

Ungleichungen

$\mathbb{R}^+$ sei die Menge der positiven, reellen Zahlen inklusive 0.

$\mathbb{R}^-$ sei die Menge der negativen, reellen Zahlen.

Definition 1. Für $a, b \in \mathbb{R}$:

$a > b$ genau dann, wenn $a - b \in \mathbb{R}^+$ und $a \neq b$.

$a \geq b$ genau dann, wenn $a > b$ oder $a = b$.

$a < b$ genau dann, wenn $b > a$

$a \leq b$ genau dann, wenn $b \geq a$

Ungleichungen I

Ohne Beweis halten wir fest:

Satz 2. Für alle reellen Zahlen x gilt: $x \in \mathbb{R}^+$ oder $x \in \mathbb{R}^-$.

Satz 3. $x \in \mathbb{R}^+$ genau dann, wenn $x \geq 0$.

Satz 4. $x \in \mathbb{R}^-$ genau dann, wenn $x < 0$.

Satz 5. Für alle reellen Zahlen x, y gilt: $x > y$ oder $x < y$ oder $x = y$

Satz 6. Wenn $x > y$ und $y > z$, dann ist $x > z$ (Transitivität)

Beispiel 7. $8 > 5$ und $12 > 8$. Somit ist $12 > 5$.

Ebenso gilt die Transitivität für " $<$ ".

Satz 8. Wenn $x > y$ dann gilt für alle reellen Zahlen z : $x + z > y + z$

Beweis. Sei $x > y$. Dann ist $x - y > 0$. Damit gilt: $x + z - z - y = x + z - (y + z) > 0$, da $z - z = 0$.
Somit gilt dann: $x + z > y + z$ □

Beispiel 9. Es gilt $8 > 5$. Damit gilt: $8 + 3 > 5 + 3$

Ebenso gilt: Wenn $x < y$, dann gilt für alle reellen Zahlen z : $x + z < y + z$

Satz 10. Wenn $x > y$ und $z > 0$, dann gilt: $xz > yz$

Beweis. $x > y \implies x - y > 0$. Sei nun $z > 0$. Es gilt $z(x - y) = zx - zy > 0$, da das Produkt positiver Zahlen positiv ist. Somit gilt: $zx > zy$ □

Beispiel 11. Es gilt $5 > 3$ und $8 > 0$. Somit gilt: $5 \cdot 8 > 3 \cdot 8$

Ebenso gilt: Wenn $x < y$ und $z > 0$, dann gilt: $xz < yz$

Satz 12. Wenn $x > y$ und $z < 0$, dann gilt: $xz < yz$

Beweis. Sei $x > y$ und $z < 0$. Damit ist $x - y > 0$ und $z(x - y) = zx - zy < 0$, da das Produkt einer positiven und einer negativen Zahl negativ ist. Somit gilt: $zx < zy$. □

Beispiel 13. Es gilt $5 > 3$ und $-8 < 0$. Somit gilt $5 \cdot (-8) < 3 \cdot (-8)$

Ebenso gilt: Wenn $x < y$ und $z < 0$, dann gilt: $xz > yz$

Satz 14. Wenn $x > y > 0$ und $c > b > 0$, dann ist $xc > yb$

Beweis. Es gilt laut Voraussetzung: $x - y > 0$ und $c - b > 0$. Damit gilt: $xc > xb$ und $xb > yb$ und damit auf Grund der Transitivität: $xc > yb$. □

Zuletzt noch ein paar Sätze ohne Beweise:

Satz 15. $a > b > 0$ genau dann, wenn $a^n > b^n$ (für $n > 0$)

Beispiel 16. $5 > 3$. Entsprechend gilt: $5^5 > 3^5$.

Satz 17. $a > b > 0$ genau dann, wenn $a^{-n} < b^{-n}$ (für $n > 0$)

Beispiel 18. $5 > 3$. Entsprechend gilt: $5^{-5} < 3^{-5}$ ($5^{-5} = \frac{1}{5^5} = 0.000\,32$; $3^{-5} = \frac{1}{3^5} = 0.004115\,2$)

Satz 19. $a > b > 0$ genau dann, wenn $\log_c a > \log_c b$ (für $c > 1$)

Die Logarithmusfunktion mit Basis grösser 1 ist monoton wachsend. Für $0 < x < 1$ ist die Logarithmusfunktion monoton sinkend.

