden Funktionsgleichungen gegeben sind:

1. $f(x) = 2x$

5. $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

2. $f(x) = -x + 3$

6. $f(x) = x^2 + 4x + 1$

3. $f(x) = (x - 1)^2 + 3$

7. $f(x) = 2x^2 - 8x + 7$

4. $f(x) = -5(x + 1)^2 + 4$

8. $f(x) = \sqrt{4 - 3x} + 1$

Lösungen Zusatzaufgaben „Weitere elementare reelle Funktionen“

Lösung 1. Geben Sie den Definitionsbereich der Funktionen an, die durch die folgenden Funktionsgleichungen gegeben sind (bestimmen Sie jeweils die Nullstellen)

1. $f(x) = \frac{5x^3-3x+4}{x^4+2x-8}$. Um eine Division durch 0 zu verhindern, muss man die NS des Nenners bestimmen: $x^4 + 2x - 8 = 0$. Zwei reelle NS -1.849421 und 1.495954. Der Definitionsbereich ist also: $\mathbb{R} \setminus \{-1.849421, 1.495954\} = D$
NS von f : $5x^3 - 3x + 4 = 0$, nur eine reelle Lösung: $-1.1407 \in D$.
2. $f(x) = \sqrt{\frac{4x^2+2}{4x}}$. Um eine Division durch 0 zu verhindern, muss man die Nullstelle 0 des Nenners wegnehmen. Zudem muss $\frac{4x^2+2}{4x} \geq 0$ sein. Da $4x^2 + 2 \geq 0$ für alle x , ist $\frac{4x^2+2}{4x} > 0$ genau dann, wenn $x > 0$. Der Definitionsbereich D ist also $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$
NS von f : $4x^2 + 2 = 0 \iff x^2 = -\frac{1}{2}$ (keine reelle NS).
3. $f(x) = \frac{5x^2}{\ln(2x+2)}$. Um eine Division durch 0 zu verhindern, wird die NS von $\ln(2x+2)$ berechnet: $\ln(2x+2) = 0$ genau dann, wenn $x = -\frac{1}{2}$ ($\exp \ln(2x+2) = 2x+2 = \exp 0 = 1$). Zudem muss $2x+2 > 0$. Dies ist der Fall für $x \in]-1, \infty[$. Damit ist der Definitionsbereich $D =]-1, \infty[\setminus \{-\frac{1}{2}\}$.
NS der Funktion f : $5x^2 = 0$, Lösung: $0 \in D$.
4. $f(x) = \frac{\sqrt{5x}}{2^x}$. Eine Division durch 0 ist nicht möglich, da $2^x > 0$ für alle x . Entsprechend muss man nur noch garantieren, dass $5x \geq 0$, was genau dann der Fall ist, wenn $x \geq 0$. Damit ist der Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}^+$
NS der Funktion: $\sqrt{5x} = 0$, Lösung: $0 \in D$
5. $f(x) = \ln(2x+5)$. $2x+5$ muss grösser als 0 sein: $2x+5 > 0$. Der Definitionsbereich D ist damit: $] -\frac{5}{2}, \infty[$
NS der Funktion: $2x+5 = 1$, Lösung: $-2 \in D$
6. $f(x) = e^{2x+5}$. Alle reellen Zahlen sind zulässig: $\mathbb{R}$
Keine NS.

Lösung 2. Bestimmen Sie Schnittpunkte der Funktionen im Intervall $[0, 5]$, die durch folgende Funktionsgleichungen gegeben sind (nutzen Sie dabei die Resultate der vorangegangenen Übung, um die Zulässigkeit der Resultate zu überprüfen)

1. $f(x) = \sqrt{\frac{4x^2+2}{4x}}$ und $g(x) = \frac{5x^2}{\ln(2x+2)}$

$$\sqrt{\frac{4x^2+2}{4x}} = \frac{5x^2}{\ln(2x+2)} \iff$$

$$\frac{4x^2+2}{4x} = \frac{25x^4}{(\ln(2x+2))^2} \iff$$

$$(4x^2+2)(\ln(2x+2))^2 = 4x(25x^4) = 100x^5$$

$$(4x^2+2)(\ln(2x+2))^2 - 100x^5 = 0$$

Mit R lösen: $f = \text{function}(x)(4*x^2+2)*(log(2*x+2))^2-100*x^5$
 $\text{plot}(f, \text{xlim}=c(0.001, 5.5), \text{ylim}=c(-5, 5))$ (offensichtlich nur eine NS; bei xlim untere Grenze unter Berücksichtigung des Definitionsbereichs)
 $\text{abline}(0, 0)$
 $\text{uniroot}(f, c(0.4, 1))$ ergibt: 0.5202736
 liegt im Definitionsbereich der beiden Funktionen:
 y-Koordinate des Schnittpunktes: $\sqrt{\frac{4 \cdot 0.5202736^2 + 2}{4 \cdot 0.5202736}} = 1.2171$
 Der Schnittpunkt ist also (0.5202736, 1.2171)

