

Faktorisieren

„Faktorisieren“ bedeutet, einen Ausdruck umwandeln, um daraus ein Produkt (von Faktoren) zu machen. z.B.

$$5x + 7x^2 = x(5 + 7x).$$

Beim Faktorisieren verwenden wir verschiedene Methoden. Es werden einige dieser Methoden kurz wiederholt:

Ausklammern

Die Methode des Ausklammerns macht sich die Distributivität der Multiplikation bezüglich der Addition zunutze:

$$ab + ac = a(b + c)$$

Beispiel 1. 1. $6x^3 + 4x^2 = 2x^2(3x + 2)$

2. $2x^3y + 3x^2y^2 - x^3y^2 = x^2y(2x + 3y - xy)$

3. $x^{2n} - ax^n = x^n(x^n - a)$

4. $(a + b)x - (a + b)y = (a + b)(x - y)$

5. $(a + b)x + a + b = (a + b)(x + 1)$

6. $2ax + 2ay + 3bx + 3by = 2a(x + y) + 3b(x + y) = (2a + 3b)(x + y)$

Verwendung von folgenden polynomischen Formeln:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 + ba - ba - b^2 = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Beispiel 2. 1. $4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$

2. $9x^2 - 30x + 25 = (3x - 5)^2$

Faktorisierung von $x^2 + px + q$

Um Formeln der Form

$$x^2 + px + q$$

zu faktorisieren, ist es nützlich, die folgende Gleichung zu kennen:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

d.h. $p = a + b$ und $q = ab$.

Beispiel 3. 1. $x^2 + 5x + 6 = x^2 + (3 + 2)x + 3 \cdot 2 = (x + 3)(x + 2)$

Sieht man nicht sofort, was a und b ist, kann man ein Gleichungssystem aufstellen:

$$a + b = 5$$

$$ab = 6$$

und dieses lösen (führt auf eine quadratische Gleichung, z.B. mit $a = 5 - b \implies (5 - b)b = 5b - b^2 = 6 \implies -b^2 - 5b - 6 = 0$).

2. $-x^2 + x + 20 = -(x^2 - x - 20) = -(x^2 + (-5 + 4)x + (-5)4) = -(x - 5)(x + 4) = (5 - x)(x + 4)$

3. $3x^2 - 3x - 6 = 3(x^2 - x - 2) = 3(x - 2)(x + 1)$

Durch vorgängige, kreative Umformung von Formeln

Beispiel 4. 1. $2x^2 + 9x + 7 = 2x^2 + 2x + 7x + 7 = 2x(x+1) + 7(x+1) = (x+1)(2x+7)$

$$\begin{aligned} 2. \quad x^3 + 4x - 5 &= x^3 + 5x - x - 5 = (x^3 - x) + (5x - 5) = x(x^2 - 1) + 5(x - 1) = \\ &= x(x+1)(x-1) + 5(x-1) = (x-1)(x(x+1) + 5) = (x-1)(x^2 + x + 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad x^4 + x^2y^2 + y^4 &= (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2 \\ &= (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy) \end{aligned}$$

Polynomdivision

Möchte man z.B. den Ausdruck

$$\frac{x^3 + 6x^2 + 3x - 10}{(x-1)(x+2)}$$

kürzen, kann man versuchen $3x^3 - 2x^2 + 4x + 5$ durch $(x-1)$ oder durch $(x+2)$ zu teilen. Fürs Beispiel erhält man (Division wie bei der Primarschuldivision von Hand):

$$\begin{array}{r} (x^3 + 6x^2 + 3x - 10) : (x-1) = x^2 + 7x + 10 \\ \underline{-x^3 + x^2} \\ 7x^2 + 3x \\ \underline{-7x^2 + 7x} \\ 10x - 10 \\ \underline{-10x + 10} \\ 0 \end{array}$$

Man kann also den Ausdruck $x^3 + 6x^2 + 3x - 10$ darstellen durch $(x^2 + 7x + 10)(x-1)$ und man erhält

$$\frac{x^3 + 6x^2 + 3x - 10}{(x-1)(x+2)} = \frac{(x^2 + 7x + 10)(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

Den zweiten Ausdruck könnte man nun kürzen, wobei zu beachten ist, dass sich dadurch die Menge der Zahlen, die im Ausdruck Sinn machen, verändert. Der Ausdruck ist nach dem Kürzen auch für 1 definiert, nicht jedoch vor dem Kürzen.

