Mathematik Betriebsökonomie

Paul Ruppen

14. Mai 2020

Dieses Dokument wurde mit LaTeX gesetzt.

Im Allgemeinen werden die Abkürzungen, Scheibweisen und Redewendungen des Deutschen Instituts für Normung verwendet (DIN-Taschenbuch 202, Formelzeichen, Formelsatz, Mathematische Zeichen und Begriffe, Berlin, Beuth, 1994). In Abweichung von diesen Normen wird bei Dezimalzahlen statt des Kommas der Punkt verwendet.

Literatur

- Purkert, W. (2005). *Brückenkurs Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler* (5. Aufl.). Stuttgart: Teubner.
- Tietze, J. (1998). *Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik* (7. Aufl.). Wiesbaden: Vieweg.
- Sydsaeter, K. & Hammond, P. (2004). *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler: Basiswissen mit Praxisbezug*. München: Pearson.
- Dück, W., Körth, H., Runge, W. & Wunderlich, L. (1988). *Taschenbuch der Wirtschaftsmathematik: Formeln, Tabellen, Zusammenstellungen*. Thun: Harri Deutsch.
- Eichholz, W. & Vilkner, E. (2007). *Taschenbuch der Wirtschaftsmathematik*. Leibzig: Hanser.
- Favre, J.-P. (2009). *Mathématiques de gestion*. Epalinges: Digilex.
- Bergmann, U. (2002). *Training Differentialrechnung Sekundarstufe 2*. Stuttgart: Klett.
- Bergmann, U. (1991). *Training Kurvendiskussion*. Stuttgart: Klett.
- Varian, H. R. (2010). *Intermediate microeconomics: A modern approach* (8. Aufl.). London: Norton.

Paul Ruppen
HES-SO Valais Wallis
Betriebsökonomie
Standort Siders
CH-3960 Siders

Unterlagen finden Sie unter `http://math.logik.ch`

Inhaltsverzeichnis

1 Mengenlehre **1**
- 1.1 Vokabular der Mathematik . . . 1
- 1.2 Satzarten der Mathematik . . . 1
- 1.3 Der Begriff der Menge . . . 2
- 1.4 Mengenschreib- und Mengendarstellungsweisen . . . 2
- 1.5 Ein paar Definitionen und Sätze . . . 4
- 1.6 Geordnete Paare und Relationen . . . 15
- 1.7 Äquivalenzrelationen und Zerlegungen . . . 20
- 1.8 Funktionen . . . 23

2 Graphische Darstellung **41**
- 2.1 Die reellen Zahlen und die Zahlengerade . . . 41
- 2.2 Geordnete Paare und kartesisches Koordinatensystem . . . 43
- 2.3 Die graphische Darstellung von Tripeln . . . 50
- 2.4 Lernziele . . . 57

3 Polynome **59**
- 3.1 Ökonomie und Funktionen . . . 59
- 3.2 Definition der Polynomfunktionen . . . 60
- 3.3 Polynome 0-ten Grades . . . 62
- 3.4 Polynome 1-ten Grades . . . 63
- 3.5 Polynome 2-ten Grades (Quadratische Funktionen) . . . 83
- 3.6 Polynome 3-ten Grades . . . 95
- 3.7 Polynome n-ten Grades . . . 105
- 3.8 Lernziele . . . 107

4 Weitere elementare reelle Funktionen **109**
- 4.1 Rationale Funktionen . . . 109
- 4.2 Wurzelfunktionen . . . 117
- 4.3 Exponential- und Logarithmusfunktionen . . . 136
- 4.4 Intervallweise definierte Funktionen . . . 151
- 4.5 Lernziele . . . 160

5 Grenzwerte einer reellen Funktion **161**
- 5.1 Der Grenzwert einer Funktion für „x gegen Unendlich“ . . . 161
- 5.2 Der Grenzwert einer Funktion für $x \to -\infty$ . . . 171
- 5.3 Grenzwert einer Funktion f für $x \to x_0$ . . . 174
- 5.4 Rechts- und linksseitige Grenzwerte für $x \to x_0$ . . . 179
- 5.5 Grenzen der eingeführten Methoden . . . 191
- 5.6 Beweise einiger Grenzwertsätze (fakultativ) . . . 192
- 5.7 Lernziele . . . 196

6 Stetigkeit **197**
6.1 Definitionen und Sätze . . . 197
6.2 Nullstellen stetiger Funktionen . . . 204
6.3 Lernziele . . . 210

7 Die Steigung einer stetigen Funktion in einem Punkt **211**
7.1 Definition der Steigung einer stetigen Funktion . . . 211
7.2 Die Ableitung einer stetigen Funktion f . . . 213
7.3 Monotonie und Ableitungen . . . 217
7.4 Maxima und Minima . . . 219
7.5 Konvexität und Konkavität . . . 221
7.6 Wendepunkte . . . 224
7.7 Lernziele . . . 244

8 Weitere Ableitungsregeln **245**
8.1 Einige Regeln mit Beweisen . . . 245
8.2 Anwendungsbeispiele . . . 253
8.3 Zusammenfassung . . . 255
8.4 Lernziele . . . 260

9 Extrema - Spezialfälle **261**
9.1 Extrema an den Rändern von Intervallen . . . 261
9.2 Absolute und lokale Extrema . . . 261
9.3 Absolute Extrema in geschlossenen Intervallen . . . 263
9.4 Absolute Extrema in offenen Intervallen . . . 265
9.5 Extrema bei konstanten Teilstücken einer stetigen Funktion . . . 267
9.6 Extrema bei nicht-stetiger Ableitung . . . 268
9.7 Lineare Optimierung bei nicht-affinem Restriktionssystem . . . 270
9.8 Lernziele . . . 277

10 Ökonomische Grenzfunktionen **279**
10.1 Masseinheiten . . . 279
10.2 Grenzfunktionen und Ableitungen . . . 280
10.3 Lernziele . . . 289

11 Wachstumsarten **291**
11.1 Die neoklassische Nutzenfunktion . . . 293
11.2 Die ertragsgesetzliche Produktionsfunktion . . . 294
11.3 Die ertragsgesetzliche Kostenfunktion . . . 296
11.4 Die Keynesianische Konsumfunktion . . . 298
11.5 Die Neoklassische Produktionsfunktion . . . 299
11.6 Lernziele . . . 305

12 Weitere ökonomische Anwendungen **307**
12.1 Fahrstrahlanalyse . . . 307
12.2 Maximaler Gewinn . . . 310
12.3 Elastizität ökonomischer Funktionen . . . 314
12.4 Lernziele . . . 323

13 Folgen und Reihen **325**
13.1 Vorbemerkungen zum Summenzeichen . . . 325
13.2 Arithmetische Folgen . . . 326
13.3 Geometrische Folgen . . . 330
13.4 Durchschnittliche Zinssätze . . . 338
13.5 Barwert . . . 342

13.6 Annuitätentilgung . . . 348
13.7 Reihen . . . 352
13.8 Grenzwerte von Folgen und Reihen . . . 353
13.9 Stetige Verzinsung . . . 364
13.10Lernziele . . . 376

14 Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen **377**
14.1 Dimensionsreduktion durch Konstantsetzung . . . 377
14.2 Dimensionsreduktion durch Einsetzen von Gleichungen . . . 380
14.3 Extrema bei dreidimensionalen Funktionen . . . 382
14.4 Lernziele . . . 407

15 Integrale **409**
15.1 Das unbestimmte Integral . . . 409
15.2 Das bestimmte Integral . . . 412
15.3 Uneigentliche Integrale . . . 450
15.4 Finanzmathematische Anwendungen . . . 455

16 Lineare Funktionen **471**
16.1 Lineare Abbildungen . . . 471
16.2 Operationen auf lineare Abbildungen und Matrizen . . . 482
16.3 Umkehrfunktionen linearer Abbildungen und Matrizen . . . 494
16.4 Lineare Gleichungssysteme . . . 504
16.5 Lernziele . . . 524

17 Lineare Optimierung **525**
17.1 Ungleichungen ersten Grades . . . 525
17.2 Problemstellung und Lösungsweg . . . 526
17.3 Spezialfälle . . . 530
17.4 Lernziele . . . 549

A Liste der Symbole **551**

Index **553**
Literatur . . . 558

Kapitel 1

Mengenlehre

Die Mengenlehre ist eine grundlegende Theorie der Mathematik: in der Mengenlehre können die übrigen Theorien der Mathematik formuliert werden (z.B. Zahlentheorie, Funktionentheorie, Analysis, lineare Algebra, Wahrscheinlichkeitstheorie, Statistik, usw.).

1.1 Vokabular der Mathematik

Um Begriffe zu definieren, braucht man immer andere Begriffe. Um diese zu definieren wiederum Begriffe usw. Wollen wir alles definieren, würden wir ins Unendliche hinein definieren (= unendlicher Regress). Da dies nicht möglich ist, muss man irgendwo undefiniert beginnen. Die undefinierten Ausdrücke einer Theorie nennen wir „Grundvokabular“. Das Grundvokabular der Mathematik besteht aus folgenden Ausdrücken und Symbolen:

- das Symbol für den Ausdruck „ist ein Element von“: „$\in$“
- das Symbol für die leere Menge: „$\emptyset$“ oder „$\{\}$“
- das logische Vokabular: „und“, „oder“, „nicht“, „wenn ... dann“, „genau dann, wenn“ „es gibt (mindestens) ein“, „alle“, „ist identisch mit“ (oder „ist dasselbe wie“ oder „gleich“; Abkürzung: „$=$“).

Mit diesen Ausdrücken des Grundvokabulars können alle anderen Ausdrücke der Mengenlehre und der Mathematik definiert werden.

1.2 Satzarten der Mathematik

In mathematischen Systemen (und damit in der Mengenlehre) gibt es drei Arten von Sätzen:

1. *Definitionen* brauchen wir, um neue Ausdrücke mit Hilfe des Grundvokabulars oder bereits durch Definition festgelegter Begriffe einzuführen. Definitionen stellen nichts anderes als kürzere und praktische Schreibweisen für kompliziertere Schreibweisen dar. Definition können nicht bewiesen werden und sie sind weder wahr noch falsch. Definitionen sind Vereinbarungen zum Gebrauch von Wörtern und Schreibweisen. Sie können von Buch zu Buch anders lauten. Definieren wir eine Schreibweise A durch eine Schreibweise B schreiben wir „A:=B“ oder „B=:A“.

2. *Axiome* sind die unbewiesenen Sätze einer mathematischen Theorie, mit Hilfe derer alle übrigen Sätze der Theorie bewiesen werden können.

3. *Sätze* (oft auch „Theoreme“ genannt) sind Aussagen, die wir in einem mathematischen System beweisen können. Die meisten Rechenregeln, die wir verwenden werden, sind im Grunde genommen Sätze (z.B. $a + b = b + a$ für $a, b \in \mathbb{R}$). Die Sätze eines mathematischen Systems sind wahr, wenn dessen Axiome wahr sind.

Um mathematische Theorien verständlich zu machen, werden die Axiome, Sätze und Definitionen jeweils motiviert und mit Erklärungen versehen.

1.3 Der Begriff der Menge

Die Mengenlehre redet über Mengen. Mengen sind abstrakte Gegenstände, die sinnlich nicht wahrnehmbar sind. Insbesondere ist ein Haufen Sand z.B. nicht mit der Menge der Sandkörner gleichzusetzen, aus denen er besteht. Mengen können Gegenstände umfassen, die räumlich weit auseinanderliegen, oder die nicht im Raum existieren (z.B. Zahlen). Doch nun eine präzisere Bestimmung des Begriffs „Menge“: Eine Menge ist dadurch definiert, dass sie Gegenstände als Elemente enthält. Sonst ist eine Menge die leere Menge. Diese Definition lautet etwas formeller:

Definition 1.3.1. *x ist eine Menge genau dann, wenn es ein y gibt, so dass $y \in x$ oder $x = \emptyset$.* ◊

Definition 1.3.2. *$x \notin z$ genau dann, wenn nicht $x \in z$* ◊

Beispiel 1.3.3. *Die Menge der Buchstaben des lateinischen Alphabetes.*
Die Menge der Kantone der Schweiz,
Die Menge der Seiten eines Buches.
Die Menge der geraden Zahlen
Die Menge der Klassen einer Fachhochschule. ◊

Bemerkung 1.3.4. *Beweise werden am Schluss mit dem Zeichen „□“ abgeschlossen. Es bedeutet „Was zu beweisen war“. Üblich ist auch die Abkürzung „q.e.d“ (Quod erat demonstrandum, lateinisch für „Was zu beweisen war“). Beispiele und Bemerkungen werden am Schluss mit dem Zeichen „◊“ abgeschlossen, um den Text lesbarer zu machen.* ◊

Da Mengen Gegenstände sind, können Mengen auch Mengen als Elemente enthalten. So können wir etwa die Menge der Mengen der Klassen der Fachhochschulen der Schweiz bilden.

1.4 Mengenschreib- und Mengendarstellungsweisen

1.4.1 Durch Aufzählung der Elemente zwischen geschwungener Klammer

Für Mengen verwenden wir gewöhnlich die grossen Buchstaben $A, B, C, D, ...$
Für die Menge A, welche die Elemente a, b, c und 3 enthält, schreiben wir

$$A = \{a, b, c, 3\}.$$

Für die Menge B, welche Zürich, Siders und Brig als Elemente enthält, schreiben wir

$$B = \{Zürich, Siders, Brig\}.$$

Ist nach der Aufzählung einiger Elemente klar, welche Menge gemeint ist, kann auf die Aufzählung der übrigen Elemente verzichtet werden. Dies erlaubt die Darstellung von Mengen mit unendlich vielen Elementen durch eine Teilaufzählung, z.B.

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...\}$$

(= die Menge der natürlichen Zahlen ohne die Null) .

1.4.2 Durch eine charakterisierende Eigenschaft

Wir geben eine Eigenschaft an und bilden die Menge der Objekte, die diese Eigenschaft aufweisen, z.B.

$$\{x \mid x \textit{ ist eine natürliche Zahl}\}$$

Üblich ist auch die Schreibweise:

$$\{x : x \textit{ ist eine natürliche Zahl}\}$$

Wir werden die erste verwenden. „$\{x \mid x$“ wird gelesen als: „die Menge aller x, so dass x“. Im Beispiel: „Die Menge aller x, so dass x eine natürliche Zahl ist.“

Weiteres Beispiel:

$$\{x \mid x \textit{ ist eine Primzahl}\}$$

(*Primzahlen* sind Zahlen, die im Bereich der natürlichen Zahlen nur durch sich selbst und 1 teilbar sind: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ... 0 und 1 gehören nicht dazu)

Übung 1.4.1. *Stellen Sie die folgenden Mengen durch die Aufzählmethode dar:*
$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \textit{ und } x < 5\}$. *(„$<$“ wird gelesen als „ist kleiner als“ für Zahlen; ebenso brauchen wir „$>$“ für „grösser als“, „$\leq$“ für „kleiner-gleich“ und „$\geq$“ für „grösser-gleich“;$\mathbb{N}$ = die Menge der natürlichen Zahlen mit der Null; $\mathbb{N}^*$ = die Menge der natürlichen Zahlen ohne die Null)*
$B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \textit{ und } 3 < x < 10\}$
$C = \{x \mid x = 2n + 1 \textit{ und } n \in \mathbb{N}^*\}$
Die folgenden Mengen durch eine charakterisierende Eigenschaft ausdrücken:
$D = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ...\}$
$F = \{$*Lausanne, Genf, Sitten, Bern, Delsberg, Zürich, Glarus, Bellinzona, Appenzell, Chur, Basel, Freiburg, ...*$\}$

Lösung 1.4.2. $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
$B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$C = \{3, 5, 7, 9, ...\}$
$D = \{x \mid x = 2n \textit{ und } n \in \mathbb{N}^*\}$
$F = \{x \mid x \textit{ ist die Hauptstadt eines Schweizer Kantons}\}$

Zur Veranschaulichung werden Mengen oft mit Mengendiagrammen (Venn-Diagramme, John Venn, 1834 - 1923, englischer Mathematiker, auch Euler-Diagramme genannt, nach dem Schweizer Mathematiker Leonhard Euler, 1707 - 1783) dargestellt. Dafür ein Beispiel (s. Abbildung 1.4.1):

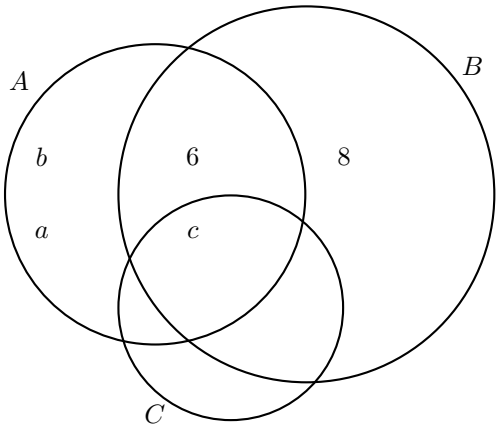


Abbildung 1.4.1: Beispiel für die bildliche Darstellung von Mengen mit Hilfe von Venndiagrammen

Dieses Diagramm veranschaulicht etwa den Umstand, dass $a, b, c, 6 \in A$; $6, c, 8 \in B$ und $c \in C$ und 6 sowohl Element von A wie von B ist. c ist Element von A, B und C.

Es muss betont werden, dass Mengenlehre nicht in diesen Diagrammen besteht. Sie hat genau genommen mit diesen Diagrammen nichts zu tun. Die Diagramme sind nur ein Hilfsmittel, um unserer Intuition - d.h. unserem gefühlsmässigen und anschaulichen Verstehen - auf die Sprünge zu helfen. Diagramme sind zudem nur in den ersten Gehversuchen auf dem Gebiete der Mengenlehre angebbar. Nachher hilft nur mehr das Verständnis der Definitionen, Axiome und Sätze weiter.

1.5 Ein paar Definitionen und Sätze

Wir beschränken uns in der Folge auf Definitionen und Sätze, die wir später brauchen. Beweise müssen Sie nicht reproduzieren können. Es wird allerdings empfohlen, jeden Beweis mindestens einmal verstanden zu haben. Dadurch steigt die Gewandtheit im Umgang mit den Zeichen und das Verständnis der Sätze. Die Bearbeitung von Beweisen stellt eine Möglichkeit dar, sich mit der Materie zu beschäftigen, ohne auswendig lernen zu müssen.

Wenn zwei Mengen genau dieselben Elemente enthalten, dann sind sie identisch (gleich). Andere Formulierung: eine Menge ist durch ihre Elemente und nur durch ihre Elemente bestimmt. Formalere Formulierung:

Axiom 1: (Wenn für alle x gilt, $x \in A$ genau dann, wenn $x \in B$), dann ist $A = B$

Wir haben hier beispielshalber ein Axiom erwähnt. Es wird bei diesem bleiben, da wir die Mengenlehre hier nicht formal sauber einführen werden.

Es lässt sich leicht beweisen, dass auch die Umkehrung gilt:

Satz 1.5.1. *Wenn $A = B$, dann gilt für alle x, $x \in A$ genau dann, wenn $x \in B$.*

Beweis. Es gilt offensichtlich: für alle x, $x \in A$ genau dann, wenn $x \in A$. Da nun $A = B$, können wir in diesem Satz das zweite A durch B ersetzen und erhalten: für alle x, $x \in A$ genau dann, wenn $x \in B$. □

Satz 1.5.2. $\{a, a\} = \{a\}$

Beweis. Sei $x \in \{a, a\}$. Dann ist $x = a$. Da $a \in \{a\}$, ist $x \in \{a\}$. Umgekehrt sei $x \in \{a\}$. Dann ist $x = a$. Da nun gilt $a \in \{a, a\}$, ist somit $x \in \{a, a\}$. Auf Grund des Axioms 1 gilt damit: $\{a, a\} = \{a\}$ □

Wichtig: Aus dem Satz folgt, dass eine Menge ein Elemente enthält oder nicht. Sie enthält ein Element nicht zweimal oder viermal. Deshalb gilt z.B.: $\{a, a, a\} = \{a\}$. Es ist zwar nicht falsch, dasselbe Element in Klammern mehrmals zu schreiben, es macht aber auch keinen Sinn, so zu verfahren!

Satz 1.5.3. $\{a, b\} = \{b, a\}$

Beweis. Jedes Element von $\{a, b\}$ ist Element von $\{b, a\}$, da a Element von $\{b, a\}$ ist und b Element von $\{b, a\}$ ist. Die Umkehrung gilt ebenfalls: Jedes Element von $\{b, a\}$ ist Element von $\{a, b\}$, wie man sich leicht überzeugen kann. Somit gilt für jeden Gegenstand: er ist genau dann Element von $\{a, b\}$ wenn er Element von $\{b, a\}$ ist. Laut Axiom 1 sind die beiden Mengen damit identisch. □

Wichtig: Aus dem Satz folgt, dass die Reihenfolge der Aufzählung der Elemente einer Menge in geschwungenen Klammern völlig bedeutungslos ist!

Definition 1.5.4. *$x \neq y$ genau dann, wenn nicht $x = y$* ◊

Man kann die leere Menge z.B. charakterisieren durch:

$$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}.$$

Es gibt nämlich keine Gegenstände, die nicht mit sich selber identisch sind. Somit gibt es kein y, das Element von $\{x \mid x \neq x\}$ ist. Auf Grund der übrigen, hier nicht erwähnten Axiome, existiert die Menge $\{x \mid x \neq x\}$. Da $\{x \mid x \neq x\}$ eine Menge ist, gilt auf Grund der Definition von „ist eine Menge“, dass es ein Element von $\{x \mid x \neq x\}$ gibt oder $\{x \mid x \neq x\} = \emptyset$. Da es kein Element von $\{x \mid x \neq x\}$ gibt, gilt damit $\{x \mid x \neq x\} = \emptyset$. Die leere Menge enthält also keine Elemente, da $\{x \mid x \neq x\}$ keine Elemente enthält.

Mit den Axiomen der Mengenlehre kann man zeigen, dass keine Menge sich selber als Element enthält:

Satz 1.5.5. *Es gibt kein x, so dass $x \in x$.*

Man kann daraus ableiten:

Satz 1.5.6.

$$a \neq \{a\}$$

Beweis. a ist eine Menge oder nicht. Wenn a eine Menge ist, dann kann a nicht a als Element enthalten (Satz 1.5.5). Da $\{a\}$ das Objekt a enthält und a nicht a enthält, sind die beiden Mengen verschieden. Wenn a nicht eine Menge ist, enthält a keine Elemente, während $\{a\}$ ein Element enthält. Die beiden Objekte sind also verschieden. □

Gemäss dem vorhergehenden Satz gilt auch

$$\{a\} \neq \{\{a\}\}$$

Während $\{a\}$ das Objekt a als Element enthält, enthält die Menge $\{\{a\}\}$ die Menge $\{a\}$ als Element.

A ist *Teilmenge* von B genau dann, wenn alle Elemente von A auch Elemente von B sind. So ist z.B. $\{1, 2\}$ Teilmenge von $\{3, 1, 4, 2\}$ (s. Abbildung 1.5.2).

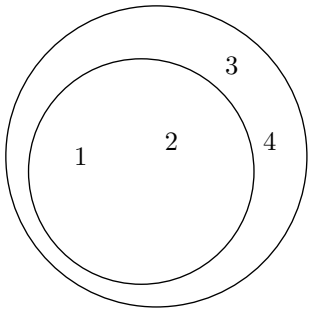


Abbildung 1.5.2: Venn-Diagramm für die Aussage, dass $\{1, 2\}$ Teilmenge von $\{3, 1, 4, 2\}$ ist

Für den Ausdruck „ist Teilmenge von“ führen wir die Abkürzung „$\subset$“ ein:

Definition 1.5.7. *$A \subset B$ genau dann, wenn für alle x gilt, wenn $x \in A$, dann $x \in B$.*
(„$\subset$“ wird auch „Inklusion“ genannt. Die Definition ist zu lesen als: „A ist Teilmenge von B genau dann ....“). $\Diamond$

Satz 1.5.8. *(1) Für alle A gilt, $A \subset A$*
(2) Für alle A gilt: $\emptyset \subset A$
(3) Für alle A, B gilt: ($A \subset B$ und $B \subset A$) genau dann, wenn $A = B$
(4) Für alle A, B, C gilt: wenn ($A \subset B$ und $B \subset C$), dann $A \subset C$ (Transitivität der Inklusion)
(5) Für alle A gilt: wenn $A \subset \emptyset$, dann $A = \emptyset$

Beweis. (1) für alle x gilt, wenn $x \in A$, dann $x \in A$. Damit gilt laut Definition der Inklusion: $A \subset A$

(2) Der Satz „für alle x gilt, wenn $x \in A$ dann $x \in B$“ ist gleichbedeutend mit: „es gibt kein $x \in A$ und $x \notin B$“ (Dazu noch ein anschauliches Beispiel: Der Satz „Alle Pferde sind Säugetiere“ ist äquivalent mit dem Satz „Es gibt kein Tier, das ein Pferd ist und das nicht ein Säugetier ist“). Da $\emptyset$ keine Elemente enthält, gibt es kein Element von A, das nicht Element von B ist. Somit gilt $\emptyset \subset A$.

(3) Sei $A \subset B$ und $B \subset A$. Damit gilt für alle x, wenn $x \in A$, dann $x \in B$ und für alle x, wenn $x \in B$, dann $x \in A$, mit anderen Worten: für alle x, $x \in A$ genau dann, wenn $x \in B$. Laut Axiom 1 gilt damit $A = B$.

(4) Sei ($A \subset B$ und $B \subset C$). Laut Definition der Inklusion gilt damit: Für alle x gilt, wenn $x \in A$, dann $x \in B$. Für alle x gilt, wenn $x \in B$, dann $x \in C$. Damit gilt für alle x, wenn $x \in A$, dann $x \in C$. Laut Definition der Inklusion gilt damit: $A \subset C$

(5) Sei $A \subset \emptyset$. Für alle $x \in A$ gilt damit $x \in \emptyset$. Da $\emptyset$ keine Elemente enthält, kann A keine Elemente enthalten. Somit gilt: $A = \emptyset$. $\square$

Wichtig: (1) $A \subset B$ schliesst nicht aus, dass $A = B$.
(2) Man muss die Elementbeziehung sorgfältig von der Teilmengenbeziehung unterscheiden. Es gilt denn auch: $A \subset A$, nicht aber $A \in A$, denn keine Menge ist Element ihrer selbst. Eine Menge kann allerdings sowohl Element als auch Teilmenge einer anderen Menge sein. z.B. $A = \{2, 4, 6\}$,

$B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, A\}$. In diesem Beispiel gilt: $A \subset B$, $A \neq B$, $A \in B$. Weitere Beispiele:

$\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$	wahr
$\{1, 2\} \in \{1, 2, 3, 4\}$	falsch
$\{1, 2\} \in \{\{1, 2\}, 3, 4\}$	wahr
$\{1, 2\} \subset \{\{1, 2\}, 3, 4\}$	falsch
$\{1, 2\} \subset \{\{1, 2\}, 1, 2, 3, 4\}$	wahr
$\{1, 2\} \in \{\{1, 2\}, 1, 2, 3, 4\}$	wahr

Die *Differenzmenge* von A und B ist die Menge der Gegenstände, die Element von A sind, ohne Element von B zu sein. So ist z.B. $\{5, 6\}$ die Differenzmenge von $\{1, 2, 5, 6\}$ und $\{1, 2, 3, 4\}$ (in dieser Reihenfolge - die Differenzmenge von $\{1, 2, 3, 4\}$ und $\{1, 2, 5, 6\}$ ist $\{3, 4\}$; s. Abbildung 1.5.3).

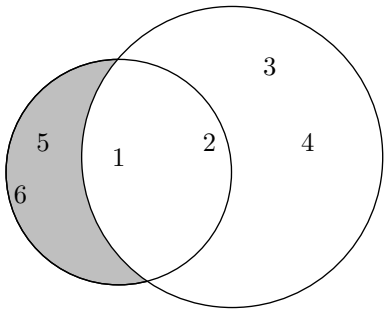


Abbildung 1.5.3: Venn-Diagramm für die Aussage, dass $\{5, 6\}$ die Differenzmenge von $\{1, 2, 5, 6\}$ und $\{1, 2, 3, 4\}$ - in dieser Reihenfolge - ist

Für den Ausdruck „ist die Differenzmenge von A und B“ führen wir die Abkürzung „$A \backslash B$“ ein:

Definition 1.5.9. $A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$ ◊

Satz 1.5.10. *(1)* $A \backslash A = \emptyset$
(2) $A \backslash \emptyset = A$

Beweis. (1) es gibt kein Element von A, das nicht Element von A ist. Damit gilt $A \backslash A = \emptyset$
(2) Die Menge der $x \in A$ und $x \notin \emptyset$ ist A, da $\emptyset$ keine Elemente enthält. □

Wenn A eine Teilmenge von B ist, dann ist die *Komplementmenge (das Komplement)* von A (bezüglich B) die Differenzmenge von B und A. So ist z.B. $\{1, 2\}$ Teilmenge von $\{1, 2, 3, 4\}$. Damit ist das Komplement von $\{1, 2\}$ bezüglich $\{1, 2, 3, 4\}$ die Menge $\{3, 4\}$ (s. Abbildung 1.5.4).

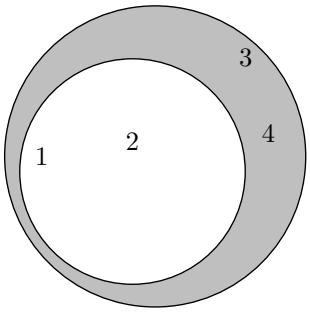


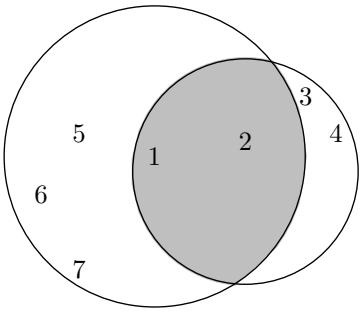
Abbildung 1.5.4: Venn-Diagramm für die Aussage, dass das Komplement von $\{1, 2\}$ bezüglich $\{1, 2, 3, 4\}$ die Menge $\{3, 4\}$ ist

Für das Komplement einer Menge bezüglich einer anderen Menge führen wir die Abkürzung „A^c“ beziehungsweise „A^c_B“, wenn der Kontext verlangt, dass die Obermenge erwähnt wird.

Definition 1.5.11. *Wenn $A \subset B$, dann* $(A^c_B = B \backslash A)$ ◊

Es handelt sich um eine bedingte Definition. Das Komplement einer Menge A bezüglich einer Menge ist nur definiert, wenn es eine Menge B gibt, so dass A Teilmenge von B ist. Die Definition ist zu lesen als „Wenn A Teilmenge von B ist, dann ist das Komplement von A bezüglich B die Differenzmenge von B und A“.

Die *Schnittmenge* von A und B ist die Menge der Gegenstände, die sowohl Elemente von A, als auch Elemente von B sind. So ist z.B. $\{1, 2\}$ die Schnittmenge von $\{1, 2, 3, 4\}$ und $\{1, 2, 5, 6, 7\}$ (s. Abbildung 1.5.5)



ist.

Abbildung 1.5.5: Venn-Diagramm für die Aussage, dass $\{1, 2\}$ die Schnittmenge von $\{1, 2, 3, 4\}$ und $\{1, 2, 5, 6, 7\}$ ist.

Für die Schnittmenge von A und B führen wir die Abkürzung „$A \cap B$“ ein. Formal definieren wir das neue Zeichen wie folgt:

Definition 1.5.12. $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$ ◊

Satz 1.5.13. *(1)* $(A \cap B) \subset A$
(2) $(A \cap B) \subset B$
(3) $A \cap A = A$
(4) $A \cap \emptyset = \emptyset$
(5) Wenn $A \subset B$, dann $A \cap B = A$
(6) $A \cap B = B \cap A$ *(Kommutativität)*
(7) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *(Assoziativität)*

Beweis. (1) $A \cap B$ ist die Menge aller x, für die gilt: $x \in A$ und $x \in B$. Ist $x \in A \cap B$, so ist damit $x \in A$. Laut Definition der Inklusion gilt damit $(A \cap B) \subset A$.

(2) Beweis verläuft analog zu (1).

(3) $x \in A \cap A$ genau dann, wenn $x \in A$ und $x \in A$. Damit ist $x \in A$, wenn $x \in A \cap A$. Laut der Definition der Inklusion gilt damit: $A \cap A \subset A$. Sei umgekehrt $x \in A$. Dann ist $x \in A$ und $x \in A$. Damit gilt laut der Definition der Inklusion: $A \subset A \cap A$. Laut Satz 1.5.8(3) gilt dann: $A \cap A = A$.

(4) Da $\emptyset$ keine Elemente enthält, gibt es kein x, für das gilt $x \in A$ und $x \in \emptyset$. Damit gibt es kein $x \in A \cap \emptyset$. Folglich gilt $A \cap \emptyset = \emptyset$.

(5) Gemäss 1.5.13(1) gilt $A \cap B \subset A$. Sei $A \subset B$ und $x \in A$. Dann gilt, da A Teilmenge von B ist: $x \in B$. Somit ist $x \in A$ und $x \in B$. Damit ist $x \in A \cap B$. Laut der Definition der Inklusion ist damit $A \subset A \cap B$. Somit gilt laut Satz 1.5.8(3) $A \cap B = A$ (unter der Bedingung, dass $A \subset B$).

(6) Sei $x \in A \cap B$. Dann gilt $x \in A$ und $x \in B$. Damit gilt $x \in B$ und $x \in A$. Laut Definition gilt somit: $x \in B \cap A$. Somit gilt: $A \cap B \subset B \cap A$. Analog schliessen wir: $B \cap A \subset A \cap B$. Entsprechend gilt laut dem Satz 1.5.8(3): $A \cap B = B \cap A$.

(7) Sei $x \in (A \cap B) \cap C$. Dann gilt $x \in A \cap B$ und $x \in C$. Daraus folgt: ($x \in A$ und $x \in B$) und $x \in C$. Daraus folgt $x \in A$ und ($x \in B$ und $x \in C$) und damit $x \in A$ und $x \in B \cap C$ und schliesslich $x \in A \cap (B \cap C)$. Entsprechend gilt $(A \cap B) \cap C \subset A \cap (B \cap C)$. Analog schliessen wir $A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \cap C$. Damit gilt dann $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. □

Definition 1.5.14. *Zwei Mengen A und B sind disjunkt genau dann, wenn $A \cap B = \emptyset$ (s. Abbildung 1.5.6)* ◊

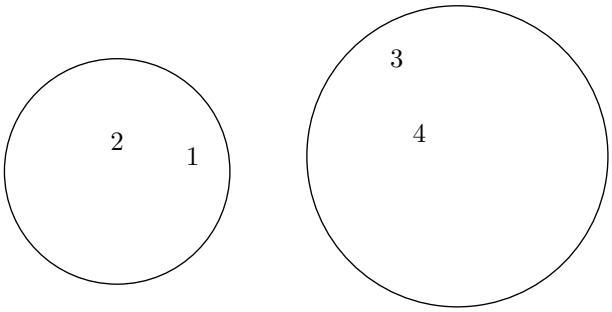


Abbildung 1.5.6: Venn-Diagramm für die disjunkten Mengen $\{1, 2\}$ und $\{3, 4\}$

Statt „Schnittmenge von A und B“ ist auch der Ausdruck „Durchschnitt von A und B“ gebräuchlich.

Die *Vereinigungsmenge* von zwei Mengen A und B ist die Menge der Gegenstände, die Elemente von A oder von B sind. So ist die Vereinigungsmenge der Mengen $\{1, 2\}$ und $\{2, 3, 4\}$ die Menge $\{1, 2, 3, 4\}$(s. Abbildung 1.5.7).

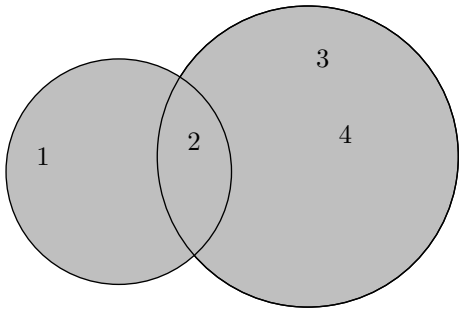


Abbildung 1.5.7: Venn-Diagramm für die Vereinigungsmenge der Mengen $\{1, 2\}$ und $\{2, 3, 4\}$

Für den Ausdruck „A vereinigt mit B“ oder „Vereinigungsmenge von A und B“ führen wir die Abkürzung „$A \cup B$“ ein. Es folgt noch eine formale Definition:

Definition 1.5.15. $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$ $\Diamond$

Satz 1.5.16. *(1)* $A \subset (B \cup A)$
(2) $B \subset (B \cup A)$
(3) $A \cup A = A$
(4) $A \cup \emptyset = A$
(5) Wenn $A \subset B$*, dann* $(A \cup B = B)$
(6) $A \cup B = B \cup A$ *(Kommutativgesetz)*
(7) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *(Assoziativgesetz)*
(8) $A \cap (B \cup C) = ((A \cap B) \cup (A \cap C))$ *(Distributivgesetz)*
(9) $A \cup (B \cap C) = ((A \cup B) \cap (A \cup C))$ *(Distributivgesetz)*

Beweis. (1) Sei $x \in A$. Dann gilt $x \in A$ oder $x \in B$. Damit gilt $x \in A \cup B$. Somit ist $A \subset (B \cup A)$.

(2) Beweis wie (1).

(3) Sei $x \in A \cup A$. Dann gilt $x \in A$ oder $x \in A$. Daraus folgt $x \in A$. Somit gilt $A \cup A \subset A$. Sei $x \in A$. Dann gilt $x \in A$ oder $x \in A$. Somit ist $x \in A \cup A$. Entsprechend ist $A \subset A \cup A$. Somit gilt: $A \cup A = A$.

(4) Sei $x \in A \cup \emptyset$. Dann gilt $x \in A$ oder $x \in \emptyset$. Nun gibt es kein $x \in \emptyset$. Damit gilt $x \in A$. Somit ist $A \cup \emptyset \subset A$. Sei nun $x \in A$. Damit gilt $x \in A$ oder $x \in \emptyset$. Somit ist $x \in A \cup \emptyset$. Entsprechend gilt $A \subset A \cup \emptyset$. Somit gilt $A \cup \emptyset = A$.

(5) (i) Sei $A \subset B$ und $x \in A \cup B$. Dann gilt $x \in A$ oder $x \in B$. Sei nun $x \in A$. Damit gilt laut erster Voraussetzung $x \in B$. Sei nun $x \in B$. Damit gilt ob nun $x \in A$ oder $x \in B$, dass $x \in B$. Entsprechend gilt $A \cup B \subset B$. (ii) Sei nun $x \in B$. Dann gilt $x \in A$ oder $x \in B$. Damit gilt $x \in A \cup B$. Somit gilt $B \subset A \cup B$.
Aus (i) und (ii) folgt $A \cup B = B$ (wenn $A \subset B$).

(6) Sei $x \in A \cup B$. Dann gilt $x \in A$ oder $x \in B$. Damit gilt $x \in B$ oder $x \in A$. Somit gilt $x \in B \cup A$. Somit ist $A \cup B \subset B \cup A$. Analog zeigen wir $B \cup A \subset A \cup B$. Aus diesen Ergebnissen folgt dann $A \cup B = B \cup A$.