2. $f(x) = \frac{\sqrt{5x}}{2^x}$ und $g(x) = \ln(2x + 5)$
 $\frac{\sqrt{5x}}{2^x} = \ln(2x + 5) \iff$
 $\sqrt{5x} = 2^x \ln(2x + 5)$
Mit R: $f = \text{function}(x)(5*x)^(1/2)-2^x*\log(2*x+5)$
 $\text{plot}(f, \text{xlim}=c(0, 5.5))$ (untere Grenze bei xlim unter Berücksichtigung des Definitionsbereichs).
 $\text{abline}(0, 0)$
Es hat offensichtlich keine reelle NS und entsprechend kein Schnittpunkt.

Lösung 3. Löse die folgenden Aufgaben ohne Verwendung von technischen Hilfsmitteln:

- $\log_2 16 = 4$ (da $2^4 = 16$)
- $\log_2 1024 = 10$ (da $2^{10} = 1024$)
- $\log_2 (4 \cdot 8) = \log_2 4 + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$.
- $\log_3 \left(\frac{81}{9}\right) = \log_3 81 - \log_3 9 = 4 - 2 = 2$
- $\log_5 125^4 = 4 \log_5 125 = 4 \cdot 3 = 12$

Lösung 4. Lösen Sie die folgenden Gleichungen auf:

- Definitionsbereich von $f(x) = \log_3 x: \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$
Definitionsbereich von $g(x) = -2: \mathbb{R}$
Definitionsbereich D der Gleichung: $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.
 $\log_3 x = -2 \iff 3^{-2} = \frac{1}{9} = x \in D$
(Kontrolle: $\log_3 \frac{1}{9} = -2$)
- Definitionsbereich von $f(x) = \log_5 (x + 1): x + 1 > 0$ genau dann, wenn $x \in] -1, \infty[$
Definitionsbereich von $g(x) = 2: \mathbb{R}$
Definitionsbereich D der Gleichung: $] -1, \infty[\cap \mathbb{R} =] -1, \infty[$
 $\log_5 (x + 1) = 2 \iff 5^2 = 25 = x + 1 \iff x = 24 \in D$
(Kontrolle: $\log_5 (24 + 1) = 2$)
- Definitionsbereich von $f(x) = 3 \log_5 (5x): \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$
Definitionsbereich von $g(x) = 9: \mathbb{R}$
Definitionsbereich D der Gleichung: $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$
 $3 \log_5 (5x) = 9 \iff \log_5 (5x) = 3 \iff 5^3 = 125 = 5x \iff x = 25 \in D$
(Kontrolle: $3 \log_5 (5 \cdot 25) = 9$)
- Definitionsbereich von $f(x) = \log_x 64: \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ (Basis muss ja positiv sein)
Definitionsbereich von $g(x) = 3: \mathbb{R}$
Definitionsbereich D der Gleichung: $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$
 $\log_x 64 = 3 \iff x^3 = 64 \iff x = \sqrt[3]{64} = 4 \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$
(Kontrolle: $\log_4 64 = 3$)
- Definitionsbereich von $f(x) = 2 \log_3 (2x + 1): 2x + 1 > 0$ genau dann, wenn $x \in] -\frac{1}{2}, \infty[$
Definitionsbereich von $g(x) = 7: \mathbb{R}$
Definitionsbereich D der Gleichung: $] -\frac{1}{2}, \infty[\cap \mathbb{R} =] -\frac{1}{2}, \infty[$
 $2 \log_3 (2x + 1) = 7 \iff \log_3 (2x + 1) = 3.5 \iff 3^{3.5} = 46.765 = 2x + 1 \iff x = \frac{46.765 - 1}{2} = 22.883 \in D$;
(Kontrolle: $2 \log_3 (2 \cdot 22.883 + 1) = 7$)
- Definitionsbereich von $f(x) = \log_{10} x^3 + 2 \log_{10} x^2: \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$
Definitionsbereich von $g(x) = 6.426: \mathbb{R}$
Definitionsbereich D der Gleichung: $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned}\log_{10} x^3 + 2 \log_{10} x^2 = 6.426 &\iff \log_{10} x^3 + \log_{10} x^4 = 6.426 \iff \log_{10} (x^3 x^4) = 6.426 \\ &\iff \log_{10} x^7 = 6.426 \iff 10^{6.426} = x^7 \iff x = \sqrt[7]{10^{6.426}} = 8.2794 \in D \\ (\text{Kontrolle: } \log_{10} 8.2794^3 + 2 \log_{10} 8.2794^2 &= 6.426)\end{aligned}$$