In einem nächsten Schritt könnte man nun versuchen, $x^2 + 7x + 10$ durch $(x+2)$ zu teilen:

$$\begin{array}{r} (x^2 + 7x + 10) : (x+2) = x + 5 \\ \underline{-x^2 - 2x} \\ 5x + 10 \\ \underline{-5x - 10} \\ 0 \end{array}$$

Man erhält also für $x^3 + 6x^2 + 3x - 10$ die Faktorisierung

$$(x+5)(x+2)(x-1)$$

und durch Kürzen erhält man

$$\frac{x^3 + 6x^2 + 3x - 10}{(x-1)(x+2)} = \frac{(x+5)(x+2)(x-1)}{(x-1)(x+2)} = x+5$$

wobei wiederum zu beachten ist, dass sich Menge der einsetzbaren Werte verändert. Während rechts alle reellen Zahlen Sinn machen, sind links 1 und -2 nicht zulässig (Division durch 0).

Übungen

Block 1

1. $3x + 6y + 12$
2. $ax + 2ay - az$
3. $25x^3y^2 - 10x^2y$
4. $18x^4y^3z^2 - 6x^2y^2z^2 + 3xyz$
5. $a(x + y) + b(x + y)$
6. $a(x + y) - (x + y)$
7. $(x - y) + a(x - y)$
8. $a(x + y) + b(x + y) + c(x + y)$
9. $a(x + y) - x - y$
10. $x - xy + 5 - 5y$

Block 2

1. $x^2 + 10x + 25$
2. $x^2 - 6x + 9$
3. $x^2 + 4xy + 4y^2$
4. $1 - 4x + 4x^2$
5. $x^2 - x + 1/4$
6. $4x^2 + 2x + 1/4$
7. $x^4 - 14x^2 + 49$
8. $(x + y)^2 + 2(x + y) + 1$
9. $(x^2 + y^2)^2 - 4(x^2 + y^2) + 4$
10. $x^{2m} + 2x^m y^n + y^{2n}$
11. $x^{4n} - 6x^{2n} y^n + 9y^{2n}$
12. $5x^2 + 10xy + 5y^2$
13. $xy^2 - 2xyz + xz^2$
14. $x^2 - 9$
15. $25x^2 - 36y^2$
16. $x^2 - y^4$
17. $48x^4 - 3y^2$
18. $x^4 - y^4$
19. $x^4 y^4 z^4 - 1$
20. $x^8 - y^8$
21. $x^{2n} - y^{2n}$
22. $2x^2 y^2 - 18x^2$

11. $ax + ay + bx + by$
12. $ax + by - bx - ay$
13. $(x - 1)(y + 3) - (1 - x)$
14. $(x + y)^2 + (x + y)(x - y)$
15. $(x + y - z)(x + 2y + 3z) - (z - x - y)(x - y - 3z)$
16. $1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$
17. $x^n + x^{2n} y$
18. $2x^n y^{2n} + x^{2n} y^n$
19. $x^{4n} y^2 - x^{3n} y$
20. $x^{3n} y^2 - 4x^{5n} y^5 + x^{2n+1} y^3$
23. $5x^3 y - 5xy^3$
24. $x^3 - x^2 - x + 1$
25. $x^2 - 2xy + y^2 - 1$
26. $1 - x^2 - y^2 + x^2 y^2$
27. $x^3 + 2x^2 - x - 2$
28. $(x - y)^2 - z^2$
29. $x^2 - (y - z)^2$
30. $(x + a)^2 - (y - b)^2$
31. $4(2x - 5y)^2 - (3x - 4y)^2$
32. $x^3 - 1$
33. $x^3 + 8$
34. $125x^3 + 64y^3$
35. $xy^4 - x^4 y$
36. $x^6 - 1$
37. $xy^6 - x^7$
38. $x^{18} - y^{12}$
39. $x^{3n} - y^{3n}$
40. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
41. $8 - 12x + 6x^2 - x^3$
42. $x^3 + 3x^2 y^2 + 3xy^4 + y^6$
43. $9x^2 + y^2 + z^2 + 6xy + 6xz + 2yz$
44. $x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy - 6xz - 12yz$