(7) Sei $x \in A \cup (B \cup C)$. Dann gilt $x \in A$ oder $x \in B \cup C$. Weiter folgt $x \in A$ oder ($x \in B$ oder $x \in C$) und damit ($x \in A$ oder $x \in B$) oder $x \in C$. Daraus folgt $x \in A \cup B$ oder $x \in C$ und damit $x \in (A \cup B) \cup C$. Deshalb gilt $A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$. Analog schliessen wir $(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$. Damit gilt dann $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

(8) Sei $x \in A \cap (B \cup C)$. Somit gilt $x \in A$ und $x \in B \cup C$. Damit gilt $x \in A$ und ($x \in B$ oder $x \in C$). Daraus folgt ($x \in A$ und $x \in B$) oder ($x \in A$ und $x \in C$). Dies ergibt $x \in A \cap B$ oder $x \in A \cap C$ und weiter $x \in ((A \cap B) \cup (A \cap C))$. Somit gilt $A \cap (B \cup C) \subset ((A \cap B) \cup (A \cap C))$. Umgekehrt sei $x \in ((A \cap B) \cup (A \cap C))$. Damit gilt $x \in A \cap B$ oder $x \in A \cap C$, woraus folgt: ($x \in A$ und $x \in B$) oder ($x \in A$ und $x \in C$). Daraus kann man schliessen $x \in A$ und ($x \in B$ oder $x \in C$). Somit gilt $x \in A$ und $x \in B \cup C$ und damit $x \in A \cap (B \cup C)$. Somit ist $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$. Aus diesen Ergebnissen folgt $A \cap (B \cup C) = ((A \cap B) \cup (A \cap C))$.

(9) Sei $x \in A \cup (B \cap C)$. Somit gilt $x \in A$ oder $x \in B \cap C$. Damit gilt $x \in A$ oder ($x \in B$ und $x \in C$). Damit gilt ($x \in A$ oder $x \in B$) und ($x \in A$ oder $x \in C$). Daraus kann man schliessen $x \in A \cup B$ und $x \in A \cup C$, woraus folgt $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Somit gilt $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Analog können wir schliessen $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$. Damit gilt dann $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. □

Die Potenzmenge einer Menge A ist die Menge aller Teilmengen von A. So ist z.B. die Potenzmenge der Menge $\{1, 2, 3\}$:

$$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Den Begriff der Potenzmenge definieren wir noch formal:

Definition 1.5.17. $\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subset A\}$ ◊

Die Definition wird wie folgt gelesen: „Die Potenzmenge von A ist die Menge aller Mengen B, so dass B Teilmenge von A ist“.

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ einer endlichen Menge A enthält 2^n Elemente (n ist die Anzahl der Elemente der Menge A; eine Menge ist endlich, wenn sie endlich viele Elemente enthält). Den Beweis liefern wir später.

Definition 1.5.18. *Sei A eine endliche Menge. Dann schreiben wir $|A|$ für die Anzahl der Elemente von A.* ◊

Damit gilt für endliche Mengen

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}.$$

Wichtig: Auf Grund oben bewiesener Sätze gilt für alle Mengen A: $\emptyset \subset A$ und $A \subset A$. Entsprechend gilt für beliebige Mengen A : $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ und $A \in \mathcal{P}(A)$.

Übungen

1. Nach der Notation der Aufzählung die folgenden Mengen angeben

   (a) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}^* \text{ und } x < 10\}$

   (b) $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ und } 3 < x < 8\}$

   (c) $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ und } -3 < x < 3\}$ ($\mathbb{Z}$ = Menge der ganzen Zahlen)

   (d) $E = \{x \mid x = 2n \text{ und } n \in \mathbb{N}^*\}$

   (e) $F = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ und } \frac{x}{4} \in \mathbb{Z}\}$

2. Nach der Notation der charakterisierenden Eigenschaft die folgenden Mengen angeben

   (a) $A = \{\text{Basel, Bern, Bellinzona}\}$

(b) $B = \{\text{Norden, Süden, Osten, Westen}\}$

(c) $D = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$

(d) $E = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, ...\}$

(e) $G = \{2, 4, 6, 8\}$

3. Gegeben sei: $A = \{a, b, c, d, 1, 2, 3\}$ und $B = \{a, d, 2\}$. Durch Aufzählung die folgende Menge angeben: $E = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$

4. Sind die folgenden Mengen identisch?

(a) $A = \{a, b, c, d\}$ und $B = \{c, a, d, b\}$

(b) $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{123\}$

(c) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ und } \frac{x}{5} \in \mathbb{N} \text{ und } 10 < x < 15\}$ und
$B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ und } x \text{ ist eine Primzahl und } 24 < x < 28\}$

(d) $A = \{a, 1, 2\}$ und $B = \{1, 2, \{a\}\}$

(e) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}^* \text{ und } x \text{ ist ungerade}\}$ und $B = \{x \mid \text{es gibt ein } z \in \mathbb{N}^* \text{ und } x = 2z + 1\}$

(f) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}^* \text{ und } x \text{ ist ungerade}\}$ und $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}^* \text{ und } \frac{x}{2} \in \mathbb{N}\}$

5. Unter welchen Bedingungen sind die Mengen A und B identisch?

(a) $A = \{a, b, c, d\}$ und $B = \{a, 1, c, b\}$

(b) $A = \{a, b\}$ und $B = \{1, 2\}$

(c) $A = \{a, b, c, d, e\}$ und $B = \{1, 2, a, c, e\}$

6. Gegeben seien die Mengen $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, 1\}$ und $C = \{A, B, \{1\}\}$. Sind die folgenden Behauptungen wahr oder falsch?

(a) $a \in A$

(b) $2 \notin B$

(c) $\{a\} \in A$

(d) $\{a, b\} \in B$

(e) $B \in C$

(f) $\{a, b\} \in C$

(g) $1 \in C$

(h) $\{1\} \in C$

7. Sind die folgenden Sätze wahr? Wenn nicht, verändern Sie die Behauptungen so, dass daraus wahre Sätze entstehen.

(a) $1 \subset \{1, 2, 3\}$

(b) $\{a\} \in \{2, a, b\}$

(c) $\{4, 6\} \subset \{6, 4\}$

(d) $\{1, 2, 3\} \in \mathbb{N}$

(e) $\emptyset \subset \{a, b, c\}$

(f) $\emptyset \subset \{\emptyset, \{a, b\}\}$

(g) $\emptyset \in \emptyset$

(h) $\emptyset \subset \{\emptyset\}$

(i) $\{\emptyset\} \subset \emptyset$

8. Gegeben sei $E = \{a, b, c, d, e\}$ und zwei Teilmengen von E: $A = \{a, c\}$ und $B = \{a, b, c, e\}$. Alle Teilmengen X von E suchen, so dass $A \cup X = B$.

9. Für jede der folgenden Gleichungen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen angeben, die für ihre Wahrheit bürgen.

   (a) $A \cap B = A$

   (b) $A \cap (B \cup C) = A$

   (c) $A \cup B = A$

   (d) $A \cup (B \cap C) = A$

   (e) $A \cap B = A \cup B$

10. Gegeben sei $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Bilden Sie die Potenzmenge von E.

Lösungen

1. Es ergibt sich:

   (a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

   (b) $B = \{4, 5, 6, 7\}$

   (c) $C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

   (d) $E = \{2, 4, 6, 8, 10, ...\}$

   (e) $F = \{..... - 16, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16, ...\}$

2. Es ergibt sich:

   (a) $A = \{x \mid x$ ist ein Kantonshauptort und der erste Buchstabe des Namens ist „B“$\}$

   (b) $B = \{x \mid x$ ist eine Himmelsrichtung$\}$

   (c) $D = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ und $x \neq 0$ und $-4 < x < 4\}$

   (d) $E = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ und $\frac{x}{6} \in \mathbb{N}^*\} = \{x \mid x = 6y$ und $y \in \mathbb{N}^*\}$

   (e) $G = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ und $\frac{x}{2} \in \mathbb{N}^*$ und $x < 10\} = \{x \mid x = 2y$ und $y \in \mathbb{N}^*$ und $x < 10\}$

3. $E = \{b, c, 1, 3\}$

4. Es ergibt sich:

   (a) Ja

   (b) Nein

   (c) Ja, A und B sind leer!

   (d) Nein; da $a \neq \{a\}$

   (e) Nein, da in $\mathbb{N}^*$ die 0 fehlt, fehlt in $B = \{x \mid$ es gibt ein $z \in \mathbb{N}^*$ und $x = 2z + 1\}$ die Zahl 1.

   (f) Nein

5. Es ergibt sich

   (a) Wenn $d = 1$, dann $A = B$.

   (b) Wenn $a = 1$ und $b = 2$ oder wenn a =2 und $b = 1$, dann $A = B$.

   (c) Wenn $d = 1$ und $b = 2$ oder wenn $d = 2$ und $b = 1$, dann $A = B$.

6. Es ergibt sich:

   (a) wahr

   (b) wahr, ausser wenn $2 = a$ oder $2 = b$

   (c) falsch

   (d) falsch

   (e) wahr

   (f) wahr

   (g) falsch

   (h) wahr

7. Es gibt oft verschiedene Lösungen!

   (a) nein. „$1 \in \{1, 2, 3\}$“ ist wahr. (oder: $\{1\} \subset \{1, 2, 3\}$)

   (b) nein: $\{a\} \subset \{2, a, b\}$;

   (c) ja

   (d) nein: $\{1, 2, 3\} \subset \mathbb{N}$

   (e) ja;

   (f) ja;

   (g) nein: $\emptyset \subset \emptyset$;

   (h) ja;

   (i) nein: (die erste Menge enthält ein Element, nämlich die leere Menge, die zweite Menge enthält kein Element!)

8. $\{b, e\}, \{a, b, e\}, \{b, c, e\}, \{a, b, c, e\}$

9. Es ergibt sich (nicht unbedingt nur eine Lösung möglich!):

   (a) $A \subset B$ genau dann, wenn $A \cap B = A$

   (b) $A \cap (B \cup C) = A$ genau dann, wenn $A \subset (B \cup C)$

   (c) $B \subset A$ genau dann, wenn $A \cup B = A$

   (d) $A \cup (B \cap C) = A$ genau dann, wenn $(B \cap C) \subset A$

   (e) $A \subset B$ und $B \subset A$ genau dann, wenn $A \cap B = A \cup B$
   (Diese fünf Aussagen sind Sätze, die man beweisen könnte!).

10. $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\},$
    $\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\},$
    $\{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\},$
    $\{3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}, E\}$

1.6 Geordnete Paare und Relationen

1.6.1 Geordnete Paare

Mengen, die zwei Elemente enthalten nennen wir „ungeordnete Paare“: z.B. $\{a, b\}$. Die schriftliche Anordnung der Elemente spielt keine Rolle, da gilt: $\{a, b\} = \{b, a\}$. Ordnung spielt in der Mathematik (und auch sonst) eine wichtige Rolle. Wenn Anton der Vater von Beat ist, ist Beat nicht der Vater von Anton. Wenn $5 > 3$, dann ist 3 nicht grösser als 5. usw. Geordnete Paare sind spezifische Mengen, die uns erlauben sollen, Ordnung auszudrücken. Wir definieren sie wie folgt:

Definition 1.6.1. $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$ ◊

(x, y) ist ein geordnetes Paar. Wir sagen, dass „x“ an erster Stelle im geordneten Paar (x, y) auftaucht und dass „y“ an zweiter Stelle in diesem geordneten Paar auftaucht. Wir nennen „x“ die erste Komponente des Paares und „y“ die zweite Komponente des Paares - die Komponenten sind nicht Elemente des geordneten Paares. Geordnete Paare sind Mengen, die Mengen als Elemente enthalten, die ihrerseits die Komponenten als Elemente enthalten.

Um zu beweisen, dass geordnete Paare Ordnung auszudrücken vermögen, weisen wir den folgenden Satz nach:

Satz 1.6.2. *Wenn $x \neq y$, dann $(x, y) \neq (y, x)$*

Beweis. Da eine Menge A identisch ist mit einer Menge B genau dann, wenn A und B dieselben Elemente enthalten, muss man zeigen, dass (x, y) und (y, x) nicht dieselben Elemente enthalten. Dass dies der Fall ist, sieht man unmittelbar:
$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$
$(y, x) = \{\{y\}, \{x, y\}\}$
Während (x, y) die Menge $\{x\}$ als Element enthält, enthält (y, x) diesen Gegenstand nicht als Element, denn $x \neq y$. □

Statt diesem Satz könnte man auch beweisen:

Satz 1.6.3. *$(x, y) = (z, u)$ genau dann, wenn $x = z$ und $y = u$.*

Beweis. (a) Sei $(x, y) = (z, u)$. Mittels der Definition erhält man

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{z\}, \{z, u\}\}.$$

Alle Elemente von $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ sind also Elemente von $\{\{z\}, \{z, u\}\}$.
$z = u$ oder $z \neq u$.
(i) Wenn $z = u$, $\{\{z\}, \{z, u\}\} = \{\{z\}\}$, und da die Elemente von $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ Elemente von $\{\{z\}\}$ sind, gilt $\{x\}, \{x, y\} \in \{\{z\}\}$ und $\{x\} = \{x, y\} = \{z\}$. Also ist $x = z$ und $y = u$, denn $x = z = y = u$.
(ii) Sei $z \neq u$. Da die Elemente von $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ Elemente von $\{\{z\}, \{z, u\}\}$ sind, gilt $\{x\} \in \{\{z\}, \{z, u\}\}$ und deshalb $\{x\} = \{z\}$ oder $\{x\} = \{z, u\}$. Da $z \neq u$, ist die zweite Gleichung falsch - die beiden Mengen enthalten nicht dieselben Elemente. Daraus kann man schliessen, dass $\{x\} = \{z\}$ und $x = z$. Zudem ist $\{x, y\} \in \{\{z\}, \{z, u\}\}$.
Da $\{x, y\} \neq \{z\}$, gilt $\{x, y\} = \{z, u\}$ und wegen $x = z$ schliesslich $y = u$.
(b) Wenn $x = z$ und $y = u$, erhält man (z, u) aus (x, y) durch Ersetzen von x durch z und y durch u in (x, y) (Identisches ersetzen). □

Geordnete Paare können wiederum in geordneten Paaren auftauchen. Tauchen sie an erster Stelle auf, erhalten wir sogenannte Tripel, z.B. $((y, z), x)$.

Definition 1.6.4. *(i)* $((y, z), x)$ *ist ein Tripel.*
(ii) $(y, z, x) := ((y, z), x)$ ◊

Bemerkung 1.6.5. $(y,z,x) = ((y,z),x) \neq (y,(z,x))$. *Während links als erste Komponente des geordneten Paares ein geordnetes Paar steht, steht rechts an erster Stelle das Objekt y. Will man $(y,(z,x))$ ausdrücken, darf man nicht auf die Klammern verzichten!* ◊

Ein Tripel kann ebenfalls an erster Stelle in einem geordneten Paar auftauchen, z.B. $((y,z,x),u)$. Solche geordnete Paare nennen wir 4-Tupel.

Definition 1.6.6. $(y,z,x,u) := ((y,z,x),u)$ *ist ein 4-Tupel.* ◊

Ein 4-Tupel kann wiederum in einem geordneten Paar an erster Stelle auftauchen. Wir nennen solche geordnete Paare 5-Tupel. Allgemein kann ein $n-1$-Tupel $(x_1,...x_{n-1})$ an erster Stelle in einem geordneten Paar auftauchen. Wir definieren formeller und rekursiv n-Tupel:

Definition 1.6.7. *(i)* (y,z) *ist ein 2-Tupel (= geordnetes Paare).*
(ii) das geordnete Paar $((x),r)$ *ist ein n-Tupel genau dann, wenn* (x) *ein* $n-1$*-Tupel ist (n>2).*
(iii) $(x,z) := ((x),z)$ ◊

Beispiel 1.6.8. *Ist* $(5,6,7,8,9)$ *ein 5-Tupel? Es gilt gemäss Definitionen* $(5,6,7,8,9) = ((((5,6),7),8),9)$. *Gemäss Definition gilt,* $((((5,6),7),8),9)$ *ist ein 5-Tupel genau dann, wenn* $(((5,6),7),8)$ *ein 4-Tupel ist.* $(((5,6),7),8)$ *ist ein 4-Tupel genau dann, wenn* $((5,6),7)$ *ein 3-Tupel (= Tripel) ist.* $((5,6),7)$ *ein 3-Tupel genau dann, wenn* $(5,6)$ *ein 2-Tupel ist. Da* $(5,6)$ *ein 2-Tupel ist, ist damit* $((5,6),7)$ *ein 3-Tupel,* $(((5,6),7),8)$ *ein 4-Tupel und* $((((5,6),7),8),9)$ *ein 5-Tupel. Das Beispiel zeigt, dass mit der obigen Definition rekursiv n-Tupel für beliebige n definiert ist.* ◊

Bemerkung 1.6.9. *Oft schreibt man für n-Tupel* $(x_1,...,x_n)$. ◊

Beispiel 1.6.10. *(Bern, Basel, Zürich, Paris, London);* $(5,4,6,4,38,4,3,4)$ ◊

Satz 1.6.11. $(a,a) = \{\{a\}\} \neq \{a\}$

Beweis. $(a,a) = \{\{a\},\{a,a\}\} = \{\{a\},\{a\}\} = \{\{a\}\} \neq \{a\}$ □

Satz 1.6.12. $(a,a,a) \neq (a,a)$

Beweis.

$$\begin{aligned}(a,a,a) &= ((a,a),a)\\ &= \{\{(a,a)\},\{(a,a),a\}\}\\ &= \{\{\{\{a\}\}\},\{\{\{a\}\},a\}\}\\ &\neq \{\{a\}\}\end{aligned}$$

□

Wichtig: Damit sind geordnete Paare - im Gegensatz zu „normalen“ Mengen dafür geeignet auszudrücken, wie viele Male ein Objekt vorkommt. Es gilt ja, wie gesehen $\{a,a,a\} = \{a,a\} = \{a\}$, während wie gezeigt $(a,a,a) \neq (a,a)$.

1.6.2 Relationen

Eine Relation ist eine Menge, die nur geordnete Paare als Elemente enthält. Formalere Formulierung:

Definition 1.6.13. *A ist eine Relation genau dann, wenn für alle x gilt, wenn $x \in A$, dann gibt es ein y und ein z, so dass $(y, z) = x$* ◊

Beispiel 1.6.14. $A = \{$*(Antoine, Pierre),*$(5, 6)$*,(Paris, France)*$\}$
$B = \{(x, y) \mid x$ *ist der Vater von* $y\}$
$C = \{(x, y) \mid x$ *ist grösser als* $y\}$
$H = \{(x, y) \mid x$ *und* y *sind natürliche Zahlen und* $x < y\}$
A, B, C *und* H *sind Relationen.*
$\emptyset$ *ist eine Relation (es gibt kein* $x \in \emptyset$*, das nicht ein geordnetes Paar ist).* ◊

Satz 1.6.15. *Wenn A eine Relation ist, dann gilt für alle B, wenn $B \subset A$, dann ist B eine Relation.*

Informelle Lektüre des Satzes: Wenn A eine Relation ist, dann sind alle Teilmengen von A Relationen.

Relationen, die nur n-Tupel enthalten, nennen wir $n-$stellige Relationen.

Wir betrachten zwei Mengen A und B. Wir können die Menge aller geordneten Paare bilden, die als erste Komponente ein Element von A und als zweite Komponente ein Element von B enthalten. Die Relation, die dadurch entsteht, wird „*das kartesische Produkt von A und B*“ genannt (René Descartes, 1596 - 1650, französischer Mathematiker, Physiker und Philosoph). So ist z.B.

$$\{(1, 2), (1, 3), (1, 10), (2, 2), (2, 3), (2, 10)\}$$

das kartesische Produkt von $\{1, 2\}$ und $\{2, 3, 10\}$.
Wir führen für das kartesische Produkt der Menge A und B die folgende Abkürzung ein:
$A \times B$ (gelesen als „A kreuz B“ oder als „A mal B“) und wir definieren noch formal:

Definition 1.6.16. $A \times B := \{(x, y) \mid x \in A$ *und* $y \in B\}$ ◊

Für endliche Mengen A und B, enthält $A \times B$ $n \cdot m$ Elemente, so dass n die Anzahl der Elemente von A ist und m die Anzahl der Elemente von B ist. Für endliche Mengen A und B gilt also:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B| .$$

Definition 1.6.17. *R ist eine Relation von A nach B genau dann, wenn $R \subset A \times B$.* ◊

So ist

$$\{(1, 2), (2, 2)\} \subset \{(1, 2), (1, 3), (1, 10), (2, 2), (2, 3), (2, 10)\} = \{1, 2\} \times \{2, 3, 10\}$$

eine Relation von $\{1, 2\}$ nach $\{2, 3, 10\}$.

Die Reihenfolge der Bildung der Produkte spielt eine wichtige Rolle, da $A \times B$ von $B \times A$ genau dann verschieden ist, wenn $A \neq B$, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$\{1, 2\} \times \{3, 4\} = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\} \neq$$
$$\{3, 4\} \times \{1, 2\} = \{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)\}$$

Das kartesische Produkt ist also nicht kommutativ.

Wir können das kartesische Produkt wiederholtermassen bilden:
z.B. $E = (A \times B) \times C$. Die Elemente von E sind Tripel. So ist z.B. mit
$A = \{1, 2\}, B = \{1, 3, 4\}$ und $C = \{10, 8\}$:

$$\begin{aligned}(A \times B) \times C &= \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4)\} \times \{10, 8\} \\ &= \{(1, 1, 10), (1, 3, 10), (1, 4, 10), (2, 1, 10), (2, 3, 10), (2, 4, 10), \\ &\quad (1, 1, 8), (1, 3, 8), (1, 4, 8), (2, 1, 8), (2, 3, 8), (2, 4, 8)\}\end{aligned}$$

Es gilt zu beachten, dass gilt: $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$. So ist

$$\begin{aligned} A \times (B \times C) &= \{1,2\} \times \{(1,10),(1,8),(3,10),(3,8),(4,10),(4,8)\} \\ &= \{(1,(1,10)),(1,(1,8)),(1,(3,10)),(1,(3,8)),(1,(4,10)),(1,(4,8)), \\ &\quad (2,(1,10)),(2,(1,8)),(2,(3,10)),(2,(3,8)),(2,(4,10)),(2,(4,8))\}. \end{aligned}$$

Das kartesische Produkt ist also nicht assoziativ.

Das kartesische Produkt kann auch von vier Mengen gebildet werden:

$$E = (((A \times B) \times C) \times D).$$

Die Elemente von E sind 4-Tupel und entsprechend ist E eine 4-stellige Relation.

Allgemein definieren wir rekursiv:

Definition 1.6.18. $\overset{2}{\underset{i=1}{\times}} A_i := A_1 \times A_2$

$\overset{n}{\underset{i=1}{\times}} A_i := \left(\overset{n-1}{\underset{i=1}{\times}} A_i\right) \times A_n$ *für* $n > 2$. ◊

Die Elemente von $\overset{n}{\underset{i=1}{\times}} A_i$ sind $n-$Tupel.

Beispiel 1.6.19. *Um das Funktionieren der Definition zu illustrieren ein Beispiel. Man erhält etwa*

$$\begin{aligned} \overset{5}{\underset{i=1}{\times}} A_i &= \left(\overset{4}{\underset{i=1}{\times}} A_i\right) \times A_5 \\ &= \left(\left(\overset{3}{\underset{i=1}{\times}} A_i\right) \times A_4\right) \times A_5 \\ &= \left(\left(\left(\overset{2}{\underset{i=1}{\times}} A_i\right) \times A_3\right) \times A_4\right) \times A_5 \\ &= (((A_1 \times A_2) \times A_3) \times A_4) \times A_5 \end{aligned}$$

◊

Definition 1.6.20. $A^n := \overset{n}{\underset{i=1}{\times}} A$, *wenn* $A_i = A_j$ *für* $i, j \in N_n^*$. *(Das n-fache kartesische Produkt der Menge A mit Klammerbildung wie bei der Definition 1.6.18)* ◊

Beispiel 1.6.21. *(1) Mit* $A_1 = \{1,2\}, A_2 = \{3,4\}$ *und* $A_3 = \{1,5,6\}$ *gilt:*

$$\begin{aligned} \overset{3}{\underset{i=1}{\times}} A_i = \{&(1,3,1),(1,4,1),(2,3,1),(2,4,1),(1,3,5),(1,4,5),(2,3,5),(2,4,5), \\ &(1,3,6),(1,4,6),(2,3,6),(2,4,6)\} \end{aligned}$$

(2) Mit $A = \{0,1\}$ *gilt*

$$\begin{aligned} A^4 = \{&(0,0,0,0),(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1), \\ &(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,0,1), \\ &(0,0,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,1)(1,0,1,1),(0,1,1,1),(1,1,1,1)\} \end{aligned}$$

Die $4-$*stellige Relation muss* $2^4 = 16$ *Elemente haben.* ◊

Die Relationen können verschiedene Eigenschaften aufweisen: Symmetrie, Asymmetrie, Reflexivität, Transitivität, usw.

Symmetrie *und* Asymmetrie

Definition 1.6.22. *A ist symmetrisch genau dann, wenn A eine Relation ist und für alle* $(x, y) \in A$ *gilt: es gibt ein* $(y, x) \in A$. ◊

Die folgende Relation ist symmetrisch:

$$\{(3, 4), (4, 3)\}.$$

Die folgende Relation ist nicht symmetrisch:

$$\{(3, 4), (4, 5)\}$$

Textbeispiel: Wenn Anton ein Geschwister von Berta ist, ist Berta ein Geschwister von Anton. Somit ist die Relation $G = \{(x, y) \mid x$ ist ein Geschwister von $y\}$ symmetrisch. Wenn Anton der Bruder von Berta ist, ist Berta nicht der Bruder von Anton. Somit ist die Relation: $B = \{(x, y) \mid x$ ist der Bruder von $y\}$ nicht symmetrisch.

Definition 1.6.23. *A ist asymmetrisch genau dann, wenn A eine Relation ist und für alle* $(x, y) \in A$ *gilt: es gibt kein* $(y, x) \in A$. ◊

Die folgenden Relation ist asymmetrisch:

$$\{(3, 4), (4, 5)\}.$$

Die folgende Relation ist nicht asymmetrisch.

$$\{(3, 4), (4, 3), (5, 4)\}$$

Textbeispiel: Wenn a Vater von b ist, dann ist b nicht Vater von a. Dies gilt für alle Paare (a, b), derart dass a Vater von b ist. Somit ist die Relation des Vaterseins asymmetrisch.
Die Relation „$>$“ ist asymmetrisch.
Eine Relation kann weder asymmetrisch noch symmetrisch sein:

$$\{(3, 4), (4, 3), (5, 7)\}$$

„ist Bruder von“ ist weder asymmetrisch noch symmetrisch: ist Anton der Bruder von Beat, ist Beat der Bruder von Anton. Ist Anton der Bruder von Anna, ist Anna nicht der Bruder von Anton.

Reflexivität und Irreflexivität

Definition 1.6.24. *Eine Relation A ist reflexiv genau dann, wenn es für alle Komponenten x ihrer geordneten Paare ein geordnetes Paar* $(x, x) \in A$ *gibt.* ◊

Alternative Formulierung: Eine Relation A ist reflexiv genau dann, wenn $(x, y) \in R$, dann ist (x, x) und $(y, y) \in R$. Die Identitätsrelation ist z.B. reflexiv.
Ein Beispiel für eine reflexive Relation in Mengenschreibweise:

$$A = \{(3, 3), (4, 4), (5, 5), (5, 4), (4, 5)\}$$

A ist reflexiv und symmetrisch.

$$B = \{(3, 3), (4, 4), (5, 5), (5, 4), (4, 3)\}$$

B ist reflexiv, aber weder asymmetrisch noch symmetrisch.

$$C = \{(3,3),(4,4),(5,5),(5,6)\}.$$

C ist nicht reflexiv, da 6 als Komponente auftaucht, das geordnete Paar $(6,6)$ jedoch nicht Element von C ist.

Definition 1.6.25. *Eine Relation A ist irreflexiv, wenn es für keine Komponente x ihrer geordneten Paare ein geordnetes Paar $(x,x) \in A$ gibt.* ◊

„ist grösser als“ ist irreflexiv. Es gibt keinen Gegenstand, der grösser als er selber ist. „$<$“ ist irreflexiv. Es gibt keine Zahl, die kleiner als sie selber ist. Relationen können weder reflexiv noch irreflexiv sein. z.B. $\{(a,a)(a,b)(b,c)\}$. Manche Menschen pflegen sich, andere nicht.

Transitivität

Definition 1.6.26. *Eine Relation A ist transitiv genau dann, wenn für alle (x,y), $(y,z) \in A$ gilt: $(x,z) \in A$.* ◊

Eine äquivalente Formulierung lautet: Eine Relation A ist transitiv genau dann, wenn es keine Paare (x,y), $(y,z) \in A$ gibt, ohne dass $(x,z) \in A$. Wenn (x,y), (y,z) in A nicht vorkommt, gibt es entsprechend nichts zu überprüfen.

Wenn a grösser als b ist und b grösser als c ist, dann ist a auch grösser als c. Dies gilt für beliebige a, b und c. Entsprechend ist die Relation des Grösserseins transitiv. Die Relation des Vaterseins ist nicht transitiv: Wenn a Vater von b ist und b Vater von c, dann ist a nicht der Vater von c. Beispiel in Mengenschreibweise:

$$A = \{(5,3),(3,6),(5,6),(6,7),(3,7)\}.$$

A ist nicht transitiv.

$$B = \{(5,3),(3,6),(5,6),(6,7)\}$$

B ist nicht transitiv, da $(3,7)$ nicht Element von B ist.

$$C = \{(5,3),(5,6)\}$$

ist transitiv, da es keine Paare (x,y), (y,z) gibt, ohne dass (x,z) gilt. Somit gilt für alle Paare: wenn (x,y) und (y,z), dann (x,z).

Beispiel 1.6.27. *Vorziehen (Anton hat lieber Wein als Bier - zieht Wein dem Bier vor) ist eine asymmetrische, irreflexive und transitive Relation. Man zieht Wein nicht Wein vor (Irreflexivität). Wenn man lieber Wein als Bier hat, hat man nicht lieber Bier als Wein (Asymmetrie). Wenn man lieber Wein als Bier hat und lieber Bier als Wasser, so hat man lieber Wein als Wasser (Transitivität).* ◊

1.7 Äquivalenzrelationen und Zerlegungen

Definition 1.7.1. *R ist eine Äquivalenzrelation genau dann, wenn R eine transitive, symmetrische und reflexive Relation ist.* ◊

So ist z.B. „ist verwandt mit“ keine Äquivalenzrelation, da Verwandtschaft nicht transitiv ist. Jedoch ist „gleich gross wie“ eine Äquivalenzrelation. Ebenso ist „$=$“ eine Äquivalenzrelation.

Wir sagen, R sei eine Relation auf die Menge A genau dann, wenn alle Elemente von A als Komponenten der Elemente von R auftauchen und nur solche Elemente als Komponenten verwendet sind. Formal:

Definition 1.7.2. *R ist eine Relation auf die Menge A genau dann, wenn $\{x|\ (x,y) \in R$ oder $(y,x) \in R\} = A$.* ◊

Sei R eine Äquivalenzrelation auf A. Wir betrachten ein x, Element von A, und bilden die folgende Menge:

$$M_x := \{y \mid (x,y) \in R\} \tag{1.7.1}$$

M_x ist also die Menge der y, die an zweiter Stelle von geordneten Paaren auftauchen, an deren ersten Stelle x steht - also die Menge der y mit denen x in der Relation R steht. Für jedes x aus A ist eine solche Menge bildbar. Dabei gilt für Äquivalenzrelationen R, wobei wir auf einen Beweis verzichten:

1. $M_x = M_y$ genau dann, wenn $(x,y) \in R$.
2. $M_x \cap M_y = \emptyset$ genau dann, wenn $(x,y) \notin R$.
3. $\bigcup\limits_{x \in A} M_x = A$

($\bigcup\limits_{x \in A} M_x$ ist die Vereinigungsmenge aller M_x mit $x \in A$; ($\bigcup\limits_{i=1}^{2} M_i = M_1 \cup M_2$; $\bigcup\limits_{i=1}^{n} M_i = \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} M_i \cup M_n$)

Definition 1.7.3. *Eine Menge Z von n nichtleeren Mengen X_i stellt eine Zerlegung einer Menge A dar genau dann, wenn gilt:*
(1) $X_i \cap X_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und
(2) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i = A$
(3) $X_i \neq \emptyset$ für alle $i \in \mathbb{N}_n^*$. ◊

Eine Zerlegung einer Menge A ist damit eine Aufteilung einer Menge in nicht-leere Teilmengen X_i, so dass die paarweisen Schnittmengen verschiedener Teilmengen X_i leer sind und die Vereinigungsmenge aller Teilmengen X_i die Menge A selber ergibt (s. Abbildung 1.7.8).

Beispiel 1.7.4. $\{\{1,2,3\},\{5,6\},\{8,9\}\}$ *stellt eine Zerlegung von* $\{1,2,3,5,6,8,9\}$ *dar.*
$\{\{1,2,3\},\{1,5,6\},\{8,9\}\}$ *stellt keine Zerlegung von* $\{1,2,3,5,6,8,9\}$ *dar, da* $\{1,2,3\} \cap \{1,5,6\} = \{1\}$
$\{\{1,2,3\},\{6\},\{8,9\}\}$ *stellt keine Zerlegung von* $\{1,2,3,5,6,8,9\}$ *dar, da* $\{1,2,3\} \cup \{6\} \cup \{8,9\} \neq \{1,2,3,5,6,8,9\}$. ◊

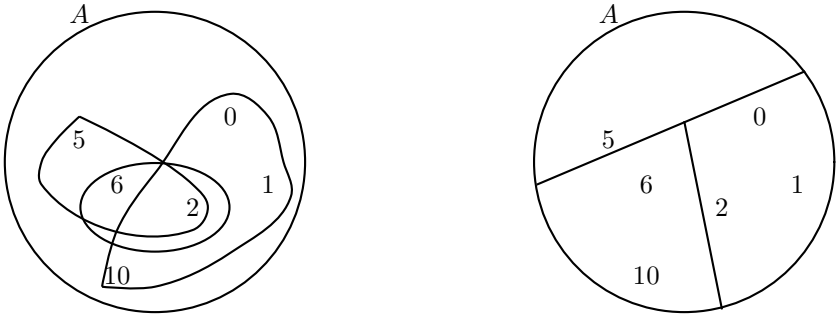


Abbildung 1.7.8: Links: Aufteilung einer Menge A in eine Menge von Teilmengen $\{\{6,2\},\{5,6,2\},\{10,0,1,2\}\}$ die nicht einer Zerlegung von A entspricht; rechts: Aufteilung in eine Menge von Teilmengen $\{\{5\},\{6,10\},\{0,2,1\}\}$, die eine Zerlegung von A darstellt.

Satz 1.7.5. *Sei R eine Äquivalenzrelation auf die Menge A. Dann gilt: $Z = \{M_x \mid M_x = \{y \mid (x,y) \in R\}\}$ ist eine Zerlegung von A.*
(Wir nennen Z die R-Zerlegung von A. Gebräuchlich ist auch der Ausdruck R-Partition von A).

Beispiel 1.7.6. *Sei R eine Äquivalenzrelation auf A und*
$R = \{(2,2),(1,1),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(2,3),(3,2),(4,5),$
$(5,4),(5,6),(6,5),(4,6),(6,4),(7,4),(7,5),(7,7),(7,6),(6,7),(4,7),(5,7)\}$.
Damit ist R eine Äquivalenzrelation auf $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Die Menge der $M_x = \{y \mid (x,y) \in R\}$ ist $\{\{1\},\{2,3\},\{4,5,6,7\}\}$, was eine Zerlegung von A darstellt. ◊

Jede Äquivalenzrelation R erzeugt auf diese Weise genau eine R-Zerlegung. Umgekehrt können wir zu jeder Zerlegung $Z_A = \{Y_i \mid i \in N_n^*\}$ einer Menge A genau eine Äquivalenzrelation R konstruieren, so dass Z die R-Zerlegung von A ist. Die Konstruktionsvorschrift ist offensichtlich: wir müssen jedes Element x eines Elementes Y von Z zu jedem Element y von Y in „Beziehung“ setzen):

$$R = \bigcup_{i=1}^{n} (Y_i \times Y_i)$$

Beispiel 1.7.7. *$X = \{1,2,3,4,5,6\}$, $Z = \{\{1\},\{2,3\},\{4,5,6\}\}$. Z ist eine Zerlegung von X, da gilt: (a) $M_1 = \{1\}$; $M_2 = M_3 = \{2,3\}$; $M_4 = M_5 = M_6 = \{4,5,6\}$*
(b) $\{1\} \cap \{2,3\} = \emptyset = \{2,3\} \cap \{4,5,6\} = \{1\} \cap \{4,5,6\}$
(c) $\{1\} \cup \{2,3\} \cup \{4,5,6\} = X$
Wir konstruieren das passende
$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(2,3),(3,2),$
$(4,5),(5,4),(4,6),(6,4),(5,6),(6,5)\}$. *Für dieses gilt: R ist reflexiv, transitiv und symmetrisch* ◊

Definition 1.7.8. *Die Elemente einer R-Zerlegung heissen „Äquivalenzklassen“ der $R-$Zerlegung.* ◊

Übung 1.7.9. *(a) Bilden Sie eine beliebige Äquivalenzrelation auf eine Menge A mit wenig Elementen. Überprüfen Sie die Eigenschaften der Relation. Bilden Sie die Zerlegung von A und überprüfen Sie die obigen Aussagen.*
(b) Wählen Sie eine beliebige Menge A und nehmen Sie eine beliebige Zerlegung dieser Menge vor. Konstruieren Sie die dazugehörige Äquivalenzrelation.

Lösung 1.7.10. *(Beispiel):*
(a) $R = \{(1,3),(3,1),(1,1),(3,3),(4,5),(5,4),(5,5),(4,4)\}$. *R ist reflexiv, symmetrisch und transitiv. Die Zerlegung ist:* $Z = \{\{1,3\},\{4,5\}\}$. $A = \{1,3,4,5\}$
(b) $Z = \{\{1,2\},\{3,4,5\},\{8,9\}\}$. $A = \{1,2,3,4,5,8,9\}$. *Die dazugehörende Äquivalenzrelation* $R = \{(1,1),(2,2)(3,3),(4,4),(5,5),(8,8),(9,9),$
$(1,2),(2,1),(3,4),(4,3),(3,5),(5,3),(4,5),(5,4),(8,9),(9,8)\}$.

1.8 Funktionen

Als nächstes führen wir den für die Mathematik zentralen Funktionsbegriff ein. g ist der Graph einer Funktion von A nach B genau dann, wenn g eine Relation von A nach B ist und wenn Komponenten an erster Stelle höchstens eine Komponente an zweiter Stelle aufweisen. Formellere Definition:

Definition 1.8.1. *g ist der Graph einer Funktion von A nach B genau dann, wenn g eine Relation von A nach B ist und für alle x, y, z gilt: wenn $(x,y) \in g$ und $(x,z) \in g$, dann $z = y$.* ◊

Beispiel 1.8.2. $g = \{(1,2),(2,5),(4,-5),(6,18)\}$ *ist Graph einer Funktion, da Objekte an erster Stelle höchstens ein Objekt an zweiter Stelle aufweisen.*
$g = \{(1,2),(1,3),(4,-5),(6,18)\}$ *ist nicht Graph einer Funktion, da in zwei geordneten Paaren mit* 1 *an erster Stelle an zweiter Stelle verschiedene Objekte vorkommen.* ◊

Definition 1.8.3. *f ist eine Funktion von A nach B genau dann, wenn es Mengen A, B und g gibt, so dass*
(i) $f = (A, B, g)$ *und*
(ii) g ist der Graph einer Funktion von A nach B ◊

Eine Funktion ist damit ein Tripel, das aus einem Graphen von A nach B sowie den Mengen A und B als Komponenten besteht. g ist „der Graph der Funktion f von A nach B“.