7. Definitionsbereich von $f(x) = \log_4(3x+4) : 3x+4 > 0$ genau dann, wenn $x \in]-\frac{4}{3}, \infty[$
 Definitionsbereich von $g(x) = \log_4(2x+2) : 2x+2 > 0$, genau dann, wenn $x \in]-1, \infty[$
 Definitionsbereich D der Gleichung: $]-\frac{4}{3}, \infty[\cap]-1, \infty[=]-1, \infty[$
 $\log_4(3x+4) = \log_4(2x+2) \iff \exp_4 \log_4(3x+4) = \exp_4 \log_4(2x+2) \iff$
 $3x+4 = 2x+2 \iff x = -2 \notin D.$
 Lösungsmenge $L = \{\}$.

8. Definitionsbereich von $f(x) = \log_2(10x+24) - \log_2(x-84) : 10x+24 > 0$ genau dann, wenn $x \in]-\frac{12}{5}, \infty[$ und $x-84 > 0$ genau dann, wenn $x \in]84, \infty[$. Definitionsbereich von f ist also $]-\frac{12}{5}, \infty[\cap]84, \infty[=]84, \infty[$.
 Definitionsbereich von $g(x) = \log_2(x-36) : x-36 > 0$ genau dann, wenn $x \in]36, \infty[$.
 Definitionsbereich der D Gleichung ist also $]84, \infty[\cap]36, \infty[=]84, \infty[$.
 $\log_2(10x+24) - \log_2(x-84) = \log_2(x-36) \iff$
 $\log_2 \frac{(10x+24)}{(x-84)} = \log_2(x-36) \iff$
 $\exp_2 \log_2 \frac{(10x+24)}{(x-84)} = \exp_2 \log_2(x-36) \iff$
 $\frac{(10x+24)}{(x-84)} = (x-36) \iff$
 $(10x+24) = (x-36)(x-84) = x^2 - 120x + 3024 \iff$
 $10x+24 - (x^2 - 120x + 3024) = -x^2 + 130x - 3000 = 0$
 zwei reelle NS: $100 \in D, 30 \notin D$
 (Kontrolle: $\log_2(10 \cdot 100 + 24) - \log_2(100 - 84) = 6$
 $\log_2(100 - 36) = 6$)

9. Definitionsbereich von $f(x) = \log_7(7 \cdot x) : \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$
 Definitionsbereich von $g(x) = 2 : \mathbb{R}$
 Definitionsbereich D der Gleichung: $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.
 $\log_7(7 \cdot x) = 2 \iff 7^2 = 7x \iff x = 7 \in D$
 (Kontrolle: $\log_7(7 \cdot 7) = 2$)

10. Definitionsbereich von $f(x) = \log_3(5x+2) : 5x+2 > 0$ genau dann, wenn $x \in]-\frac{2}{5}, \infty[$
 Definitionsbereich von $g(x) = \log_3(3x+12) : 3x+12 > 0$ genau dann, wenn $x \in]-4, \infty[$
 Definitionsbereich D der Gleichung: $]-\frac{2}{5}, \infty[\cap]-4, \infty[=]-\frac{2}{5}, \infty[$.
 $\log_3(5x+2) = \log_3(3x+12) \iff 5x+2 = 3x+12 \iff x = 5 \in D$
 (Kontrolle: $\log_3(5 \cdot 5 + 2) = 3$
 $\log_3(3 \cdot 5 + 12) = 3$)

11. Definitionsbereich von $f(x) = \log_x 8 : \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ (Basis muss ja positiv sein)
 Definitionsbereich von $g(x) = 3 : \mathbb{R}$
 Definitionsbereich D der Gleichung: $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$
 $\log_x 8 = -3 \iff x^{-3} = 8 \iff \frac{1}{x^3} = 8 \iff x^3 = \frac{1}{8} \iff x = \frac{1}{2} \in D.$
 (Kontrolle: $\log_{0.5} 8 = -3$)

12. Definitionsbereich von $f(x) = \log_4 2 + \log_4 x : \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$
 Definitionsbereich von $g(x) = 15 : \mathbb{R}$
 Definitionsbereich D der Gleichung: $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$
 $\log_4 2 + \log_4 x = 15 \iff \log_4(2x) = 15 \iff 4^{15} = 2x \iff x = \frac{4^{15}}{2} = \frac{2^{30}}{2} = 2^{29} =$
 $536\,870\,912 \in D$
 (Kontrolle: $\log_4 2 + \log_4 536\,870\,912 = 15$)