Satz 20. $5 > 3$: Entsprechend gilt: $\ln 5 > \ln 3$ ($\ln 5 = 1.609\,4$; $\ln 3 = 1.098\,6$)

Satz 21. $x < y$ genau dann, wenn $a^x < a^y$ ($a > 1$)

Beispiel 22. $3 < 5$: entsprechend gilt: $4^3 < 4^5$ ($a > 1$)

Satz 23. $x < y$ genau dann, wenn $a^{-x} > a^{-y}$ ($a > 1$)

Beispiel 24. $3 < 5$: entsprechend gilt: $4^{-3} > 4^{-5}$ (da $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = 0.01562\,5$ und $4^{-5} = \frac{1}{4^5} = 0.0009765\,6$)

Betrag einer Zahl

Definition 25. $|a| := \begin{cases} a & \text{wenn } a \geq 0 \\ -a & \text{wenn } a < 0 \end{cases}$

Beispiel 26. $|22| = 22$, da $22 > 0$ und damit $|22| = 22$
 $|-22| = 22$, da $-22 < 0$ und damit $|-22| = -(-22) = 22$.

Beispiel 27. $|x - 4|$

Hier müssen wir Fallunterscheidungen treffen: es gilt: $x - 4 \geq 0$ oder $x - 4 < 0$

Gilt $x - 4 \geq 0$, so ist $|x - 4| = x - 4$,

gilt $x - 4 < 0$, so ist $|x - 4| = -(x - 4) = 4 - x$

Satz 28. $|a| \geq 0$

Beweis. Gilt $a \geq 0$, dann gilt laut Definition $|a| = a \geq 0$

Gilt $a < 0$, dann gilt laut Definition $|a| = -a$. Aus $a < 0$ folgt, $-a > 0$. Damit gilt $|a| = -a \geq 0$.
Somit gilt $|a| \geq 0$ in jedem Fall. $\square$

Satz 29. $|a - b| = |b - a|$

Beweis. Fall 1: Wir nehmen an, es gelte $a - b > 0$. Dann gilt $|a - b| = a - b$. Zudem gilt dann auch: $b - a < 0$. Damit gilt dann: $|b - a| = -(b - a) = a - b$.

Fall 2: Wir nehmen an, es gelte $a - b < 0$. Dann gilt $|a - b| = -(a - b) = b - a$. Zudem gilt in diesem Fall: $b - a > 0$. Somit gilt: $|b - a| = b - a$.

Fall 3: $a - b = 0$. Dann gilt auch $b - a = 0$ und laut Definition damit: $|a - b| = 0 = |b - a|$ $\square$

$|a - b|$ misst den Abstand zwischen a und b . Da $|a - 0| = |a|$, misst $|a|$ den Abstand von a zum Nullpunkt.

Satz 30. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)

Beweis. Es gilt: $a, b \geq 0$ oder $a, b < 0$ oder $a \geq 0$ und $b < 0$, oder $b \geq 0$ und $a < 0$.

Fall 1: $a, b \geq 0$. Dann ist $|a| = a$ und $|b| = b$. Zudem ist $a + b$ als Summe positiver Zahlen eine positive Zahl. Somit gilt: $|a + b| = a + b = |a| + |b|$ und damit auch $|a + b| \leq |a| + |b|$

Fall 2: $a, b < 0$. Dann ist $|a| = -a$ und $|b| = -b$. Zudem ist $a + b$ eine negative Zahl. Daraus folgt: $|a + b| = -(a + b) = -a + (-b) = |a| + |b|$ und somit auch $|a + b| \leq |a| + |b|$

Fall 3: $a \geq 0$ und $b < 0$. Dann ist $|a| = a$ und $|b| = -b$.

Sei nun (i) $a + b \geq 0$. Dann ist $|a + b| = a + b$. Es gilt zudem $a + b < a$, da aus $b < 0$ und $a \geq 0$ folgt: $a + b < a$. Da $-b > 0$, folgt zudem $a + (-b) > a$, da aus $-b > 0$ und $a \geq 0$ folgt, $-b + a > a$. Damit gilt: $|a + b| = a + b < a < -b + a = |a| + |b|$ und damit $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Sei nun (ii) $a + b < 0$. Dann ist $|a + b| = -(a + b) = -a - b$. Aus $-a < 0$ folgt $-a + (-b) < -b$. Da $|a|, |b| \geq 0$ gilt $-b = |b| \leq |a| + |b|$. Damit gilt dann: $|a + b| = -(a + b) = -a - b < -b = |b| \leq |a| + |b|$.

Aus (i) und (ii) folgt: Für Fall 3 gilt die Dreiecksungleichung für jeden Unterfall.