Beispiel 1.8.4. *Wenn* $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{2,3,4,5,6\}$ *und*
$g = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6)\}$, *ist* $f = (A, B, g)$ *eine Funktion, denn g ist Graph einer Funktion von A nach B.*

Wenn $A = B =$ Menschheit $=$ die Menge aller Menschen und $g = \{(x,y) \mid x$ *ist Vater von* $y\}$, *dann ist* $f = (A, B, g)$ *keine Funktion, da manche Väter mehr als ein Kind haben. Damit ist g kein Graph einer Funktion.*

Wenn $A = B =$ Menschheit und $g = \{(x,y) \mid y$ *ist Vater von* $x\}$, *ist* $f = (A, B, g)$ *eine Funktion, da kein Kind mehr als einen (biologischen) Vater hat. Damit ist g der Graph der Funktion f von A nach B. Übrigens gilt:* $c = \{(x,y) \mid x$ *ist Kind von* $y\} = g$. ◊

Definition 1.8.5. *A ist der Definitionsbereich von f genau dann, wenn $f = (A, B, g)$ eine Funktion ist. (s. Abbildung 1.8.9)* ◊

Definition 1.8.6. *B ist der Wertebereich von f genau dann, wenn $f = (A, B, g)$ eine Funktion ist. (s. Abbildung 1.8.9)* ◊

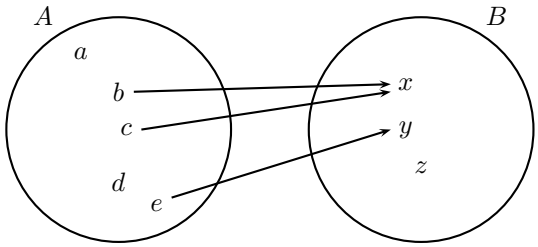


Abbildung 1.8.9: Darstellung einer Funktion mit Venndiagrammen (A Definitionsbereich, B Wertebereich, die von links nach rechts gerichteten Pfeile symbolisieren mit den dadurch verbundenen Objekten die entsprechenden geordneten Paare des Graphen der Funktion)

Die Menge der Komponenten an erster Stelle der geordneten Paare des Graphen einer Funktion nennt man „*Urbild der Funktion*“ und wir definieren formaler:

Definition 1.8.7. *Sei $f = (A, B, g)$ eine Funktion. Urbild von $f := \{x \mid (x, y) \in g\}$ (s. Abbildung 1.8.10)* ◊

Die Menge der Komponenten an zweiter Stelle der geordneten Paare des Graphen einer Funktion, nennt man „Bild der Funktion f“. Wir verwenden dafür manchmal die Abkürzung „Bild(f)“

Definition 1.8.8. *Sei $f = (A, B, g)$ eine Funktion. Bild(f) $:= \{y \mid (x, y) \in g\}$ (s. Abbildung1.8.10)* ◊

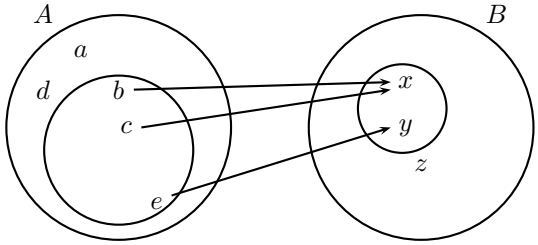


Abbildung 1.8.10: Darstellung des Urbildes und des Bildes einer Funktion f (A Definitionsbereich, B Wertebereich. Das Urbild von f ist $\{b, c, e\}$, Bild von f ist $\{x, y\}$

Statt zu sagen, „x ist die erste Komponente eines Elementes des Graphen der Funktion f und y ist die zweite Komponente dieses Elementes“, sagen die Mathematiker gewöhnlich: „die Funktion f ordnet (dem Objekt) x (das Objekt) y zu“. Verallgemeinernd wird auch gesagt, dass eine Funktion Elementen des Definitionsbereichs Elemente des Wertebereiches zuordne. In Wirklichkeit handelt eine Funktion nicht, d.h. sie ordnet nicht zu. Es handelt sich hier nur um praktische und abkürzende Redeweisen, um auszudrücken, was im Rahmen der Mengenlehre klar und deutlich definiert wurde. Wir werden in der Folge diese Redewendung ebenfalls verwenden. Formeller halten wir fest:

Definition 1.8.9. *Die Funktion f ordnet y dem Objekt x zu genau dann, wenn $(x, y) \in g$ und g ist der Graph von f.* ◊

Die erste Komponente eines Elementes des Graphen der Funktion wird auch „Argument“ genannt, die zweite „Funktionswert“ oder „Wert der Funktion“.

Wenn eine Funktion f dem Objekt x das Objekt y zuordnet, schreiben wir auch „$f(x)$“ für „y“:

Definition 1.8.10. *Sei $f = (A, B, g)$ eine Funktion. $f(x) = y$ genau dann, wenn $(x, y) \in g$.* ◊

Fallen Definitionsbereich und Urbild einer Funktion zusammen, so sprechen wir von einer *Abbildung*. Formeller halten wir fest:

Definition 1.8.11. *Für $f = (A, B, g)$ ist f eine Abbildung genau dann, wenn das Urbild von $f = A$.* ◊

Für die symbolische Darstellung von Abbildungen wird oft folgende Schreibweise (in verschiedenen Varianten) verwendet:

$$\begin{aligned} f &: A \to B \\ &x \to f(x) \end{aligned} \tag{1.8.2}$$

Dabei geben A den Definitionsbereich - der im Falle der Abbildung mit dem Urbild zusammenfällt - an, B den Wertebereich. Auf der zweiten Zeile wird angegeben, welche Objekte aus B welchen Objekten aus A zuzuordnen sind. In der zweiten Zeile wird oft statt „$\to$“ „$\longmapsto$“ verwendet. Reden wir in der Folge von Funktionen, so meinen wir damit Abbildungen. Konkretes Beispiel für die obige Schreibweise:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &x \to x^2 \end{aligned} \tag{1.8.3}$$

Wir ordnen damit jedem $x \in \mathbb{R}$ ein $y = x^2 \in \mathbb{R}$ zu. Eine Variante dieser Schreibweise ist:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &f(x) := x^2 \end{aligned} \tag{1.8.4}$$

Wir können aber auch schreiben: „f ist eine Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit $f(x) := x^2$“, „f ist eine Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit $x \to x^2$“oder „f ist eine Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, die x die Zahl x^2 zuordnet“. Das Beispiel ist typisch für Funktionen, deren Definitionsbereich eine Zahlenmenge ist: die Zuordnungen werden gewöhnlich durch sogenannte Funktionsgleichungen definiert (im Beispiel $f(x) = x^2$). Sie geben an, wie aus dem Argument der zugeordnete Funktionswert zu berechnen ist. Diese Vorgehensweise ist dann in der Praxis unabdingbar, wenn unendlich viele Argumente vorkommen. Allerdings ist zu beachten, dass es viel mehr Funktionen als Gleichungen gibt. Entsprechend kann man Funktionen nicht allgemein durch Gleichungen definieren, sondern nur im speziellen Fall. Entsprechend wurde oben ein mengentheoretischer Funktionsbegriff eingeführt, der nicht auf Gleichungen zurückgreift.

Fallen Wertebereich und Bild einer Funktion zusammen, so sprechen wir von einer *Surjektion* oder einer *surjektiven Funktion*. („Sürjektion“ ausgesprochen). Werden verschiedenen Objekten des Definitionsbereichs einer Abbildung verschiedene Objekte des Wertebereiches zugeordnet, so sprechen wir von einer *Injektion* oder einer *injektiven Funktion*. Eine surjektive Injektion wird *Bijektion* oder *bijektive Funktion* genannt. Bijektive Funktionen werden auch „eineindeutig“ genannt. Formeller halten wir fest:

Definition 1.8.12. *Sei $f = (A, B, g)$.*

- *f ist eine Surjektion genau dann, wenn $Bild(f) = B$*
- *f ist eine Injektion genau dann, wenn f eine Abbildung ist und für alle $(x, y), (z, r) \in g$ und $x \neq z$, dann $y \neq r$.*
- *f ist eine Bijektion genau dann, wenn f eine surjektive Injektion ist.*

◊

Beispiel 1.8.13. *Venn-Diagramme für oben definierten Funktionsarten. Die Funktion f von $A = \{a, b, c, d, e\}$ nach $B = \{x, y, z\}$ (s. Abbildung 1.8.9) mit dem Graphen $g = \{(c, x), (c, y), (e, y)\}$ ist weder eine Abbildung, noch eine Surjektion. Entsprechend ist sie auch nicht injektiv oder bijektiv.*

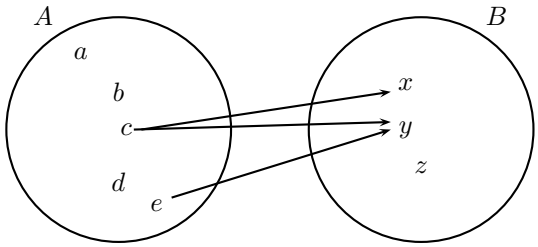


Abbildung 1.8.11: Beispiel für die bildliche Darstellung einer Relation, die keine Funktion ist

Die Relation $\{(c,x),(c,y),(e,y)\}$ von A nach B (s. Abbildung 1.8.11) ist nicht Graph einer Funktion.
Die Funktion von A nach B mit dem Graphen $g = \{(a,x),(b,x),(c,y),(e,z)\}$ ist surjektiv, ohne eine Abbildung zu sein (s. Abbildung 1.8.12).

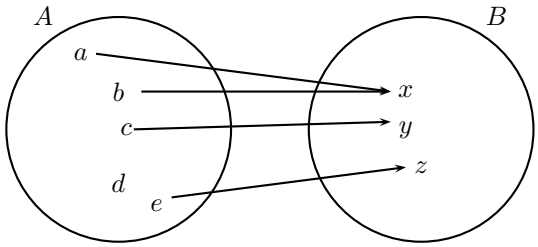


Abbildung 1.8.12: Beispiel für die graphische Darstellung einer Surjektion, die keine Abbildung ist

Die Funktion von A nach B mit dem Graphen $\{(a,x),(b,x),(c,y),(d,z),(e,z)\}$ (s. Abbildung 1.8.13) ist eine Abbildung, die weder surjektiv noch injektiv ist.

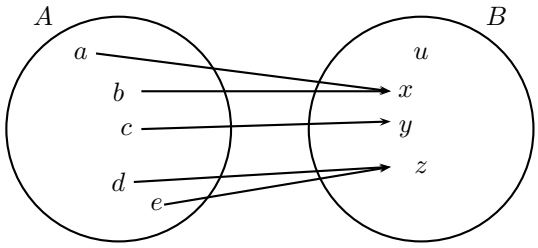


Abbildung 1.8.13: Beispiel für die bildliche Darstellung einer Abbildung, die weder eine Injektion noch eine Surjektion ist

Die Funktion von A nach B mit dem Graphen $\{(a,x),(c,y),(d,z)\}$ (s. Abbildung 1.8.14) ist eine Injektion (und entsprechend eine Abbildung), die nicht surjektiv ist.

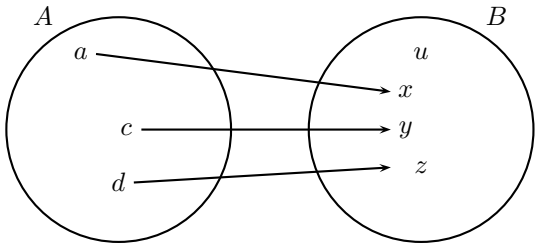


Abbildung 1.8.14: Beispiel für die bildliche Darstellung einer injektiven Abbildung, die nicht surjektiv ist

Die Funktion von A nach B mit dem Graphen $g = \{(a, x), (d, z), (c, y)\}$ *ist bijektiv (und entsprechend eine Abbildung, eine Surjektion und eine Injektion) (s. Abbildung 1.8.15):*

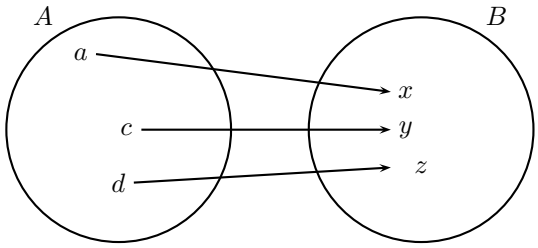


Abbildung 1.8.15: Beispiel für die bildliche Darstellung einer Bijektion (eine Abbildung, die injektiv und surjektiv ist)

◊

Haben A und B endlich viele Elemente, so kann eine Injektion nur surjektiv und damit bijektiv sein, wenn A und B gleichviele Elemente enthalten.

Im Falle einer Bijektion enthält der Graph alle Informationen über die Funktion, da das Bild mit dem Wertebereich und das Urbild der Funktion mit dem Definitionsbereich zusammenfällt.

Die folgende Abbildung 1.8.16 gibt eine Übersicht über die Teilmengenbeziehungen der Graphen der eingeführten Funktionstypen:

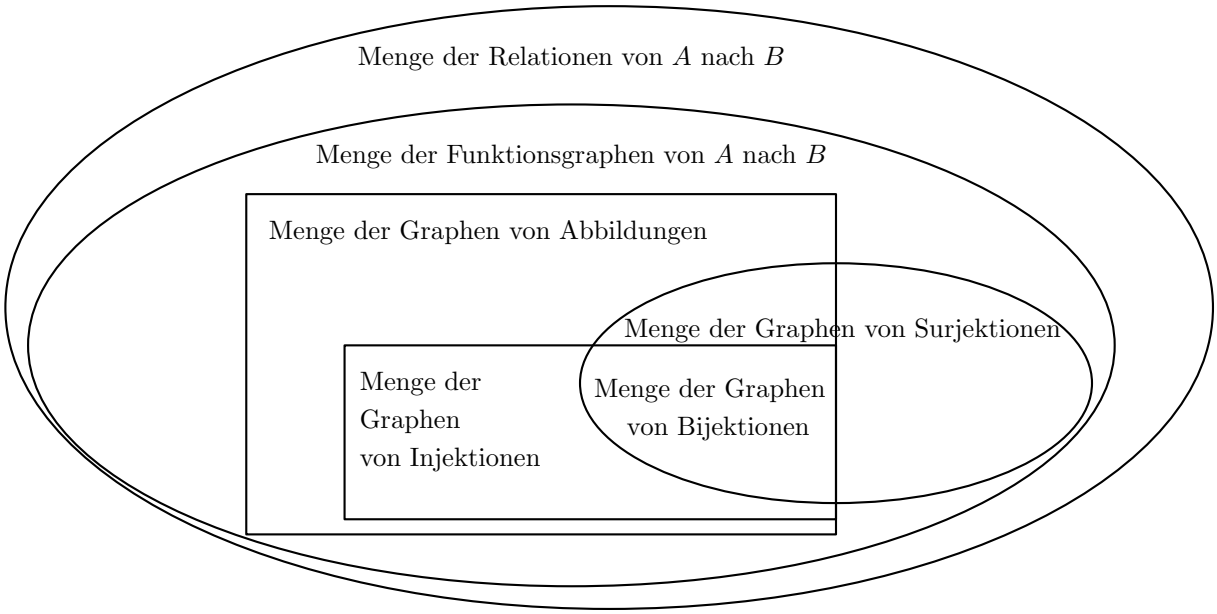


Abbildung 1.8.16: Übersicht über die Teilmengenbeziehungen der Graphen der eingeführten Funktionstypen

Definition 1.8.14. *Für bijektive $f = (A, B, g)$ definieren wir:*
$f^{-1} := (B, A, g^{-1})$ mit $g^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in g\}$
Wir nennen f^{-1} die Umkehrfunktion von f. ◊

Die Umkehrfunktion von f mit $g = \{(a, x), (d, z), (c, y)\}$ ist: f^{-1}mit $g^{-1} = \{(x, a), (z, d), (y, c)\}$. Wird eine bijektive Funktion durch eine Gleichung gegeben (z.B. durch $f(x) = 5x + 2$), so kann man die Umkehrfunktion oft ebenfalls durch eine Gleichung angeben, die aus der ursprünglichen Gleichung berechnet wird. Man löst die Gleichung nach x auf. Im Beispiel würde man

$$x = \frac{f(x) - 2}{5} \tag{1.8.5}$$

und, indem man für $f(x)$ y setzt,

$$f^{-1}(y) = \frac{y - 2}{5}$$

erhalten Um gewisse Diskussionen zu führen wird oft noch ein Variablentausch durchgeführt: man ersetzt in (1.8.5) $f(x)$ durch x und x durch $g(x)$. Man würde erhalten:

$$g(x) = \frac{x - 2}{5}$$

1.8.1 Beispiele für Funktionen

Beispiel 1.8.15. *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) := x^2$ (Abbildung; nicht injektiv, da z.B. 2 und -2 dieselbe Zahl, nämlich 4 zugeordnet wird; nicht surjektiv, da z.B. -4 nicht zugeordnet wird).* ◊

Beispiel 1.8.16. *Operationen auf reelle Zahlen sind Funktionen. So ordnet z.B. die Addition zwei reellen Zahlen eine reelle Zahl zu. Man kann formell definieren:*

$$+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

Statt $+((x,y))$ *schreibt man* $x+y := +((x,y))$. *Die Addition ist eine Abbildung. Sie ist nicht injektiv, da* $x+y = y+x$. *Sie ist surjektiv, da man für jede reelle Zahl* x *zwei Zahlen* z *und* y *findet, so dass* $x = z+y$.
Die Division ist keine Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *da* $\frac{x}{0}$ *für* $x \neq 0$ *in den reellen Zahlen nicht definiert ist. Definieren wir hingegen* $R^{2\backslash 0} := \{(x,y) \,|\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ und } y \neq 0\}$ *sowie* $div : R^{2\backslash 0} \to \mathbb{R}$, *so dass* $(x,y) \in R^{2\backslash 0}$ *durch div die Zahl* $\frac{x}{y}$ *zugeordnet wird, liegt eine Abbildung auf* $R^{2\backslash 0}$ *vor. Die Abbildung ist surjektiv, aber nicht injektiv.* ◊

Beispiel 1.8.17. *Wir betrachten die Menge* F *aller endlichen Mengen reeller Zahlen: sie enthalten eine endliche Anzahl reeller Zahlen als Element. Wir definieren*

$$\begin{aligned} \max &: F \to \mathbb{R} \\ \max(A) &:= x \text{ so dass für alle } y \in A : y \leq x \end{aligned}$$

Es ist also z.B. $\max(\{5,4,6\}) = 6$ *oder* $\max(\{-0.5,-1,-10\}) = -0.5$.

$$\begin{aligned} \min &: F \to \mathbb{R} \\ \min(A) &:= x \text{ so dass für alle } y \in A : y \geq x \end{aligned}$$

Es ist also z.B. $\min(\{5,4,6\}) = 4$ *oder* $\min(\{-0.5,-1,-10\}) = -10$. max *und* min *sind surjektiv (man findet für jede reelle Zahl eine Menge A, so dass* $\max(A) = x$ *und für jede reelle Zahl y eine Menge A, so dass* $\min(A) = y$. max *und* min *sind nicht injektiv.* max *ordnet z.B. den Mengen {1,2,3} und {-1,2.5,3} die gleiche Zahl zu, nämlich 3.* min *ordnet {1,5,8} und {1,6,9} dieselbe Zahl zu, nämlich 1.* ◊

Beispiel 1.8.18. *Für Intervalle brauchen wir die folgenden Schreibweisen und Bezeichnung:*

$$\begin{aligned}
[a,b] &:= \{x \mid a \leq x \leq b\} && \text{(abgeschlossenes Intervall, geschlossenes Intervall)} \\
]a,b] &:= \{x \mid a < x \leq b\} && \text{(linksseitig halboffenes Intervall = rechtseitig halbabgeschlossenes)} \\
[a,b[&:= \{x \mid a \leq x < b\} && \text{(rechtsseitig halboffenes Intervall = linkseitig halbabgeschlossenes)} \\
]a,b[&:= \{x \mid a < x < b\} && \text{(offenes Intervall)} \\
]a,\infty[&:= \{x \mid a < x\} && \text{(nach oben unbeschränktes Intervall ohne } \infty) \\
]-\infty,a[&:= \{x \mid x < a\} && \text{(nach unten unbeschränktes Intervall - ohne } -\infty) \\
]-\infty,\infty[&:= \mathbb{R} && \text{(nach beiden Seiten unbeschränktes Intervall} \\
& && \text{ohne die nicht-reellen Zahlen} -\infty \text{ und } \infty)
\end{aligned}$$

Dabei ist ∞ *eine Abkürzung für „Unendlich“ und* $-\infty$ *für „minus Unendlich“. Unendlich und minus Unendlich sind nicht-reelle Zahlen, die wir aber in der Folge eher selten verwenden. Intervalle, die linkseitig halboffen sind oder die offen sind, nennen wir linkseitig offen. Analog brauchen wir die Ausdrücke rechtsseitig offen, linkseitig geschlossen und rechtsseitig geschlossen. Statt der obigen Darstellung von Intervallen ist die folgende gebräuchlich:* $[a,b) := [a,b[$; $(a,b] :=]a,b]$; $(a,b) :=]a,b[$.

Betrachten wir die Menge der rechtsseitig abgeschlossenen Intervalle $\mathbb{I}_r$, *so können wir die Funktion*

$$\begin{aligned} \max &: \mathbb{I}_r \to \mathbb{R} \\ \max(I) &= x \text{ genau dann, wenn für alle } y \in I \text{ gilt, } y \leq x \text{ und } x \in I \end{aligned}$$

betrachten. Sie ordnet jedem rechtsseitig abgeschlossenen Intervall eine reelle Zahl zu, nämlich die grösste Zahl des Intervalls. Es liegt eine Abbildung auf $\mathbb{I}_r$ *vor. So ist z.B.* $\max]5,20] = 20$. *Betrachten wir hingegen die Menge aller Intervalle, so liegt keine Abbildung vor. Bei rechtsseitig*

offenen Intervallen gibt es nämlich keine grösste Zahl, die Element des Intervalls ist. Man betrachte $]a,b[$*. Für jede Zahl* $c \in]a,b[$*, die noch so nahe an b liegt, gibt es eine Zahl* $d \in]a,b[$*, die noch näher an b liegt, wenn man z.B. definiert:* $d := \frac{b+c}{2}$.
Den linkseitig abgeschlossenen Intervallen können wir ebenfalls eine reelle Zahl zuordnen, nämlich die kleinste Zahl des Intervalls:

$$\min : \mathbb{I}_l \to \mathbb{R}$$
$$\min(I) = x \text{ genau dann, wenn für alle } y \in I \text{ gilt, } y \geq x \text{ und } x \in I$$

So ist z.B. $\min[5,6] = 5$. ◊

Beispiel 1.8.19. *Wir betrachten die Menge K der Kantone der Schweiz. Halbkantone betrachten wir ebenfalls als Kantone. Dann definiert* $f : K \to O$*, wobei O die Menge der Gemeinden der Schweiz ist, eine injektive Abbildung, wenn f jedem Kanton seinen Hauptortgemeinde zuordnet. Es ist etwa f(Wallis)=Sitten.* ◊

Beispiel 1.8.20. *Wir betrachten die Menge Z der Zerlegungen* P_i *einer endlichen Menge. Wir konstruieren gemäss Unterkapitel 1.7 die* P_i *entsprechende Äquivalenzrelation* R_i*. Die Menge der derart erzeugten Äquivalenzrelationen nennen wir* R_A*. Entsprechend ist die Funktion f, die jedem* P_i *sein* R_i *zuordnet, eine Bijektion von Z nach* R_A ◊

1.8.2 Summenbildung für die Komponenten von n-Tupeln

Neben Zahlen und Mengen können wir auch $n-$Tupeln mittels Funktionen Werte zuordnen. Ein wichtiges Beispiel besteht in der Summenbildung für die Komponenten von $n-$Tupeln:

$$\sum_{i=1}^{n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$\sum_{i=1}^{n}(x_1, ..., x_n) := x_1 + ... + x_n$$

Statt $\sum_{i=1}^{n}(x_1, ..., x_n)$ schreiben wir $\sum_{i=1}^{n} x_i := \sum_{i=1}^{n}(x_1, ..., x_n)$. Es liegt eine Abbildung von der Menge der n-Tupel von reellen Zahlen in die reellen Zahlen vor. Der Ausdruck $\sum_{i=1}^{n} x_i$ wird gelesen als: „Summe der x_i, von $i = 1$ bis n“. $\sum$ ist das grosse griechische S (Sigma; für Summe). i wird „Summationsindex“ genannt. 1 wird „Summationsuntergrenze“, n wird „Summationsobergrenze“ genannt. Damit ist z.B. für $(2,5,3,4,1)$:

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 2 + 5 + 3 + 4 + 1 = 15.$$

Zu beachten ist, dass der Summationsindex nicht i zu sein braucht, sondern dass auch j, k oder eine andere Variable verwendet werden kann. Der Summationsindex durchläuft nur ganze Zahlen.

Übung 1.8.21. *Berechnen Sie*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i$$

für a) $(5, 16, 18, 19, 55)$
b) $(4.2, 5.55, 14.6)$

Lösung 1.8.22. *a)* $\sum_{i=1}^{5} x_i = 5 + 16 + 18 + 19 + 55 = 113$
b) $\sum_{i=1}^{3} x_i = 4.2 + 5.55 + 14.6 = 24.35$

Fürs Summenzeichen gelten drei Regeln, die in der Folge immer wieder verwendet werden. Die erste Regel besagt, dass eine Konstante nach dem Summenzeichen, die mit einer indizierten und damit veränderlichen Grösse multipliziert wird, vor das Summenzeichen genommen werden darf. Damit entspricht diese Operation dem Ausklammern. Umgekehrt kann eine Konstante vor dem Summenzeichen hinter das Summenzeichen gesetzt werden.

Satz 1.8.23. *Für $a \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\sum_{i=1}^{n} ax_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} ax_i &= ax_1 + ax_2 + ... + ax_{n-1} + ax_n \\ &= a(x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + x_n) \\ &= a \sum_{i=1}^{n} x_i \end{aligned}$$

□

Beispiel 1.8.24. *Mit $(1, 5, 6, 8)$ ist*

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{4} 5x_i &= 5 \cdot 1 + 5 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 5 \cdot 8 \\ &= 5(1 + 5 + 6 + 8) \\ &= 5 \sum_{i=1}^{4} x_i \end{aligned}$$

◊

Die nächste Regel besagt, dass man das Summenzeichen auf Summen verteilen kann oder dass umgekehrt „ausgeklammert“ werden kann. Die Regel beruht auf dem Kommutativgesetz für die Addition (Summen können umgeordnet werden).

Satz 1.8.25.

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) &= (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + ... + (x_{n-1} + y_{n-1}) + (x_n + y_n) \\ &= (x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + x_n) + (y_1 + y_2 + ... + y_{n-1} + y_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i \end{aligned}$$

□

Beispiel 1.8.26. *Sei* $\mathbf{x} = (1, 5, 6, 3)$ *und* $\mathbf{y} = (4, 6, 8, 9)$. *Dann gilt*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4}(x_i + y_i) &= (1+4) + (5+6) + (6+8) + (3+9) \\ &= (1+5+6+3) + (4+6+8+9) \\ &= \sum_{i=1}^{4} x_i + \sum_{i=1}^{4} y_i\end{aligned}$$

◊

Definition 1.8.27. *Gilt* $(x_1, ..., x_n) = (a, ..., a)$ *mit* $a \in \mathbb{R}$ *so schreiben wir*

$$\sum_{i=1}^{n} a := \sum_{i=1}^{n} x_i$$

◊

Die nächste Regel besagt, dass die n fache Summe einer Konstante a gleich dem Produkt von n und dieser Konstante a ist.

Satz 1.8.28.

$$\sum_{i=1}^{n} a = na$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a &= \underbrace{a + a + ... + a + a}_{n-mal} \\ &= na\end{aligned}$$

□

Beispiel 1.8.29.

$$\sum_{i=1}^{10} 5 = 10 \cdot 5 = 50.$$

◊

Gewöhnlich brauchen wir die drei Regeln, um allgemeine Zusammenhänge nachzuweisen. Diesbezügliche folgt ein Beispiel, dessen genaues Studium sich lohnt.

Beispiel 1.8.30. *Es gilt für* $x_i \in \mathbb{R}$ *und* $1 \leq n \in \mathbb{N}$*:*

$$\sum_{j=1}^{n} \left(x_j - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right) = 0$$

(Die Summe der Abweichungen von reellen Zahlen von Ihrem arithmetischen Mittel ist 0).

$$\sum_{j=1}^{n}\left(x_j - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \underset{Satz\ 1.8.25}{=} \sum_{j=1}^{n} x_j - \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$= n\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j - \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \textit{(Erweitern des ersten Ausdrucks mit } n\textit{)}$$

$$\underset{Satz\ 1.8.23}{=} n\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\underset{Satz\ 1.8.28}{=} n\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j - \frac{1}{n}n\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \textit{(denn die Summe } \sum_{i=1}^{n} x_i \textit{ ist eine Konstante!)}$$

$$= 0$$

◊

1.8.3 Operationen auf Funktionen

Für Funktionen können - wie für Zahlen - verschiedene Operationen definiert werden. Da Operationen Funktionen sind, definieren wir also eine Funktion, die Funktionen Objekte (z.B. Funktionen) zuordnet. Wir definieren für den Augenblick nur zwei Operationen: die (punktweise) Addition und die (punktweise) Multiplikation von Funktionen mit reellen Funktionswerten. Es entstehen Funktionen.

Definition 1.8.31. *Wir betrachten die Menge A_D der Abbildungen $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$. Diese Abbildungen sind also alle auf denselben Definitionsbereich D definiert. Wir definieren nun*

$$f : A_D^2 \to A_D$$
$$f((g,h)) := g + h \ \textit{mit}\ (g+h)(x) := g(x) + h(x)$$

◊

Wir ordnen also jedem x die Summe der Funktionswerte von g und h in x zu. Sind die Funktionen durch Funktionsgleichungen gegeben, so kann man die entsprechenden Funktionsgleichungen addieren.

Beispiel 1.8.32. $g(x) = 5x + 2$ *und* $h(x) = 4x^2 - 3x + 5$.
Man kann z.B. rechnen: $g(6) = 5 \cdot 6 + 2 = 32$ *und* $h(6) = 4 \cdot 6^2 - 3 \cdot 6 + 5 = 131$. *Damit ist gemäss Definition* $(g+h)(6) = 32 + 131 = 163$.
Mittels Addition der Gleichungen erhält man:

$$\begin{aligned}(g+h)(x) &= g(x) + h(x)\\ &= 5x + 2 + 4x^2 - 3x + 5\\ &= 4x^2 + 2x + 7.\end{aligned}$$

Und durch Einsetzen von 6 : $(g+h)(6) = 4 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6 + 7 = 163$. ◊

Definition 1.8.33. *Wir betrachten die Menge A_D der Abbildungen $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$. Diese Abbildungen sind also alle auf denselben Definitionsbereich D definiert. Wir definieren nun*

$$f : A_D^2 \to A_D$$
$$f((g,h)) := g \cdot h \ \textit{mit}\ (g \cdot h)(x) := g(x) \cdot h(x)$$

◊

Wir ordnen also jedem x das Produkt der Funktionswerte von g und h in x zu. Sind die Funktionen durch Funktionsgleichungen gegeben, so kann man die entsprechenden Funktionsgleichungen multiplizieren.

Beispiel 1.8.34. *$g(x) = 5x+2$ und $h(x) = 4x^2-3x+5$. Man kann z.B. rechnen: $g(6) = 5\cdot 6+2 = 32$ und $h(6) = 4\cdot 6^2 - 3\cdot 6 + 5 = 131$. Damit ist gemäss Definition $(g\cdot h)(6) = 32\cdot 131 = 4192$ Mittels Multiplikation der Funktionsgleichungen erhält man*

$$\begin{aligned}(g\cdot h)(x) &= g(x)\cdot h(x)\\ &= (5x+2)\cdot\left(4x^2-3x+5\right)\\ &= 20x^3-7x^2+19x+10.\end{aligned}$$

Man erhält nun: $(g\cdot h)(6) = 20\cdot 6^3 - 7\cdot 6^2 + 19\cdot 6 + 10. = 4192.$ ◊

Übungen

1. Bilden Sie $\{1,2\}\times\{3,4\}$
2. Bilden Sie die Potenzmenge von $\{1,2\}\times\{3,4\}$.
3. Bilden Sie A^5 für $A = \{1,2\}$
4. Bilden Sie A^3 für $A = \{1,2,3\}$
5. Bilden Sie $\overset{4}{\underset{i=1}{\times}} A_i$ für $A_1 = \{1\}, A_2 = \{2,3\}, A_3 = \{4\}, A_4 = \{2,4\}$
6. Überprüfen Sie auf die Eigenschaften Reflexivität, Transitivität, etc:
   $\{(1,1)\}$
   $\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$
   $\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,1)\}$
   $\{(1,1),(3,4)\}$
7. Überprüfen Sie, ob die Menge A eine Äquivalenzrelation ist:
   $A = \{(1,1),(2,1),(1,2),(3,3)\}$
   Wenn A keine Äquivalenzrelation ist, fügen Sie fehlende geordnete Paare hinzu, so dass eine Äquivalenzrelation A' auf $\{1,2,3\}$ entsteht.
   Bilden Sie die Zerlegung, die durch A oder A' auf $\{1,2,3\}$ gebildet wird.
8. Bilden Sie die Menge aller Graphen von Funktionen von A nach B mit $A = \{1,2\}; B = \{3,4\}$, die Teilmengen von $A\times B$ sind.
9. Bilden Sie die Menge aller Graphen von $\{1,2\}$ nach $\{3,4\}$, die Abbildungen entsprechen.
10. Bilden Sie die Menge aller Graphen von $\{1,2\}$ nach $\{3,4\}$, die Surjektionen entsprechen.
11. Bilden Sie die Menge aller Graphen von $\{1,2\}$ nach $\{3,4\}$, die Injektionen entsprechen.
12. Bilden Sie die Menge aller Graphen von $\{1,2\}$ nach $\{3,4\}$, die Bijektionen entsprechen.
13. Bilden Sie die Umkehrfunktionen der Bijektionen, deren Graphen Sie unter 12) gebildet haben.

14. Geben Sie die Teilmengen von {1,2} × {3,4,5} an,
    a) die Graph einer Injektion sind
    b) die Graph einer Surjektion sind
    c) die Graph einer Bijektion sind.

15. Geben Sie die Teilmengen von {1,2,3} × {4,5} an
    a) die Graph einer Injektionen sind
    b) die Graph einer Surjektionen sind
    c) die Graph einer Bijektionen sind.

16. Wieviel beträgt $\max[5,6]$
    $\max[5,6[$
    $\min[5,6]$
    $\min]5,6]$
    $\max\{4,5,6\}$
    $\min\{4,5,6\}$

17. Berechnen Sie $\sum_{i=1}^{6} x_i$ für $(x_1,...,x_6) = (1,2,3,4,5,6)$.
    $\sum_{i=1}^{4} (x_i + y_i)$ für $(x_1,...,x_4) = (1,2,3,4)$ und $(y_1,...,y_4) = (7,2,3,11)$
    $\sum_{i=1}^{5} 6x_i$ für $(x_1,...,x_5) = (4,1,4,6,-3)$
    $\sum_{i=1}^{5} 6$
    $\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i$ für $(x_1,...,x_6) = (1,2,3,4,5,6)$.
    $\frac{1}{5}\sum_{j=1}^{6}\left(x_j - \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i\right)$ für $(x_1,...,x_6) = (1,2,3,4,5,6)$.
    $\sum_{j=1}^{6}\left(x_j - \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i\right)^2$ für $(x_1,...,x_6) = (1,2,3,4,5,6)$.

18. Vereinfachen Sie: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)$
    $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2$

Lösungen

1. $\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$

2. $\{\emptyset,\{(1,3)\},\{(1,4)\},\{(2,3)\},\{(2,4)\},\{(1,3),(1,4)\},\{(1,3),(2,3)\},$
   $\{(1,3),(2,4)\},\{(1,4),(2,3)\},\{(1,4),(2,4)\},\{(2,3),(2,4)\},$
   $\{(1,3),(1,4),(2,3)\},\{(1,3),(1,4),(2,4)\},\{(1,3),(2,3),(2,4)\},$
   $\{(1,4),(2,3),(2,4)\},\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}\}$ (Anzahl Elemente: 2^4)

3. Anzahl Elemente: $2^5 = 32$
   $A^5 = \{(1,1,1,1,1),$
   $(2,1,1,1,1),(1,2,1,1,1),(1,1,2,1,1),(1,1,1,2,1),(1,1,1,1,2),$
   $(2,2,1,1,1),(2,1,2,1,1),(2,1,1,2,1),(2,1,1,1,2),(1,2,2,1,1),(1,2,1,2,1),(1,2,1,1,2),(1,1,2,2,1),$
   $(1,1,2,1,2),(1,1,1,2,2),$
   $(2,2,2,1,1),(2,2,1,2,1),(2,2,1,1,2),(2,1,2,2,1),(2,1,2,1,2),(2,1,1,2,2),(1,2,2,2,1),$
   $(1,2,2,1,2),(1,2,1,2,2),(1,1,2,2,2)$
   $(2,2,2,2,1),(2,2,2,1,2),(2,2,1,2,2),(2,1,2,2,2),(1,2,2,2,2),(2,2,2,2,2)\}$

4. Anzahl Elemente: $3^3 = 27$
$A^3 = \{(1,1,1),$
$(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1),(1,2,2),(2,1,2),(2,2,1),(2,2,2)$
$(1,1,3),(1,3,1),(3,1,1),(1,3,3),(3,1,3),(3,3,1),(3,3,3)$
$(2,2,3),(2,3,2),(3,2,2),(2,3,3),(3,2,3),(3,3,2)$
$(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\}$

5. Anzahl Elemente: $1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$
$\overset{4}{\underset{1}{\times}} A_i = \{(1,2,4,2),(1,3,4,2),(1,2,4,4),(1,3,4,4)\}$

6. $\{(1,1)\}$ ist reflexiv, symmetrisch und transitiv (ist eine Äquivalenzrelation)
$\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$ ist symmetrisch
$\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,1)\}$ ist symmetrisch, transitiv, reflexiv (ist eine Äquivalenzrelation)
$\{(1,1),(3,4)\}$ ist transitiv.

7. A ist keine Äquivalenzrelation. Durch Hinzufügen von $(2,2)$ z.B. erhalten wir eine Äquivalenzrelation, deren Zerlegung $= \{\{1,2\},\{3\}\}$
Man könnte auch: $(2,2),(2,3),(3,2),(3,1),(1,3)$ hinzufügen:
produzierte Zerlegung: $\{\{1,2,3\}\}$

8. $\{\emptyset,\{(1,3)\},\{(1,4)\},\{(2,3)\},\{(2,4)\},\{(1,3),(2,3)\},$
$\{(1,3),(2,4)\},\{(1,4),(2,3)\},\{(1,4),(2,4)\}\}$

9. $\{\{(1,3),(2,3)\},\{(1,3),(2,4)\},\{(1,4),(2,3)\},\{(1,4),(2,4)\}\}$

10. $\{\{(1,3),(2,4)\},\{(1,4),(2,3)\}\}$

11. $\{\{(1,3),(2,4)\},\{(1,4),(2,3)\}\}$

12. $\{\{(1,3),(2,4)\},\{(1,4),(2,3)\}\}$
10) = 11) = 12), da $\{1,2\}$ und $\{3,4\}$ dieselbe Anzahl Elemente enthält.