13. Definitionsbereich von $f(x) = 2 \log_{10}(x^2 - 14) : x^2 - 14 > 0$ genau dann, wenn $x \in]\sqrt{14}, \infty[$
 $\cup]-\infty, -\sqrt{14}[= D_1$ ($\sqrt{14} = 3.7417$)
 Definitionsbereich von $g(x) = \log_{10} 5 + \log_{10}(6x^2 - 49) : 6x^2 - 49 > 0$ genau dann, wenn

$x \in]-\infty, -\frac{7}{6}\sqrt{6}[\cup]\frac{7}{6}\sqrt{6}, \infty[= D_2. \quad (\frac{7}{6}\sqrt{6} = 2.8577)$
Definitionsbereich D der Gleichung ist also $D = D_1 \cap D_2 = D_1$.
 $2 \log_{10} (x^2 - 14) = \log_{10} 5 + \log_{10} (6x^2 - 49) \iff$
 $\log_{10} (x^2 - 14)^2 = \log_{10} 5 (6x^2 - 49) \iff (x^2 - 14)^2 = 30x^2 - 245$
 $\iff (x^2 - 14)^2 - (30x^2 - 245) = x^4 - 58x^2 + 441 = 0$
reelle Nullstellen: 3, -3, -7, 7
3 und -3 sind nicht zulässig ($\notin D$, $(-3)^3 - 14 = 3^2 - 14 < 0$)
 $L = \{-7, 7\}$
(Kontrolle: $2 \log_{10} (7^2 - 14) = 3.0881$
 $\log_{10} 5 + \log_{10} (6 \cdot 7^2 - 49) = 3.0881$ *) ($(-7)^2 = 7^2$)*

14. *Definitionsbereich von $f(x) = 2 \log_7 x : \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$*
Definitionsbereich von $g(x) = \frac{2}{3} : \mathbb{R}$
Definitionsbereich D der Gleichung: $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$
 $2 \log_7 x = \frac{2}{3} \iff 7^{\frac{2}{3}} = x^2 \iff x = 7^{\frac{1}{3}} = 1.9129 \in D$
(Kontrolle: $2 \log_7 7^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$)
15. *Definitionsbereich von $f(x) = 2 \log_2 (x - 1) : x - 1 > 0$ genau dann, wenn $x \in]1, \infty[$*
Definitionsbereich von $g(x) = \log_2 (3x + 1) : 3x + 1 > 0$ genau dann, wenn $x \in]-\frac{1}{3}, \infty[$
Definitionsbereich D der Gleichung: $]1, \infty[\cap]-\frac{1}{3}, \infty[=]1, \infty[$.
 $2 \log_2 (x - 1) = \log_2 (3x + 1) \iff (x - 1)^2 = 3x + 1 \iff$
 $(x - 1)^2 - (3x + 1) = x^2 - 5x = x(x - 5) = 0 \iff x = 0 \text{ oder } x = 5$
 $x = 0 \notin D; 5 \in D$
(Kontrolle: $2 \log_2 (5 - 1) = 4$
 $\log_2 (3 \cdot 5 + 1) = 4$ *)*
16. *Definitionsbereich von $f(x) = 2 \log_x \frac{1}{17} : \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$*
Definitionsbereich von $g(x) = 9 : \mathbb{R}$
Definitionsbereich D der Gleichung: $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$
 $\log_x \frac{1}{27} = 9 \iff x^9 = \frac{1}{27} \iff x = 27^{-\frac{1}{9}} = 3^{3 \cdot -\frac{1}{9}} = 3^{-\frac{1}{3}} = 0.69336 \in D$
(Kontrolle: $\log_{0.69336} \frac{1}{27} = 9$)
17. *Definitionsbereich von $f(x) = \log_2 (3x - 1) + \log_2 (x + 5) : 3x - 1 > 0$ genau dann, wenn*
 $x \in]\frac{1}{3}, \infty[$
Definitionsbereich von $g(x) = 6$ ist $\mathbb{R}$. Definitionsbereich der Gleichung ist damit $]\frac{1}{3}, \infty[\cap \mathbb{R} =]\frac{1}{3}, \infty[$.
 $\log_2 (3x - 1) + \log_2 (x + 5) = 6 \iff (3x - 1)(x + 5) = 2^6 = 64 \iff$
 $(3x - 1)(x + 5) - 64 = 3x^2 + 14x - 5 - 64 = 3x^2 + 14x - 69 = 0$
reelle Nullstellen: $3 \in]\frac{1}{3}, \infty[; -7.666667 \notin]\frac{1}{3}, \infty[$
(Kontrolle: $\log_2 (3 \cdot 3 - 1) + \log_2 (3 + 5) = 6$).
18. *Definitionsbereich: $3x - 1 > 0, x \in]\frac{1}{3}, \infty[$. $\log_3 (x - 1) = \frac{\log_2 (3x - 1)}{\log_2 (3)}$ und damit $\log_2 (3x - 1) =$*
 $\frac{\log_2 (3x - 1)}{\log_2 3}$. *Entsprechend gilt $\log_2 (3) \log_2 (3x - 1) = \log_2 (3x - 1)$ und mit $\log_2 (3) = 1.5850 :$*
 $\log_2 (3x - 1)^{1.585} = \log_2 (3x - 1)$. *Mit der Berechnung der Umkehrfunktion von $\log_2$ auf bei-*
den Seiten. $(3x - 1)^{1.585} = 3x - 1 \implies \frac{(3x - 1)^{1.585}}{3x - 1} = 1 \implies (3x - 1)^{1.585 - 1} = (3x - 1)^{0.585} = 1$
 $\implies 0.585 \ln (3x - 1) = \ln 1 = 0 \implies \ln (3x - 1) = 0 \implies 3x - 1 = \exp(0) = 1 \implies x = \frac{2}{3} \in$
Definitionsbereich.