Fall 4 wird wie Fall 3 bewiesen. Damit gilt die Dreiecksungleichung für alle möglichen Fälle. $\square$

Übungen

1. 1) Bestimmen Sie für die vier Funktionen

$$f(x) = -3x^2 + 4x + 2$$

$$f(x) = 3x^3 + 6x^2 - 2$$

$$f(x) = \ln(x + 5)$$

$$f(x) = 3 - e^{x-5}$$

$$f(x) = 2x^2 + 2$$

die Intervall, wo $f(x) > 0$ und $f(x) < 0$. Bestimmen Sie vorgängig den Definitionsbereich der Funktionen.

2. Berechnen Sie:

(a) $8x - 24 < 0$

(b) $4x + 3 \geq 11$

(c) $7x - 5 < 30$

(d) $-4x + 16 \leq 0$

(e) $-6x - 6 > 0$

(f) $\frac{x}{2} + 1 > 0$

(g) $3x + 7 < 13 + 2x$

(h) $7x - 6 > \frac{8x}{2}$

(i) $2 - \frac{x}{10} > 2(7 - x)$

(j) $13x - 5 \leq 8x + 15$

(k) $3(x - 3) < 5 - 2(-x + 1)$

(l) $5 - \frac{3x}{7} < 3 - \frac{5}{3}x$

(m) $\frac{3}{2}x < 2(6 - x)$ (für $x \in \mathbb{Q}^+$)

(n) $\frac{3}{2}x < 2(6 - x)$ (für $x \in \mathbb{N}$)

(o) $\frac{x}{x-1} > 0$

(p) $\frac{x}{x+1} > 0$

(q) $\frac{2x}{x+3} < 1$

(r) $\frac{x+1}{x-1} > 0.5$

(s) $|x - 5| > 10$

(t) $|x - 1| + 3 < 5$

(u) $4 + \sqrt{x} < 10$

(v) $2|x + 2| < 32$

(w) $5\sqrt{x} \geq \sqrt{x} + 12$

(x) $(x - 4)(x + 5) < 0$

(y) $x^2 - 1 \geq 0$

(z) $5x - 8 < 2$

3. Berechnen Sie

(a) $\frac{9x}{2} - x < 7$

(b) $-9x - 8 < 16 - 3x$

(c) $\frac{3x}{2} + 4 > x - 1$

(d) $24(x + 2) + 7(5 - x) > 117$

(e) $3(x + 5) > 21 - 2(3 - x)$

(f) $12 + 2(x - 1) < 0$

(g) $\frac{4}{9}x + 2x < 2(x - 1)$

(h) $\frac{x}{x-1} < 4$

(i) $\frac{(x+1)^2}{x-1} \geq x + 1$

(j) $\frac{4x^2}{4x+1} < x - 1$

(k) $\frac{2x-3}{2x+3} < 1$

(l) $\frac{2x-3}{2x+3} > 1$

- (m) $\frac{2(x-2)}{7} < \frac{2x^2}{x+2}$ (r) $|x-1| > 0$
 (n) $\frac{11}{2x} + 1 > \frac{1}{x}$ (s) $\left|\frac{2x+1}{4}\right| > 9$
 (o) $(x-1)^2 > 0$ (t) $\sqrt{x} + 4 < 2\sqrt{x}$
 (p) $|x+3| > 7$ (u) $\sqrt{3x+2} > 8$
 (q) $4|x-1| > 4$ (v) $\sqrt{x+2} > \sqrt{x-2}$

4. Bei einer Autoverleihfirma A kostet ein PKW pro Tag 80 DM Grundgebühr und für jeden gefahrenen Kilometer 0.56 DM. Derselbe Typ kostet bei der Firma B pro Tag 75 DM und pro Kilometer 0.58 DM. In welchen Fällen leiht man bei der Firma A ein Auto für einen Tag billiger?
5. Prüfen Sie nach, ob folgende Aussage wahr ist. In jedem Dreieck ist der halbe Umfang grösser als die längste Seite.
6. Personenkraftwagen eines bestimmten Typs werden mit Benzin- oder mit Dieselmotor geliefert. Der Wagen mit dem Benzinmotor kostet 24500 DM, der mit Dieselmotor 3500 DM mehr. Der Benzinmotor verbraucht auf 100 km durchschnittlich 9 l Benzin, der Dieselmotor 6.5 l Diesel. Ein Liter Benzin soll mit 1.56 DM, ein Liter Diesel mit 1.16 DM gerechnet werden. Ab wie viel Betriebsjahren ist die anfängliche Mehrausgabe für den PKW mit Dieselmotor ausgeglichen, wenn man eine durchschnittliche Laufleistung von 15000 km pro Jahr ansetzt und alle anderen anfallenden Kosten wie Steuer, Reparaturen usw. ausser acht lässt?