13. $f_i^{-1} = (B, A, g_i^{-1})$ mit $i \in \{1,2\}$ und $g_1^{-1} = \{(3,1),(4,2)\}$ oder $g_2^{-1} = \{(4,1),(3,2)\}$ und $B = \{3,4\}$, $A = \{1,2\}$

14. a) Graphen von Injektionen: {(1,3), (2,4)}; {(1,3), (2,5)}; {(1,4), (2,5)}; {(2,3), (1,4)}; {(2,3), (1,5)}; {(2,4), (1,5)};
b) kein Graph einer Surjektion (möchte man alle Objekte von {3,4,5} zuordnen müsste man den Zahlen 1 oder 2 zwei verschiedene Objekte zuordnen - damit würde keine Funktion mehr vorliegen
c) kein Graph einer Bijektion (da kein Graph einer Surjektion)

15. a) Kein Graph einer Injektion, denn eine Injektion ist eine Abbildung, muss also alle Objekte von {1,2,3} verwenden, was aber nicht möglich ist, ohne einem Objekt zweimal dasselbe Objekt zuzuordnen.
b) einige Graphen von Surjektionen: {(1,4), (2,4), (3,5)}; {(1,5), (2,4), (3,5)}; {(1,4), (2,5), (3,4)}
c) kein Graph einer Bijektion (muss ja injektiv sein).

16. $\max[5,6] = 6$
$\max[5,6[$ (nicht definiert)
$\min[5,6] = 5$
$\min]5,6]$ (nicht definiert)

$\max\{4,5,6\} = 6$
$\min\{4,5,6\} = 4$

17. $\sum_{i=1}^{6} x_i = 1+2+3+4+5+6 = 21$ für $(x_1,...,x_6) = (1,2,3,4,5,6)$.
$\sum_{i=1}^{4} (x_i + y_i) = (1+7)+(2+2)+(3+3)+(4+11) = 33$ für $(x_1,...,x_4) = (1,2,3,4)$ und $(y_1,...,y_4) = (7,2,3,11)$
$\sum_{i=1}^{5} 6x_i = 6{\cdot}4+6{\cdot}1+6{\cdot}4+6{\cdot}6-6{\cdot}3 = 6\,(4+1+4+6-3) = 72$ für $(x_1,...,x_5) = (4,1,4,6,-3)$
$\sum_{i=1}^{5} 6 = 5 \cdot 6 = 30$
$\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i = \frac{1}{6}\,(1+2+3+4+5+6) = \frac{7}{2} = 3.5$
$\frac{1}{5}\sum_{j=1}^{6}\left(x_j - \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i\right) = \frac{1}{5}\,((1-3.5)+(2-3.5)+(3-3.5)+(4-3.5)+(5-3.5)+(6-3.5)) = 0$
$\sum_{j=1}^{6}\left(x_j - \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i\right)^2 = \left((1-3.5)^2+(2-3.5)^2+(3-3.5)^2+(4-3.5)^2+(5-3.5)^2+(6-3.5)^2\right) = 17.5$

18. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} a\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - na\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n}na = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - a$
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2ax_i + a^2\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} 2ax_i + \sum_{i=1}^{n} a^2\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2a\sum_{i=1}^{n} x_i + na^2\right)$
$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2a\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n}na^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2a\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + a^2$

Übungen

1. Gegeben sei $A = \{a,b,c\}$, $B = \{a,b\}$ und $C = \{a,d\}$. Bestimmen Sie
   (a) $A \times A$
   (b) $A \times B$
   (c) $(A \times B) \times C$
   (d) $B \times (C \times C)$

2. Überprüfen Sie, ob die folgenden Relationen transitiv, reflexiv oder symmetrisch sind (alle Komponenten sind jeweils voneinander verschieden):
   (a) $A = \{(a,2),(b,3),(c,4)\}$
   (b) $B = \{(a,b),(b,a),(c,d),(d,4),(a,a),(c,4)\}$
   (c) $C = \{(a,b),(b,a),(c,d),(d,c),(5,6),(6,5),(8,9),(9,8)\}$
   (d) $D = \{(a,b),(b,c),(a,c),(c,d),(a,d),(b,a),(a,a),(c,b),(b,b),(d,c),$ $(c,c),(d,d),(c,a),(d,a),(b,d),(d,b)\}$
   (e) $E = \{(5,5),(6,6),(7,7),$ (Sitten, Sitten)$\}$

3. Gegeben Seien die zwei Mengen: $A = \{1,2,3\}$ und $B = \{x,y\}$.
   (a) Bilden Sie $A \times B$
   (b) Geben Sie die Graphen aller Funktionen an, die Teilmenge von $A \times B$ sind

(c) Geben Sie den Graphen aller Abbildungen von A nach B an, die Teilmenge von $A \times B$ sind

4. Bestimmen Sie die Graphen aller Abbildungen der Menge $E = \{a, b\}$ in sich selbst.

5. Überprüfen Sie, ob die folgenden Mengen Graphen von Funktionen sind:

   (a) $A = \{(a, 2), (b, 2), (c, 2), (d, 2), (4, 2), (f, 2), (\text{Sitten}, 2), (g, 2), (5, 8)\}$

   (b) $B = \{(a, 2), (b, 2), (c, 2), (d, 2), (4, 2), (f, 2), (\text{Sitten}, 2), (g, 2), (a, 8)\}$

   (c) $C = \{(a, 2), (b, 2), (c, 2), (d, 2), (4, 2), (f, 2), (\text{Sitten}, 2), (g, 2), (4, 8)\}$

   (d) $\{((0, 0), 1), ((0, 1), 1), ((1, 0), 1), ((1, 1), 0)\}$

6. Überprüfen Sie, ob die Menge A eine Äquivalenzrelation ist. Wenn dies der Fall ist, geben Sie die durch A gebildete Zerlegung an.
   $A = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (1, 1), (2, 2), (4, 5),$
   $(2, 3), (5, 4), (6, 4), (4, 6), (4, 4), (6, 6), (5, 5), (6, 5), (5, 6)\}$

7. Gegeben sei die folgende Zerlegung: $\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6, 7\}\}$. Finden Sie die Äquivalenzrelation, die diese Zerlegung produziert.

Lösungen

1. Man erhält:

   (a) $A \times A = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, a), (b, c), (c, c), (c, a), (c, b)\}$

   (b) $A \times B = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, a), (c, b)\}$

   (c) $(A \times B) \times C = \{((a, a), a), ((a, a), d), ((a, b), a), ((a, b), d), ((b, a), a),$
   $((b, a), d), ((b, b), a), ((b, b), d), ((c, a), a), ((c, a), d), ((c, b), a), ((c, b), d)\}$

   (d) $B \times (C \times C) = \{(a, (a, a)), (a, (a, d)), (a, (d, a)), (a, (d, d)), (b, (a, a)),$
   $(b, (a, d)), (b, (d, a)), (b, (d, d))\}$

2. A ist transitiv.
   B ist weder transitiv, noch symmetrisch, noch reflexiv.
   C ist symmetrisch.
   D ist transitiv, symmetrisch und reflexiv.
   E ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

3. Man erhält:

   (a) $A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}$

   (b) $\{(1, x)\}, \{(1, y)\}, \{(2, x)\}, \{(2, y)\}, \{(3, x)\}, \{(3, y)\},$
   $\{(1, x), (2, x)\}, \{(1, x), (2, y)\}, \{(1, x), (3, x)\}, \{(1, x), (3, y)\},$
   $\{(1, y), (2, x)\}, \{(1, y), (2, y)\}, \{(1, y), (3, x)\}, \{(1, y), (3, y)\},$
   $\{(2, x), (3, x)\}, \{(2, x), (3, y)\}, \{(2, y), (3, x)\}, \{(2, y), (3, y)\},$
   $\{(1, x), (2, x), (3, x)\}, \{(1, y), (2, y), (3, y)\}, \{(1, x), (2, y), (3, y)\},$
   $\{(1, y), (2, y), (3, x)\}, \{(1, y), (2, x), (3, y)\}, \{(1, x), (2, x), (3, y)\},$
   $\{(1, x), (2, y), (3, x)\}, \{(1, y), (2, x), (3, x)\}, \emptyset$

   (c) $\{(1, x), (2, x), (3, x)\}, \{(1, y), (2, y), (3, y)\}, \{(1, x), (2, y),$
   $(3, y)\}, \{(1, y), (2, y), (3, x)\}, \{(1, y), (2, x), (3, y)\}, \{(1, x), (2, x), (3, y)\},$
   $\{(1, x), (2, y), (3, x)\}, \{(1, y), (2, x), (3, x)\}$

4. $\{(a,a),(b,a)\};\{(a,b),(b,b)\};\{(a,b),(b,a)\};\{(a,a),(b,b)\}$

5. A ist Graph einer Funktion. B ist nicht Graph einer Funktion. C ist nicht Graph einer Funktion. D ist Graph einer Funktion.

6. A ist reflexiv, transitiv und symmetrisch. A ist deshalb eine Äquivalenzrelation
Die entsprechende Zerlegung von $A = \{\{1,2,3\},\{4,5,6\}\}$

7. $A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(7,7),(1,2),$
$(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2),(4,5),(5,4),(6,7),(7,6)\}$

Lernziele

- die mengentheoretischen Begriffe „Menge“, „Teilmenge“, „Schnittmenge“, „Vereinigungsmenge“, „Differenzmenge“, „Komplement“ und „Potenzmenge“ definieren und anwenden können. Die entsprechenden Symbole verstehen und verwenden können.
- die mengentheoretischen Begriffe des „geordneten Paares“, des „n-Tupels“, der „Relation“ und des „kartesischen Produkts“ definieren können. Überprüfen können, ob eine Relation reflexiv, transitiv, symmetrisch oder asymmetrisch ist. Den Begriff der „Äquivalenzrelation“ und der „Zerlegung“ definieren können. Die durch eine Äquivalenzrelation erzeugte Zerlegung anführen können. Zu einer Zerlegung die Äquivalenzrelation finden können.
- Die Begriffe der „Funktion“, des „Graphen einer Funktion“, der „Abbildung“, der „Injektion“, der „Surjektion“, der „Bijektion“ und der „Umkehrabbildung“ definieren können. Die Begriffe der „Definitionsmenge“, des „Wertebereichs“, der „Bildmenge“ und des „Urbildes einer Funktion“ definieren können.
- Die Definitionen von max und min kennen. Die entsprechenden Funktionswerte berechnen können.
- Die Definition des Summenzeichens kennen, die Regeln fürs Summenzeichen kennen und anwenden können.
- Die (punktweise) Addition und Multiplikation von Funktionen durchführen können.
- Übungen der obigen Art machen können.

Kapitel 2

Graphische Darstellung von Zahlen und geordneten Paaren, Relationen und Funktionen

2.1 Die reellen Zahlen und die Zahlengerade

Wir verwenden in der Folge die folgenden Zahlenmengen, die als bekannt vorausgesetzt werden. Man könnte diese Zahlen im Rahmen der Mengenlehre als spezifische Mengen definieren, was allerdings zu weit führen würde.

- $\mathbb{N}$ = die Menge der natürlichen Zahlen: $\{0, 1, 2, 3, ...\}$
- $\mathbb{N}^*$ = die Menge der natürlichen Zahlen ohne die Null: $\{1, 2, 3, ...\}$
- $\mathbb{N}_n$ = die Menge der $n + 1$ natürlichen Zahlen von 0 bis n : $\{0, 1, 2, 3, ..., n\}$
- $\mathbb{N}_n^*$ = die Menge der n natürlichen Zahlen von 1 bis n : $\{1, 2, 3, ..., n\}$
- $\mathbb{Z}$ = die Menge der ganzen Zahlen (Beispiel für eine ganze Zahl, die nicht natürlich ist: -1).
- $\mathbb{Q}$ = die Menge der rationalen Zahlen (Beispiele für rationale Zahlen, die nicht ganz sind: $\frac{4}{5}$; $6.77777777...$)
- $\mathbb{R}$ = die Menge der reellen Zahlen (Beispiele für reelle Zahlen, die nicht rational sind: π; $\sqrt{2}; \log_{10} 5$)
- $\mathbb{R}^+$ = die Menge der positiven reellen Zahlen (inklusive die Null). Analog für $\mathbb{Z}^+$ und $\mathbb{Q}^+$.

Es gilt:

$$\mathbb{N}_n^* \subset \mathbb{N}^* \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$
$$\mathbb{N}_n \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$
$$\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{Q}^+ \subset \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$$

Entsprechend gelten Darstellungsarten für die reellen Zahlen auch für die anderen verwendeten Zahlen.

Wir setzen die Begriffe „Punkt“, „Strecke“ und „Gerade“ voraus. Ein Punkt hat keine Ausdehnung und damit nicht sichtbar. Beim Zeichnen von Punkten auf einem Blatt Papier oder auf einem anderen Medium handelt es sich also um eine Repräsentation des Punktes, nicht um den Punkt

selber. Eine Strecke ist die kürzeste Verbindung von zwei Punkten und enthält überabzählbar unendlich viele Punkte. Abzählbar unendlich sind die Menge der natürlichen Zahlen sowie die Menge der rationalen Zahlen. Überabzählbar unendlich ist die Menge der reellen Zahlen sowie reelle Intervalle. Reelle Intervalle sind dabei definiert als Mengen, die alle reellen Zahlen zwischen zwei reellen Zahlen enthalten. Die Gerade ist die gerade Verlängerung einer Strecke auf beiden Seiten ins Unendliche.

Wir definieren von den reellen Zahlen eine Bijektion f auf eine Gerade g, indem wir der 0 auf der Gerade einen beliebigen Punkt zuordnen. Dann ordnen wir rechts auf der Geraden der 1 einen beliebigen anderen Punkt zu. Positive ganze Zahlen z werden auf die Gerade g abgebildet, indem man von 0 weg z mal die Strecke zwischen 0 und 1 aneinandergefügt abträgt. z wird dann der Endpunkt dieser Abtragung zugeordnet. Für negative ganze Zahlen z wird die Strecke zwischen 0 und 1 z mal nach links abgetragen. Rationale Zahlen q zwischen 0 und 1 werden abgetragen, indem man den q-ten Anteil der Strecke zwischen 0 und 1 an 0 nach rechts abträgt. Nach damit deutlich gewordener Art geht man bei rationale Zahlen q zwischen -1 und 0 sowie rationalen Zahlen, die grösser als 1 oder kleiner als -1 sind, vor. Bezüglich der Abtragung von anderen reellen Zahlen fehlen uns für eine präzise Diskussion die mathematischen Mittel. Jedenfalls kann man jeder reellen Zahl genau einen Punkt auf einer Geraden der obigen Art zuordnen. Beim Zeichnen gehen wir dabei so vor, dass wir eine rationale Näherung an eine nicht-rationale reelle Zahl verwenden. Wir nennen die gewonnene Gerade g (genormte, reelle) Zahlengerade.

Übung 2.1.1. *Zeichnen Sie zwei genormte Zahlengeraden (mit unterschiedlicher Normierung) und tragen Sie die reellen Zahlen* 2.5, 3 *und* 5 *ab.*

Lösung 2.1.2. *Man erhält:*

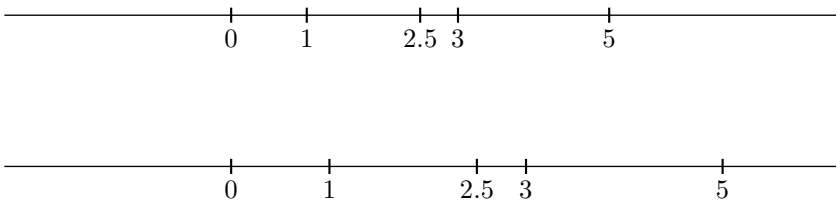


Abbildung 2.1.1: Lösungsbeispiele der Übung 2.1.1 für genormte Zahlengeraden

Definition 2.1.3. *Für $x, y \in \mathbb{R}$ ist $d(x,y) := \sqrt{(x-y)^2}$ die (euklidische) Länge der Strecke zwischen den der Zahl x und der Zahl y zugeordneten Punkten (d ist eine Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, d für „Distanz zwischen x und y“, die Länge ist also eine nicht-negative reelle Zahl).* ◊

Die Länge $d(5,3)$ der Strecke zwischen 5 und 3 beträgt entsprechend $\sqrt{(5-3)^2} = 2$. Für den Spezialfall $x = 0$ erhält man $d(x,y) = |y|$, wobei $|y| = y$ für $y \geq 0$ und $|y| = -y$ für $y < 0$. So ist $|5| = 5$ und $|-5| = -(-5) = 5$. Entsprechend ist z.B. $d(0,-3) = \sqrt{(0-(-3))^2} = 3$. Es gibt überabzählbar unendlich viele Strecken gleicher Länge auf der Zahlengerade. Es gilt zudem $\sqrt{(y-x)^2} = |x-y|$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

Satz 2.1.4. *Für d gemäss Definition gilt:*

1. $d(x,y) = d(y,x)$ *(Symmetrie)*
2. $d(x,y) \geq 0$
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Beweis. 1. $d(x,y) = \sqrt{(y-x)^2} = \sqrt{(x-y)^2} = d(y,x)$

2. Da $(x-y)^2 \geq 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$, gilt $\sqrt{(x-y)^2} \geq 0$.

3. Es gilt $y \in [x,z]$ oder $y \notin [x,z]$. Im ersten Fall gilt $d(x,z) = d(x,y) + d(y,z)$ und damit $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. Im zweiten Fall ist $y > z$ oder $y < x$. Im ersten Fall ist $d(x,y) > d(x,z)$. Entsprechend ist $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, da $d(y,z) \geq 0$.
Ist $y < x$, so gilt analog: $d(y,z) > d(x,z)$ und entsprechend gilt wiederum $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, da $d(x,y) \geq 0$.

□

Bemerkung 2.1.5. *Trägt man z.B. bei dem Punkt, der der Zahl* 5.3 *zugeordnet ist, die Zahl* 5.3 *ab, so kann damit sowohl die Distanz* $d(5.3, 0)$ *als auch die Zahl selber gemeint sein, da diese identisch sind. Trägt man bei* -5.3 *die Zahl* -5.3 *ab, so ist damit die Zahl gemeint, die Distanz zu* 0 *ist demgegenüber* 5.3. ◊

2.2 Geordnete Paare und kartesisches Koordinatensystem

Wählen wir zwei normierte Zahlengeraden, die senkrecht aufeinander stehen und die einen gemeinsamen Nullpunkt haben, so dass die waagrechte Gerade durch einen 90^0-Drehung im Gegenuhrzeigersinn in die senkrechte Gerade übergeht, so sprechen wir von einem (zweidimensionalen) *kartesischen Koordinatensystem*. Wir nennen die waagrechte Gerade gewöhnlich „$x - Achse$“ und die senkrechte Gerade „$y - Achse$“. Wir nennen die Fläche rechts oben „ersten Quadranten“, die Fläche links oben „zweiten Quadranten“, die Fläche links unten „dritten Quadranten“ und die verbleibende Fläche „vierten Quadranten“. Wir können nun geordneten Paaren, die als Komponenten reelle Zahlen enthalten, genau einen Punkt in der Ebene zuordnen, die durch die beiden Geraden aufgespannt wird. Für ein beliebiges geordnetes Paar (z,u) erreichen wir diese Zuordnung, indem wir

- $(z,0)$ auf der $x - Achse$ abtragen und eine Parallele zur $y - Achse$ durch $(z,0)$ ziehen,
- $(0,u)$ auf der $y - Achse$ abtragen und eine Parallele zur $x - Achse$ durch $(0,u)$ ziehen und
- dem Paar (z,u) den Schnittpunkt dieser beiden Parallelen zuordnen (s. Abbildung 2.2.2).

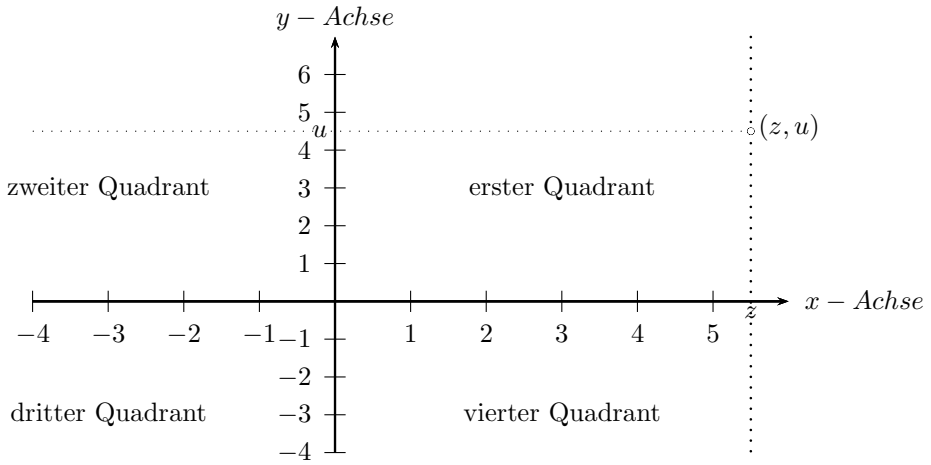


Abbildung 2.2.2: Veranschaulichung für das Abtragen eines geordneten Paares (z,u) in einem kartesischen Koordinatennetz.

Da zwischen den Punkten in der Ebene und den geordneten Paaren derart eine Bijektion definierbar ist, können wir Punkte in der Ebene mit Hilfe von geordneten Paaren reeller Zahlen bezeichnen.

Übung 2.2.1. *Zeichnen Sie ein kartesisches Koordinatensystem und tragen Sie die Punkte* $(5,6),(-2,3),(1,-3),(-1,-2),(0,3)$ *und* $(2,0)$ *ab.*

Lösung 2.2.2. *Man erhält:*

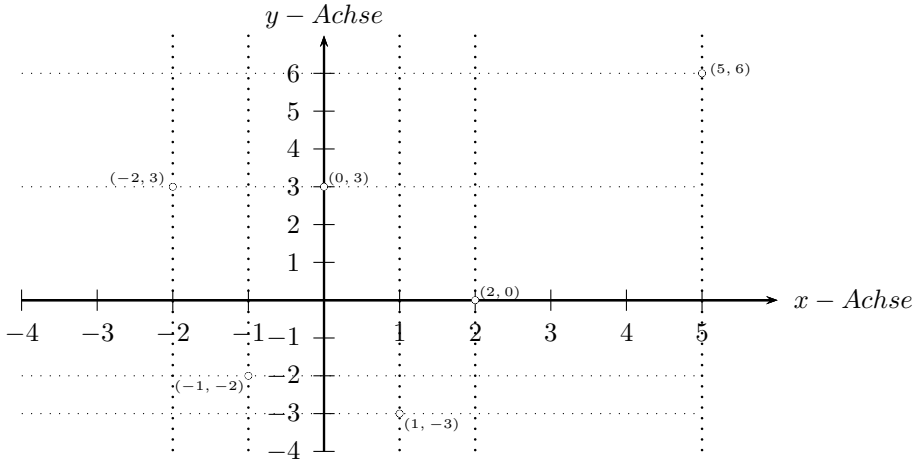


Abbildung 2.2.3: Lösung der Übung 2.2.1 für das Abtragen von geordneten Paaren in einem kartesischen Koordinatennetz (Abtragen der geordneten Paare $(5,6),(-2,3),(1,-3),(-1,-2),(0,3)$ und $(2,0)$)

Da Relationen Mengen von geordneten Paaren sind, können wir Relationen, die in den Komponenten ihrer Elemente reelle Zahlen enthalten, in ein kartesisches Koordinatennetz abtragen.

Übung 2.2.3. *Tragen Sie die Relation* $\{(1,2),(3,4),(2,2),(2,4)\}$ *in ein kartesisches Koordinatennetz ab.*

Lösung 2.2.4. *Man erhält:*

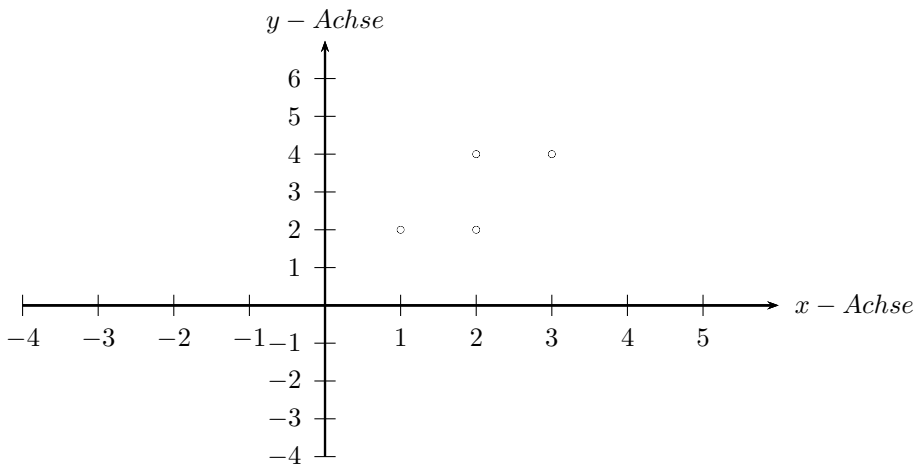


Abbildung 2.2.4: Lösung der Übung 2.2.3 für das Abtragen von geordneten Paaren in einem kartesischen Koordinatennetz (Abtragen der Relation $\{(1,2),(3,4),(2,2),(2,4)\}$)

Übung 2.2.5. *Tragen Sie das kartesische Produkt* $\{1,2,3\} \times \{2,4,5\}$ *in ein kartesisches Koordinatennetz ab.*

Lösung 2.2.6. *Man erhält:*

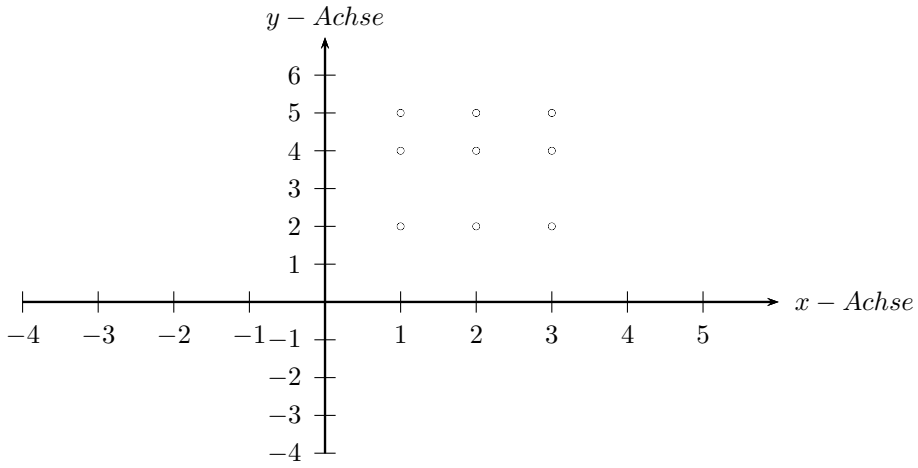


Abbildung 2.2.5: Lösung der Übung 2.2.5 für das Abtragen von geordneten Paaren in einem kartesischen Koordinatennetz (Abtragen des kartesische Produktes $\{1,2,3\} \times \{2,4,5\}$)

Bemerkung 2.2.7. *Überlegen Sie sich, dass die Eintragung eines kartesischen Produktes von Zahlen in ein kartesisches Koordinatennetz immer ein (nicht unbedingt ausgefülltes) Rechteck von Punkten ergibt.* ◊

Da Funktionen als Graphen spezifische Relationen aufweisen, können wir den Graphen einer Funktion in einem kartesischen Koordinatennetz abtragen. Oft wird die graphische Darstellung des Graphen ebenfalls „Graph“ genannt.

Übung 2.2.8. *Tragen Sie den Graphen der Funktion* $(\{1,2,3\},\{4,5,6\},\{(1,4),(2,4),(3,5)\})$ *in ein kartesisches Koordinatennetz ab.*

Lösung 2.2.9. *Man erhält:*

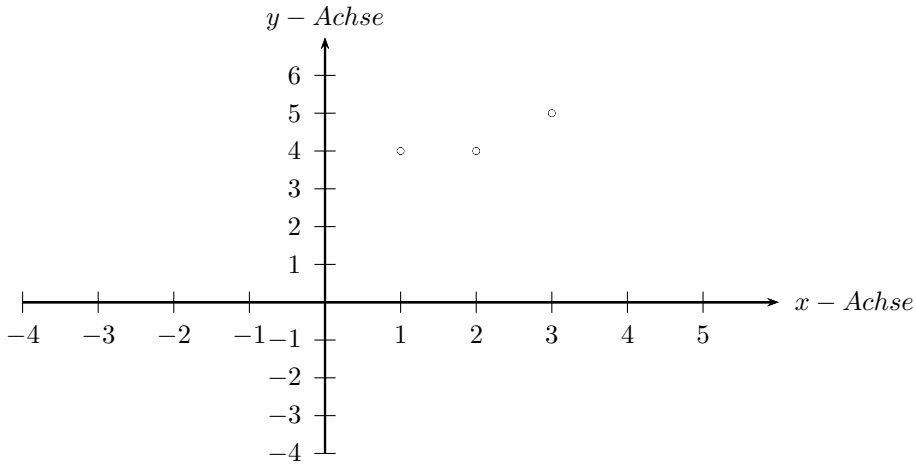


Abbildung 2.2.6: Lösung der Übung 2.2.8 für das Abtragen des Graphen einer Funktion in einem kartesischen Koordinatennetz (Abtragen des Graphen $\{(1,4),(2,4),(3,5)\}$)

Ordnet eine Funktion jeder reellen Zahl eine reelle Zahl zu, wird jeder reellen Zahl ein Punkt zugordnet. Unter bestimmten Voraussetzungen, die wir später formeller analysieren werden, entsteht eine durchgezogene Linie, wie z.B. beim Abtragen der Punkte der Funktion, die durch $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $f(x)=0.8x^2$ definiert ist, im Intervall $[-3,3]$ (s. Abbildung 2.2.7).

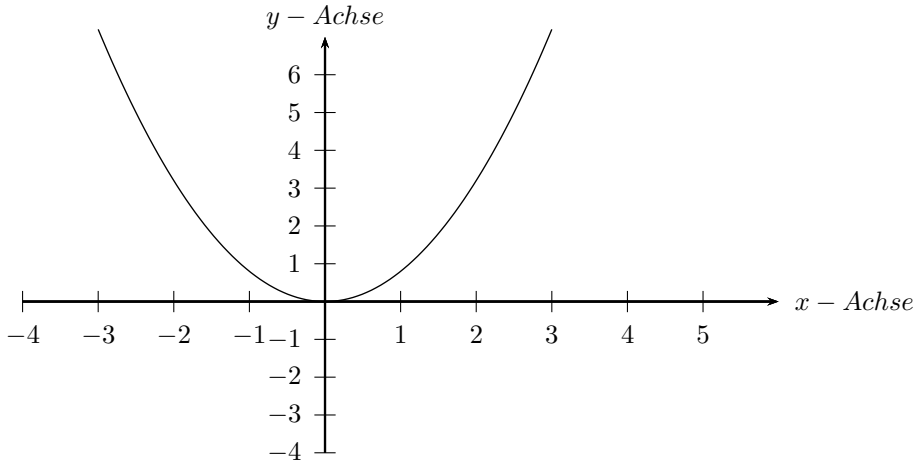


Abbildung 2.2.7: Beispiel für die graphische Darstellung des Graphen der Funktion, die durch$f(x)=0.8x^2$ beschrieben wird

Dabei werden überabzählbar unendlich viele Punkte abgetragen - unter anderem z.B. $(0.1,0.008),(\ln 2,0.384362411),(\sqrt{2},1.6),(2,3.2),(2.5,5),(3,7.2)$. Eine durchgezogene Linie ergibt

sich - salopp ausgedrückt - , wenn für alle x, die nahe an x_0 sind, auch $f(x)$ nahe bei $f(x_0)$ ist und dies für alle x_0 gilt.

Ein Beispiel, für das das nicht der Fall ist, ist die Funktion, die jedem $x \in \mathbb{R}$ nach Zufallsprinzip ein $y \in \mathbb{R}$ zuordnet. Für die graphische Darstellung können wir uns auf Zahlen zwischen -3 und 3 im Abstand von 0.001 beschränken (dies ergibt 6001 geordnete Paare). Es ergibt sich die folgende Graphik, die man z.B. mit dem Statistik-Programm R (s. https://www.r-project.org/) mit den folgenden Befehlen reproduzieren kann (a=seq(-3,3,0.001); b=rnorm(a); ab=cbind(a,b);plot(ab))

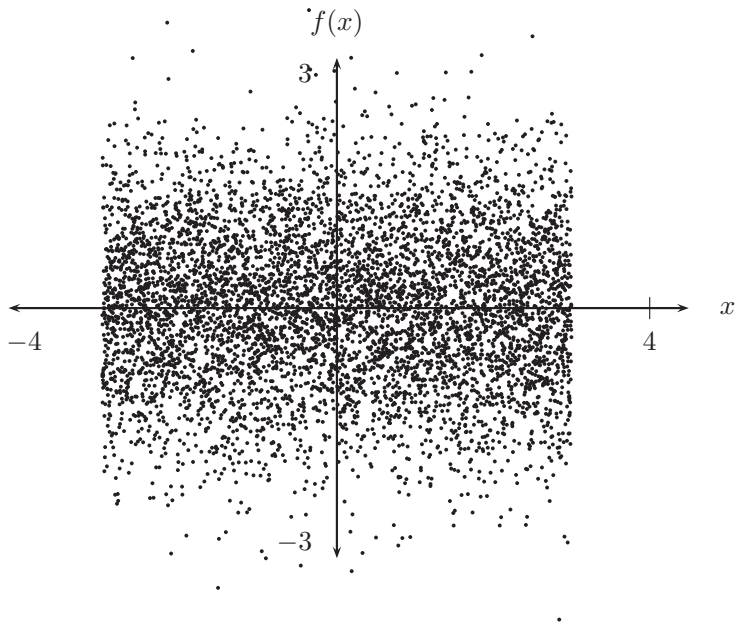


Abbildung 2.2.8: Graphische Darstellung der Funktion, die den x zwischen -3 und 3 um Abstand von 0.001 nach Zufallsprinzip (Standardnormalverteilung) eine Zahl zuordnet. Kein Punkt liegt über einem anderen.

Die graphische Darstellung des Graphen einer Funktion unterscheidet sich von der graphischen Darstellung einer beliebigen Relation dadurch, dass über einem x auf der $x-Achse$ höchstens ein Punkt stehen kann (s. Abbildungen für Beispiele 2.2.9 und 2.2.10). Bei Relationen, die nicht Graph einer Funktion sind, gibt es auf der x-Achse x, so dass Punkte über x übereinander liegen.