Lösung 5. *In einem überdüngten See nimmt das Gewicht der Algen pro Tag um 3 % zu. Heute enthält er 27 Tonnen Algen. Wie viele Tonnen waren es vor 100 Tagen? Innert welcher Zeit verdoppelt sich das Gewicht der Algen?* $A_{t_0-100} (1.03)^{100} = 27 \implies A_{t_0-100} = \frac{27}{(1.03)^{100}} = 1.4049$.

$$2A_{t_0} = A_{t_0} (1 + 0.03)^t \iff 2 = (1 + 0.03)^t \iff \ln 2 = t \ln 1.03 \iff \frac{\ln 2}{\ln 1.03} = 23.450 = t$$

Lösung 6. Um wie viele Prozent müsste die Zahl der radioaktiven Kerne einer Substanz pro Jahr abnehmen, wenn ihre Zahl in 50 Jahren 1 Billion (10^{12}) Mal kleiner sein soll als heute? (K_h Anzahl Kerne heute, p = Prozentsatz/100)

$$\frac{K_h}{10^{12}} = K_h (1 - p)^{50} \iff \frac{1}{10^{12}} = (1 - p)^{50} \iff 1 - p = \sqrt[50]{\frac{1}{10^{12}}} = 10^{-\frac{12}{50}} \iff p = 1 - 10^{-\frac{12}{50}} = 0.42456$$

also 42.456 %

$$\text{Kontrolle: } (1 - 0.42456)^{50} = 10^{-12}$$

Lösung 7. In einem See wuchs die Algenmenge innert 100 Tagen von 8 Tonnen auf heute 32 Tonnen. Nach wie vielen Tagen (von heute an gerechnet) sind es 200 Tonnen?

$$8(1 + r)^{100} = 32 \iff 4^{\frac{1}{100}} = 1 + r \iff r = 4^{\frac{1}{100}} - 1 = 0.013959. \text{ Das Wachstum in Prozent pro Tag ist damit } 1.3959\%$$

$$\text{Man erhält: } 32(1 + 0.013959)^t = 200 \iff \ln \frac{200}{32} = t \ln 1.013959 \iff t = \frac{\ln \frac{200}{32}}{\ln 1.013959} = 132.20 \text{ (Tage)}$$

Lösung 8. 1979 hatte Europa 746 Millionen Einwohner, Afrika 456 Millionen. Es wird für Europa eine jährliche Zuwachsrate von 0,4 %, für Afrika von 2,9 % angenommen. Wann haben in Afrika gleichviel Menschen gelebt wie in Europa? (Achtung: Afrika ist 30.221.532 km² gross, Europa: 10.180.000 km²).

$$\begin{aligned} 746(1 + 0.004)^t &= 456(1 + 0.029)^t \iff \\ \frac{(1 + 0.004)^t}{(1 + 0.029)^t} &= \frac{456}{746} \iff \\ t \ln \left(\frac{1.004}{1.029} \right) &= \ln \frac{456}{746} \iff \\ t &= \frac{\ln \frac{456}{746}}{\ln \left(\frac{1.004}{1.029} \right)} = 20.013 \end{aligned}$$

also etwa im Jahr 1999.