Lösungen

1. Es ergibt sich:

- (a) $8x - 24 < 0 \implies 8x < 24 \implies x < 3$
 (b) $4x + 3 \geq 11 \implies 4x \geq 8 \implies x \geq 2$
 (c) $7x - 5 < 30 \implies 7x < 35 \implies x < 5$
 (d) $-4x + 16 \leq 0 \implies -4x \leq -16 \implies x \geq 4$
 (e) $-6x - 6 > 0 \implies -6x > 6 \implies x < -1$
 (f) $\frac{x}{2} + 1 > 0 \implies \frac{x}{2} > -1 \implies x > -2$
 (g) $3x + 7 < 13 + 2x \implies x + 7 < 13 \implies x < 6$
 (h) $7x - 6 > \frac{8x}{2} \implies 14x - 12 > 8x \implies 6x > 12 \implies x > 2$
 (i) $2 - \frac{x}{10} > 2(7-x) \implies 2 - \frac{x}{10} > 14 - 2x \implies 20 - x > 140 - 20x \implies 19x > 120 \implies x > \frac{120}{19}$
 (j) $13x - 5 \leq 8x + 15 \implies 5x \leq 20 \implies x \leq 4$
 (k) $3(x-3) < 5 - 2(-x+1) \implies 3x - 9 < 5 + 2x - 2 \implies x < 12$
 (l) $5 - \frac{3x}{7} < 3 - \frac{5}{3}x \implies \frac{105-9x}{21} < \frac{63-35x}{21} \implies 105 - 9x < 63 - 35x \implies 26x < -42 \implies x < -\frac{21}{13}$
 (m) $\frac{3}{2}x < 2(6-x), [x \in \mathbb{Q}^+] \implies 3x < 24 - 4x \implies 7x < 24 \implies x < 24/7 \implies L = [0, 24/7[\cap \mathbb{Q}^+$ (da Bereich auf rationale Zahlen eingeschränkt ist)
 (n) $\frac{3}{2}x < 2(6-x)[x \in \mathbb{N}] \implies 3x < 24 - 4x \implies 7x < 24 \implies x < 24/7 \implies L = \{0, 1, 2, 3\}$
 (o) $\frac{x}{x-1} > 0$; (Definitionsbereich: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$)
 Es gilt: $x-1 > 0$ oder $x-1 < 0$ oder $x-1 = 0$, wobei der letzte Fall nicht erlaubt ist (Division durch 0, siehe Definitionsbereich).
Fall 1: $x-1 > 0 (\implies x > 1)$:
 Durch Auflösung der Ungleichung: $x > 0$. Durch Berücksichtigung beider Bedingungen gilt: $x > 1$.
Fall 2: $x-1 < 0 (\implies x < 1)$:

Durch Auflösung der Ungleichung: $x < 0$. Durch Berücksichtigung beider Bedingungen gilt: $x < 0$.