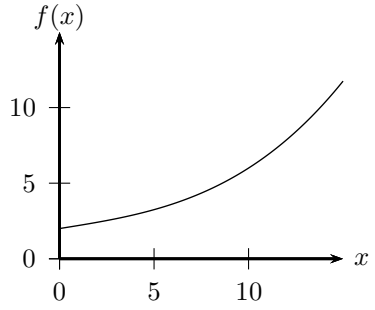


Abbildung 2.2.9: Beispiel für eine graphische Darstellung einer Relation, die dem Graphen einer Funktion entspricht

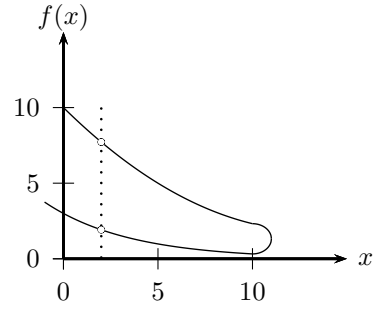


Abbildung 2.2.10: Beispiel für eine graphische Darstellung einer Relation, die nicht dem Graphen einer Funktion entspricht

Definition 2.2.10. *Die (euklidische) Länge* $d(\mathbf{x},\mathbf{y})$ *der Strecke zwischen zwei Punkten* $\mathbf{x} := (x_1, x_2)$ *und* $\mathbf{y} := (y_1, y_2)$ *im zweidimensionalen Raum beträgt*

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

Die Länge ist damit eine reelle Zahl. d *ist eine Abbildung* $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*, die weder surjektiv noch injektiv ist (wieso?).* ◊

Beispiel 2.2.11. *Die Länge der Strecke zwischen* $\mathbf{x} = (5, 4)$ *und* $\mathbf{y} = (0.5, 1)$ *ist*

$$\sqrt{(5 - 0.5)^2 + (4 - 1)^2} = 5.\,408\,3$$

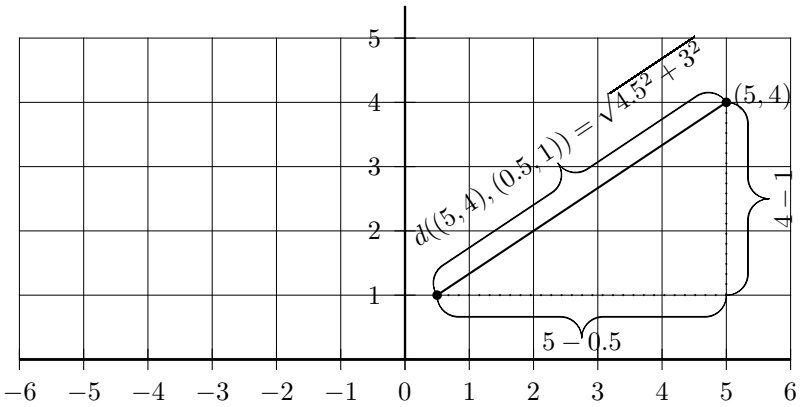


Abbildung 2.2.11: Abstand zwischen den Punkten $\mathbf{x} = (5, 4) = (x_1, x_2)$ und $\mathbf{y} = (0.5, 1) = (y_1, y_2)$ ist $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = \sqrt{(5 - 0.5)^2 + (4 - 1)^2}$

◊

Bemerkung 2.2.12. *Die Abbildung* $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist nicht die selbe wie* $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*, da die beiden Abbildungen verschiedene Definitionsbereiche haben. Man könnte dies in der Notation unterscheiden durch die Verwendung von* $d_1(x, y) := \sqrt{(x - 1)^2}$ *und* $d_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$*. Die beiden Abbildungen sind allerdings kompatibel: sie führen bezüglich der x-Achse zum selben Resultat. Zahlen* x *auf der x-Achse entsprechen im zweidimensionalen Koordinatensystem dem geordneten Paaren* $(x, 0)$ *und es gilt*

$$d_2((x, 0), (y, 0)) = \sqrt{(x - y)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{(x - y)^2} = d_1(x, y).$$

Zudem macht der Zusammenhang jeweils deutlich, über welche Räume man spricht, so dass man auf diese notationelle Komplikation verzichten kann. ◊

Beispiel 2.2.13. *Die Länge der Strecke zwischen* $(5.5, 0)$ *und* $(3.1, 0)$ *beträgt* $5.5 - 3.1 = 2.\,4$*, da*

$$\sqrt{(5.5 - 3.1)^2 + (0 - 0)^2} = 2.4$$

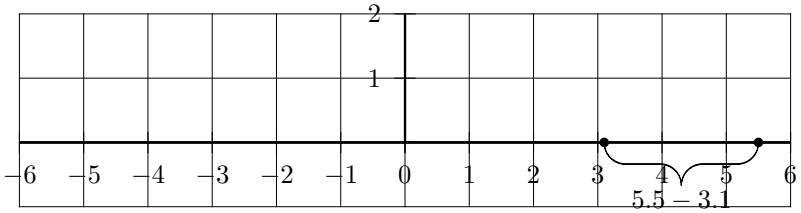


Abbildung 2.2.12: Abstand zwischen den Punkten $\mathbf{x} = (5.5, 0) = (x_1, x_2)$ und $\mathbf{y} = (3.1, 0) = (y_1, y_2)$ ist $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = \sqrt{(5.5 - 3.1)^2 + (0 - 0)^2} = 2.4$

$\Diamond$

Bemerkung 2.2.14. *Statt $(x, 0)$ schreiben wir beim Punkt $(x, 0)$ gewöhnlich nur x hin. Um die Länge der Strecke zwischen $(x, 0)$ und $(0, 0)$ auszudrücken, schreiben wir unter die Strecke von $(0, 0)$ nach $(x, 0)$ oder auch bei $(x, 0)$, „$|x|$“, denn*

$$\sqrt{(0 - x)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{(-x)^2} = |x|,$$

wobei für $x > 0$ gilt: $|x| = x$. Ist $x < 0$, und wollen wir die Länge von $(0, 0)$ nach $(0, x)$ ausdrücken, schreiben wir unter diese Strecke also $|x|$, d.h. $-x$ hin. $\Diamond$

Bemerkung 2.2.15. *Je nach illustratorischen Bedürfnissen schreiben wir beim Punkt $(x, f(x))$ gewöhnlich „$f(x)$“ statt „$(x, f(x))$“ hin. Die Länge der Strecke zwischen $(x, 0)$ und $(x, f(x))$ beträgt $|f(x)|$, denn*

$$\sqrt{(x - x)^2 + (0 - f(x))^2} = \sqrt{(-f(x))^2} = |f(x)|$$

Ist $f(x) > 0$, ist der Funktionswert mit der Länge der Strecke zwischen $(x, 0)$ und $(x, f(x))$ identisch. Wir können also zur Strecke zwischen $(x, 0)$ und $(x, f(x))$ zwecks Illustration $f(x)$ dazusetzen (in der ungefähren Mitte der Strecke oder auch beim Punkt $(x, f(x))$. Ist $f(x) < 0$, müssen wir $|f(x)|$ neben die Strecke zwischen $(x, 0)$ und $(x, f(x))$ schreiben, wenn wir die Länge der Strecke zwischen diesen beiden Punkte ausdrücken wollen. $\Diamond$

Beispiel 2.2.16. *Ist $f(2) = 3$, so ist der Abstand des Punktes $(2, 3) = (2, f(2))$ vom Punkt $(2, 0)$ die Zahl 3, da*

$$\sqrt{(2 - 2)^2 + (3 - 0)^2} = 3$$

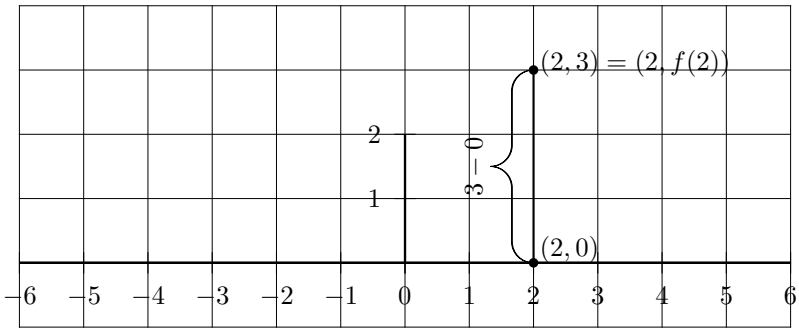


Abbildung 2.2.13: Abstand zwischen den Punkten $\mathbf{x} = (2,3) = (x_1, f(x_1))$ und $\mathbf{y} = (2,0) = (y_1, y_2)$ ist $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (f(x_1) - 0)^2} = \sqrt{(2-2)^2 + (3-0)^2} = 3$

◊

Bemerkung 2.2.17. *Der Satz 2.1.4 gilt auch für* $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ◊

2.3 Die graphische Darstellung von Tripeln

Fügen wir zu einem zweidimensionalen kartesischen System eine normierte Gerade hinzu, welche nicht in der durch die $x-$ und die $y-$ *Achse* aufgespannten Ebene liegt, deren Nullpunkt mit den Nullpunkten der $x-$ *Achse* und der $y-$ *Achse* identisch ist, und die mit jeder dieser Achsen einen geraden Winkel bildet, so sprechen wir von einem dreidimensionalen kartesischen System (s. für die Ausrichtung der dritten Achse die folgende Abbildung 2.3.14). Es handelt sich um einen normierten dreidimensionalen Raum. In diesem können wir Tripeln Punkte zuordnen (für die Methode s. die folgende Abbildung 2.3.14)

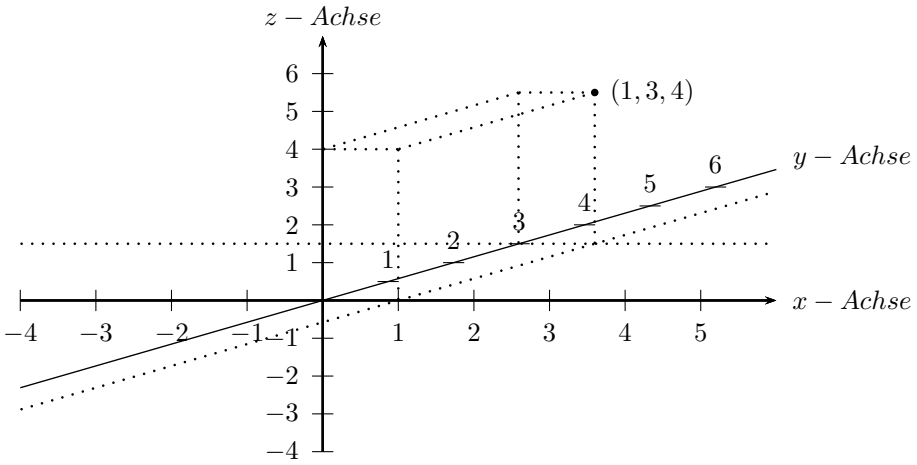


Abbildung 2.3.14: Beispiel für die graphische Darstellung des Tripels $(1,3,4)$ im dreidimensionalen kartesischen Koordinatennetz

Entsprechend kann man dreistellige Relationen im kartesischen Koordinatennetz abbilden.

Definition 2.3.1. *Der (euklidische) Abstand* $d(\mathbf{x},\mathbf{y})$ *zwischen* $\mathbf{x} := (x_1, x_2, x_3)$ *und* $\mathbf{y} := (y_1, y_2, y_3)$ *beträgt*

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

Allgemein ist der (euklidische) Abstand $d(\mathbf{x},\mathbf{y})$ *zwischen* $\mathbf{x} := (x_1, ..., x_n)$ *und* $\mathbf{y} := (y_1, ..., y_n)$

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

d *ist eine Abbildung* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. ◊

Oft spielen Abbildungen $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Rolle - entsprechende ökonomische Beispiele werden in der Folge auftauchen. Deren Graph ist eine dreistellige Relation und kann deshalb ebenfalls im kartesischen Koordinatennetz dargestellt werden. So kann man z.B. ein Abbildung $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definieren durch

$$f(x,y) := f((x,y)) = (x+1)^2 + y^2 + 0.1$$

und darstellen mit (s. Abbildung 14.3.4).

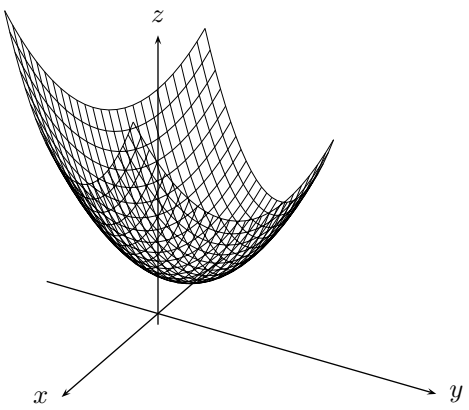


Abbildung 2.3.15: Graphische Darstellung der durch $z := f(x,y) = (x+1)^2 + y^2 + 0.1$ gegebenen Funktion im Bereich $[-1,1] \times [-0.8,1]$ (Teilmenge des Definitionsbereichs)

So ist

$$f(3,4) = (3+1)^2 + 4^2 + 0.1 = 32.1$$
$$f(2,1) = (2+1)^2 + 1^2 + 0.1 = 10.1$$

Allgemein können Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ oder $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ verwendet werden - auch in der Ökonomie, wie wir sehen werden. So entspricht einer Mengenkombination von n Rohstoffen eine Mengenkombination von m Endprodukten. Solche Funktionen können jedoch nicht mehr graphisch dargestellt werden.

Übungen

1. (a) Tragen Sie 5.3 und -3.2 auf der folgenden Zahlengerade ab.

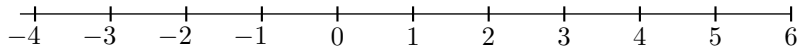


Abbildung 2.3.16: Graphik zur Übung

(b) Beschriften Sie das Ergebnis.

(c) Wieviel betragen die Abstände $d\,(5.3, 0)$,

(d) $d\,(0, -3.2)$,

(e) $d\,(5.3, -3.2)$ und

(f) $d\,(5.3, 3.2)$?

2. (a) Tragen Sie $(3.5, 2)$ und $(1.3, -1.2)$ in der folgenden Ebene ab. Beschriften Sie das Ergebnis.

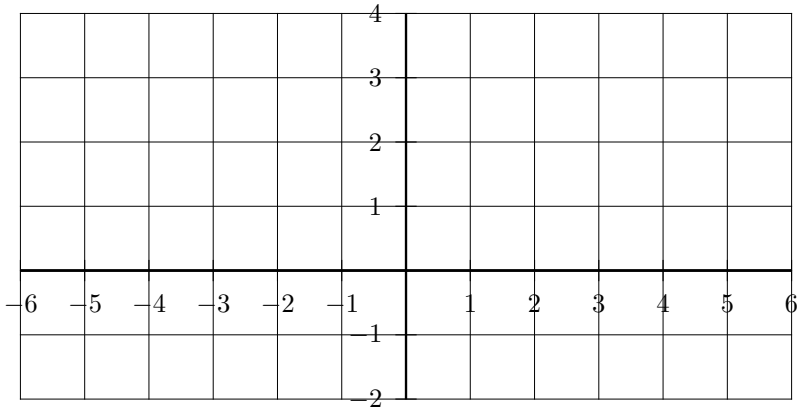


Abbildung 2.3.17: Graphik zur Übung

(b) Wieviel beträgt der Abstand zwischen den Punkten $(3.5, 2)$ und $(1.3, -1.2)$

(c) zwischen den Punkten $(3.5, 2)$ und $(3.5, 0)$

(d) zwischen den Punkten $(0, 2)$ und $(3.5, 2)$

(e) zwischen den Punkten $(1.3, -1.2)$ und $(1.3, 0)$

(f) zwischen den Punkten $(1.3, -1.2)$ und $(0, -1.2)$

(g) Zeichnen Sie die Strecken mit den entsprechenden Längen in die Graphik ein (verschiedene Möglichkeiten; wählen Sie illustrative Beispiele)

3. Vom Graphen einer Funktion seien die beiden folgenden Punkte gegeben: $(1, 3)$ und $(4, 2)$.

(a) Zeichnen Sie diese Punkte in die folgende Graphik. Beschriften Sie das Ergebnis.

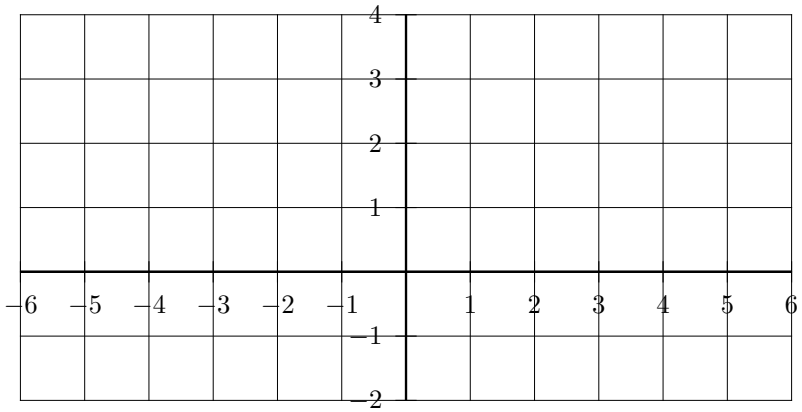


Abbildung 2.3.18: Graphik zur Übung

(b) Tragen Sie eine Strecke mit der Länge $|f(1) - f(4)|$ in die Graphik ab (verschiedene Möglichkeiten, wählen Sie eine illustrative!).

4. Tragen Sie den Punkt $(2, 3, -1)$ in die folgende Graphik ein.

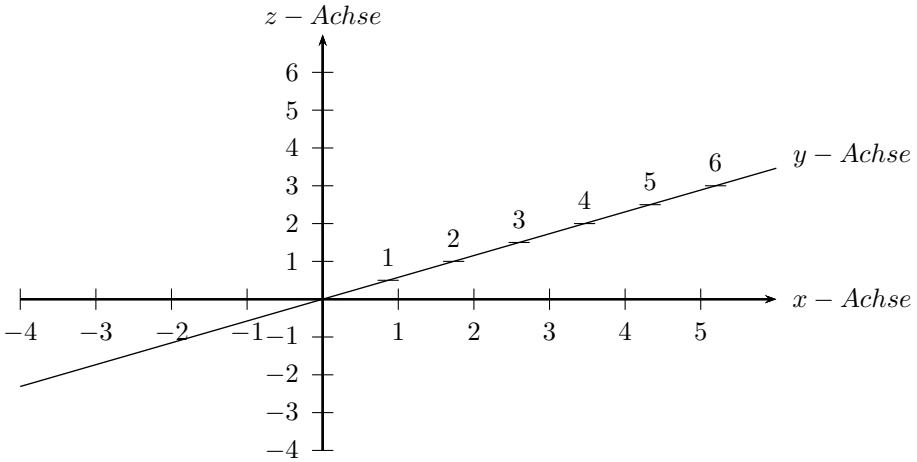


Abbildung 2.3.19: Beispiel für die graphische Darstellung des Tripels $(2, 3, -1)$ im dreidimensionalen kartesischen Koordinatennetz

Wieviel beträgt der Abstand des Punktes $(2, 3, -1)$ vom Punktes $(0, 0, 0)$ und vom Punkt $(4, 2, 5)$

Lösungen

1. (a) Das Abtragen von 5.3 und -3.2 auf der gegebenen Zahlengerade ergibt.

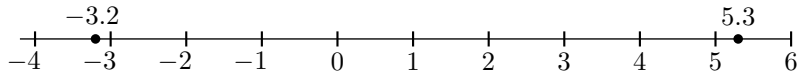


Abbildung 2.3.20: Graphik zur Übung

(b) Für die Beschriftung s. Abbildung 2.3.20.

(c) $d\left(5.3,0\right)=5.3$

(d) $d\left(0,-3.2\right)=3.2$

(e) $d\left(5.3,-3.2\right)=\sqrt{\left(5.3-\left(-3.2\right)\right)^{2}}=8.5=5.3+3.2$

(f) $d\left(5.3,3.2\right)=\sqrt{\left(5.3-3.2\right)^{2}}=2.1=5.3-3.2$

2. (a) Das Abtragen von $(3.5,2)$ und $(1.3,-1.2)$ und die Beschriftung ergibt:

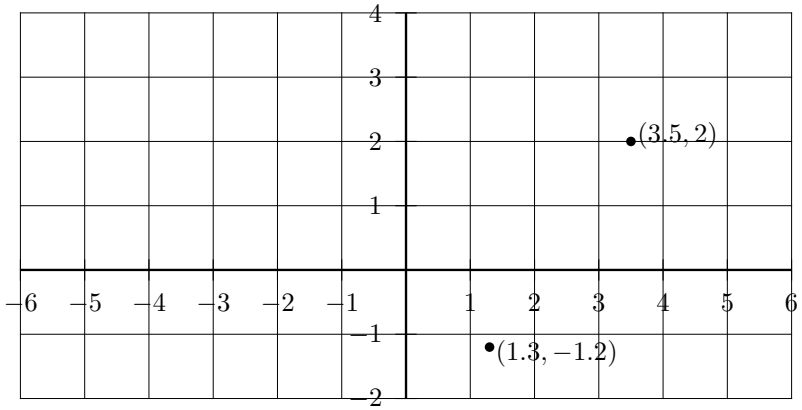


Abbildung 2.3.21: Lösung zur Übung - Abtragung und Beschriftung von Punkten

(b) $d\left(3.5,2\right),\left(1.3,-1.2\right))=\sqrt{\left(3.5-1.3\right)^{2}+\left(2-\left(-1.2\right)\right)^{2}}=3.883\,3$

(c) $d\left(\left(3.5,2\right),\left(3.5,0\right)\right)=\sqrt{\left(3.5-3.5\right)^{2}+\left(2-0\right)^{2}}=2$

(d) $d\left(\left(0,2\right),\left(3.5,2\right)\right)=\sqrt{\left(0-3.5\right)^{2}+\left(2-2\right)^{2}}=3.5$

(e) $d\left(\left(1.3,-1.2\right),\left(1.3,0\right)\right)=\sqrt{\left(1.3-1.3\right)^{2}+\left(-1.2-0\right)^{2}}=1.2$

(f) $d\left(\left(1.3,-1.2\right),\left(0,-1.2\right)\right)=\sqrt{\left(1.3-0\right)^{2}+\left(-1.2-\left(-1.2\right)\right)^{2}}=1.3$

3.

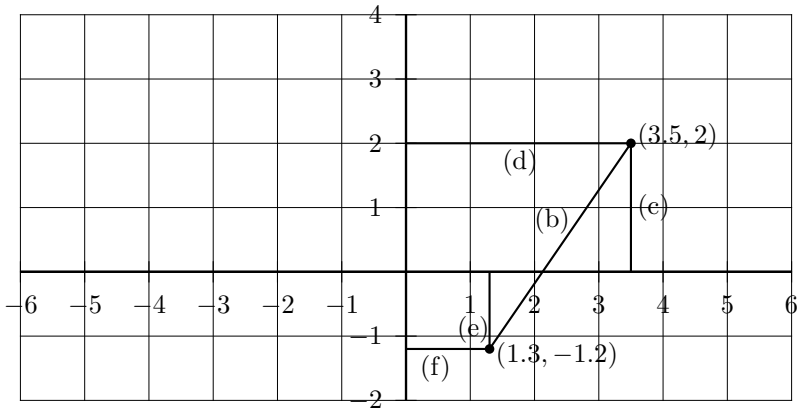


Abbildung 2.3.22: Lösung zur Übung (Strecken)

(a) Die Graphische Darstellung von $(1,3) = (1, f(1))$ und $(4,2) = (4, f(4))$ ergibt:

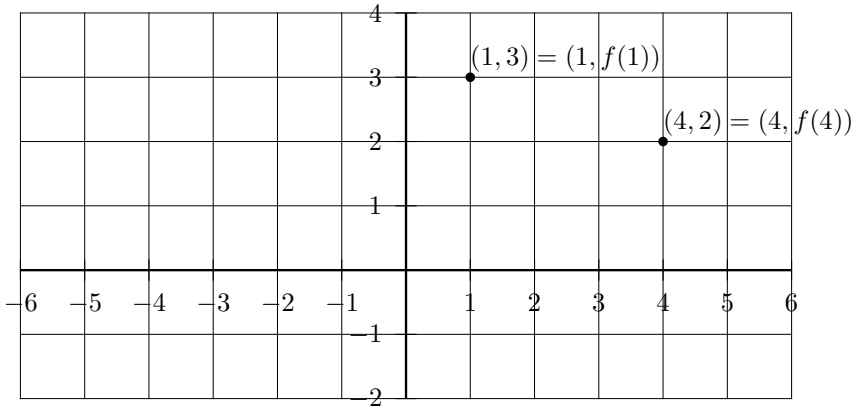


Abbildung 2.3.23: Darstellung zweier Elemente des Graphen der Funktion f

(b) Das Abtragen einer Strecke mit der Länge $|f(1) - f(4)|$ in die Graphik ergibt:

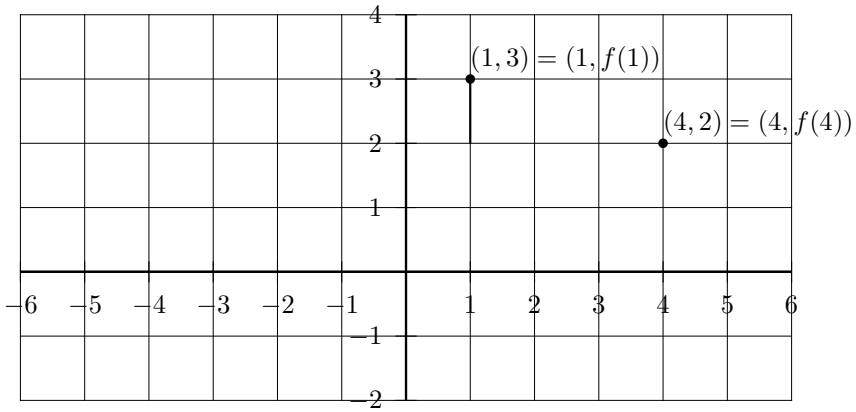


Abbildung 2.3.24: Graphische Darstellung einer Strecke mit der Länge $|f(1) - f(4)| = |3 - 2| = 1$

Eine weitere illustrative Möglichkeit ist eine Strecke zwischen den Punkten $(4, 3)$ und (4.2).

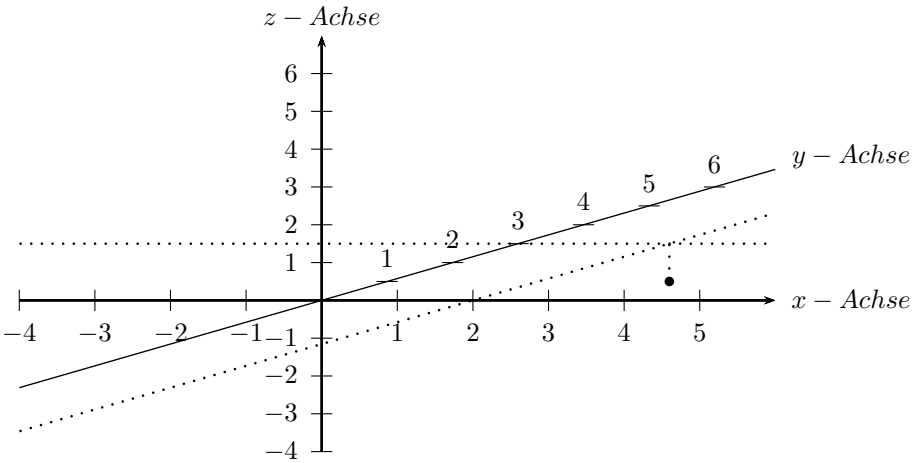


Abbildung 2.3.25: Graphische Darstellung des Tripels $(2, 3, -1)$ im dreidimensionalen kartesischen Koordinatennetz

4. Der Abstand des Punktes $(2, 3, -1)$ vom Punkt $(0, 0, 0)$:

$$\sqrt{(2-0)^2 + (3-0)^2 + (-1-0)^2} = 3.741\,7$$

und vom Punkt $(4, 2, 5)$:

$$\sqrt{(2-4)^2 + (3-2)^2 + (-1-5)^2} = 6.403\,1$$

2.4 Lernziele

- Die Abkürzungen für Zahlenmengen kennen (erste Seite dieses Kapitels)
- Reelle Zahlen auf einer normierten Zahlengeraden abtragen können.
- Die Länge einer Strecke zwischen zwei Punkten auf der Zahlengerade berechnen können.
- Geordnete Paare und damit die Elemente von Relationen und Graphen von Funktionen in einem zweidimensionalen kartesischen Koordinatennetz abtragen können.
- Die Länge der Strecke zwischen zwei Punkten in der Ebene berechnen können.
- Tripel und damit die Elemente von dreistelligen Relationen sowie von Graphen von Funktionen $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einem dreidimensionalen Koordinatennetz abtragen können.
- Die Länge der Strecke zwischen zwei Punkten im dreidimensionalen Raum berechnen können.
- Korrekte Beschriftungen von Punkten auf der Gerade, in der Ebene und im dreidimensionalen Raum vornehmen können.

Kapitel 3

Polynome

3.1 Ökonomie und Funktionen

Man kann gewisse ökonomische Phänomene beschreiben, indem man Funktionen verwendet. Dies ist der Fall, wenn Grössen höchstens eine andere Grösse zugeordnet werden kann. So fallen z.B. bei einer bestimmten Produktionsmenge (zur selben Zeit beim selben Produktionsprozess) genau bestimmte Kosten an - und nicht einmal Kosten x und Kosten y, so das $x \neq y$. Entsprechend kann man dann den Zusammenhang zwischen Produktionsmenge und Kosten durch eine Funktion darstellen. Funktionen sind eine Art Modell und wir verwenden sie, um Aspekte der Wirklichkeit zu beschreiben. Dabei verwenden wir gewöhnlich reelle Funktionen, die definiert sind als Funktionen, deren Graph Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist. Gewöhnlich betrachten wir dabei Funktionen, die auf Intervalle oder auf $\mathbb{R}$ definiert sind. Die Verwendung solcher reeller Funktionen stellt dabei eine mathematische Idealisierung dar: in der Wirklichkeit messen wir Grössen immer in den rationalen Zahlen und zwar jeweils auf endlich viele Stellen. Manche reelle Funktionen auf Intervalle oder auf $\mathbb{R}$ haben aber mathematische Eigenschaften, die z.B. in der Optimierungstheorie nützlich sind. Die Idealisierung hat zudem keine ersichtlichen Nachteile, so dass sie völlig unbedenklich ist.

Es stellt sich die Frage, wie man Funktionen findet, die ökonomische Zusammenhänge beschreiben können. Gewöhnlich werden dazu statistische Hilfsmittel verwendet - in diesem Zusammenhang werden wir uns jedoch mit weniger anspruchsvollen Methoden begnügen, um entsprechende Funktionen zu konstruieren. Oft haben wir allgemeine Ideen, wie eine realistische Funktion aussehen müsste - so steigen Kosten mit der produzierten Menge an. Entsprechend muss eine Kostenfunktion von links nach rechts anwachsen. Da es keine negativen Mengen oder negative Kosten gibt, muss die Funktion im ersten Quadranten liegen. Zudem könnten weitere Eigenschaften verlangt werden, etwa dass eine Kostenfunktion zuerst immer weniger wächst, von einem bestimmten Punkt weg aber immer mehr (s. Abbildung 3.1.1).

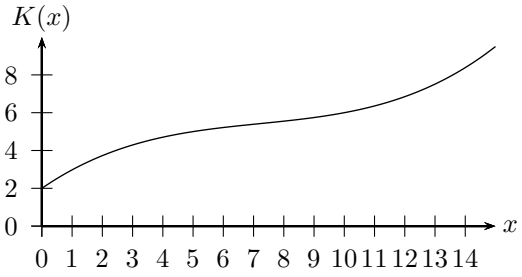


Abbildung 3.1.1: Kostenfunktion K. Auf der x-Achse steht die produzierte Menge, auf der y-Achse stehen die Kosten. Für jede mögliche Menge werden die entsprechenden Kosten angegeben. Die Funktion steigt überall an, zuerst immer weniger, dann immer mehr

Übung 3.1.1. *Zeichnen Sie in die Abbildung 3.1.1 die Kosten ein, die bei einer Produktion von 10 Mengeneinheiten entstehen. Wieviel betragen diese Kosten ungefähr gemäss Graphik?*

Kennen wir aus der Wirklichkeit zudem ein paar Punkte der Kostenfunktion, kann man eine Funktion berechnen, welche durch diese Punkte verläuft und eventuell die aufgestellten Eigenschaften erfüllt (s. Abbildung 3.1.2). 3.1.2).

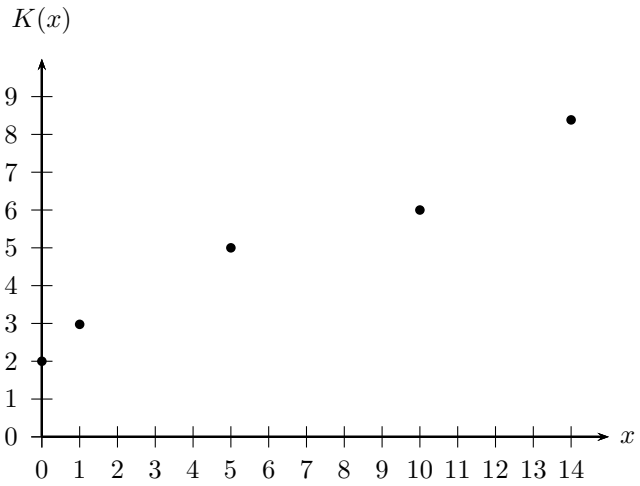


Abbildung 3.1.2: Kostenfunktion K. Auf der x-Achse steht die produzierte Menge, auf der y-Achse stehen die Kosten. Bekannt sind 4 Punkte. Zu finden ist eine vernünftige Funktion, die diese Punkte verbindet. Verbinden Sie die Punkte mit einer glatten Kurve!

Wir werden zuerst eine einfache Klasse von reellen Funktionen behandeln, die sogenannten Polynome, was zusätzlich erlaubt, ein paar grundlegende Kenntnisse aus der Berufsmittelschule zu wiederholen.

3.2 Definition der Polynomfunktionen

Polynomfunktionen sind auf die reellen Zahlen definiert, wobei reelle Zahlen zugeordnet werden. Solche Funktionen nennt man „reelle Funktionen“.

Beispiel 3.2.1. *Beispiele für Polynome sind*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = 3x^2 + 2x + 4$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$g(x) = 4x + 2$$

◊

Allgemein wird in Polynom wie folgt definiert:

Definition 3.2.2.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) := \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

mit $a_i \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. a_i *sind die „Koeffizienten" des Polynoms, die auch* 0 *sein können.* n *wird Grad des Polynoms genannt.* ($\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + ... + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$) ♢

Dabei wird rekursiv festgelegt:

Definition 3.2.3. $x^1 := x$; $x^n := x^{n-1} x$ *für* $n > 1$ ♢

Beim Rechnen mit Polynomen braucht man

Satz 3.2.4. $x^n x^m = x^{n+m}$

Beweis. (durch Induktion) (1) $x^1 x^1 = xx = x^2 = x^{1+1}$. (2) Es gelte $x^n x^m = x^{n+m}$. Für $x^n x^{m+1}$ gilt: $x^n x^m x = x^{n+m} x^1 = x^{n+m+1}$. Analog gilt $x^{n+1} x^m = x^{n+1+m}$. (3) Damit gilt der Satz durch Induktion für alle $m, n \geq 1$. □

So ist z.B. $2^3 2^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^7 = 2^{3+4}$.

Satz 3.2.5. $(x^n)^m = x^{nm} = (x^m)^n$

So ist z.B. $\left(2^2\right)^3 = (2 \cdot 2)^3 = (2 \cdot 2)(2 \cdot 2)(2 \cdot 2) = 2^6 = 2^{2 \cdot 3}$ und $(2 \cdot 2)(2 \cdot 2)(2 \cdot 2) = (2 \cdot 2 \cdot 2)(2 \cdot 2 \cdot 2) = (2 \cdot 2 \cdot 2)^2 = \left(2^3\right)^2$

Satz 3.2.6. $(xy)^n = x^n y^n$

So ist z.B. $(2 \cdot 3)^4 = (2 \cdot 3)(2 \cdot 3)(2 \cdot 3)(2 \cdot 3) = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 2^4 3^4$.

Bemerkung 3.2.7. *Wir nennen auch Funktionen Polynome, die auf die Form* $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ *gebracht werden können (so ist z.B.* $f(x) = (4x+2)^2$ *ein Polynom, da* $(4x+2)^2 = (4x+2)(4x+2) = 16x^2 + 8x + 8x + 4 = 16x^2 + 16x + 4 = 4 + 16x + 16x^2$*).* ♢

Aus ökonomischen Gründen betrachten wir manchmal nur gewisse Intervalle als sinnvolle Definitionsbereiche der Polynome. So sind produzierte Mengen jeweils positiv und können nicht negativ sein.

Beispiel 3.2.8.

$$f(x) = 5x^4 + 3x^2 - 4x + 5 \tag{3.2.1}$$

Im Beispiel (3.2.1) gilt: $a_4 = 5; a_3 = 0; a_2 = 3; a_1 = -4; a_0 = 5$; *Der Grad des Polynoms ist* 4.

$$f(x) = 5 \tag{3.2.2}$$

Im Beispiel (3.2.2) gilt: $a_0 = 5$. *Der Grad des Polynoms ist* 0.

$$f(x) = 0.234x^{20} - 4x \tag{3.2.3}$$

Im Beispiel (3.2.3) gilt: $a_{20} = 0.234$; $a_i = 0$
für $i \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$
$a_1 = -4; a_0 = 0$. *Der Grad des Polynomes ist* 20.

$$f(x) = 4.5x + 4 \tag{3.2.4}$$

Im Beispiel (3.2.4) gilt: $a_1 = 4.5; a_0 = 4$. *Der Grad des Polynoms ist* 1. ◊

Sei $f(x) = \left(5x^2 + 3x\right)^3$. Es handelt sich um ein Polynom, da man durch Umformung $f(x) = \left(5x^2 + 3x\right)^3 = 125x^6 + 225x^5 + 135x^4 + 27x^3$ erhält ($a_6 = 125; a_5 = 225; a_4 = 135; a_3 = 27; a_2 = a_1 = a_0 = 0$). Der Grad des Polynoms ist 6.

Hat ein Polynom den Grad n, so sagen wir auch , es sei ein "Polynom n-ten Grades". Wir werden in der Folge Polynomfunktionen diskutieren und jeweils ökonomische Beispiele anführen.

3.3 Polynome 0-ten Grades

Definition 3.3.1. *f ist ein Polynom 0-ten Grades genau dann wenn gilt:*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = a_0, \quad a_0 \in \mathbb{R}$$

◊

- Polynome 0-ten Grades werden auch „Konstante“ oder „konstante Funktion“ genannt, da ein Polynom 0-ten Grades jeder reellen Zahl immer dieselbe Zahl zuordnet. Der Graph von f ist damit $\{(x, a_0) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Ein Ausschnitt des Graphen von $f(x) = 5$ wäre damit $\{(10, 5), (0.5, 5), (0.1, 5), (-200, 5), ...\}$. Der Graph weist überabzählbar viele geordnete Paare auf. Jedes weist als zweite Komponente 5 auf. Teilmengen des Graphen in tabellarischer Form werden auch „Wertetabellen“ der Funktion genannt. Gewöhnlich werden für die Erstellung der Wertetabelle x-Wert mit gleichen Abständen voneinander gewählt. Fürs Beispiel erhält man:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5

- Bei der graphischen Darstellung des Graphen handelt es sich um eine Parallele zur x-Achse. Sie schneidet die $y-$Achse im Punkt $(0, a_0)$ (s. Abbildung 3.3.3).

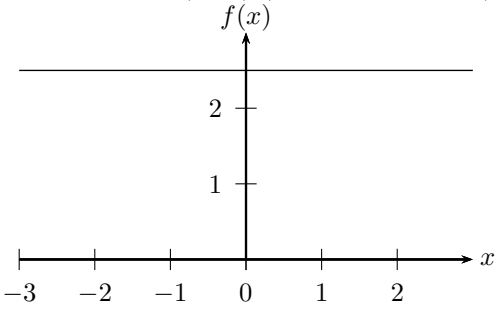


Abbildung 3.3.3: Graphische Darstellung des Graphen des Polynoms $f(x) = 2.5$

- Die Parallele ist durch eine Zahl a_0 festgelegt. Es genügt also, einen Punkt (x, a_0) zu kennen, um ein Polynom 0-ten Grades anzugeben und in ein kartesisches Koordinatennetz zeichnen zu können.

- Polynome 0-ten Grades sind Abbildungen, deren Bild aus einer einelementigen Menge $\{a_0\}$ besteht. Sie sind entsprechend nicht surjektiv, da nicht alle reellen Zahlen zugeordnet werden. Sie sind auch nicht injektiv, da verschiedenen reellen Zahlen immer dieselbe Zahl zugeordnet wird. Entsprechend sind sie nicht bijektiv und die Umkehrfunktion kann nicht gebildet werden.

- Ökonomisches Beispiel: Fixkostenfunktion. Fixkosten sind Kosten, die unabhängig von der produzierten Anzahl von Produkten anfallen. Jeder produzierten Anzahl von Produkten wird eine konstante Zahl (= Fixkosten) zugeordnet. (Abkürzung z.B. $K_f(x) = a_0$. Da produzierte Mengen nicht negativ sein können, beschränken wir allerdings das Polynom auf den Bereich $\mathbb{R}^+$. Siehe für ein graphisches Beispiel Abbildung 3.3.4)

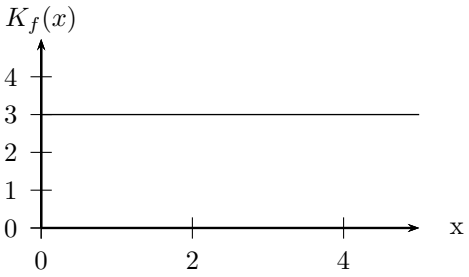


Abbildung 3.3.4: Graphische Darstellung eines Polynoms 0-ten Grades; Fixkostenfunktion

3.4 Polynome 1-ten Grades

Wir unterscheiden zwei Arten von Polynomen 1-ten Grades: lineare und affine Polynome.

3.4.1 Affine Polynome

Definition 3.4.1.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) := a_1 x + a_0 \ \textit{mit}\ a_1 \neq 0 \neq a_0$$

$\Diamond$

- Jeder reellen Zahl x wird genau eine Zahl, nämlich $a_1 x + a_0$ zugeordnet. Der Graph von f ist damit $\{(x, a_1 x + a_0) \mid x \in \mathbb{R}\}$.
  Mit $a_0 = 3; a_1 = 4 : f(x) = 4x + 3$. Ein Ausschnitt des Graphen von $f(x) = 4x + 3$ wäre damit $\{(10, 43), (0.5, 5), (0.1, 3.4), (-200, -797), ...\}$.
- Tragen wir die Punkte des Graphen einer affinen Funktion in ein kartesisches Koordinatennetz, erhalten wir eine Gerade (s. Abbildung 3.4.5).

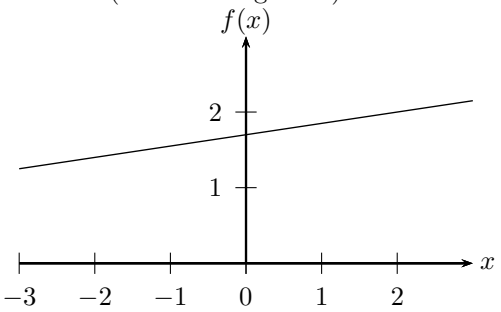


Abbildung 3.4.5: Graphische Darstellung des Graphen des Polynoms $f(x) = 0.15x + 1.7$

- Affine Polynome sind bijektiv, denn (i) affine Polynome sind surjektiv. Sei $y \in \mathbb{R}$ beliebig. Zu zeigen ist, dass es ein $x \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $y = a_1 x + a_0$. Dieses x ist gegeben durch $x = \frac{y - a_0}{a_1}$

(man löse die Gleichung $y = a_1x + a_0$ nach x auf!). (ii) Zudem sind affine Polynome injektiv: Sei $x_1 \neq x_2$. Damit gilt $a_1x_1 \neq a_1x_2$ und $a_1x_1 + a_0 \neq a_1x_2 + a_0$. Verschiedenen x_i werden also verschiedene Funktionswerte zugeordnet.
Da affine Polynome bijektiv sind, existiert die Umkehrfunktion. Ist ein affines Polynom durch $f(x) = a_1x + a_0$ gegeben, ist die Umkehrfunktion durch $f^{-1}(x) = \frac{x-a_0}{a_1}$ gegeben - denn für $y = a_1x + a_0$ gilt $x = \frac{y-a_0}{a_1}$. Möchten wir nun ausdrücken, dass x der Wert ist, den die Umkehrfunktion f^{-1} der Zahl y zuordnet, so schreiben wir $f^{-1}(y) = \frac{y-a_0}{a_1}$. Da die Wahl der Bezeichnungen für die Variable beliebig ist, gilt ebenso $f^{-1}(x) = \frac{x-a_0}{a_1} = \frac{1}{a_1}x - \frac{a_0}{a_1}$.