Block 3

1. $x^2 + 5x + 6$
2. $x^2 - x - 6$
3. $x^2 - 6x + 8$
4. $x^2 - 3x - 18$
5. $-x^2 + 10x - 24$
6. $-x^2 + 11x - 30$
7. $3x^2 - 27x + 54$
8. $2x^2 - 10x + 8$
9. $ax^2 + a(b-c)x - abc$
10. $x^4 + 3x^2 - 4$
11. $x^4 - 17x^2 + 16$
12. $x^{2n} - 12x^n + 32$
13. $x^2 - 4xy + 3y^2$
14. $x^2 - xy - 20y^2$
15. $(x-y)^2 + 7(x-y) + 12$ (man setze $z = x-y$)
16. $(x-y)^2 - 6(x-y) - 16$
17. $(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) - 12$ (man setze $y = x^2 + x$)
18. $(x^2 - x)^2 - 14(x^2 - x) + 24$
19. $6x^2 + 15x + 6$
20. $2x^2 - 5x - 3$
21. $x^3 - 7x - 6$
22. $x^3 - 13x + 12$
23. $12x^2 - 2x - 2$
24. $2x^3 + 3x^2 - 23x - 12$

Block 4

1. $48ab^3 + 36a^3b$
2. $5w^6 + 10w^4$
3. $6az^3 - 3az^2 + 9az$
4. $a^3 + a^2 - a$
5. $x^4 - 25y^6$
6. $9b^5 - 4b$
7. $25x^4 + 40x^2y^2 + 16y^4$
8. $44x^3y^3 - 77x^2y^4$
9. $4ab^2c^2 - 6a^2bc^2 - 8a^2b^2c$
10. $2x^2 - 12x + 18$
11. $18a^2 + 6ab - 3a - b$
12. $x^4 - x^3 + 2x - 2$
13. $50x^2 - 2y^2$
14. $z(x^2 + y^2 - z^2) - (x^2 + y^2 - z^2)$
15. $12a^4 + 36a^3 + 27a^2$
16. $2u^3 - 8u^2v + 8uv^2$
17. $80a^2 - 120ab + 45b^2$
18. $(x-y)(x^2 - z^2) - (x-z)(x^2 - y^2)$
19. $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$
20. $4a^3 - 4ab^2 - a^2c + b^2c$
21. $2x^4 - 162$
22. $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$
23. $ac - a - bc + b - c + 1$
24. $5mr + 2np - 5nr + n - 2mp - m$
25. $(2a - 3b)(4a^2 - 19ab) - (2a - 3b)(-9b^2 - 7ab)$

Block 5 Versuchen Sie, die folgenden Brüche zu kürzen:

1.

$$\frac{3x + x^2 - 10}{(x + 5)}$$

2.

$$\frac{11x - 7.5x^2 - 4}{(2.5x - 2)}$$

3.

$$\frac{9x - 14x^2 + 6x^3 - 10}{x - 2}$$

4.

$$\frac{8x^2 - 6x + 2x^3 - 8x^4 + 20x^5 - 2}{4x^2 - 2}$$

Lösungen

Lösungen Block 1

- | | |
|--------------------------------|---|
| 1. $3(x + 2y + 4)$ | 11. $(x + y)(a + b)$ |
| 2. $a(x + 2y - z)$ | 12. $(x - y)(a - b)$ |
| 3. $5x2y(5xy - 2)$ | 13. $(x - 1)((y + 3) + 1) = (x - 1)(y + 4)$ |
| 4. $3xyz(6x^3y^2z - 2xyz + 1)$ | 14. $(x + y)(2x)$ |
| 5. $(x + y)(a + b)$ | 15. $(x + y - z)(2x + y)$ |
| 6. $(x + y)(a - 1)$ | 16. $(1 + x^2)(1 + x^3 + x^4)$ |
| 7. $(x - y)(1 + a)$ | 17. $x^n(1 + x^n y)$ |
| 8. $(x + y)(a + b + c)$ | 18. $x^n y^n (2y^n + x^n)$ |
| 9. $(x + y)(a - 1)$ | 19. $x^{3n} y (x^n y - 1)$ |
| 10. $(1 - y)(x + 5)$ | 20. $x^{2n} y^2 (x^n - 4x^{3n} y^3 + xy)$ |