Damit gilt: Lösungsmenge $S = \{x : x < 0 \text{ oder } x > 1\}$

- (p) $\frac{x}{x+1} > 0$; (Definitionsbereich: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$)
 Es gilt: $x + 1 > 0$ oder $x + 1 < 0$ oder $x + 1 = 0$, wobei der letzte Fall unmöglich ist (wegen Division durch 0)
Fall 1: $x + 1 > 0 \implies x > -1$ (wegen Definitionsbereich):
 Durch Auflösung der Ungleichung: $x > 0$. Durch Berücksichtigung beider Bedingungen gilt: $x > 0$
Fall 2: $x + 1 < 0 \implies x < -1$:
 Durch Auflösung der Ungleichung: $x < 0$. Durch Berücksichtigung beider Bedingungen gilt: $x < -1$
 Damit gilt: $S = \{x : x < -1 \text{ oder } x > 0\}$
- (q) $\frac{2x}{x+3} < 1$. Gesucht ist die Lösungsmenge S , d.h. die Menge aller x , für die $\frac{2x}{x+3} < 1$ wahr ist.
 (1) Definitionsbereich: $x + 3 = 0 \implies x = -3$ ist nicht erlaubt, da die Division durch 0 nicht definiert ist. Somit ist der Definitionsbereich: $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$
 (2) $x + 3 > 0$ oder $x + 3 = 0$ oder $x + 3 < 0$. Da $x + 3 = 0$ nicht zulässig ist (Division durch 0), bleiben noch zwei Fälle:
 (3) *Fall 1:* $x + 3 > 0 \implies x > -3$
 $\frac{2x}{x+3} < 1$ durch Multiplikation mit $x + 3$:
 $2x < 1 \cdot (x + 3)$ durch Addition von $-x$: $x < 3$
 Durch Berücksichtigung von $x > -3$ und $x < 3$: $S_1 =]-3, 3[$
 (4) *Fall 2:* $x + 3 < 0 \implies x < -3$
 $\frac{2x}{x+3} < 1$ durch Multiplikation mit $x + 3$:
 $2x > 1 \cdot (x + 3)$ durch Addition von $-x$
 $x > 3$
 Durch Berücksichtigung von $x < -3$ und $x > 3$: $S_2 = \emptyset$
 (5) $S = S_1 \cup S_2 =]-3, 3[$
- (r) $\frac{x+1}{x-1} > 0.5$ (Definitionsbereich: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$)
Fall 1: $x - 1 > 0 \implies x > 1$:
 durch Auflösung der Ungleichung: $x + 1 > 0.5x - 0.5 \implies 0.5x > -1.5 \implies x > -3$.
 Durch Berücksichtigung beider Bedingungen gilt: $x > 1$.
Fall 2: $x - 1 < 0 \implies x < 1$:
 durch Auflösung der Ungleichung: $x + 1 < 0.5x - 0.5 \implies 0.5x < -1.5 \implies x < -3$.
 Durch Berücksichtigung beider Bedingungen gilt: $x < -3$
 $S = \{x : x > 1 \text{ oder } x < -3\}$
- (s) $|x - 5| > 10$
 Laut Definition des Betrages gilt:
 Wenn $x - 5 \geq 0$, dann $|x - 5| = x - 5$
 Wenn $x - 5 < 0$, dann $|x - 5| = -(x - 5)$.
 Wir betrachten diese zwei Fälle:
Fall 1: $x - 5 \geq 0 \implies x \geq 5$
 Zudem gilt: $|x - 5| = x - 5 > 10 \implies x > 15$.
 Durch Berücksichtigung beider Bedingungen: $x > 15$.
Fall 2: $x - 5 < 0 \implies x < 5$
 Zudem gilt: $|x - 5| = -(x - 5) = -x + 5 > 10 \implies -x > 5 \implies x < -5$.
 Durch Berücksichtigung beider Bedingungen: $x < -5$.
 $S = \{x : x < -5 \text{ oder } x > 15\}$
- (t) $|x - 1| + 3 < 5 \implies |x - 1| < 2$
 Laut Definition des Betrages gilt:
 Wenn $x - 1 \geq 0$, dann $|x - 1| = x - 1$

Wenn $x - 1 < 0$, dann $|x - 1| = -(x - 1)$.

Wir betrachten diese zwei Fälle:

Fall 1: $x - 1 \geq 0 \implies x \geq 1$.

Zudem gilt: $|x - 1| = x - 1 < 2 \implies x < 3$;

Durch Berücksichtigung beider Bedingungen gilt: $1 < x < 3$.

Fall 2: $x - 1 < 0 \implies x < 1$

Zudem gilt: $|x - 1| = -(x - 1) = -x + 1 < 2 \implies x > -1$;

Durch Berücksichtigung beider Bedingungen gilt: $-1 < x < 1$

$S =] - 1, 3[$

(u) $4 + \sqrt{x} < 10$ (Definitionsbereich $\{x : x \geq 0\}$) $\implies \sqrt{x} < 6 \implies x < 36 \implies S = [0, 36[$

(v) $2|x + 2| < 32 \implies |x + 2| < 16$

Laut Definition des Betrages gilt:

Wenn $x + 2 \geq 0$, dann $|x + 2| = x + 2$

Wenn $x + 2 < 0$, dann $|x + 2| = -(x + 2)$.

Wir betrachten diese zwei Fälle:

Fall 1: $x + 2 \geq 0 \implies x \geq -2$

Zudem gilt: $|x + 2| = x + 2 < 16 \implies x < 14$;

Indem wir beide Bedingungen berücksichtigen: $-2 < x < 14$

Fall 2: $x + 2 < 0 \implies x < -2$

Zudem gilt: $|x + 2| = -(x + 2) = -x - 2 < 16 \implies -x < 18 \implies x > -18$;

Unter Berücksichtigung beider Bedingungen gilt: $-18 < x < -2$

$S =] - 18, 14[$

(w) $5\sqrt{x} \geq \sqrt{x} + 12$ (Definitionsbereich: $\{x : x \geq 0\}$) $\implies 4\sqrt{x} \geq 12 \implies \sqrt{x} \geq 3 \implies x \geq 9 \implies S = [9, \infty[$

(x) $(x - 4)(x + 5) < 0 \implies x^2 + x - 20 < 0$. Wir berechnen die Nullstellen: $-5, 4$. Wir berechnen für das Intervall zwischen den Nullstellen. $S =] - 5, 4[$ (die Null-Stellen gehören nicht dazu).