Steigung affiner Polynome

Bevor weitere Eigenschaften affiner Polynome diskutiert werden, wird der Begriff der Steigung einer Geraden, die durch das affine Polynom f bestimmt ist, eingeführt: diese wird definiert als

Definition 3.4.2.

$$m_f := \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

wobei $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ zwei beliebige, aber nicht identische Elemente des Graphen von f sind. ◊

Die folgende Abbildung 3.4.6 veranschaulicht die Definition der Steigung einer Geraden, die durch ein affines Polynom f bestimmt ist.

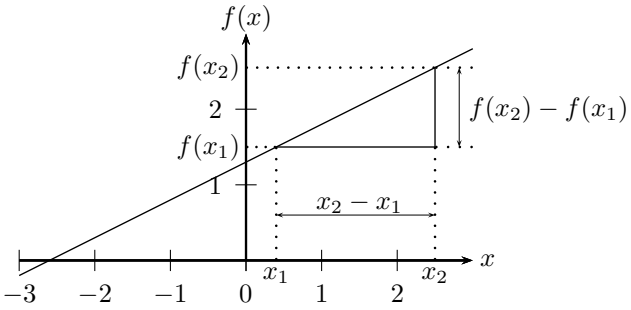


Abbildung 3.4.6: Steigung einer Geraden, die durch ein affines Polynom bestimmt ist

Satz 3.4.3. *Für ein affines Polynom $f(x) = a_1x + a_0$ ist*

- $m_f = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ *unabhängig von der Wahl von $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2)$ (für $x_1 \neq x_2$)*
- $m_f = a_1$.

Beweis.

$$\begin{aligned} m_f &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{a_1x_2 + a_0 - (a_1x_1 + a_0)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{a_1x_2 + a_0 - a_1x_1 - a_0}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{a_1x_2 - a_1x_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{a_1(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= a_1 \end{aligned}$$

Da in a_1 weder x_1 noch x_2 vorkommt, ist a_1 von der Wahl von x_1 und x_2 unabhängig. □

Die Steigung einer Geraden kann positiv oder negativ sein. Beachten Sie: je negativer eine Steigung ist, desto kleiner ist sie! (s. Abbildungen 3.4.7 und 3.4.8)

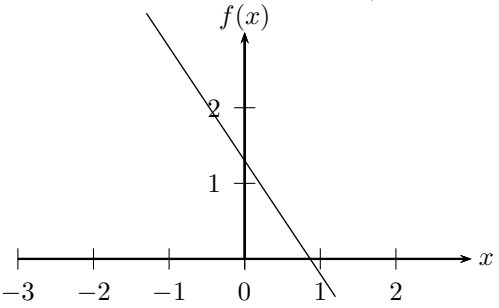


Abbildung 3.4.7: Die Steigung -1.5 der Geraden dieser Abbildung ist kleiner als die Steigung -0.5 der Geraden in der Abbildung 3.4.8, da $-1.5 < -0.5$

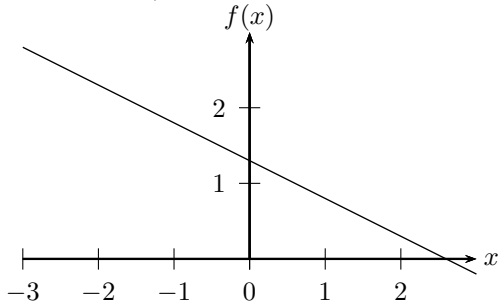


Abbildung 3.4.8: Die Steigung -0.5 der Geraden dieser Abbildung ist grösser als die Steigung -1.5 der Geraden in der Abbildung 3.4.7, da $-0.5 > -1.5$

Wir oben festgehalten, ist die Umkehrfunktion von $f(x) = a_1x + a_0$: $f^{-1}(y) = \frac{y-a_0}{a_1} = \frac{1}{a_1}y - \frac{a_0}{a_1}$. Damit ist die Steigung der Umkehrfunktion $\frac{1}{a_1}$.

Schnittpunkt affiner Polynome mit der y-Achse

Satz 3.4.4. *Ein affines Polynom $f(x) = a_1x + a_0$ schneidet die $y-$Achse in $(0, a_0)$.*

Beweis. Die $y-$*Achse* wird von einer Funktion in $x = 0$ geschnitten. Wir setzen also in $f(x) = a_1x + a_0$ $x = 0$ und erhalten: $f(0) = a_1 \cdot 0 + a_0 = a_0$ (s. Abbildung 3.4.9)

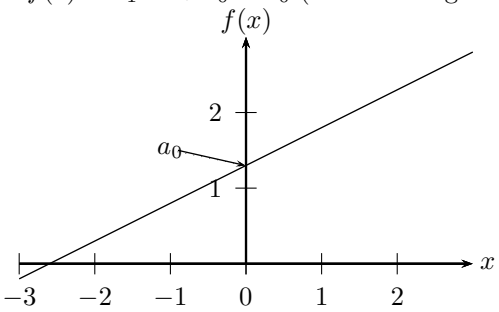


Abbildung 3.4.9: Schnittstelle eines affinen Polynoms mit der $y-$*Achse*

□

Wir nennen $f(0)$ für beliebige reelle Funktionen, die in 0 definiert sind „Ordinatenabschnitt“. Der Ordinatenabschnitt der Umkehrfunktion von $f(x) = a_1x + a_0$ beträgt $-\frac{a_0}{a_1}$.

Nullstellen affiner Polynome

Definition 3.4.5. *Eine reelle Funktion f hat in x eine Nullstelle, genau dann, wenn $f(x) = 0$.* ◊

Satz 3.4.6. *Ein affines Polynom $f(x) = a_1x + a_0$ hat eine Nullstelle in $-\frac{a_0}{a_1}$*

Beweis. Gemäss Definition der Nullstelle gilt $f(x) = 0 = a_1x + a_0$. Durch Auflösen nach x erhält man $a_1x = -a_0$ und $x = -\frac{a_0}{a_1}$. □

(s. Abbildung 3.4.10)

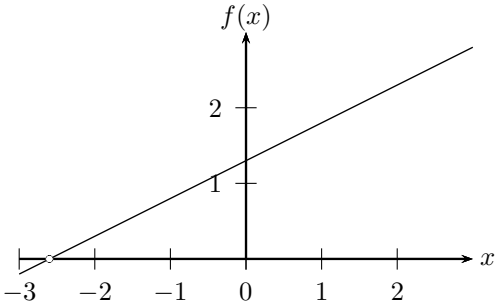


Abbildung 3.4.10: Nullstelle des affinen Polynoms $f(x) = 0.5x + 1.3$ an der Stelle $x = -\frac{a_0}{a_1} = -\frac{1.3}{0.5} = -2.6$ (=Schnittstelle eines affinen Polynoms mit der $x - Achse$)

Graphische Darstellung

Durch die Angabe der Funktionsgleichung kann die Gerade unmittelbar in ein kartesisches Koordinatennetz gezeichnet werden. Man kennt den Schnittpunkt a_0 mit der $y - Achse$ und kann die Steigung a_1 ohne Rechnungen abtragen, wenn man als Basis des Steigungsdreiecks 1 wählt (s. Abbildung 3.4.11).

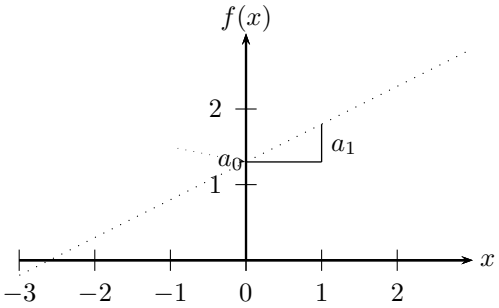


Abbildung 3.4.11: Anleitung zum Zeichnen eines affinen Polynoms mit Hilfe der Koeffizienten

Ein affines Polynom kann unmittelbar in ein kartesisches Koordinatennetz eingezeichnet werden, wenn zwei Punkte bekannt sind. Es wird eine Gerade durch die zwei Punkte gezogen. Allerdings ist es für die Präzision der Zeichnung besser, genügend weit auseinanderliegende Punkte zu wählen.

Berechnung affiner Polynome

Ein affines Polynom ist durch zwei Punkte oder durch einen Punkt und die Steigung bestimmt. Wir untersuchen diese zwei Möglichkeiten:

- Gegeben seien zwei Punkte $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$. Die Steigung der Geraden ist gemäss Satz 3.4.3
$$a_1 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$
Zu berechnen bleibt damit der Schnittpunkt mit der $y - Achse$. Da wir die Steigung bereits kennen, können wir diese in die Geradengleichung $f(x_1) = a_1 x_1 + a_0$ einsetzen:
$$f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} x_1 + a_0 \Longrightarrow$$
$$a_0 = f(x_1) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} x_1$$
Beispiel: Gegeben sei: $(5, 4)$, $(6, 8)$. Die Steigung ist $\frac{8-4}{6-5} = 4$. Wir setzen ein:
$$a_0 = 4 - 4 \cdot 5 = -16$$

Damit ist die Funktionsgleichung für die gesuchte affine Funktion $f(x) = 4x - 16$.

Eine weitere Möglichkeit, die Geradengleichung zu bestimmen, besteht darin, das folgende Gleichungssystem nach a_1 und a_0 aufzulösen:

$$f(x_1) = a_1 x_1 + a_0$$
$$f(x_2) = a_1 x_2 + a_0$$

Im Beispiel:

$$4 = a_1 5 + a_0$$
$$8 = a_1 6 + a_0$$

Man erhält als Lösung $a_1 = 4$ und $a_0 = -16$, wie Sie selber nachrechnen mögen.

- Gegeben sei die Steigung m_f und ein Punkt $(x_1, f(x_1)$. Damit hat man unmittelbar a_1 $(= m_f)$. a_0 berechnet man wie oben gezeigt durch Einsetzen in die Gleichung

$$f(x_1) = a_1 x_1 + a_0 \Longrightarrow$$
$$a_0 = f(x_1) - a_1 x_1$$

Beispiel: Es sei $m_f = 3$ und $(1.5, 6)$ gegeben. Dann berechnet man

$$a_0 = 6 - 3 \cdot 1.5 = 1.5$$

Man erhält also die Geradengleichung $f(x) = 3x + 1.5$.

Affine Polynome und Gleichungen 1-ten Grades

Wir nennen einen Ausdruck, der nur Ausdrücke der Form a_i und $a_j x$ enthält, die mit „+“ oder „−“ verbunden sind und a_i $a_j \in \mathbb{R}$, „Ausdruck 1-ten Grades“. Werden zwei Ausdrücke ersten Grades durch ein Gleichheitszeichen verbunden, so nennen wir die entstehende Gleichung „Gleichung 1-ten Grades“. So ist z.B.

$$5x + 30x - 10 = 4x - 13 \tag{3.4.5}$$

eine Gleichung 1-ten Grades.

Eine Gleichung lösen heisst die Menge der Objekte finden, welche die Gleichung zu einem wahren Satz machen. So gilt z.B. für $x = 3 : 5 \cdot 3 + 30 \cdot 3 - 10 = 95$ und $4 \cdot 3 - 13 = -1$. Damit entsteht der falsche Satz „$95 = -1$“. Es gilt x so zu bestimmen, dass der entsprechende Satz wahr wird. Dies erreicht man mit Operationen, welche die Lösungsmenge nicht verändern und mit denen man die Gleichung so verändern kann, dass man am Schluss der Rechnungen die Lösungsmenge aus der Gleichung ablesen kann. So kann man jede der Seiten der Gleichung algebraisch vereinfachen, z.B. $5x + 30x = 35x$, wodurch die Gleichung (3.4.5) zu

$$35x - 10 = 4x - 13 \tag{3.4.6}$$

wird. Zudem verändert sich die Lösungsmenge einer Gleichung nicht, wenn man auf beiden Seiten denselben Ausdruck 1-ten oder 0-ten Grades hinzu- oder abzählt - die Addition von 13 auf beiden Seiten verwandelt die Gleichung (3.4.6) z. B. in

$$35x - 10 + 13 = 4x - 13 + 13.$$

Durch algebraische Vereinfachung auf beiden Seiten erhält man

$$35x + 3 = 4x$$

Durch Addition von $-35x$ erhält man:

$$-35x + 35x + 3 = 4x - 35x$$

und wiederum durch algebraische Vereinfachung

$$3 = -31x$$

Die Lösungsmenge verändert sich zudem nicht, wenn man beide Seiten der Gleichung mit einer von 0 verschiedenen reellen Zahl multipliziert. So erhält man durch Multiplikation mit $-\frac{1}{31}$:

$$-\frac{3}{31} = \frac{-31}{-31}x$$

und durch algebraisches Vereinfachen

$$-\frac{3}{31} = x$$

Die Lösungsmenge ist also $\left\{-\frac{3}{31}\right\}$. Wir überprüfen das, indem wir $-\frac{3}{31}$ in beide Seiten der Gleichung (3.4.5) einsetzen: Für $5x + 30x - 10$ respektive $4x - 13$ erhält man:

$$5 \cdot -\frac{3}{31} + 30 \cdot -\frac{3}{31} - 10 = -13.387$$
$$4 \cdot -\frac{3}{31} - 13 = -13.387$$

Setzt man also $-\frac{3}{31}$ in $5x + 30x - 10 = 4x - 13$, erhält man einen wahren Satz.

Die Lösung einer Gleichung ersten Grades ist mit der Nullstelle eines affinen Polynoms, welches durch die Gleichung bis auf ein Vielfaches bestimmt ist, identisch. Mit den obigen Operationen können wir nämlich die Gleichung wie folgt umwandeln:

$$\begin{aligned} 5x + 30x - 10 &= 4x - 13 \\ 35x - 10 &= 4x - 13 \\ 31x - 10 &= -13 \\ 31x + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Das durch die Gleichung bestimmte affine Polynom ist $f(x) = 31x + 3$ (wobei auch $f(x) = 62x + 6$ oder allgemein $f(x) = z(31x + 3)$ mit $z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ein Polynom mit derselben Nullstelle ist). Die Nullstelle gemäss obiger Formel

$$-\frac{a_0}{a_1} = -\frac{3}{31}.$$

Schnittpunkt zweier affiner Polynome

Definition 3.4.7. *Die Menge der Schnittpunkte zweier Funktionen ist mit der Schnittmenge der Graphen dieser Funktionen identisch.* ◊

Satz 3.4.8. *Wenn zwei affine Polynome nicht dieselbe Steigung aufweisen, haben sie genau einen Schnittpunkt. Wenn zwei verschiedene affine Polynome dieselbe Steigung aufweisen, so haben sie keinen Schnittpunkt (Im letzten Fall werden die Polynome „parallel“ genannt).*

Da die Menge der Schnittpunkte zweier Funktionen f und g als Schnittmenge definiert ist, müssen Elemente der Schnittmenge Elemente beider Graphen sein. Entsprechend ist nach geordneten Paaren $(x, f(x)) = (x, g(x))$ zu suchen, welche beide Gleichungen

$$f(x) = a_1 x + a_0$$
$$g(x) = b_1 x + b_0$$

mit $f(x) = g(x)$ erfüllen. Man erhält:

$$\begin{aligned} a_1 x + a_0 &= b_1 x + b_0 \iff \\ a_1 x - b_1 x &= b_0 - a_0 \iff \\ x\,(a_1 - b_1) &= b_0 - a_0 \iff \\ x &= \frac{b_0 - a_0}{a_1 - b_1} \end{aligned}$$

Es gibt eine Lösung, wenn $a_1 \neq b_1$, d. h. wenn f und g nicht Parallelen sind.

Beispiel 3.4.9. *Seien gegeben* $f(x) = 1.5x + 1.8$ *und* $g(x) = 1.2x - 2$. *Gesucht ist der Schnittpunkt der beiden Funktionen. Wir lösen das Gleichungssystem*

$$1.5x + 1.8 = 1.2x - 2$$

auf und erhalten den Punkt $(-12.667, -17.2)$ *als Schnittpunkt, wie Sie selber nachrechnen mögen.* ◊

Ökonomische Beispiele für affine Polynome

Kostenfunktion $K : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}; K(x) = a_1 x + a_0$ (ohne Mengenrabatt; keine Skaleneinsparungen). Es gilt bei $K(0) = a_0 = K_f(x)$. a_0 sind also die Fixkosten, da es sich um die Kosten handelt, die selbst dann anfallen, wenn man nichts produziert. Variable Kosten K_v werden definiert als Gesamtkosten minus Fixkosten. Damit gilt $K(x) = K_v(x) + K_f(x)$. Die Kosten sind die Summe der Fixkosten und der variablen Kosten

Beispiel 3.4.10. *Gesamtkostenfunktion* $K(x) = 0.7x + 3 = K_v(x) + K_f(x)$. *Damit sind die Fixkosten* $K_f(x) = 3$. *Die variablen Kosten sind* $0.7x + 3 - 3 = 0.7x$. *Bei einer Produktion von* 5 *Mengeneinheiten fallen Kosten von* $K(5) = 0.7 \cdot 5 + 3 = 6.5$ *Geldeinheiten an. Die variablen Kosten betragen in* 5*:* $0.7 \cdot 5 = 3.5$ *(s. Abbildung 3.4.12)*

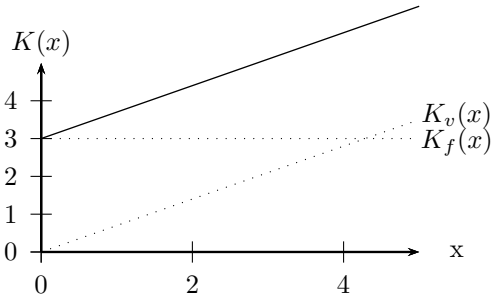


Abbildung 3.4.12: Graphische Darstellung einer affinen Funktion; Funktion der Gesamtkosten $K(x) = 0.7x + 3 = K_v + K_f$

◊

Preisnachfragefunktion Die nachgefragte Menge N hängt vom Preis p ab. Je höher der Preis, desto weniger wird nachgefragt und je tiefer der Preis, desto mehr wird nachgefragt. Jedem Preis entspricht dabei genau eine nachgefragte Menge. Entsprechend kann man die nachgefragte Menge als Funktion des Preises darstellen, wobei die Menge mit dem Preis sinkt. Deshalb könnte man eine Preisnachfragefunktion z.B. mit Hilfe eines affinen Polynoms mit negativer Steigung darstellen (s. für ein Beispiel Abbildung 3.4.13)

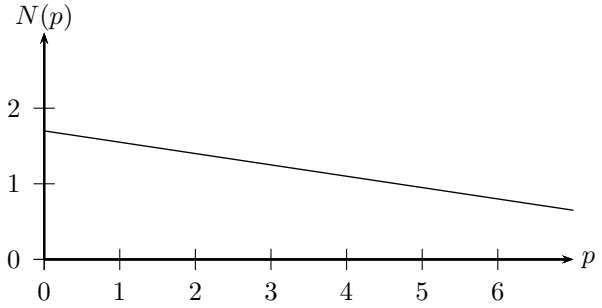


Abbildung 3.4.13: Graphische Darstellung des Graphen der Nachfragepreisfunktion $N(p) = -0.15p + 1.7$

Ökonomisch sinnvoll ist dabei der Bereich $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, da es keine negativen Preise und keine negativen Mengen geben kann.

Beeinflusst eine Grösse eine andere, so wird die beeinflussende Grösse „unabhängige Variable“ genannt, die beeinflusste Grösse „abhängige Variable“. Gewöhnlich bezeichnet man die Werte der unabhängigen Variable als $x - Werte$ und die der abhängigen Variable als $y - Werte$. In der ökonomischen Theorie ist es allerdings üblich, Mengen auf der $x-Achse$ darzustellen. Entsprechend würden wir den Preis als Funktion der zu diesem Preis nachgefragten Menge darstellen. Aus der Gleichung $N(p) = -0.15p + 1.7$ des Beispiels der Abbildung 3.4.13 wird dann, indem wir $N(p)$ durch x ersetzen und p durch $p_N(x)$:

$$x = -0.15p_N(x) + 1.7.$$

Wir lösen nach $p_N(x)$ auf und erhalten als Umkehrfunktion der Nachfragepreisfunktion die *Preisnachfragefunktion*:

$$p_N(x) = \frac{x - 1.7}{-0.15} = 11.333 - 6.6667x$$

(s. Abbildung 3.4.14)

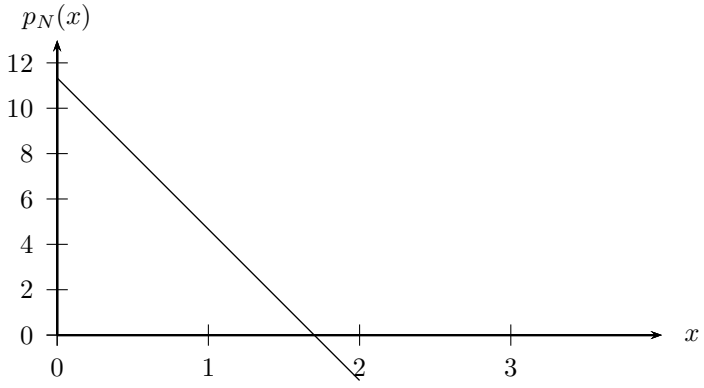


Abbildung 3.4.14: Graphische Darstellung der Preisnachfragefunktion $p_N(x) = -6.6667x+11.3333$

Durch die obige Rechnung haben wir die Umkehrfunktion von N berechnet, wobei wir auf einen Variablentausch verzichten, da die Variablen ökonomisch interpretiert sind.

Auch hier gilt, dass die Funktion nur im Bereiche mit den positiven Funktionswerten sinnvoll interpretierbar ist.

Bemerkung 3.4.11. *Ist eine Preisnachfragefunktion $p_N(x)$ gegeben, kann man durch Auflösung nach x die nachgefragte Menge als Funktion des Preises ausdrücken.* ◊

Preisangebotsfunktion Je höher der Preis, desto mehr wird auf einem Markt angeboten, und zwar wird immer genau eine Menge angeboten. Entsprechend kann man den Zusammenhang von Preis und angebotener Menge als Funktion darstellen, die im ökonomisch sinnvollen Intervall ansteigen muss. Man könnte entsprechend ein affines Polynom mit positiver Steigung verwenden, um den Zusammenhang zwischen Preis und angebotener Menge darzustellen (s. für ein Beispiel die folgende Abbildung 3.4.15)

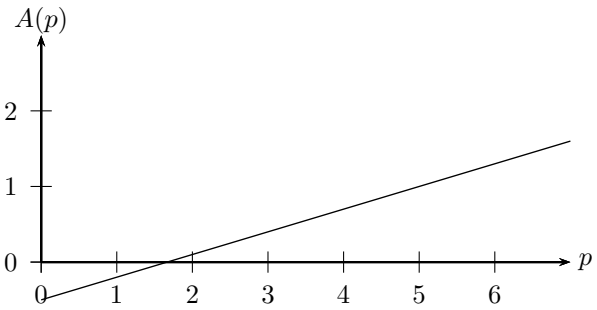


Abbildung 3.4.15: Graphische Darstellung einer Funktion der Angebotsmenge in Abhängigkeit vom Preis $A(p) = 0.3p - 0.5$

Die Funktion ist sinnvoll interpretierbar für positive Preise und positive Mengen (also im ersten Quadranten und für nicht-negative Mengen). Die Nullstelle der Funktion gibt an, unter welchem Preis gar kein Gut angeboten wird. Im Beispiel $A(p) = 0.3p - 0.5$ beträgt bei einem Preis, der tiefer als $-\frac{-0.5}{0.3} = 1.666\,7$ ist, die Angebotsmenge 0.

Auch bei Funktionen, welche einen Zusammenhang zwischen Preis und Angebot herstellen, ist es üblich, die angebotene Menge auf die $x - Achse$ zu setzen. Für die obige Funktion würde man aus $x = 0.3p_A(x) - 0.5$ die Darstellung

$$p_A(x) = \frac{x + 0.5}{0.3} = 3.3333x + 1.66666$$

gewinnen (s. Abbildung 3.4.16)

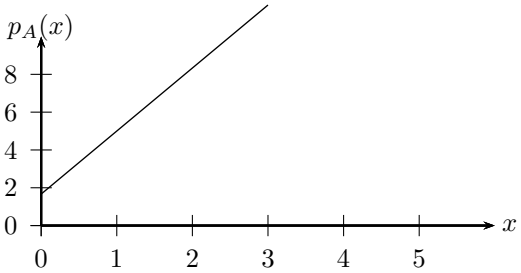


Abbildung 3.4.16: Graphische Darstellung der Preisangebotsfunktion $p_A(x) = 3.33333x + 1.66666$

.

Das Marktgleichgewicht (von Angebot und Nachfrage) ist definiert als Schnittpunkt von Preisangebots- und Preisnachfragefunktion. Der Preis im Schnittpunkt wird „Gleichgewichtspreis“ und die Menge im Schnittpunkt „Gleichgewichtsmenge“ genannt.

Beispiel 3.4.12. *Seien die Preisnachfragefunktion p_N und die Preisangebotsfunktion p_A wie folgt gegeben:*

$$p_N(x) = -0.8x + 3$$
$$p_A(x) = 1.2x + 0.2$$

Der Schnittpunkt dieser beiden Polynome ist $(1.4, 1.88)$. *Damit beträgt die Gleichgewichtsmenge* 1.4 *Mengeneinheiten und der Gleichgewichtspreis* 1.88 *Geldeinheiten (s. Abbildung 3.4.17)*

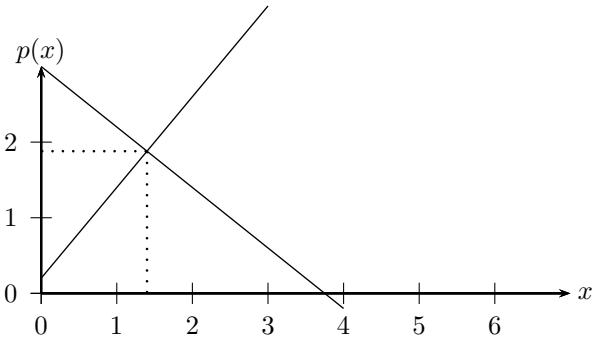


Abbildung 3.4.17: Graphische Darstellung einer Preisangebots- und Preisnachfragefunktion; Gleichgewichtspreis und -menge.

Folgende Überlegung zeigt, wieso der Schnittpunkt der beiden Funktionen das Marktgleichgewicht darstellt. Ist der Preis höher als 1.88, *z.B.* 2.5, *so beträgt die nachgefragte Menge x in* $2.5 = -0.8x+3$, *d.h.* $x = 0.625$. *Die angebotene Menge beträgt demgegenüber x in* $2.5 = 1.2x+0.2$, *d.h.* $x = 1.916\,7$. *Es entsteht ein Angebotsüberschuss von* $1.916\,7 - 0.625 = 1.291\,7$. *Der Markt ist nicht im Gleichgewicht (s. Abbildung 3.4.18). Ist demgegenüber der Preis zu tief, z.B.* 1.25, *so beträgt die nachgefragte Menge x in* $1.25 = -0.8x + 3$, *d.h.* $x = 2.187\,5$, *während die angebotene Menge x in* $1.25 = 1.2x + 0.2$, *d.h.* $x = 0.875$ *ist. Damit entsteht ein Nachfrageüberschuss von* $2.187\,5 - 0.875 = 1.312\,5$ *(s. Abbildung 3.4.19). Im Gleichgewicht sind nachgefragte Menge und angebotene Menge entsprechend im Schnittpunkt der beiden Geraden.*

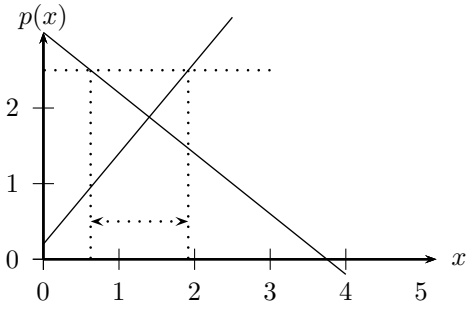


Abbildung 3.4.18: Preis zu hoch: Angebot übersteigt Nachfrage. Die Strecke mit den Pfeilen drückt den Angebotsüberschuss aus

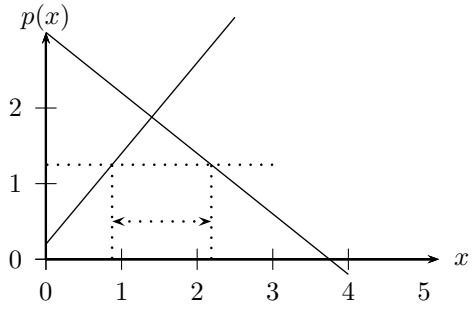


Abbildung 3.4.19: Preis zu tief: Nachfrage übersteigt Angebot. Die Strecke mit den Pfeilen drückt Nachfrageüberschuss aus

◊

Beispiel 3.4.13. *Wird eine Steuer s erhoben, so verändert sich das Marktgleichgewicht. Seien die folgende Preisnachfragefunktion und die Preisangebotsfunktion gegeben:*

$$p_N(x) = ax + b$$
$$p_A(x) = cx + d.$$

Das neue Marktpreisgewicht wird errechnet, indem man von der Preisnachfragefunktion die Steuer abzieht:

$$p'_N(x) = ax + b - s$$

und die Schnittmenge mit der Angebotsfunktion berechnet:

$$\begin{aligned} ax + b - s = cx + d &\Longleftrightarrow ax - cx = s - b + d \Longleftrightarrow \\ x\,(a - c) = s - b + d &\Longleftrightarrow \\ x = \frac{s - b + d}{a - c} &= \frac{b - s - d}{c - a}. \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

Offensichtlich kann man ebenso gut die Steuer zur Angebotsfunktion hinzuzählen, da

$$ax + b - s = cx + d \Longleftrightarrow ax + b = cx + d + s.$$

Der Beweis, dass das neue Marktgleichgewicht derart berechnet werden kann, ergibt sich durch folgende Überlegungen: Die Menge, die bei einem Preis von p nachgefragt wird (Umkehrfunktion!), ist:

$$p_N^{-1}(p) = x_N(p) = \frac{p - b}{a}.$$

Die Menge, die bei einem Preis von p angeboten wird:

$$p_A^{-1}(p) = x_A(p) = \frac{p - d}{c}.$$

Von einem spezifischen vom Nachfrager bezahlten Preis p erhält der Anbieter nach Einführung der Steuer s nur mehr $p - s$. Die angebotene Menge zum erhaltenen Preis $p - s$ ist damit

$$p_A^{-1}(p - s) = x_A(p - s) = \frac{p - s - d}{c}$$

Im Marktgleichgewicht ist die nachgefragten Menge mit der angebotene Menge identisch, also wenn

$$\frac{p - b}{a} = \frac{p - s - d}{c}.$$

Aufgelöst ergibt sich der folgende Marktpreis p in der Gleichgewichtsmenge:

$$\begin{aligned} \frac{p - b}{a} = \frac{p - s - d}{c} &\Longleftrightarrow \\ pc - bc = ap - as - ad &\Longleftrightarrow \\ pc - ap = bc - as - ad &\Longleftrightarrow \\ p\,(c - a) = bc - as - ad &\Longleftrightarrow \\ p = \frac{bc - as - ad}{c - a} & \end{aligned}$$

Der Preis, den der Anbieter erhält, ist damit

$$p_a = \frac{bc - as - ad}{c - a} - s$$

Die Gleichgewichtsmenge ist damit

$$\begin{aligned} x_N(\frac{bc-as-ad}{c-a}) &= \frac{\frac{bc-as-ad}{c-a}-b}{a} \\ &= \frac{\frac{bc-as-ad-cb+ba}{c-a}}{a} \\ &= \frac{\frac{-as-ad+ba}{c-a}}{a} \\ &= \frac{b-s-d}{c-a} \end{aligned}$$

Dies entspricht der obigen Formel (3.4.7) ◊

Die Budgetlinie Wir gehen davon aus, dass eine Person ein bestimmtes Budget m hat. Die Person kaufe die Menge x_1 des Gutes 1 und die Menge x_2 des Gutes 2. Gegeben seien zudem die Preise p_1 und p_2 dieser Güter. Die Ausgaben für eine Mengenkombination (x_1, x_2) dieser zwei Güter belaufen sich dann auf

$$a(x_1, x_2) = x_1p_1 + x_2p_2.$$

Diese Ausgaben können nicht grösser sein als m, d.h. es gilt

$$x_1p_1 + x_2p_2 \leq m.$$

Die Gerade, die durch

$$x_1p_1 + x_2p_2 = m \tag{3.4.8}$$

gegeben ist, liefert alle maximalen Mengenkombinationen, die bei gegebenem Budget und gegebenen Preisen möglich sind. Löst man nämlich die Gleichung nach x_2 auf, erhält man

$$x_2 = \frac{m - x_1p_1}{p_2} = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1 \tag{3.4.9}$$

Für jedes x_1 erhält man also das entsprechende x_2, so dass die Kombination von x_1 und x_2 das Budget aufbraucht. Es liegt also eine Funktion vor, und wir schreiben deshalb auch

$$x_2(x_1) = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1, \tag{3.4.10}$$

um die Abhängigkeit des Wertes x_2 von x_1 auszudrücken. Die durch (3.4.10) beschriebene Funktion (Gerade) wird „Budgetlinie“ genannt.

Bemerkung 3.4.14. *Die Ausgangslage mit zwei Gütern ist übrigens allgemeiner als man meinen könnte. Das zweite Gut kann man z.B. als „zusammengesetztes Gut“ betrachten - es umfasst alle übrigen Güter. Man kann diese übrigen Güter in Geld messen und x_2 als die Menge des verbleibenden Geldes*

$$x_2p_2 = m - x_1p_1$$

betrachten, wobei der Preis von Geld 1 ist (ein Franken kostet einen Franken) und man deshalb $x_1p_1 + x_2 = m$ erhält. ◊

Liegt der Konsum auf der Budgetlinie und kauft man vom Gut 1 die Menge Δ_1 mehr (z.B. $\Delta_1 = 3$ Mengeneinheiten), beträgt die gekaufte Menge des Gutes 1 nun $x_1 + \Delta_1$. Die Ausgaben für das Gut 1 betragen also

$$p_1(x_1 + \Delta_1).$$

Offenbar muss man dann auf Δ_2 Mengeneinheiten des zweiten Gutes verzichten, um den Mehrkonsum des Gutes 1 zu kompensieren. Dabei gilt offensichtlich:

$$p_1(x_1 + \Delta_1) + p_2(x_2 + \Delta_2) = m \tag{3.4.11}$$

Substrahiert man die Gleichung (3.4.8) von der Gleichung (3.4.11), so erhält man:

$$\begin{aligned} p_1(x_1+\Delta_1)+p_2(x_2+\Delta_2)-(x_1p_1+x_2p_2)=0 &\Longleftrightarrow \\ p_1\Delta_1+p_2\Delta_2=0 &\Longleftrightarrow \\ \frac{\Delta_1}{\Delta_2}=-\frac{p_2}{p_1} & \end{aligned}$$

Damit entspricht $\frac{\Delta_1}{\Delta_2}$ - das Verhältnis des Mehrkonsums von Gut 1 und des Minderkonsums von Gut 2 - der Steigung der Budgetlinie (s. Gleichung (3.4.9)). Ökonomen sagen manchmal, die Steigung der Budgetlinie messe die Opportunitätskosten des Konsums des Gutes 1: der Verzicht auf die Möglichkeit (= Opportunität), einen Teil des Gutes 2 zu konsumieren, stellt die Kosten dar, welche der Mehrkonsum von Gut 1 verursacht.

Steigt das Einkommen einer Person (das Budget wird grösser) bei gleichbleibenden Preisen, so sieht man an (3.4.9), dass sich nur der Ordinatenabschnitt der Budgetlinie verändert. Die Steigung (Opportunitätskosten) bleibt unverändert. Steigt p_1 bei fixen p_2 und m, bleibt der Ordinatenabschnitt unverändert und die Steigung wird negativer (entfernt sich von der Horizontalen). Steigt p_2 bei fixem p_1 und m, wird der Ordinatenabschnitt kleiner und die Steigung wird grösser (nähert sich der Horizontalen). Steigen beide Preise um den Faktor $t>0$, so ergibt sich eine Parallelverschiebung der Budgetlinie nach links, denn

$$\begin{aligned} x_1tp_1+x_2tp_2=m &\Longleftrightarrow \\ t(x_1p_1+x_2p_2)=m &\Longleftrightarrow \\ x_1p_1+x_2p_2=\frac{m}{t} & \end{aligned}$$

und man erhält:

$$x_2(x_1)=\frac{m}{tp_2}-\frac{p_1}{p_2}x_1,$$

also eine Verringerung des Ordinatenabschnittes bei gleichbleibender Steigung. Steigen die Preise und das Budget um den gleichen Faktor $t>0$, so verändert sich die Budgetlinie nicht, da sich dann t wegkürzt:

$$\begin{aligned} x_1tp_1+x_2tp_2=tm &\Longleftrightarrow \\ t(x_1p_1+x_2p_2)=tm &\Longleftrightarrow \\ x_1p_1+x_2p_2=m & \end{aligned}$$

Für ein Zahlenbeispiel zu etlichen dieser Ergebnisse siehe in den Übungen.

Spar-Einkommensfunktion Je mehr Einkommen in einer Volkswirtschaft anfällt, desto mehr wird gespart. Dabei steigt nicht nur die absolute Sparsumme, sondern auch der Anteil des Gesparten am Einkommen (= Sparquote) - entsprechend wird anteilsmässig mit steigendem Einkommen immer weniger für den Konsum ausgegeben. Da der Anteil des Gesparten steigt, entwickelt sich die gesparte absolute Sparsumme nicht proportional, wobei wir unter „proportional“ verstehen, dass ein Zuwachs um eine Einheit zu jeweils identischen Zuwächsen führt (Dies ist für affine Polynome der Fall, da die Steigung konstant ist). Affine Polynome sind entsprechend nicht geeignet, um den Zusammenhang von Einkommen und absoluter gesparter Summe darzustellen. Andererseits entwickelt sich eventuell der Anteil proportional. Entsprechend könnte die Sparquote unter Verwendung affiner Polynome als Funktion des Einkommens dargestellt werden.

Übungen

1. Wir wissen, dass eine (Gesamt-)Kostenfunktion durch die Punkte $(10,18)$ und $(30,32)$ läuft (erste Stelle produzierte Menge, 2. Stelle Kosten). Berechnen Sie eine Gleichung für die Kostenfunktion, unter der Voraussetzung, dass die Berechnung eines Polynoms durch die

Punkte sinnvoll ist. Geben Sie die Fixkosten an. Geben sie die Funktion der variablen Kosten an. Wieviel kostet eine Produktion von 25 Mengeneinheiten? Wieviel betragen die variablen und die fixen Kosten bei dieser Produktion?

2. Sei die folgende Angebotsfunktion gegeben: $p_A(x) = 5 + 3x$.
Sei ferner die folgende Nachfragefunktion gegeben: $p_N(x) = 20 - 2x$.