Lösungen Block 2

- | | |
|-------------------------------------|--|
| 1. $(x + 5)^2$ | 16. $(x + y^2)(x - y^2)$ |
| 2. $(x - 3)(x - 3)$ | 17. $(12x^2 + 3y)(4x^2 - y)$ |
| 3. $(x + 2y)^2$ | 18. $(x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$ |
| 4. $(2x - 1)^2$ | 19. $(x^2 y^2 z^2 + 1)(x^2 y^2 z^2 - 1)$ |
| 5. $(x - \frac{1}{2})^2$ | 20. $(x^4 + y^4)(x^4 - y^4)$ |
| 6. $(2x + \frac{1}{2})^2$ | 21. $(x^n + y^n)(x^n - y^n)$ |
| 7. $(x^2 - 7)^2$ | 22. $(2xy + 6x)(xy - 3x)$ |
| 8. $((x + y) + 1)^2$ | 23. $5xy(x^2 - y^2) = 5xy(x - y)(x + y)$ |
| 9. $((x^2 + y^2) - 2)^2$ | 24. $(x - 1)(x^2 - 1) = (x + 1)(x - 1)^2$ |
| 10. $(x^m + y^n)^2$ | 25. $((x - y) + 1)((x - y) - 1)$ |
| 11. $(x^{2n} - 3y^n)^2$ | 26. $(x^2 - 1)(y^2 - 1)$ |
| 12. $5(x + y)^2$ | 27. $(x + 2)(x^2 - 1)$ |
| 13. $(xy - xz)(y - z) = x(y - z)^2$ | 28. $((x - y) + z)((x - y) - z)$ |
| 14. $(x + 3)(x - 3)$ | 29. $(x + (y - z))(x - (y - z))$ |
| 15. $(5x + 6y)(5x - 6y)$ | 30. $((x + a) + (y - b))((x + a) - (y - b))$ |
| | 31. $(2(2x - 5y) + (3x - 4y))(2(2x - 5y) - (3x - 4y))$ |
| | 32. $(x - 1)(x^2 + x + 1)$ |

33. $(x+2)(x^2-2x+4)$
 34. $(5x+4y)(25x^2-20xy+16y^2)$
 35. $xy(y-x)(x^2+xy+y^2)$
 36. $(x^2-1)(x^4+x^2+1) \quad (= (x^3+1)(x^3-1))$
 37. $x(y^2-x^2)(y^4+y^2x^2+x^4) \quad (= x(y^3+x^3)(y^3-x^3))$
 38. $(x^6-y^4)(x^{12}+x^6y^4+y^8) \quad (= (x^9-y^6)(x^9+y^6))$
 39. $(x^n-y^n)(x^{2n}+x^ny^n+y^{2n})$
 40. $(x-1)^3$
 41. $(2-x)^3$
 42. $(x+y^2)^3$
 43. $(3x+y+z)^2$
 44. $(x+2y-3z)^2$

Lösungen Block 3

1. $(x+2)(x+3)$
 2. $(x+2)(x-3)$
 3. $(x-4)(x-2)$
 4. $(x+3)(x-6)$
 5. $(x-6)(4-x)$
 6. $-(x-5)(x-6)$
 7. $3(x-3)(x-6)$
 8. $2(x-1)(x-4)$
 9. $a(x+b)(x-c)$
 10. $(x^2+4)(x^2-1)$
 11. $(x^2-1)(x^2-16)$
 12. $(x^n-4)(x^n-8)$
 13. $(x-y)(x-3y)$
 14. $(x-5y)(x+4y)$
 15. $((x-y)+3)((x-y)+4)$
 16. $((x-y)-8)((x-y)+2)$
 17. $((x^2+x)+6)((x^2+x)-2)$
 18. $((x^2-x)-2)((x^2-x)-12)$
 19. $(6x+3)(x+2)$
 20. $(2x+1)(x-3)$
 21. $(x+1)(x^2-x-6)$
 22. $(x-1)(x^2+x-12)$
 23. $2(1-2x)(-3x-1)$
 24. $(2x+1)(x^2+x-12)$

Lösungen Block 4

$$\begin{array}{r}
 1. \quad (x^2+3x-10) : (x+5) = x-2 \\
 \underline{-x^2-5x} \\
 -2x-10 \\
 \underline{2x+10} \\
 0
 \end{array}$$

Es gilt also

$$\frac{3x+x^2-10}{(x+5)} = \frac{(x+5)(x-2)}{x-2} = x+5$$

(Veränderung der Menge der zulässigen Zahlen: 2 wird im letzten Ausdruck zulässig)

$$\begin{array}{r}
 -7.5x^2+11x-4 : (2.5x-2) = -3x+2 \\
 \underline{-7.5x^2+6x} \\
 5x-4
 \end{array}$$