Lösung 9. Zum Schutz vor der Strahlung hängt man bei Röntgenaufnahmen Patienten Bleischürzen über die Körperteile, die nicht untersucht werden. Jeder mm hält 30% der noch verbleibenden Strahlung ab. Die Strahlung, die auf die Schürze auftrifft, hat eine Intensität von 55 W/m². Welche Intensität trifft den Körper, wenn die Schürze 12mm dick ist? Wie dick muss die Schürze sein, damit sie 90% der Strahlung abhält? (m für Anzahl Milimeter; I für Intensität) $55(1 - 0.3)^{12} = 0.76127$ (in W/m²).

$$0.1I = I(1 - 0.3)^m \iff 0.1 = (1 - 0.3)^m \iff m = \frac{\ln 0.1}{\ln 0.7} = 6.4557 \text{ (in mm)}$$

Lösung 10. Faltet man ein Stück Papier im A4 DIN-Format mehrfach längs einer Mittellinie, so liegen erst zwei, dann vier Schichten übereinander. Es wird dabei immer kleiner und dicker. Wie oft müsste man es falten können, um einen Turm zu erhalten, der bis zum Mond reicht? (Entfernung des Mondes: 384000 km, Papierdicke 0,2mm)

$$0.2 \cdot 2^x = 384000000000 \iff x = \frac{\ln \frac{384000000000}{0.2}}{\ln 2} = 40.804$$

Es ist keineswegs realistisch, das Blatt so falten zu können. Durchs Falten wird an den Kanten immer mehr Papier nötig, beim vorletzten Falten z.B. für die äusserste Schicht einmal die Hälfte der Länge zum Mond! Man müsste das Papier also jeweils schneiden und übereinanderlegen (den Papierstapel also jeweils halbieren und dann übereinanderlegen). Auch diese ist nicht realistisch, da die Fläche pro Schnipsel am Schluss sehr klein wird: ein A4-DIN-Blatt ist 210 mm breit und 297 mm hoch. Die 4 im Namen Name „A4“ bezieht sich darauf, dass es nach viermaligem Falten (Halbieren der jeweiligen Länge) des Bezugsformates A0 (841 mm $\times$ 1189 mm = 1 m²; ungefähr im Verhältnis 1 : $\sqrt{2}$) entsteht. Man erhält also eine Fläche von 210 $\cdot$ 297 = 62370 mm². Man braucht $\frac{384000000000}{0.2} = 1.92 \cdot 10^{12}$ Schnipsel. Diese hätten eine Fläche von $\frac{62370}{1.92 \cdot 10^{12}} = 3.2484 \cdot 10^{-8}$ mm² (von Auge nicht mehr sichtbar!)

Lösung 11. Die Temperatur einer vollen Kaffeetasse ist um 60°C höher als die Zimmertemperatur. Nun wird der Temperaturunterschied δ zur Zimmertemperatur in gleichmässigen Zeitabständen gemessen:

t in min	0	5	10	15	20	25
δ in $^{\circ}\text{C}$	60	45	34	25	19	14

Versuchen Sie ein Modell (Funktion) für die Daten zu finden.

Offensichtlich gilt: $\frac{45}{60} = \frac{3}{4} = 0.75$; $\frac{34}{45} = \frac{34}{45} = 0.75556$; $\frac{25}{34} = 0.73529$; $\frac{19}{25} = 0.76$

Bis auf Rundungen und Messfehler scheint eine konstante Abnahme von 25% in 5 Minuten zu erfolgen. Es ergibt sich also das Modell $T(t) = T_a(0.75)^t$ wobei eine Einheit von t 5 Minuten entspricht.

Kontrolle: $60(0.75)^1 = 45$; $60(0.75)^2 = 33.75$; $60(0.75)^3 = 25.313$, etc.

Sucht man eine Formel für t in Minuten, so gilt:

$$45 = 60(1-p)^5 \iff \frac{3}{4} = (1-p)^5 \iff 1 - 0.75^{\frac{1}{5}} = 5.5912 \times 10^{-2} = p.$$

Kontrolle: $60(1 - 5.5912 \times 10^{-2})^5 = 45.0$; $60(1 - 5.5912 \times 10^{-2})^{10} = 33.75$; etc.

Lösung 12. Bestimmen Sie die Gleichung einer Exponentialfunktion f mit $f(x) = a^x$, deren Graph durch den Punkt $(3, 5)$ verläuft. Es gilt: $a^3 = 5$. Entsprechend ist $a = 5^{\frac{1}{3}} = 1.7100$

Kontrolle: $(5^{\frac{1}{3}})^3 = 5$.