   (a) Berechnen Sie die Gleichgewichtsmenge und den Gleichgewichtspreis.

   (b) Zu welchem Preis ist die angebotene Menge 0?

   (c) Zu welchem Preis ist die nachgefragte Menge 0?

   (d) Berechnen Sie die angebotene Menge zu einem Preis von 6.

   (e) Berechnen Sie den Preis, bei dem eine Menge von 4 angeboten wird.

   (f) Berechnen Sie die nachgefragte Menge bei einem Preis von 3.

   (g) Berechnen Sie den Preis, zu dem eine Menge von 4 nachgefragt wird.

3. Die Graphen der affinen Preisnachfrage- und Preisangebotsfunktionen für ein bestimmtes Gut sind durch jeweils zwei Punkte gegeben: Die Nachfragekurve verläuft durch $(100, 10)$ und $(50, 40)$ (erste Stelle nachgefragte Menge, zweite Stelle Preis), Die Angebotskurve durch $(90, 58)$ und $(30, 38)$ (erste Stelle angebotene Menge, zweite Stelle Preis). Wie hoch ist der Nachfrageüberschuss bei einem Preis von 40 GE/ME? (Nachfrageüberschuss ist definiert als die Menge, die nachgefragt wird, aber nicht angeboten wird).

4. Die Versorgung einer Unternehmung mit elektrischer Energie kann zu zwei alternativen Tarifen erfolgen: Tarif I: Grundgebühr 35 CHF/Monat; Pro kWh: 0.24 CHF/kWh
Tarif II: Grundgebühr 13 CHF/Monat; Pro kWh: 0.38 CHF/kWh.

   (a) Berechnen Sie für jede der Tarifstrukturen die Kostenfunktion.

   (b) Zeichnen Sie die beiden Kostenfunktionen ins selbe Koordinatensystem.

   (c) Berechnen Sie den monatlichen Energieverbrauch, der bei beiden Tarifstrukturen zu den selben Kosten führt ($= x_g$).

   (d) Welche Tarifstruktur ist für höhere Bezugsmengen als x_g günstiger, welche für tiefere Bezugsmengen günstiger?

5. (Aus Berufsmaturaprüfung Brig 2015) Eine Unternehmung A produziert exklusive Keramikheizofen. Die monatlichen Fixkosten belaufen sich auf CHF 80000. Die Gewinnschwelle wird bei 125 Stück erreicht, wo Erlös und Kosten je CHF 415000 betragen. Beim Konkurrenzunternehmen B liegt die monatliche Gewinnschwelle bei 130 Stück. Die variablen Kosten pro Stück betragen CHF 2920, der Erlös pro Stück CHF 3520. Es wird davon ausgegangen, dass sämtliche Kosten und Erlösfunktionen linear oder affin sind (x = Anzahl Stück, $f(x)$ in CHF).

   (a) Berechnen Sie die Kosten- und Erlösfunktion der Firmen A.

   (b) Um welchen Betrag sind die Fixkosten bei B tiefer als bei A?

   (c) Ein drittes Unternehmen C weist folgenden Funktionen auf: $K_C(x) = 2850x + 200000$ und $E_C(x) = 3650x$. Wo liegt der Gewinnbereich der Firma?

   (d) Durch die Verwendung eines günstigeren Rohstoffs können die variablen Kosten der Firma A um 15% gesenkt werden. Wo liegt nun die Gewinnschwelle?

6. Die monatliche Nachfrage nach Sekt bei einem Anbieter richtet sich nach der affinen Funktion p_N, deren Graph durch die Punkte $(150, 37)$ und $(400, 32)$ geht (Menge an erster Stelle); das Angebot des Einzelhändlers richtet sich nach der affinen Funktion p_A, deren Graph durch die Steigung $m_f = \frac{3}{50}$ und den Punkt $(550, 37)$ gegeben ist (Menge an erster Stelle).

(a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen der Nachfragefunktion p_N und der Angebotsfunktion p_A, wenn eine Kapazitätsgrenze von 600 Flaschen gegeben ist (zeichnen Sie die Situation).

(b) Berechnen Sie den Gleichgewichtspreis und die Gleichgewichtsmenge

(c) Durch die Erhöhung der Sektsteuer um CHF 3.- pro Flasche soll das Steueraufkommen vermehrt und der Alkoholkonsum gesenkt werden. Um wie viele Mengeneinheiten geht der Sektabsatz aufgrund der Sektsteuererhöhung zurück?

(d) Um wie viele CHF steigt die abzuführende Sektsteuer, wenn die Sektsteuer bisher CHF 1.- betrug.

7. Das Budget einer Person betrage 5000 (Nettolohn pro Monat). Gut 1 koste CHF 5.- und Gut 2 koste CHF 30.-.

(a) Berechnen Sie die Budgetlinie.

(b) Wieviel Einheiten des Gutes 2 können maximal gekauft werden, wenn man 20 Einheiten des Gutes 1 gekauft hat?

(c) Wir nehmen an, p_1 steige von 5 auf 7 (Budget und p_2 bleiben unverändert). Geben Sie die neue Budgetlinie an und überprüfen Sie am Beispiel die Behauptungen der obigen Theorie für Änderungen von p_1.

(d) Wir nehmen an, p_2 steige von 30 auf 35 (Budget und $p_1 = 5$ bleiben unverändert). Geben Sie die neue Budgetlinie an und überprüfen Sie am Beispiel die Behauptungen der obigen Theorie für Änderungen von p_2.

(e) Wenn der Preis von p_1 auf 7 steigt, um wieviel muss dann der Einkauf von Gut 1 sinken, damit der Einkauf von Gut 2 unverändert bleibt?

8. Suchen Sie einen ökonomischen Zusammenhang, den man mit Hilfe eines affinen Polynoms ausdrücken kann.

Lösungen

1. Wir berechnen mit einer der eingeführten Methoden:

$$a_1 = \frac{32-18}{30-10} = \frac{7}{10} = 0.7$$
$$a_0 = 32 - 0.7 \cdot 30 = 11$$

oder mit einem Gleichungssystem:

$$18 = a_1 10 + a_0$$
$$32 = a_1 30 + a_0$$

mit den Lösungen $a_0 = 11, a_1 = \frac{7}{10}$.
Man erhält also die Kostenfunktion

$$K(x) = 0.7x + 11$$

Der Schnittpunkt mit der $y - Achse$ ist $(0, 11)$, womit die Fixkostenfunktion $K_f(x) = 11$ Geldeinheiten beträgt. Die variablen Kostenfunktion ist damit $K_v(x) = 0.7x$.
Bei einer Produktion von 25 ME fallen Kosten von $K(25) = 0.7 \cdot 25 + 11 = 28.5$ GE an. Die Fixkosten sind für alle x identisch, somit 11 GE. Die variablen Kosten sind $K_V(25) = 0.7 \cdot 25 = 17.5$ GE.

(a) Wir finden den Schnittpunkt der beiden Geraden durch die Lösung des folgenden Gleichungssystems

$$p_A(x) = 5 + 3x$$
$$p_N(x) = 20 - 2x$$

mit $p_A(x) = p_N(x)$ und erhalten den Schnittpunkt $(3, 14)$. Damit ist die Gleichgewichtsmenge 3 ME und der Gleichgewichtspreis 14 GE.

(b) $p_A(0) = 5 + 3 \cdot 0 = 5$.

(c) $p_N(0) = 20 - 2x = 20 - 2 \cdot 0 = 20$.

(d) Die angebotene Menge zu einem Preis von $6 : 6 = 5 + 3x \Longrightarrow x = \frac{6-5}{3} = 0.333\,33$ ME

(e) Der Preis, bei dem eine Menge von 4 angeboten wird: $p_A(4) = 5 + 3 \cdot 4 = 17$ GE

(f) Die nachgefragte Menge bei einem Preis von 3. $3 = 20 - 2x \Longrightarrow x = \frac{3-20}{-2} = 8.5$ ME

(g) Der Preis, zu dem eine Menge von 4 nachgefragt wird. $p_N(4) = 20 - 2 \cdot 4 = 12$ GE

2.

$$10 = 100a + b$$
$$40 = 50a + b$$

$\Longrightarrow a = -\frac{3}{5}, b = 70$ und $p_N(x) = -\frac{3}{5}x + 70$.

$$58 = 90a + b$$
$$38 = 30a + b$$

$\Longrightarrow a = \frac{1}{3}, b = 28$ und $p_A(x) = \frac{1}{3}x + 28$.
Gleichgewichtsmenge: $-\frac{3}{5}x + 70 = \frac{1}{3}x + 28 \Longrightarrow x = 45$
Gleichgewichtspreis: $p_A(45) = \frac{1}{3} \cdot 45 + 28 = 43$
Nachfrageüberschuss: $p_N(x) = -\frac{3}{5} \cdot x + 70 = 40 \Longrightarrow x_N = 50$
$p_A(x) = \frac{1}{3} \cdot x + 28 = 40 \Longrightarrow x_A = 36$
$x_N - x_A = 14$.(s. Abbildung 3.4.20)

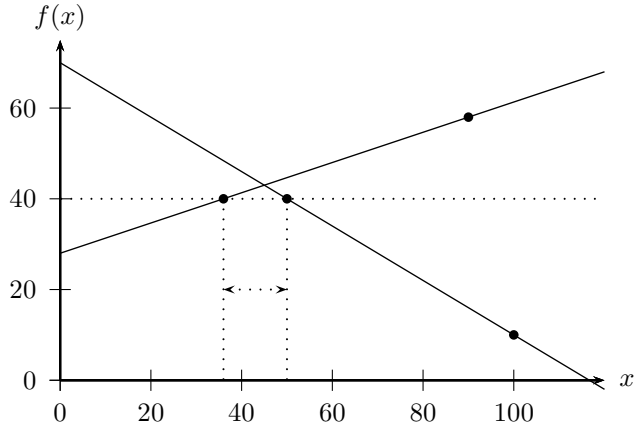


Abbildung 3.4.20: Graphische Darstellung der Übung mit den vorgegebenen Punkten und den durch die Punkte bestimmten Geraden; der Nachfrageüberschuss ist durch die Strecke mit den Pfeilen dargestellt

3. Man erhält mit Tarif I: Grundgebühr 35 CHF/Monat; Pro kWh: 0.24 CHF/kWh
Tarif II: Grundgebühr 13 CHF/Monat; Pro kWh: 0.38 CHF/kWh.

(a) $K_1(x) = 35 + 0.24x$ und $K_2(x) = 13 + 0.38x$

(b) Man erhält:

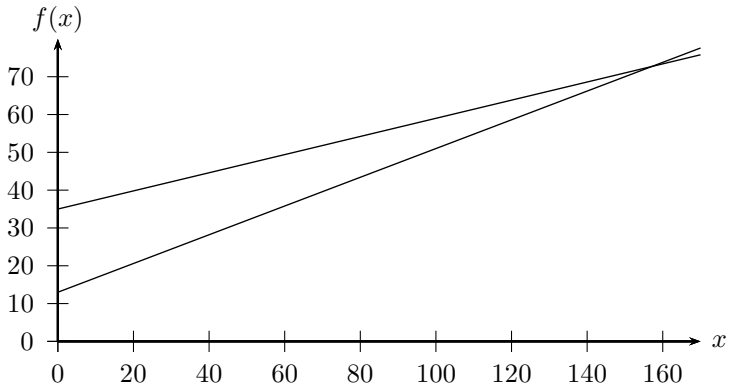


Abbildung 3.4.21: Kostenfunktionen der Übung

(c)
$$35 + 0.24x = 13 + 0.38x$$
Lösung: 157.14kWh.

(d) $K_1(158) = 35 + 0.24 \cdot 158 = 72.92$
$K_2(158) = 13 + 0.38 \cdot 158 = 73.04$
$K_2 > K_1$ für $x > 157.14$kWh und $K_2 < K_1$ für $x < 157.14$kWh.

4. Man erhält mit A Fixkosten CHF 80000; Gewinnschwelle bei 125 Stück (Erlös dort 415000). B Gewinnschwelle bei 130 Stück; variablen Kosten CHF 2920, der Erlös pro Stück CHF 3520. K_A Kostenfunktion der Unternehmung A, E_A Erlösfunktion der Unternehmung A, K_f^B Fixkostenfunktion der Unternehmung B.

(a) $K_A(x) = 80000 + xa$, $K_A(125) = 415000$; Eingesetzt:
$$415000 = 80000 + 125a$$
Lösung: 2680 Kostenfunktion: $K_A(x) = 80000 + 2680x$.
$E_A(x) = 415000x/125 = 3320x$

(b) $K_B(x) = K_f^B + 2920x$; $E(130) = 130 \cdot 3520 = 457\,600 = K_B(130)$.
$$457600 = K_f^B + 2920 \cdot 130$$
Lösung: $K_f^B = 78\,000$: $K_B(x) = 78000 + 2920x$
Unterschied Fixkosten: $80000 - 78000 = 2000$

(c) Mit $K_C(x) = 2850x + 200000$ und $E_C(x) = 3650x$: $G_C(x) = E_C(x) - K_C(x) = 3650x - (2850x + 200000) = 800x - 200\,000$
$$800x - 200\,000 > 0$$
für $]250, \infty[$.

(d) $K_A(x) = 80000 + 2680 \cdot 0.85x = 2278x + 80000$; $R_A(x) = 3320x$
$$\begin{aligned} 2278x + 80000 &= 3320x \\ 3320x - 2278x &= 80000 \\ 1042x &= 80000 \end{aligned}$$
Lösung: $\frac{80\,000}{1042} = 76.775$. Die Gewinnschwelle wird also schneller erreicht.

5. Er ergibt sich:

   (a)
   $$37 = 150a + b$$
   $$32 = 400a + b$$
   $\Longrightarrow a = -\frac{1}{50}, b = 40$ und $p_N(x) = -\frac{1}{50}x + 40$.
   $$37 = \frac{3}{50} \cdot 550 + b$$
   $\Longrightarrow b = 4$ und $p_A(x) = \frac{3}{50}x + 4$ für $x \in [0, 600]$

   (b) Gleichgewichtsmenge: $-\frac{1}{50}x + 40 = \frac{3}{50}x + 4 \Longrightarrow x = 450$
   Gleichgewichtspreis: $p_N(450) = -\frac{1}{50} \cdot 450 + 40 = 31$.

   (c) Wir setzen gemäss obigem Beispiel 3.4.13 ist die Nachfragefunktion (Nettopreis) bei einer Steuer s damit gegeben durch
   $$-\frac{1}{50}x + 37 = \frac{3}{50}x + 4$$
   $x = \frac{825}{2} = 412.5 < 450$

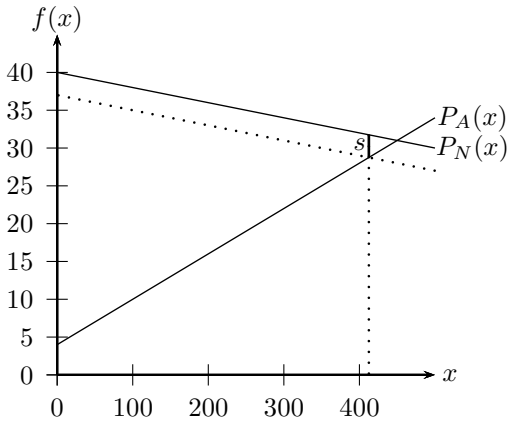


Abbildung 3.4.22: Marktgleichgewicht mit Konsumentensteuer s

   Der Rückgang des Alkoholkonsums in Sektform beträgt $450 - 412.5 = 37.5$ Flaschen. Der Preis, den der Lieferant erhält, ist $p_O(412.5) = -\frac{1}{50} \cdot 412.5 + 37 = 28.75$. Der Lieferant ist zu diesem Preis bereit, die Menge 412.5 zu liefern. Der Konsument muss zu den 28.75 noch 3 GE Steuer zahlen, womit ihn das Produkt $p_N(412.5) = -\frac{1}{50} \cdot 412.5 + 40 = 31.75$ zu stehen kommt (s. Abbildung 3.4.22).

   (d) Alte Steuer: $450 \cdot 1 = 450$. Neue Steuer: $412.5 \cdot 4 = 1650$. Differenz: $1650 - 450 = 1200$. Entsprechend kann der Staat beide Ziele erreichen (Erhöhung des Steuersubstrats; Senkung des Alkoholkonsums, wenigstens in seiner Sektform).

6. Man erhält:

   (a) die Budgetlinie:
   $$5x_1 + 30x_2 = 5000$$
   oder nach x_2 aufgelöst:
   $$x_2(x_1) = \frac{5000}{30} - \frac{5}{30}x_1$$
   $$= \frac{500}{3} - \frac{1}{6}x_1$$

(b) Konsumiert man 20 Einheiten des Gutes 1, so können maximal

$$x_2(20) = \frac{500}{3} - \frac{1}{6} \cdot 20 = \frac{490}{3} = 163.33$$

Einheiten des zweiten Gutes konsumiert werden.
Kontrolle $20 \cdot 5 + \left(163 + \frac{1}{3}\right) \cdot 30 = 5000$

(c) p_1 steigt von 5 auf 7. Man erhält:

$$7x_1 + 30x_2 = 5000$$
$$x_2(x_1) = \frac{500}{3} - \frac{7}{30}x_1$$

Der Ordinatenabschnitt bleibt also unverändert, die Steigung wird negativer (bewegt sich von der Horizontalen weg!), da $-\frac{7}{30} = -0.233\,33 < -\frac{5}{30} = -0.166\,67$.

(d) p_2 steigt von 30 auf 35. Man erhält:

$$5x_1 + 35x_2 = 5000$$
$$x_2(x_1) = \frac{1000}{7} - \frac{1}{7}x_1$$

Der Ordinatenabschnitt ist kleiner geworden, da $\frac{1000}{7} < \frac{500}{3} = \frac{1000}{6}$. Die Steigung ist grösser geworden (flacher, d.h. näher zur Horizontalen gerückt), da $-\frac{1}{7} = -0.142\,86 > -\frac{1}{6} = -0.166\,67$.

(e) Es muss gelten

$$163 + \frac{1}{3} = \frac{500}{3} - \frac{7}{30}x_1$$

Lösung: $x_1 = \frac{100}{7} = 14.286$
Kontrolle: $14.286 \cdot 7 + \left(163 + \frac{1}{3}\right) 30 = 5000$.

7. Ein Lösungsbeispiel: Auf die Rechnung wird von einer Unternehmung ab einer Summe von 100 GE auf den Betrag, der 100 GE übersteigt, ein Rabatt von 5% gewährt. In Abhängigkeit vom Rechnungsbetrag steigt der Rabatt in GE proportional und kann entsprechend durch affines Polynom dargestelt werden, das durch den Punkt $(100, 0)$ verläuft und eine Steigung von 0.05 hat (bei einem Rechnungsbetrag von 200 GE fällt ein Rabatt von 5 GE an. Entsprechend ist die Steigung $\frac{5}{100} = 0.05$; damit gilt $0 = 0.05 \cdot 100 + a_0$). Die Geradengleichung sieht entsprechend wie folgt aus $Rabatt(Rechnungsbetrag) = 0.05 \cdot Rechnungsbetrag - 5$ für $Rechnungsbetrag \in [100, \infty[$.

3.4.2 Lineare Polynome

Definition 3.4.15. *f ist ein lineares Polynom genau dann, wenn*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = a_1 x \text{ mit } a_1 \neq 0$$

$\Diamond$

- Gemäss Definition gilt für lineare Polynome $a_0 = 0$. Lineare Polynome sind damit in einem gewissen Sinne Spezialfälle affiner Polynomen mit $a_0 = 0$, wobei wir diesen Fall bei affinen Polynomen ausgeschlossen haben. Der Grund liegt darin, dass affine Polynome in bezug auf eine wichtige Eigenschaft von linearen Polynomen verschieden sind:
  In der linearen Algebra sind lineare Funktionen Funktionen, für die gilt:

$$f(bx) = bf(x)$$
$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

für $b \in \mathbb{R}$. Dies gilt für $f(x) = a_1 x$, wie man sich überzeugen kann:

$$f(bx) = ba_1 x = bf(x)$$
$$f(x+y) = a_1(x+y) = a_1 x + a_1 y = f(x) + f(y)$$

Dies gilt aber nicht für $f(x) = a_0 + a_1 x$ mit $a_0 \neq 0 \neq a_1$. Entsprechend ist $f(x) = a_0 + a_1 x$ im Sinne der linearen Algebra keine lineare Funktion. Andererseits ist der Graph von $f(x) = a_0 + a_1 x$ eine Gerade, weshalb auch $f(x) = a_0 + a_1 x$ oft „lineare Funktion“ genannt wird.

- Der Graph von f ist $\{(x, a_1 x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Der Graph weist überabzählbar viele geordnete Paare auf. Mit $a_1 = 5$, weisst jedes geordnete Paar als zweite Komponente $5x$ auf, wobei x die erste Komponente der geordneten Paare ist. Ein Ausschnitt des Graphen von $f(x) = 5x$ wäre damit $\{(10, 50), (0.5, 2.5), (0.1, 0.5), (-200, -1000), ...\}$.

- Bei der graphischen Darstellung eines linearen Polynoms handelt es sich um eine Gerade mit der Steigung a_1. Sie schneidet die y-Achse in $(0, 0)$, da $a_0 = 0$.

- Ein lineares Polynom ist durch einen Punkt $(x_1, f(x_1))$, $x_1 \neq 0 \neq f(x_1)$, bestimmt (d.h. kennen wir ein geordnetes Paar $(x_1, f(x_1))$ der Funktion, so dass $x_1 \neq 0$, so können wir das Polynom durch eine Formel hinschreiben. Es gilt dann

$$f(x) = \frac{f(x_1)}{x_1} x.$$

denn in die Funktionsgleichung $f(x) = a_1 x$ eingesetzt erhält man

$$f(x_1) = a_1 x_1 \Longrightarrow$$
$$a_1 = \frac{f(x_1)}{x_1}$$

Die graphische Darstellung des Graphen ergibt eine Gerade durch die Nullstelle mit der Steigung $\frac{f(x_1)}{x_1}$ (oder eine Gerade durch die Nullstelle und den Punkt $(x_1, f(x_1))$ (s. Abbildung 3.4.23)

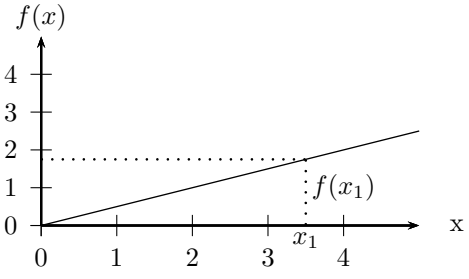


Abbildung 3.4.23: Graphische Darstellung eines linearen Polynoms

- Zu jeder affinen Funktion gibt es eine parallele lineare Funktion. Die Menge der Elemente der Graphen der zu einer linearen Funktion parallelen affinen Funktionen ist mit der Ebene $\mathbb{R}^2$ identisch.

- Die linearen Polynome sind bijektiv (Analoge Argumentation zum affinen Fall $f(x) = a_1 x + a_0$, s. Seite 63). Da lineare Polynome durch $f(x) = a_1 x$ gegeben sind, ist die Umkehrfunktion durch $f^{-1}(x) = \frac{x}{a_1}$ gegeben ($y = a_1 x$ genau dann, wenn $\frac{y}{a_1} = x$. Will man ausdrücken, dass f^{-1} $\frac{y}{a_1}$ der Zahl y zuordnet, schreibt man $f^{-1}(y) = \frac{y}{a_1}$. Indem man (fakultativ) y durch x ersetzt, erhält man $f^{-1}(x) = \frac{x}{a_1}$). Die Steigung der Umkehrfunktion linearer Polynome ist damit $\frac{1}{a_1}$.

- Normale Dreisätze bestehen in der Berechnung von Punkten auf einem linearen Polynom, das durch einen Punkt gegeben ist. Beispiel: 5 Mengeneinheiten kosten 7.5 - gegeben ist also der Punkt $(5, 7.5)$. Wieviel kosten 8 Mengeneinheiten? Wir setzen voraus, dass es keinen Mengenrabatt gibt und dass mehr oder weniger Mengeneinheiten proportional mehr oder weniger kosten. Nichts kostet nichts, die Funktion geht also durch den 0-Punkt. Wir können entsprechend die Formel $f(x) = \frac{f(x_1)}{x_1}x$ verwenden, d.h. $f(8) = \frac{7.5}{5} \cdot 8 = 12$ oder gemäss vielleicht in der Schule verwendeten Schritten: wenn 5 Mengeneinheiten 7.5 kosten, kostet eine Mengeneinheit 5 mal weniger als 5 und 8 Mengeneinheiten 8 mal mehr als eine.
  Beim umgekehrten Dreisatz liegt demgegenüber kein Polynom zu Grunde. Beispiel: 8 Arbeiter brauchen für eine Arbeit 5 Tage. Wieviel brauchen 10 Arbeiter dafür? Man setzt voraus, dass sich die Arbeiter gegenseitig bei der Arbeit nicht behindern oder es keine Synergieeffekte gibt und dass jeder Arbeiter gleich effizient ist. Unter diesen nicht immer realistischen Voraussetzungen gilt dann: 1 Arbeiter hat 8 mal länger $(8 \cdot 5)$, 10 Arbeiter haben 10 mal weniger lang als ein Arbeiter, also $\frac{8 \cdot 5}{10}$, d.h. $f(10) = \frac{5 \cdot 8}{10} = 4$. Allgemein berechnen wir $f(x) = \frac{5 \cdot 8}{x}$ für $x \neq 0$. Es handelt sich nicht um ein Polynom, sondern um eine rationale Funktion. Diese Funktionsart wird später behandelt.

- Ökonomisches Beispiel: Funktion der variablen Kosten (ohne Mengenrabatt; keine Skaleneinsparungen), die bereits oben erwähnt wurde. Siehe für ein graphisches Beispiel Abbildung 3.4.24)

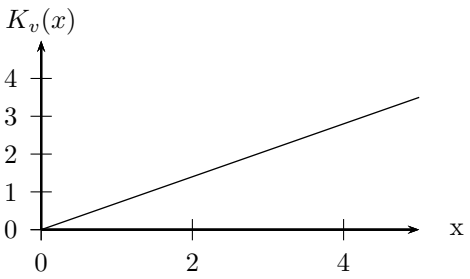


Abbildung 3.4.24: Graphische Darstellung einer Funktion der variablen Kosten

3.5 Polynome 2-ten Grades (Quadratische Funktionen)

Definition 3.5.1. *f ist ein Polynom zweiten Grades genau dann, wenn*

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

mit $a_2 \neq 0$. a_0 oder a_1 dürfen mit 0 identisch sein („oder“ wird im nicht ausschliessenden Sinn verwendet und heisst damit „eines von beiden oder beide“). ◊

- Jeder reellen Zahl x wird genau eine Zahl, nämlich $a_2x^2 + a_1x + a_0$ zugeordnet. Der Graph von f ist damit $\{(x, a_0 + a_1x + a_2x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Mit $a_0 = 3; a_1 = 4, a_2 = 11$ erhält man $f(x) = 11x^2 + 4x + 3$. Ein Ausschnitt des Graphen von $f(x) = 3 + 4x + 11x^2$ wäre damit $\{(10, 1143), (0.5, 7.75), (0.1, 3.51), (-200, 439203), ...\}$. (Rechnen Sie das mit Excel nach).

- Bei der graphischen Darstellung handelt es sich um eine Kurve, welche die y-Achse in a_0 schneidet. Ist $a_2 > 0$, ist die Kurve nach oben geöffnet, $a_2 < 0$ dann ist Kurve nach unten geöffnet, entsprechende Beweise erfolgen später mit noch einzuführenden Methoden, (s. Abbildungen 3.5.25 und 3.5.26). Allerdings kann man sich überlegen, dass der Koeffizient, der x^2 begleitet, die entscheidende Rolle diesbezüglich spielt, da mit steigendem oder sinkendem x sich der Term ax^2 viel stärker verändert als die anderen Terme. Entsprechend bestimmt er das Verhalten der Kurve bei grossem oder kleinem x.

- Polynome zweiten Grades sind nicht surjektiv. Ist $a_2 > 0$, so haben sie ein Minimum. Alle Werte, die kleiner sind als das Minimum, werden nicht zugeordnet. Ist $a_2 < 0$ so haben sie ein Maximum, und die Werte, die grösser sind als das Maximum, werden nicht zugeordnet. Polynome zweiten Grades sind auch nicht injektiv, da derselbe Funktionswerte $y \in Bild\,(f)$ jeweils zwei verschiedenen x zugeordnet wird. Ist nämlich $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$, so gilt $0 = a_2x^2 + a_1x + a_0 - y$ und damit (s. Nullstellen von Polynomen 2. Grades, nächstes Unterkapitel) $x_1 = \frac{-a_1+\sqrt{a_1^2-4(a_0-y)a_2}}{2a_2}$ und $x_2 = \frac{-a_1-\sqrt{a_1^2-4(a_0-y)a_2}}{2a_2}$ mit $f\,(x_1) = y$ und $f\,(x_2) = y$.

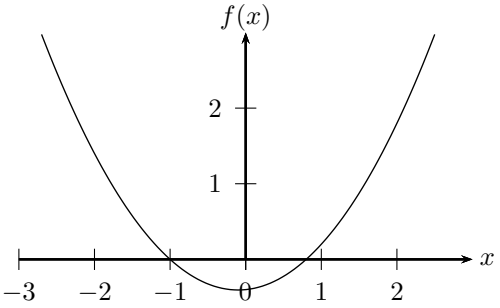


Abbildung 3.5.25: Graphische Darstellung des nach oben geöffneten Graphen des Polynoms zweiten Grades $f(x) = 0.5x^2 + 0.1x - 0.4$ mit $a_2 > 0$

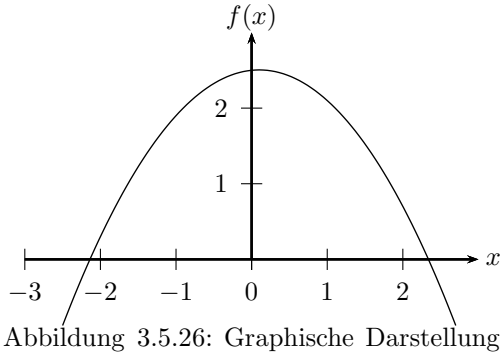


Abbildung 3.5.26: Graphische Darstellung des Graphen des nach unten geöffneten Polynoms zweiten Grades $f(x) = -0.5x^2 + 0.1x + 2.5$ mit $a_2 < 0$

Nullstellen von Polynomen 2-ten Grades

In den Nullstellen muss gemäss Definition 3.4.5 gelten

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \tag{3.5.12}$$

Graphisch an einem Beispiel dargestellt s. die folgende Abbildung 3.5.27:

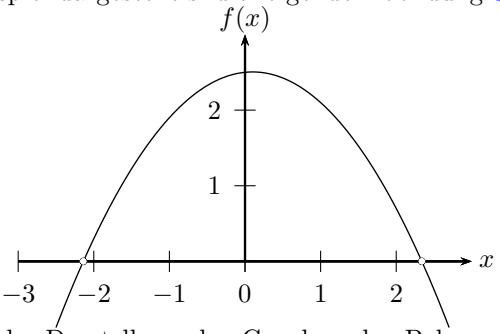


Abbildung 3.5.27: Graphische Darstellung des Graphen des Polynoms zweiten Grades $f(x) = -0.5x^2 + 0.1x + 2.5$ mit den Nullstellen

Durch Multiplikation mit $\frac{1}{a_2}$ erhält man aus (3.5.12)

$$x^2 + \frac{a_1}{a_2}x + \frac{a_0}{a_2} = 0 \tag{3.5.13}$$

Wir halten fest, dass gilt: $\left(x + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 = x^2 + \frac{a_1}{a_2}x + \frac{1}{4}\frac{a_1^2}{a_2^2}$ und damit

$$x^2 + \frac{a_1}{a_2}x = \left(x + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{1}{4}\frac{a_1^2}{a_2^2}$$

Wir können also in der Gleichung (3.5.13) $x^2+\frac{a_1}{a_2}x$ durch $\left(x+\frac{a_1}{2a_2}\right)^2-\frac{1}{4}\frac{a_1^2}{a_2^2}$ ersetzen und erhalten.

$$\left(x+\frac{a_1}{2a_2}\right)^2-\frac{1}{4}\frac{a_1^2}{a_2^2}+\frac{a_0}{a_2}=0$$

Diese Gleichung kann nun nach x aufgelöst werden:

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{a_1}{2a_2}\right)^2&=\frac{1}{4}\frac{a_1^2}{a_2^2}-\frac{a_0}{a_2}\Longrightarrow\\ x+\frac{a_1}{2a_2}&=\pm\sqrt{\frac{1}{4}\frac{a_1^2}{a_2^2}-\frac{a_0}{a_2}}\Longrightarrow\\ x&=-\frac{a_1}{2a_2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}\frac{a_1^2}{a_2^2}-\frac{a_0}{a_2}}\end{aligned}$$

Für den Ausdruck $\sqrt{\frac{1}{4}\frac{a_1^2}{a_2^2}-\frac{a_0}{a_2}}$ gilt:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{1}{4}\frac{a_1^2}{a_2^2}-\frac{a_0}{a_2}}&=\sqrt{\frac{1}{4}\frac{a_1^2}{a_2^2}-\frac{4a_0a_2}{4a_2^2}}\\ &=\frac{1}{2a_2}\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}\end{aligned}$$

Wir erhalten somit den

Satz 3.5.2. *Ein Polynom zweiten Grades $f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$ hat zwei, eine oder keine reelle Nullstellen. Ist $a_1^2-4a_0a_2>0$ hat es genau zwei reelle Nullstellen, nämlich*

$$\begin{aligned}x_{1,2}&=-\frac{a_1}{2a_2}\pm\frac{1}{2a_2}\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}\\ &=\frac{-a_1\pm\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}}{2a_2}\end{aligned}$$

Gilt $a_1^2-4a_0a_2=0$, hat es genau eine reelle Nullstelle, nämlich $-\frac{a_1}{2a_2}$.
Gilt $a_1^2-4a_0a_2<0$, hat es keine reelle Nullstelle.

Bemerkung 3.5.3. *Mit $a:=a_2$, $b:=a_1$ und $c:=a_0$ erhält man*

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

◊

Beispiel 3.5.4. *Zu berechnen sind die Nullstellen des Polynoms $f(x)=2x^2+3x-4$.*
Mit $a_2=2, a_1=3$ und $a_0=-4$ erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{-a_1\pm\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}}{2a_2}&=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot(-4)\cdot2}}{2\cdot2}\\ &=\pm\frac{1}{4}\sqrt{41}-\frac{3}{4}\\ &=-2.3508;0.85078\end{aligned}$$

(s. Abbildung 3.5.28) ◊

Beispiel 3.5.5. *Zu berechnen sind die Nullstellen des Polynoms* $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$
Mit $a_2 = 2, a_1 = 3$ *und* $a_0 = 4$ *erhält man:*

$$\frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2}}{2 \cdot 2}$$

wobei $3^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = 9 - 32 = -23 < 0$. *Damit gibt es keine reelle Lösung (s. Abbildung 3.5.29)* ◊

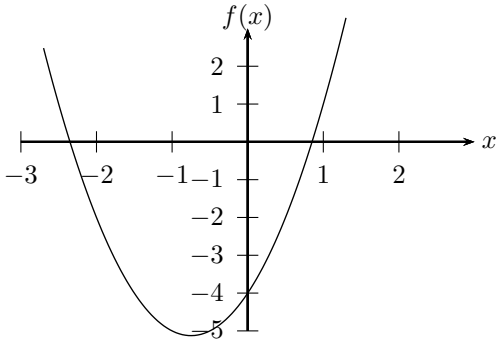


Abbildung 3.5.28: Zwei reelle Nullstellen (Polynom $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$)

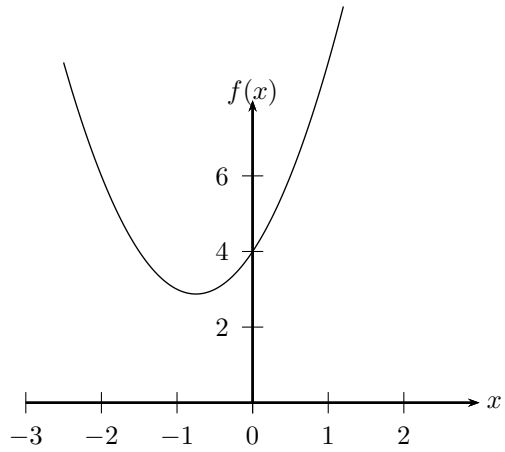


Abbildung 3.5.29: Keine reelle Nullstelle (Polynom $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$)

Beispiel 3.5.6. *Zu berechnen sind die Nullstellen des Polynoms* $f(x) = 2x^2 + 3x + \frac{9}{8}$
Mit $a_2 = 2, a_1 = 3$ *und* $a_0 = \frac{9}{8}$ *erhält man:*

$$\begin{aligned}\frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot \frac{9}{8} \cdot 2}}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{-3}{4}\end{aligned}$$

(s. Abbildung 3.5.30) ◊

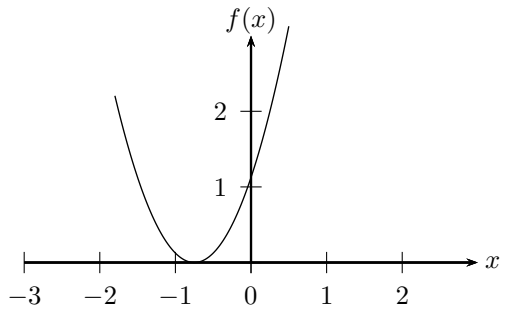


Abbildung 3.5.30: Nur eine reelle Nullstelle (Polynom $f(x) = 2x^2 + 3x + \frac{9}{8}$)

Quadratische Gleichungen und Polynome 2-ten Grades

Eine quadratische Gleichung, auch „Gleichung 2-ten Grades“ genannt, besteht aus einer Gleichung, die nur Ausdrücke der Form a_i, $a_j x$ und $a_k x^2$ aufweist, die mit „+“ oder „−“ verbunden sind. So ist z.B.

$$6x^2 - 2x + 4 - x^2 = 3x^2 + 15x + 8$$

eine Gleichung zweiten Grades. Wie bei Gleichungen ersten Grades geht es darum, die Menge der Zahlen zu bestimmen, welche daraus einen wahren Satz machen (= Lösungsmenge). Das Problem der Lösung quadratischer Gleichungen kann auf das Nullstellenproblem von Polynomen zurückgeführt werden. Wir können nämlich die quadratische Gleichung mit den bereits besprochenen Operationen auf eine Gleichung der Form

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

zurückführen. Im obigen Beispiel erhält man:

$$\begin{aligned} 5x^2 - 2x + 4 &= 3x^2 + 15x + 8 \Longrightarrow \\ 2x^2 - 17x - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Es ergibt sich die folgende Lösungsmenge:

$$\left\{ \frac{17}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{321}, \frac{1}{4}\sqrt{321} + \frac{17}{4} \right\} = \{-0.22912, 8.7291\}.$$

Man kann überprüfen, dass diese Zahlen tatsächlich aus der obigen Gleichung einen wahren Satz machen. Mit 8.7291:

$$\begin{aligned} 6x^2 - 2x + 4 - x^2 : 6 \cdot 8.7291^2 - 2 \cdot 8.7291 + 4 - 8.7291^2 &= 367.53 \\ 3x^2 + 15x + 8 : 3 \cdot 8.7291^2 + 15 \cdot 8.7291 + 8 &= 367.53 \end{aligned}$$

Mit -0.22912 :

$$\begin{aligned} 6x^2 - 2x + 4 - x^2 : 6 \cdot (-0.22912)^2 - (2 \cdot -0.22912) + 4 - (-0.22912)^2 &= 4.720\,7 \\ 3x^2 + 15x + 8 : 3 \cdot (-0.22912)^2 + (15 \cdot -0.22912) + 8 &= 4.720\,7 \end{aligned}$$

Bemerkung 3.5.7. *Streng genommen gilt* $\frac{17}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{321} \neq -0.22912$*, da* -0.22912 *nur eine dezimale Näherung an die nicht-rationale reelle Zahl* $\frac{17}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{321}$ *darstellt. Wir setzen aber durchgehend das Gleichheitszeichen zwischen reellen, nicht-rationalen Zahlen und deren dezimalen Näherungswerten. Analog verfahren wir auch bei rationalen Zahlen mit unendlich vielen, von 0 verschiedenen Dezimalstellen nach dem Komma.* ◊

Schnittpunkte quadratischer Polynome mit Polynomen kleiner-gleich 2-ten Grades

Bei der Berechnung der Schnittpunkte zweier quadratischer Polynome werden wir auf die Berechnung von Nullstellen eines quadratischen Polynoms geführt. Zu berechnen seien z.B. die Schnittpunkte von

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + 0.2x - 2 \\ g(x) &= -0.5x^2 + 2x + 2 \end{aligned}$$

(s. Abbildung 3.5.31
Da in Schnittpunkten gilt: $f(x) = g(x)$, setzen wir die beiden Ausdrücke zur Rechten gleich:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 0.2x - 2 &= -0.5x^2 + 2x + 2 \Longrightarrow \\ 2.5x^2 - 1.8x - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Man erhält als Lösungen: $-0.955\,14, 1.675\,1$. Zu berechnen sind noch die $f(x)$-Werte (oder $g(x)$-Werte) dieser x-Werte:

$$\begin{aligned} f(-0.95514) &= 2 \cdot (-0.955\,14)^2 + 0.2 \cdot (-0.955\,14) - 2 = -0.36643 \\ f(1.6751) &= 2 \cdot (1.675\,1)^2 + 0.2 \cdot 1.675\,1 - 2 = 3.9472 \end{aligned}$$

(für $g(-0.95514)$ und $g(3.9472)$ erhält man dieselben Werte). Damit ist die Menge der Schnittpunkte $\{(-0.95514, -0.36643)\,(1.6751, 3.9472)\}$ (s. Abbildung 3.5.31)

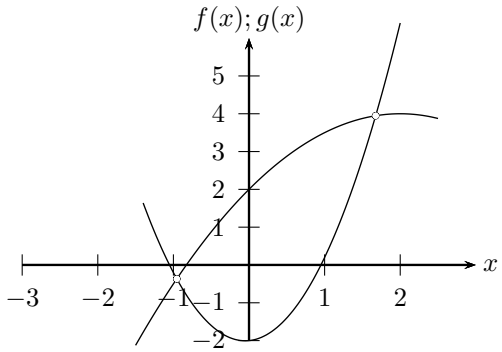


Abbildung 3.5.31: Schnittpunkte der Polynome $f(x) = 2x^2 + 0.2x - 2$ und $g(x) = -0.5x^2 + 2x + 2$

Da die Berechnung der Schnittpunkte mittels der Lösung quadratischer Gleichungen erfolgt, ist zu vermuten, dass es entweder zwei, nur einen oder keinen Schnittpunkt zwischen zwei quadratischen Polynomen gibt (s. für den ersten Fall das Beispiel der Graphik 3.5.31). Für die zwei weiteren Fälle s. die folgenden Beispiel 3.5.8 und 3.5.9 sowie die Abbildungen 3.5.32 und 3.5.33:

Beispiel 3.5.8.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + 0.2x - 2 \\ g(x) &= -0.5x^2 + 2x - 2.324 \end{aligned}$$

Dies ergibt das Nullstellenproblem:

$$2.5x^2 - 1.8x + 0.324 = 0$$

mit der einzigen Lösung $x_0 = 0.36$
$f(0.36) = 2 \cdot 0.36^2 + 0.2 \cdot 0.36 - 2 = -1.6688$. *Damit ist der einzige Schnittpunkt* $(0.36, -1.6688)$ *(s. Abbildung 3.5.32).*

$\Diamond$

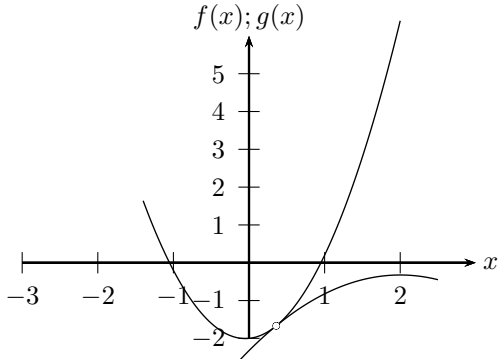


Abbildung 3.5.32: Schnittpunkt der Polynome $f(x) = 2x^2+0.2x-2$ und $g(x) = -0.5x^2+2x-2.324$

Beispiel 3.5.9.

$$f(x) = 2x^2 + 0.2x + 1$$
$$g(x) = -0.5x^2 + 2x - 1.424$$

führt zu

$$2.5x^2 - 1.8x + 2.424 = 0$$

Es gibt keine reelle Nullstelle (s. Abbildung 3.5.33).