(y) $x^2 - 1 \geq 0$. Wir berechnen die Nullstellen: $-1, 1$, und z.B. $f(2)$, $f(-2)$ und $f(0)$ mit $f(x) = x^2 - 1$. $S = \{x : x \leq -1 \text{ oder } x \geq 1\}$

(z) $5x - 8 < 2 \implies 5x < 10 \implies x < 2$

2. Es ergibt sich:

(a) $9x/2 - x < 7 \implies 9x - 2x < 14 \implies 7x < 14 \implies x < 2$

(b) $-9x - 8 < 16 - 3x \implies -6x < 24 \implies x > -4$

(c) $\frac{3x}{2} + 4 > x - 1 \implies 3x + 8 > 2x - 2 \implies x > -10$

(d) $24(x + 2) + 7(5 - x) > 117 \implies 24x + 48 + 35 - 7x > 117 \implies 17x > 34 \implies x > 2$

(e) $3(x + 5) > 21 - 2(3 - x) \implies 3x + 15 > 21 - 6 + 2x \implies x > 0$

(f) $12 + 2(x - 1) < 0 \implies 12 + 2x - 2 < 0 \implies 2x < -10 \implies x < -5$

(g) $\frac{4}{9}x + 2x < 2(x - 1) \implies 4x + 18x < 18x - 18 \implies 4x < -18 \implies x < -4.5$

(h) $\frac{x}{x-1} < 4$ (Definitionsbereich: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$)

Fall 1: $x - 1 > 0 (\implies x > 1)$:

durch Auflösung der Ungleichung: $x < 4x - 4 \implies -3x < -4 \implies x > \frac{4}{3}$. Durch Berücksichtigung beider Bedingungen gilt: $x > \frac{4}{3}$

Fall 2: $x - 1 < 0 (\implies x < 1)$:

$x > 4x - 4 \implies -3x > -4 \implies x < \frac{4}{3}$. Durch Berücksichtigung beider Bedingungen gilt: $x < 1$