Lösung 13. Bestimmen Sie die Parameter a und b so, dass der Graph der Funktion f mit $f(x) = b \cdot a^x$ durch die Punkte $(0, 1.5)$ und $(1, 1.8)$ verläuft. $ba^0 = b = 1.5$; $ba^1 = 1.5a = 1.8 \implies a = \frac{1.8}{1.5} = \frac{6}{5} = 1.2$ Damit gilt $f(x) = \frac{3}{2} \cdot (\frac{6}{5})^x$

Kontrolle: $f(0) = \frac{3}{2} \cdot (\frac{6}{5})^0 = 1.5$; $f(1) = \frac{3}{2} \cdot (\frac{6}{5})^1 = \frac{9}{5} = 1.8$

Lösung 14. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2^{2x+5}$. Schreiben Sie die Funktionsgleichung in der Form $f(x) = a \cdot b^x$. $2^{2x+5} = 2^{2x}2^5 = 4^x2^5 = 32 \cdot 4^x$ ($a = 32$; $b = 4$)

Lösung 15. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (\sqrt{2})^{5x+4}$. Schreiben Sie die Funktionsgleichung in der Form $f(x) = a \cdot b^x$. $(\sqrt{2})^{5x+4} = 2^{\frac{5x+4}{2}} = 2^{2.5x+2} = 2^{2.5x}2^2 = 4 \cdot (2^{2.5})^x$ (mit $a = 4$; $b = 2^{2.5} = 5.6569$)

Lösung 16. Ein Quader hat eine Breite, die halb so groß ist wie die Länge. Die Höhe ist um 2cm länger als die Breite. Der Quader hat das Volumen 350cm^3 . Geben Sie die Breite, die Länge und die Höhe an.

$$b = \frac{l}{2}$$

$$h = 2 + b$$

$$b \cdot l \cdot h = 350$$

$$l = 2b; b \cdot l \cdot h = b \cdot 2b \cdot (2 + b) = 2b^3 + 4b^2 = 350$$

$$\text{Also } 2b^3 + 4b^2 - 350 = 0$$

Einzigste reelle NS: $5 \implies l = 2b = 10$; $h = 5 + 2 = 7$

Lösung 17. Geben Sie für eine Call-Option (Ausübungspreis = 55, Prämie = 3), die Auszahlungsfunktion an (Funktion der möglichen Gewinne und Verluste in Abhängigkeit vom Marktpreis S_T des Basiswertes zum Ausübungszeitpunkt T). Zeichnen Sie die Funktion und beschriften Sie den Ordinatenabschnitt und die Nullstelle der Funktion. Ein Gewinn resultiert, wenn der Marktpreis S_T höher ist als der Ausübungspreis k (Man kann zum Preis k kaufen und auf dem Markt S_T realisieren). Die Auszahlungsfunktion ist also:

$$f(S_T) = \begin{cases} S_T - k - c = S_T - 55 - 3 & \text{für } S_T > 55 \\ -c = -3 & \text{für } S_T \leq 55 \end{cases}$$

Die Graphik ist gegeben durch den Ordinatenabschnitt -58 und der Nullstelle $S_T - 55 - 3 = 0$: 58
Damit ergibt sich eine Parallele im Abstand von -3 zur x -Achse bis 55, dann eine Gerade mit der Steigung 1, die durch den Punkt $(0, -58)$ und $(58, 0)$ verläuft.

Lösung 18. Bestimmen Sie Funktionsgleichung und Definitionsbereich der Umkehrfunktion:

1. $f(x) = 2x$; $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist injektiv und surjektiv auf $\mathbb{R}$. Als Definitionsbereich der Umkehrfunktion kann man entsprechend $\mathbb{R}$ wählen. $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f^{-1}(y) = \frac{y}{2}$ (da $y = 2x \iff x = \frac{y}{2}$)
2. $f(x) = -x + 3$; $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist injektiv und surjektiv auf $\mathbb{R}$. Als Definitionsbereich der Umkehrfunktion kann man entsprechend $\mathbb{R}$ wählen. $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch: $f^{-1}(y) = 3 - y$ (da $y = -x + 3 \iff y - 3 = -x \iff x = 3 - y$)
3. $f(x) = (x-1)^2 + 3 = x^2 - 2x + 4$. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist weder injektiv noch surjektiv. Das Minimum der Funktion liegt in $x = 1$ (mit Formel $-\frac{b}{2a}$), wobei $f(1) = 1^2 - 2 + 4 = 3$. Die Funktion ist konvex (a ist positiv) und rechts von 1 strikt monoton steigend. Entsprechend gibt es eine Restriktion f_1 von f auf $[1, \infty[$, die injektiv und surjektiv ist, nämlich $f_1 : [1, \infty[\rightarrow [3, \infty[$. Für $f_1^{-1} : [3, \infty[\rightarrow [1, \infty[$ erhält man: $y = x^2 - 2x + 4 \iff x^2 - 2x + 4 - y = 0 \iff \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4-y)}}{2 \cdot 1} = \pm \sqrt{y-3} + 1$;
Damit erhält man $f_1^{-1}(y) = \sqrt{y-3} + 1$ für $y \geq 3$.
Links von 1 ist die Funktion strikt monoton sinkend. Entsprechend gibt es eine Restriktion f_2 von f auf $] -\infty, 1]$, so dass $f_2 :] -\infty, 1] \rightarrow [3, \infty[$ injektiv und surjektiv ist. $f_2^{-1}(y) = -\sqrt{y-3} + 1$ für $y \geq 3$.
Achtung: Es gibt für f keine Umkehrfunktion, nur für gut gewählte Restriktionen von f .
4. $f(x) = -5(x+1)^2 + 4 = -5x^2 - 10x - 1$. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist weder injektiv noch surjektiv. Das Maximum der Funktion liegt in $x = -\frac{-10}{-10} = -1$, wobei $f(-1) = -5 \cdot (-1)^2 - 10(-1) - 1 = 4$. Die Funktion ist konkav (a ist negativ) und rechts von -1 strikt sinkend. Entsprechend gibt es eine Restriktion f_1 von f auf $[-1, \infty[$, die injektiv und surjektiv ist, nämlich $f_1 : [-1, \infty[\rightarrow] -\infty, 4]$. Für $f_1^{-1} :] -\infty, 4] \rightarrow [-1, \infty[$ erhält man: $y = -5x^2 - 10x - 1$; $-5x^2 - 10x - 1 - y = 0$;
 $\frac{-(-10) - \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot (-5) \cdot (-1-y)}}{2 \cdot (-5)} = \frac{1}{5} \sqrt{5} \sqrt{4-y} - 1 = f_1^{-1}(y)$ für $y \leq 4$.
Links von -1 ist die Funktion strikt monoton steigend. Entsprechend gibt es eine Restriktion f_2 von f auf $] -\infty, -1]$, so dass $f_2 :] -\infty, -1] \rightarrow] -\infty, 4]$ injektiv und surjektiv ist.
 $f_2^{-1}(y) = \frac{-(-10) - \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot (-5) \cdot (-1-y)}}{2 \cdot (-5)} = -\frac{1}{5} \sqrt{5} \sqrt{4-y} - 1$ für $y \leq 4$.
Achtung: Es gibt für f keine Umkehrfunktion, nur für Restriktionen von f .
5. $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ ($f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Gerade, s. Lösung Übung 18.2)
6. $f(x) = x^2 + 4x + 1$ (ist ein Polynom 2. Grades, s. Lösungen 18.3 und 18.4)
7. $f(x) = 2x^2 - 8x + 7$ (ist ein Polynom 2. Grades, s. Lösungen 18.3 und 18.4))
8. $f(x) = \sqrt{4-3x} + 1$ ist definiert für $4-3x \geq 0$, d.h. für $x \in] -\infty, \frac{4}{3}]$. Für $x_2 > x_1$ gilt:

$$\begin{aligned} -3x_2 &< -3x_1 \\ 4-3x_2 &< 4-3x_1 \\ \sqrt{4-3x_2} &< \sqrt{4-3x_1} \\ \sqrt{4-3x_2} + 1 &< \sqrt{4-3x_1} + 1 \\ f(x_2) &< f(x_1) \end{aligned}$$

Damit ist f strikt monoton (sinkend) auf dem Definitionsbereich und $f :] -\infty, \frac{4}{3}] \rightarrow [1, \infty[$ (denn $\sqrt{4-3 \cdot \frac{4}{3}} + 1 = 1$) ist surjektiv und injektiv. Entsprechend gibt es die Umkehrfunktion $f^{-1} : [1, \infty[\rightarrow] -\infty, \frac{4}{3}]$ mit $y = \sqrt{4-3x} + 1$; $y-1 = \sqrt{4-3x}$; $(y-1)^2 = y^2 - 2y + 1 = 4-3x$; $y^2 - 2y + 1 - 4 = -3x$;
 $\frac{y^2 - 2y - 3}{-3} = -\frac{1}{3}y^2 + \frac{2}{3}y + 1 = f^{-1}(y)$