Es gilt also

$$\frac{11x-7.5x^2-4}{2.5x-2} = \frac{(-3x+2)(2.5x-2)}{2.5x-2} = -3x+2$$

(Veränderung der Menge der zulässigen Zahlen: $2.5x - 2 = 0$; 0.8 wird im letzten Ausdruck zulässig)

$$\begin{array}{r}
 (6x^3 - 14x^2 + 9x - 10) : (x - 2) = 6x^2 - 2x + 5 \\
 \underline{-6x^3 + 12x^2} \\
 -2x^2 + 9x \\
 \underline{2x^2 - 4x} \\
 5x - 10 \\
 \underline{-5x + 10} \\
 0
 \end{array}$$

Es gilt also

$$\begin{aligned}
 \frac{9x - 14x^2 + 6x^3 - 10}{x - 2} &= \frac{(6x^2 - 2x + 5)(x - 2)}{x - 2} \\
 &= (6x^2 - 2x + 5)
 \end{aligned}$$

(Veränderung der Menge der zulässigen Zahlen: 2 wird im letzten Ausdruck zulässig)

$$\begin{array}{r}
 (20x^5 - 8x^4 + 2x^3 + 8x^2 - 6x - 2) : (4x^2 - 2) = 5x^3 - 2x^2 + 3x + 1 \\
 \underline{-20x^5 + 10x^3} \\
 -8x^4 + 12x^3 + 8x^2 \\
 \underline{8x^4 - 4x^2} \\
 12x^3 + 4x^2 - 6x \\
 \underline{-12x^3 + 6x} \\
 4x^2 - 2 \\
 \underline{-4x^2 + 2} \\
 0
 \end{array}$$

Es gilt also

$$\begin{aligned}
 \frac{20x^5 - 8x^4 + 2x^3 + 8x^2 - 6x - 2}{4x^2 - 2} &= \frac{(5x^3 - 2x^2 + 3x + 1)(4x^2 - 2)}{4x^2 - 2} \\
 &= 5x^3 - 2x^2 + 3x + 1
 \end{aligned}$$

(Veränderung der Menge der zulässigen Zahlen: $4x^2 - 2 = 0$, Solution is: $\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.70711$ und $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ werden im letzten Ausdruck zulässig)

Lösungen Block 5

- | | |
|--|---|
| 1. $12ab(4b^2 + 3a^2)$ | 10. $2(x - 3)^2$ |
| 2. $5w^4(w^2 + 2)$ | 11. $6a(3a^2 + b) - (3a + b)$ |
| 3. $3az(2z^2 - z + 3)$ | 12. $(x - 1)(x^3 + 2)$ |
| 4. $a(a^2 + a - 1)$ | 13. $2(5x - y)(5x + y)$ |
| 5. $(x^2 - 5y^3)(x^2 + 5y^3)$ | 14. $(x^2 + y^2 - z^2)(z - 1)$ |
| 6. $b(9b^4 - 4) = b(3b^2 - 2)(3b^2 + 2)$ | 15. $3a^2(2a + 3)^2$ |
| 7. $(5x^2 + 4y^2)^2$ | 16. $2u(u - 2v)^2$ |
| 8. $11x^2y^3(4x - 7y)$ | 17. $5(4a - 3b)^2$ |
| 9. $2abc(2bc - 3ac - 4ab)$ | 18. $(x - y)(x + z)(x - z) - (x - z)(x + y)(x - y)$
$= (x - y)(x - z)(x + z - x - y)$
$= (x - y)(x - z)(z - y)$ |

$$19. \quad a^2 - (b^2 - 2bc + c^2) = a^2 - (b - c)^2 \\ = (a + b - c)(a - b + c)$$

$$20. \quad \frac{4a(a^2 - b^2) - c(a^2 - b^2)}{(4a - c)(a - b)(a + b)} = (4a - c)(a^2 - b^2)$$

$$21. \quad 2(x^4 - 81) = 2(x^2 + 9)(x^2 - 9)$$

$$22. \quad (x^2 - y^2)^2 = ((x - y)(x + y))^2 \\ = (x - y)^2(x + y)^2$$

$$23. \quad \frac{a(c - 1) - b(c - 1) - (c - 1)}{(c - 1)(a - b - 1)} =$$