$S = \{x : x < 1 \text{ oder } x > \frac{4}{3}\}$

- (i) $\frac{(x+1)^2}{x-1} \geq x+1$ (Definitionsbereich: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$)
 Fall 1: $x-1 > 0 (\implies x > 1)$:
 durch Auflösung der Ungleichung: $(x+1)^2 \geq (x-1)(x+1) \implies x^2+2x+1 \geq x^2-1 \implies 2x \geq -2 \implies x \geq -1$. Durch Berücksichtigung beider Bedingungen gilt: $x \geq 1$
 Fall 2: $x-1 < 0 (\implies x < 1)$:
 durch Auflösung der Ungleichung: $(x+1)^2 \leq (x-1)(x+1) \implies x^2+2x+1 \leq x^2-1 \implies 2x \leq -2 \implies x \leq -1$. Durch Berücksichtigung beider Bedingungen gilt: $x \leq -1$
 $S = \{x : x > 1 \text{ oder } x \leq -1\}$
- (j) $\frac{4x^2}{4x+1} < x-1$ (Definitionsbereich: $\mathbb{R} \setminus \{-1/4\}$)
 Fall 1: $4x+1 > 0 (\implies x > -1/4)$:
 Durch Auflösung der Ungleichung: $4x^2 < (4x+1)(x-1) \implies 4x^2 < 4x^2-3x-1 \implies 0 < -3x-1 \implies 3x < -1 \implies x < -1/3$. Berücksichtigung beider Bedingungen gilt: es gibt kein x , das beide Bedingungen erfüllt.
 Fall 2: $4x+1 < 0 (\implies x < -1/4)$:
 $4x^2 > (4x+1)(x-1) \implies 4x^2 > 4x^2-3x-1 \implies 0 > -3x-1 \implies 3x > -1 \implies x > -1/3$. Berücksichtigung beider Bedingungen gilt: $-\frac{1}{3} < x < -\frac{1}{4}$
 $S =]-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}[$
- (k) $\frac{2x-3}{2x+3} < 1$ (Definitionsbereich: $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$)
 Fall 1: $2x+3 > 0 (\implies x > -3/2)$:
 Durch Auflösung der Ungleichung: $2x-3 < 2x+3 \implies -3 < 3 \implies$ Wird von allen x erfüllt. Berücksichtigung beider Bedingungen gilt: $x > -3/2$.
 Fall 2: $2x+3 < 0 (\implies x < -3/2)$:
 Durch Auflösung der Ungleichung: $2x-3 > 2x+3 \implies -3 > 3$. Kein x erfüllt die Bedingung. Durch Berücksichtigung beider Bedingungen gilt: Kein x erfüllt beide Bedingungen.
 $S =]-\frac{3}{2}, \infty[$
- (l) $\frac{2x-3}{2x+1} > 1$ (Definitionsbereich: $\mathbb{R} \setminus \{-3/2\}$)
 Fall 1: $2x+1 > 0 (\implies x > -3/2)$:
 $2x-3 > 2x+1 \implies -3 > 1$. Kein x erfüllt die Bedingung. Durch Berücksichtigung beider Bedingungen gilt: Kein x erfüllt beide Bedingungen.
 Fall 2: $2x+1 < 0 (\implies x < -3/2)$:
 $2x-3 < 2x+1 \implies -3 < 1 \implies$ Wird von allen x erfüllt. Berücksichtigung beider Bedingungen gilt: $x < -3/2$.
 $S =]-\infty, -3/2[$
- (m) $\frac{2(x-2)}{7} < \frac{2x^2}{x+2}$ (Definitionsbereich: $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$)
 Fall 1: $x+2 > 0 (\implies x > -2)$:
 $2(x-2)(x+2) < 14x^2 \implies 2x^2-8 < 14x^2 \implies -12x^2-8 < 0$. Wir berechnen die Nullstellen: Keine reelle Lösungen. Wir berechnen ein $x : f(0) = -8$. Somit erfüllen alle x die Ungleichung. Durch Berücksichtigung beider Bedingungen gilt: $x > -2$.
 Fall 2: $x+2 < 0 (\implies x < -2)$:
 $2(x-2)(x+2) > 14x^2 \implies 2x^2-8 > 14x^2 \implies -12x^2-8 > 0$. Da $f(0) = -8$, . Somit erfüllt kein x die Ungleichung. Durch Berücksichtigung beider Bedingungen gilt: kein x erfüllt die Gleichung.
 $S =]-2, \infty[$
- (n) $\frac{11}{2x} + 1 > \frac{1}{x} \implies \frac{11}{2x} - \frac{1}{x} > -1$ (Definitionsbereich: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$)
 Fall 1: $2x > 0 (\implies x > 0)$:
 $9 > -2x \implies -4.5 < x \implies x > -4.5$. Durch Berücksichtigung beider Bedingungen gilt: $x > 0$.
 Fall 2: $2x < 0 (\implies x < 0)$:
 $9 < -2x \implies -4.5 < x \implies x < -4.5$. Durch Berücksichtigung beider Bedingungen gilt: $x < -4.5$.
 $S = \{x : x < -4.5 \text{ oder } x > 0\}$

- (o) $(x-1)^2 > 0 \implies x^2 - 2x + 1 > 0$. Wir berechnen die Nullstellen: 1. Wir berechnen $f(0) = 1$. Somit erfüllen alle x ausser 1 die Ungleichung. $S = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- (p) $|x+3| > 7$
 Laut Definition des Betrages gilt:
 Wenn $x+3 \geq 0$, dann $|x+3| = x+3$
 Wenn $x+3 < 0$, dann $|x+3| = -(x+3)$.
 Wir betrachten diese zwei Fälle:
 Fall 1: $x+3 \geq 0 \implies x > -3$
 Zudem gilt: $|x+3| = x+3 > 7 \implies x > 4$;
 Unter Berücksichtigung beider Bedingungen: $x > 4$
 Fall 2: $|x+3| = -(x+3) = -x-3 > 7 \implies x < -10$;
 Unter Berücksichtigung beider Bedingungen: $S_2 =]-\infty, -10]$
 $S = \{x : x > 4\}$
- (q) $4|x-1| > 4 \implies |x-1| > 1$
 Laut Definition des Betrages gilt:
 Wenn $x-1 \geq 0$, dann $|x-1| = x-1$
 Wenn $x-1 < 0$, dann $|x-1| = -(x-1)$.
 Wir betrachten diese zwei Fälle:
 Fall 1: $x-1 \geq 0 \implies x > 1$
 Zudem gilt: $|x-1| = x-1 > 1 \implies x > 2$;
 Unter Berücksichtigung beider Bedingungen: $x > 2$
 Fall 2: $x-1 < 0 \implies x < 1$
 Zudem gilt: $|x-1| = -(x-1) = -x+1 > 1 \implies x < 0$;
 Unter Berücksichtigung beider Bedingungen: $x < 0$
 $S = \{x : x < 0 \text{ oder } x > 2\}$
- (r) $|x-1| > 0$
 Laut Definition des Betrages gilt:
 Wenn $x-1 \geq 0$, dann $|x-1| = x-1$
 Wenn $x-1 < 0$, dann $|x-1| = -(x-1)$.
 Wir betrachten diese zwei Fälle:
 Fall 1: $x-1 \geq 0 \implies x > 1$
 Zudem gilt: $|x-1| = x-1 > 0 \implies x > 1$;
 Unter Berücksichtigung beider Bedingungen: $x > 1$
 Fall 2: $x-1 < 0 \implies x < 1$
 Zudem gilt: $|x-1| = -(x-1) = -x+1 > 0 \implies x-1 < 0 \implies x < 1$;
 Unter Berücksichtigung beider Bedingungen: $x < 1$.
 $S = \{x : x < 1 \text{ oder } x > 1\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- (s) $\left|\frac{2x+1}{4}\right| > 9$
 Laut Definition des Betrages gilt:
 Wenn $\frac{2x+1}{4} \geq 0$, dann $\left|\frac{2x+1}{4}\right| = \frac{2x+1}{4}$
 Wenn $\frac{2x+1}{4} < 0$, dann $\left|\frac{2x+1}{4}\right| = -\frac{2x+1}{4}$
 Wir betrachten diese zwei Fälle:
 Fall 1: $\frac{2x+1}{4} \geq 0 \implies 2x+1 > 0 \implies x > -(1/2)$
 Zudem gilt: $\left|\frac{2x+1}{4}\right| = \frac{2x+1}{4} > 9 \implies 2x+1 > 36 \implies 2x > 35 \implies x > 17.5$
 Unter Berücksichtigung beider Bedingungen: $x > 17.5$
 Fall 2: $\frac{2x+1}{4} < 0 \implies 2x+1 < 0 \implies x < -(1/2)$
 Zudem gilt: $\left|\frac{2x+1}{4}\right| = -\frac{2x+1}{4} > 9 \implies 2x+1 < -36 \implies 2x < -37 \implies x < -18.5$
 Unter Berücksichtigung beider Bedingungen: $x < -18.5$
 $S = \{x : x < -18.5 \text{ oder } x > 17.5\}$
- (t) $\sqrt{x} + 4 < 2$ (Definitionsbereich $\{x : x \geq 0\}$) $\implies 4 < \sqrt{x} \implies x > 16$
- (u) $\sqrt{3x+1} > 8$ (Definitionsbereich $\{x : 3x+1 \geq 0\} = \{x : x > -(1/3)\}$)
 $\implies 3x+1 > 64 \implies 3x > 63 \implies x > 63/3$

(v) $\sqrt{x+2} > \sqrt{x-2}$ (Definitionsbereich: $\{x : x+2 \geq 0\} \cap \{x : x-2 \geq 0\} = \{x : x \geq 2\}$)
 $\implies x+2 > x-2 \implies 2 > -2$. Somit gilt dies für alle x : $S = [2, \infty[$

3. $y_1 = 80 + 0.56x$; $y_2 = 75 + 0.58x$
 $80 + 0.56x > y = 75 + 0.58x$ (die Wahl des Relationszeichens ist willkürlich!) $\implies$
 $-0.02x > -5 \implies 0.02x < 5 \implies x < 250$. Somit ist Firma A teurer, wenn $x < 250$ km.
4. Die drei Seiten des Dreiecks seien a , b und c , wobei a die längste Seite sei. Somit müsste gelten: $\frac{a+b+c}{3} > a \implies a+b+c > 3a \implies b+c > 2a$ (dieser Satz ist für ein Dreieck wahr. Wäre $b+c < a$, so könnte man kein Dreieck aufspannen!).
5. $y_1 = 24'500 + \frac{15000 \cdot x \cdot 9 \cdot 1.56}{100}$; $y_2 = 28'000 + \frac{15000 \cdot x \cdot 6.5 \cdot 1.16}{100}$
 $y_1 > y_2 \implies 24500 + 150 \cdot 9 \cdot 1.56x > 28000 + 150 \cdot 6.5 \cdot 1.16x \implies 975x > 3500 \implies x > 3.58$
Das Benzinmotorauto kostet nach 3.58 Jahren mehr.