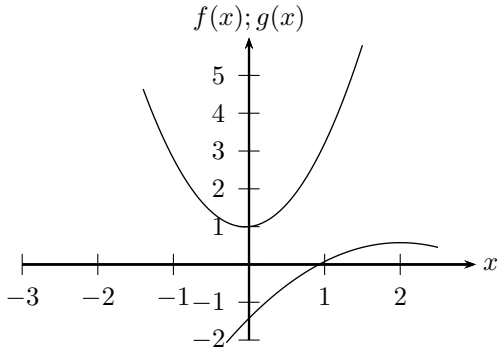


Abbildung 3.5.33: Fehlender Schnittpunkt der Polynome $f(x) = 2x^2 + 0.2x + 1$ und $g(x) = -0.5x^2 + 2x - 1.424$

◊

Für die Schnittpunkte eines quadratischen Polynoms mit Polynomen kleineren Grades (konstant, linear oder affin) kann ähnliches gesagt werden. Bei der Berechnung werden wir in jedem dieser Fälle auf die Berechnung der Nullstellen eines quadratischen Polynoms geführt.

Im Fall einer *konstanten Funktion* $g(x) = b_0$ und einem quadratischen Polynom $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ erhalten wir durch Gleichsetzen (die Funktionswerte sind im Schnittpunkt identisch!):

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = b_0 \Longrightarrow$$
$$a_2x^2 + a_1x + a_0 - b_0 = 0$$

Zum Schluss sind wieder die $f(x_0)$-Werte oder $g(x_0)$-Werte der Nullstellen x_0 zu berechnen, wobei $g(x_0) = b_0$. Es gibt wieder entweder zwei, einen oder keinen Schnittpunkt. So z.B. fürs Polynom $f(x) = 2x^2 + 0.2x + 1.5$ und die Konstanten $g(x) = 2.5$ (mit zwei Schnittpunkten $(-0.758\,87, 2.5), (0.658\,87, 2.5)$), $g(x) = 1.495$ (einen Schnittpunkt $(-0.05, 1.495)$) und $g(x) = 0.5$ (keinen Schnittpunkt; s. Abbildung 3.5.34)

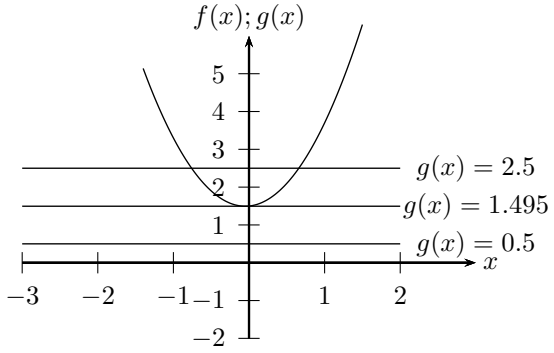


Abbildung 3.5.34: Schnittpunkte Polynom $f(x) = 2x^2 + 0.2x + 1.5$ und Polynome $g(x) = 2.5$ (zwei Schnittpunkte); $g(x) = 1.495$ (einen Schnittpunkt) und $g(x) = 0.5$ (keinen Schnittpunkt)

Im Fall eines affinen Polynoms $g(x) = b_1x+b_0$ und einem quadratischen Polynom $f(x) = a_2x^2+a_1x+a_0$ erhalten wir durch Gleichsetzen (die Funktionswerte sind im Schnittpunkt identisch!):

$$\begin{aligned} a_2x^2 + a_1x + a_0 &= b_1x + b_0 \Longrightarrow \\ a_2x^2 + a_1x + a_0 - b_1x - b_0 &= 0 \Longrightarrow \\ a_2x^2 + (a_1 - b_1)\,x + (a_0 - b_0) &= 0 \end{aligned}$$

Zum Schluss sind wieder die $f(x_0)$-Werte oder die identischen $g(x_0)$-Werte der Nullstellen x_0 zu berechnen. Es gibt wieder entweder zwei, einen oder keinen Schnittpunkt. So z.B. fürs Polynom $f(x) = 2x^2 + 0.2x + 1.5$ und das affine Polynom $g(x) = 0.8x + 3$ (mit zwei Schnittpunkten $(-0.728\,92, 2.416\,9), (1.028\,9, 3.823\,1)$), $g(x) = 0.8x + 1.455$ (einen Schnittpunkt $(0.15, 1.575)$) und $g(x) = 0.8x + 1$ (keinen Schnittpunkt; s. Abbildung 3.5.35)

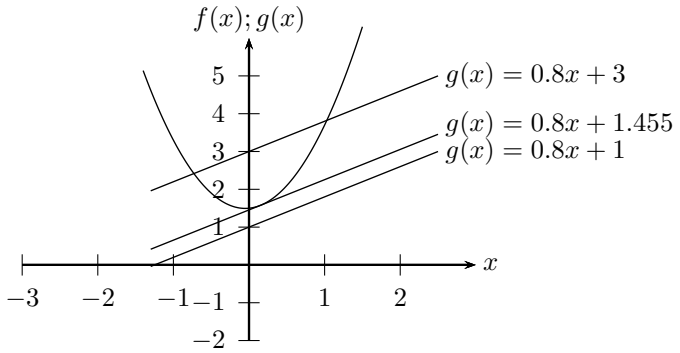


Abbildung 3.5.35: Schnittpunkte der Polynome $f(x) = 2x^2 + 0.2x + 1.5$ und $g(x) = 0.8x + 3$ (zwei Schnittpunkte); $g(x) = 0.8x + 1.455$ (einen Schnittpunkt); $g(x) = 0.8x + 1$ (keinen Schnittpunkt)

Im Fall eines linearen Polynoms $g(x) = b_1x$ erhält man

$$\begin{aligned} a_2x^2 + a_1x + a_0 &= b_1x \Longrightarrow \\ a_2x^2 + a_1x + a_0 - b_1x &= 0 \Longrightarrow \\ a_2x^2 + (a_1 - b_1)\,x + a_0 &= 0 \end{aligned}$$

Zum Schluss sind wieder die $f(x_0)$-Werte oder die identischen $g(x_0)$-Werte der Nullstellen x_0 zu berechnen. Es gibt wieder entweder zwei, einen oder keinen Schnittpunkt. So z.B. fürs Polynom $f(x) = 2x^2 + 0.2x + 1.5$ und das lineare Polynom $g(x) = 4x$ (mit zwei Schnittpunkten $(0.559\,49, 2.238\,0), (1.3405, 5.362)$), $g(x) = 3.6641x$ (einen Schnittpunkt $(0.866\,03, 3.1732)$) und $g(x) = 2x$ (keinen Schnittpunkt; s. Abbildung 3.5.36)

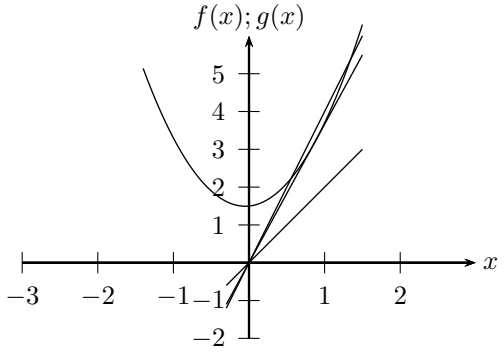


Abbildung 3.5.36: Schnittpunkt der Polynome $f(x) = 2x^2 + 0.2x + 1.5$ und $g(x) = 4x$ (zwei Schnittpunkte); $g(x) = 3.6641x$ (ein Schnittpunkt) und $g(x) = 2x$ (kein Schnittpunkt)

Berechnung von Polynomen 2-ten Grades aus Punkten

Ein Polynom zweiten Grades ist durch drei Punkte $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2)), (x_3, f(x_3))$; $x_i, f(x_i) \in \mathbb{R}$; $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$, bestimmt, wenn das unten stehende Gleichungssystem eine eindeutige Lösung hat (d.h. kennen wir drei geordnete Paare des Graphen der Funktion, so können wir das Polynom durch eine Formel hinschreiben). Die Berechnung erfolgt durch das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0 \\ f(x_2) &= a_2x_2^2 + a_1x_2 + a_0 \\ f(x_3) &= a_2x_3^2 + a_1x_3 + a_0 \end{aligned} \tag{3.5.14}$$

Dieses muss nach a_0, a_1, a_2 aufgelöst werden.

Beispiel 3.5.10. *Gegeben seien die Punkte* $(1, 2)$, $(3, 8)$ *und* $(-3, 4)$ *eines Polynoms zweiten Grades. Gesucht ist die Funktionsgleichung. Wir stellen das Gleichungssystem auf:*

$$\begin{aligned} 2 &= a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0 \\ 8 &= a_2 \cdot 3^2 + a_1 \cdot 3 + a_0 \\ 4 &= a_2 \cdot (-3)^2 + a_1 \cdot (-3) + a_0 \end{aligned}$$

Die Lösung ist: $a_0 = \frac{3}{4}, a_1 = \frac{2}{3}, a_2 = \frac{7}{12}$ *(rechnen Sie das nach!). Die Funktionsgleichung ist*

$$f(x) = \frac{3}{4} + \frac{2}{3}x + \frac{7}{12}x^2.$$

$\Diamond$

Ökonomisches Beispiel

Sei ein Monopolist gegeben. Die Preisfunktion, welche den Preis in Abhängigkeit von der angebotenen Menge angibt, sei gegeben durch

$$p(x) = 30 - 2x.$$

Der Erlös, den der Monopolist aus dem Verkauf seiner Produkte macht, ist dann:

$$E(x) = xp(x) = x(30 - 2x) = 30x - 2x^2$$

(= Preis mal Menge). Ferner sei die folgende Kostenfunktion gegeben, welche die Kosten als Funktion der produzierten Menge ausdrückt:

$$K(x) = 1 + 4x.$$

Der Gewinn (= Erlös minus Kosten) ist dann

$$G(x) = E(x) - K(x) = 30x - 2x^2 - (1 + 4x) = 26x - 2x^2 - 1.$$

Man bestimme den Gewinnbereich (= die Menge aller Mengen, bei denen ein Gewinn resultiert). Dazu muss man die 0-Stellen des Polynoms

$$G(x) = 26x - 2x^2 - 1$$

bestimmen, d.h. wir berechnen

$$-2x^2 + 26x - 1 = 0$$

Die Lösung ist $\frac{13}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{167} = 3.857\,6 \times 10^{-2}$ und $\frac{1}{2}\sqrt{167} + \frac{13}{2} = 12.961$. Der Gewinnbereich ist $]0.03857, 12.96[$, da dort z.B. $G(2) = 26 \cdot 2 - 2 \cdot 2^2 - 1 = 43 > 0$. Interessant wäre es zu wissen, wo der Gewinn am grössten ist und wieviel dieser maximale Gewinn beträgt. Man kann beweisen (wird später behandelt), dass quadratische Polynome ihr Maximum oder ihr Minimum in der folgenden $x-$Koordinate erreichen:

$$x_{\max\,/\,\min} = -\frac{a_1}{2a_2}$$

Entsprechend liegt das Maximum der Funktion (da $a_2 < 0$, ist die Funktion nach unten geöffnet und hat ein Maximum) in:

$$-\frac{26}{2 \cdot -2} = \frac{13}{2} = 6.5$$

Der maximale Gewinn wird damit bei einer Menge von 6.5 ME erwirtschaftet. Der maximale Gewinn beträgt

$$G(6.5) = 26 \cdot 6.5 - 2 \cdot 6.5^2 - 1 = 83.5$$

(s. für graphische Darstellung des Beispiels die Abbildung 3.5.37)

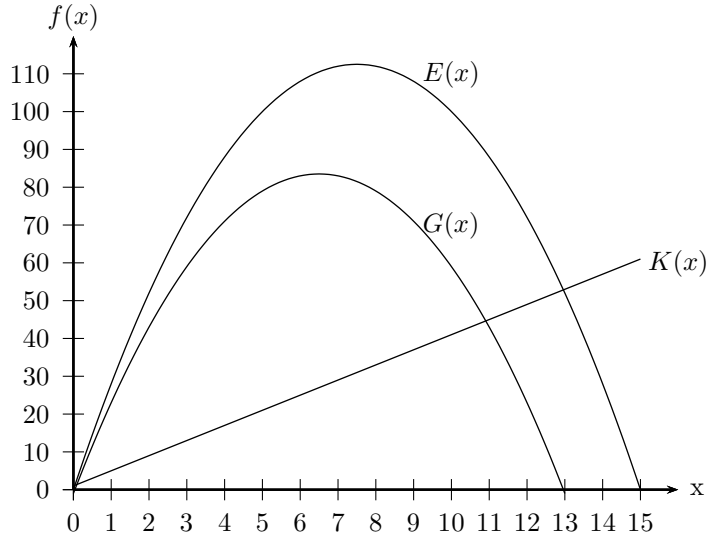


Abbildung 3.5.37: Graphische Darstellung der Kostenfunktion $K(x)$, der Erlösfunktion $E(x)$ und der Gewinnfunktion $G(x)$ des ökonomischen Beispiels

Bemerkung 3.5.11. *Bei Abbildungen mehrerer Funktionen in einer einzigen Graphik ist darauf zu achten, dass Argumente und Funktionswerte in denselben Einheiten gemessen werden, da sonst eine solche Veranschaulichung wenig Sinn macht. Im obigen Fall ist das gegeben. Die Preisfunktion kann nicht ins selbe Koordinatensystem wie die Erlösfunktion, die Kostenfunktion und die Gewinnfunktion eingezeichnet werden, da der Preis Kosten pro Stück ist und damit z.B. in $\frac{Fr}{kg}$ gemessen wird, während der Gewinn, die Kosten und der Erlös z.B. in Franken gemessen werden.* $\Diamond$

Übungen

1. Berechnen Sie ein Polynom zweiten Grades durch die Punkte $(5, 6)$, $(8, 9)$ und $(50, 7)$. Geben Sie den Schnittpunkt des Polynoms mit der y-Achse an. Berechnen Sie die Nullstellen des Polynoms. Berechnen Sie die Menge der Schnittpunkte mit folgendem Polynom $g(x) = 0.5x + 2$.

2. Berechnen Sie die Schnittpunkte der folgenden Polynome:
$$f(x) = 2x^2 + 0.1x + 2$$
$$g(x) = 0.02x^2 + 0.1x + 3$$

3. Berechnen Sie den Funktionswert der Funktion
$$f(x) = 2x^2 + 0.1x + 2$$
in $x = 20$.

4. Sei ein Monopolist gegeben. Die Preisfunktion, welche den Preis in Abhängigkeit von der angebotenen Menge angibt, sei gegeben durch
$$p(x) = 40 - 3x.$$
Zudem sei die Kostenfunktion gegeben:
$$K(x) = 0.5 + 3.5x.$$
Berechnen Sie den Gewinnbereich, die Menge mit dem maximalen Gewinn und den maximalen Gewinn.

5. Die Preisnachfrage- und die Preisangebotsfunktion seien durch folgende Funktionen gegeben:

$$p_A(x) = 3(x + 0.5)$$
$$p_N(x) = 0.6(35 - 0.2x^2)$$

Legen Sie den ökonomisch sinnvollen Bereich fest.
Berechnen Sie den Gleichgewichtspreis und die Gleichgewichtsmenge.

Lösungen

1. Zu lösen ist das Gleichungssystem (wir verwenden a, b, c für die Koeffizienten, um weniger schreiben zu müssen):

$$6 = 5^2a + 5b + c$$
$$9 = 8^2a + 8b + c$$
$$7 = 50^2a + 50b + c$$

Man erhält: $a = -\frac{22}{945}, b = \frac{1231}{945}, c = \frac{13}{189}$
Der Schnittpunkt der Polynoms mit der $y - Achse$ ist $\frac{13}{189}$
Die Nullstellen des Polynoms findet man durch die Lösung der Gleichung:

$$-\frac{22}{945}x^2 + \frac{1231}{945}x + \frac{13}{189} = 0$$

$x_{0_1} = \frac{1231}{44} - \frac{3}{44}\sqrt{169\,009} = -5.\,275\,3 \times 10^{-2}$
$x_{0_2} = \frac{3}{44}\sqrt{169\,009} + \frac{1231}{44} = 56.\,007$

Die Schnittpunkte mit dem Polynom $g(x) = 0.5x + 2$ ergeben sich durch die Auflösung der folgenden Gleichung:

$$0.5x + 2 = -\frac{22}{945}x^2 + \frac{1231}{945}x + \frac{13}{189}$$

Dies ergibt: $x_1 = 2.602\,5, x_2 = 31.875$ und $g(x_1) = 0.5 \cdot 2.602\,5 + 2 = 3.\,301\,3$
$g(x_2) = 0.5 \cdot 31.875 + 2 = 17.\,938$. Die Menge der Schnittpunkte ist also
$\{(2.602\,5, 3.\,301\,3), (31.875, 17.\,938)\}$.

2.

$$f(x) = 2x^2 + 0.1x + 2$$
$$g(x) = 0.02x^2 + 0.1x + 3$$

mit $f(x) = g(x)$. Die Menge der Schnittpunkte: $\{(-0.710\,67, 2.\,939)\,(0.710\,67, 3.081\,2)\}$.

3. Zu berechnen ist $f(20) = 2 \cdot 20^2 + 0.1 \cdot 20 + 2 = 804$

4. $E(x) = x\,(40 - 3x) = 40x - 3x^2$
$G(x) = E(x) - K(x) = 40x - 3x^2 - (0.5 + 3.5x) = 36.\,5x - 3x^2 - 0.5$
Zu berechnen sind nun die Nullstellen der Gewinnfunktion:
$x_{0_1} = 0.013\,71\,4, x_{0_2} = 12.153$. Da die Gewinnfunktion nach unten geöffnet ist (der Koeffizient $a_2 < 0$) ist die Gewinnfunktion zwischen diesen zwei Nullstellen positiv. Entsprechend liegt zwischen diesen zwei Punkten der Gewinnbereich. Das Gewinnmaximum liegt in

$$-\frac{36.5}{2 \cdot (-3)} = 6.0833.$$

Der maximale Gewinn ist:

$$G(6.0833) = 36.5 \cdot 6.0833 - 3 \cdot 6.0833^2 - 0.5 = 110.52$$

(s. Abbildung 3.5.38).

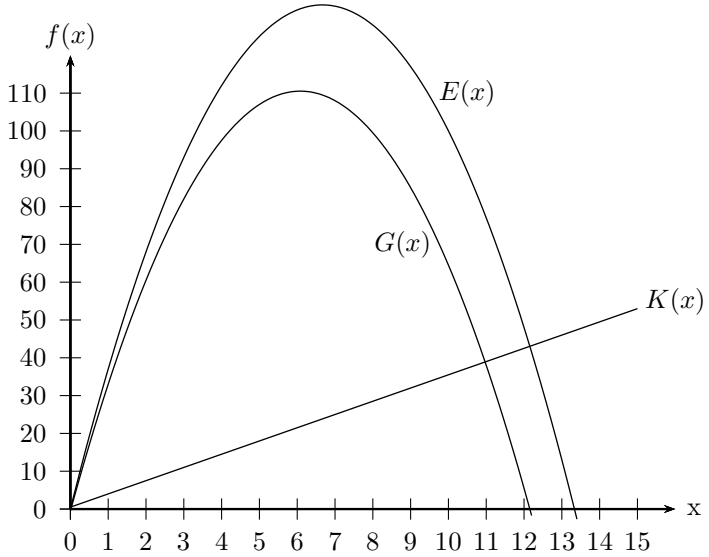


Abbildung 3.5.38: Graphische Darstellung der Kostenfunktion $K(x)$, der Erlösfunktion $E(x)$ und der Gewinnfunktion $G(x)$ der Übung

5. Da p_N ökonomisch nur in einen Bereich sinnvoll interpretierbar ist, wo diese Funktion für steigendes x sinkende Funktionswerte aufweist, muss das Maximum der Funktion bestimmt werden $p_N(x) = 21.0 - 0.12x^2$: dieses ist

$$\frac{0}{2 \cdot -0.12} = 0$$

Da die Funktion nach unten geöffnet ist, muss die Funktion im 1. Quadranten sinken. Zudem müssen die Funktionswerte dort positiv sein. Wir berechnen deshalb die Nullstellen von p_N:Man erhält $13.229, -13.229$. Entsprechend liegt der ökonomisch sinnvolle Bereich bezüglich der Preisnachfragefunktion zwischen 0 und 13.229. Wir berechnen nun den ökonomisch sinnvollen Bereich für die Preisangebotsfunktion: Die Nullstelle von p_A ist -0.5. Entsprechend ist die Preisangebotsfunktion im 1. Quadranten überall positiv. Also liegt der ökonomisch sinnvolle Bereich zwischen 0 und 13.229.
Die Gleichgewichtsmenge liegt in der Lösung von

$$3(x + 0.5) = 0.6(35 - 0.2x^2)$$

Lösungsmenge: $\{-30.354, 5.3536\}$. Nur die zweite Lösung liegt im ökonomisch sinnvollen Bereich. Damit ist die Gleichgewichtsmenge 5.3536 ME. Der Gleichgewichtspreis ist dann

$$p_A(5.3536) = 3(5.3536 + 0.5) = 17.561$$

3.6 Polynome 3-ten Grades

Definition 3.6.1.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) := a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

mit reellen Zahlen a_i. $a_3 \neq 0$; a_0, a_1 oder a_2 dürfen 0 sein. ◊

- Jeder reellen Zahl x wird genau eine Zahl, nämlich $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ zugeordnet. Der Graph von f ist damit $\{(x, a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) \mid x \in \mathbb{R}\}$. z.B. mit $a_0 = 3; a_1 = 4, a_2 = 11, a_3 = -2 : f(x) = -2x^3 + 11x^2 + 4x + 3$. Ein Ausschnitt des Graphen von $f(x) = -2x^3 + 11x^2 + 4x + 3$ wäre damit $\{(10, -857), (0.5, 7.5), (0.1, 3.508), (-200, 16'439'203), ...\}$.

- Bei der graphischen Darstellung handelt es sich um eine Kurve, welche die y-Achse in a_0 schneidet.

- Polynome dritten Grades sind surjektiv. Manche sind injektiv, andere nicht. Um die beiden Fälle auseinanderzuhalten werden später entsprechende Methoden entwickelt.

Nullstellen von Polynomen 3-ten Grades

Für Polynome dritten und vierten Grades sind die Nullstellen noch mit einer Formel berechenbar, für Polynome höheren Grades jedoch nicht mehr. Da die Berechnung mit Formeln durchaus mühsam ist und man für die höheren Polynome so oder so andere Methoden verwendet, werden diese unmittelbar eingeführt. Für die Berechnung wird ein Näherungsverfahren verwendet. Es gibt verschiedene solcher Verfahren.

Um das Verfahren zu rechtfertigen, zuerst ein Satz, dessen intuitiver Sinn der folgende ist: das arithmetische Mittel von a und b ($b > a$) ist näher an einem beliebigen $x \in]a, b[$ als a oder b (oder beide).

Satz 3.6.2. *Wenn $a < b$ und $m := \frac{a+b}{2}$, dann gilt für alle $x \in]a, b[$:*
(1) $x = m$ oder $a < x < m$ oder $m < x < b$.
(2) i) Wenn $x = m$, $x - m = 0 < b - x$
ii) Wenn $a < x < m$, dann $m - x < b - x$
iii) Wenn $m < x < b$ dann $x - m < x - a$ (s. Abbildung 3.6.39 für die Fälle ii und iii)

Abbildung 3.6.39: Graphisches Beispiel für die Idee des Satzes 3.6.2 für die Fälle *ii*) und *iii*) .

Beweis. Zuerst kann man festhalten, dass für $a < b$ gilt: $a < \frac{a+b}{2} < b$, denn

$$a < b \iff a + a < a + b \iff a + b < b + b$$

Also

$$\begin{aligned} a < b &\iff 2a < a + b < 2b \\ &\iff \frac{2a}{2} < \frac{a+b}{2} < \frac{2b}{2} \\ &\iff a < \frac{a+b}{2} < b \end{aligned}$$

womit $m := \frac{a+b}{2} \in]a, b[$. Daraus folgt (1) mit den Voraussetzungen des Satzes unmittelbar.
Der erste Fall von (2) ist offensichtlich. Für ii): da $m < b$ gilt $m - x < b - x$. Für iii): da $a < m$, gilt $x - m < x - a$. □

Nach dieser Vorbereitung gehen wir zum Algorithmus zur Berechnung der Nullstellen von Polynomen beliebigen Grades über. Wir beschränken uns auf den Fall, dass die Funktion die x-Achse schneidet und nicht nur berührt, d.h. auf beiden Seiten der Nullstelle hat die Funktion auf einem Intervall, das die Nullstelle enthält, umgekehrte Vorzeichen. Wir suchen zwei Zahlen x_1 und x_2, $x_1 < x_2$, auf der x-Achse, so dass $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$. Dies gilt genau dann, wenn $f(x_1)$ und $f(x_2)$ umgekehrte Vorzeichen haben. Zudem muss man beachten, dass es nur eine Nullstelle zwischen x_1 und x_2 hat, was man graphisch oder mit einer Werttabelle überprüfen kann. Anschliessend rechnet man

$$x_3 := \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Das arithmetische Mittel befindet sich gemäss Satz 3.6.2 näher bei der Nullstelle als x_1 oder x_2. In der Tat gibt es für $f(x_3)$ drei Möglichkeiten: $f(x_3) = 0$ oder $f(x_3) > 0$ oder $f(x_3) < 0$. Im ersten Fall ist $f(x_3) = 0$ und man hat die Nullstelle zwischen x_1 und x_2 gefunden. Für die zwei übrigen Fälle wählt man unter den Zahlen $\{x_1, x_2, x_3\}$ die zwei Zahlen, die der Nullstelle am nächsten sind und sich auf beiden Seiten der Nullstelle befinden. Die letzte Bedingung ist erfüllt, wenn $f(x_i) f(x_j) < 0$. Wir wählen also x_1 und x_3, wenn x_3 sich rechts von der Nullstelle befinden (d.h. wenn $f(x_1) f(x_3) < 0$), sonst wählen wir x_3 und x_2. Diese zwei Schritte kann man wie folgt formalisieren:

$$x_4 := \begin{cases} \frac{x_1+x_3}{2} & \text{genau dann, wenn } f(x_1)f(x_3) < 0 \\ \frac{x_2+x_3}{2} & \text{sonst} \end{cases} .$$

Derart fährt man fort, bis man eine befriedigende Näherung an die Nullstelle gefunden hat. „befriedigend“ hängt von den Bedürfnissen ab. Man kann vorgängig gemäss diesen Bedürfnissen ein $k > 0$ fixieren. Man beendet den Prozess, wenn $|f(x_i)| < k$. ($|f(x_i)|$ ist der Betrag von $f(x_i)$, d.h. $|f(x_i)| = f(x_i)$, wenn $f(x_i) > 0$, sonst $|f(x_i)| = -f(x_i)$)

Beispiel 3.6.3. *Zu bestimmen sind die Nullstellen x_i des Polynoms, so dass $|f(x_i)| < 0.00001$.*

$$f(x) = 0.9x^3 - 2x^2 - 3x + 4$$

Zuerst wird ein graphische Darstellung betrachtet:

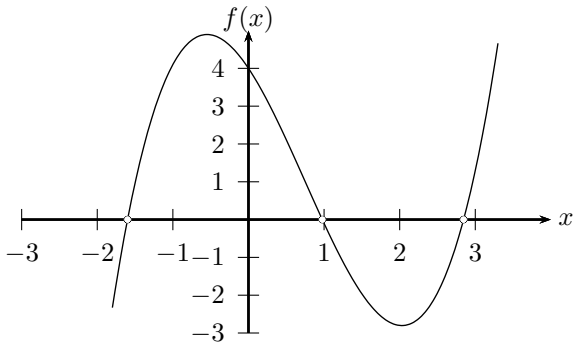


Abbildung 3.6.40: Beispiel für Polynom dritten Grades mit drei Nullstellen

Eine der Nullstellen befindet sich offensichtlich zwischen 2.5 *und* 3. *Es gilt*

$$f(2.5) = -1.9375$$
$$f(3) = 1.3$$

und damit $f(2.5)f(3) < 0$. Es wird das arithmetische Mittel berechnet:

$$\frac{2.5 + 3}{2} = 2.75$$

Es gilt:

$$f(2.75) = -0.657\,81$$

Die gesuchte Nullstelle befindet sich zwischen 2.75 und 3.
Es wird das arithmetisch Mittel berechnet:

$$\frac{2.75+3}{2} = 2.875$$

Es gilt

$$f(2.875) = 0.231\,05$$

Es wird das arithmetische Mittel berechnet:

$$\frac{2.75+2.875}{2} = 2.812\,5$$

Es gilt:

$$f(2.8125) = -0.235\,23$$

Es wird das arithmetische Mittel berechnet:

$$\frac{2.8125+2.875}{2} = 2.843\,8$$

etc. Das Verfahren ist langwierig und wird deshalb besser mit Excel durchgeführt (s. Exceltabelle Nullstellen501.xls). Man erhält 2.844772366 *als erste Nullstelle (mit* $f(2.844772366) = 0$ *auf* 15 *Stellen nach dem Komma gerechnet, wobei hier nur 9 dieser Stellen angegeben sind).*
Allerdings bietet Excel mit dem Solver eine noch schnellere Variante zur Nullstellenberechnung. Man erhält: 2.844772305 *mit* $f(2.844772305) = -4.54511E-07$. *Die Solverlösung ist damit weniger exakt als die „manuelle", kann aber durch Änderungen der Voreinstellungen verbessert werden (s. Exceltabelle Nullstellen501.xls).* ◊

Ohne Beweis halten wir fest:

Satz 3.6.4. *Ein Polynom dritten Grades hat mindestens eine reelle Nullstelle und höchstens drei reelle Nullstellen.*

Siehe für Beispiele die Abbildung 3.6.40 für den Fall mit drei reellen Nullstellen, die Abbildung 3.6.41 für den Fall mit einer reellen Nullstelle und die Abbildung 3.6.42 für den Fall mit 2 reellen Nullstellen.

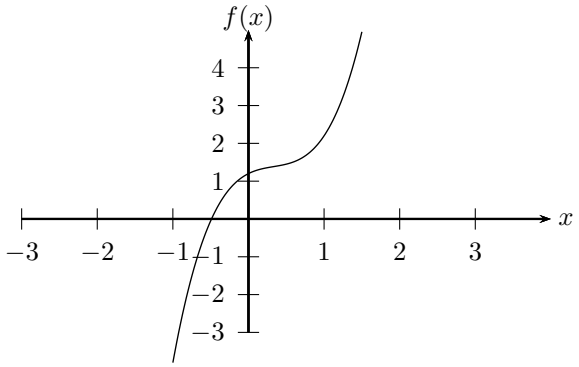


Abbildung 3.6.41: Beispiel für Polynom dritten Grades mit einer Nullstellen. $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + x + 1.2$

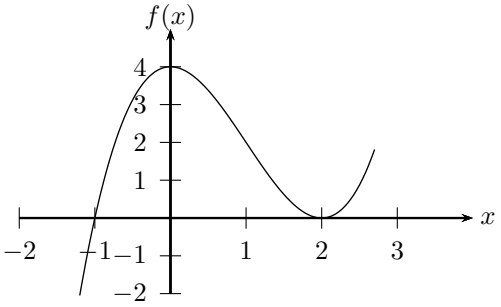


Abbildung 3.6.42: Beispiel für Polynom dritten Grades mit zwei Nullstellen: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

Die Bedeutung der Nullstellen von stetigen Funktionen (es handelt sich um Funktionen, die man ohne Anheben des Zeichenstiftes zeichnen kann; eine mathematische Definition erfolgt später) besteht unter anderem darin, dass deren Kenntnis es erlaubt zu bestimmen, wo diese negative oder positive Funktionswerte annimmt.

Definition 3.6.5. *1. Der Funktionswert $f(x)$ ist in x positiv (f ist positiv in x) genau dann, wenn $f(x) > 0$.*

2. Die Funktionswerte $f(x)$ sind positiv auf dem Intervall $]a, b[$ (f ist positiv auf $]a, b[$) genau dann, wenn für jedes $x \in]a, b[$ gilt: $f(x) > 0$.

3. Der Funktionswert $f(x)$ ist in x negativ (f ist negativ in x) genau dann, wenn $f(x) < 0$.

4. Die Funktionswerte $f(x)$ sind negativ auf dem Intervall $]a, b[$ (f ist negativ auf $]a, b[$) genau dann, wenn für jedes $x \in]a, b[$ gilt: $f(x) < 0$.

$\Diamond$

Zwischen zwei benachbarten Nullstellen haben alle Funktionswerte von stetigen Funktionen dasselbe Vorzeichen. Links der kleinsten Nullstelle x_g haben alle Funktionswerte das gleiche Vorzeichen auf $]-\infty, x_g[$. Ebenso rechts der grössten Nullstelle x_d: die Funktionswerte weisen auf $]x_d, \infty[$ überall dasselbe Vorzeichen auf (s. Abbildung 3.6.43).

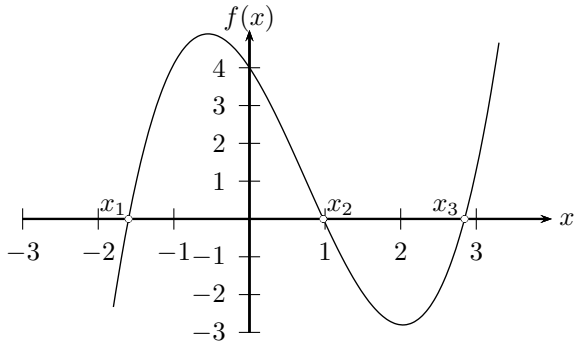


Abbildung 3.6.43: Polynom dritten Grades mit drei Nullstellen

Gleichungen 3-ten Grades und Polynome 3-ten Grades

Eine Gleichung dritten Grades enthält nur Ausdrücke der Form $a_i x^3, a_j x^2, a_k x, a_m$, die mit „+“oder „−“ verbunden sind. z.B.

$$4x^3 + 2x^2 - 0.5x + 14 = 18x^3 - 14.5x^2 + 1.5x + 9x^3$$

Durch die bekannten Umformungen kann man dies auf ein Nullstellenproblem eines Polynoms dritten Grades zurückführen:

$$\begin{aligned} 4x^3 - 18x^3 - 9x^3 + 2x^2 + 14.5x^2 - 0.5x - 1.5x + 14 = 0 \Longrightarrow \\ -23x^3 + 16.5x^2 - 2x + 14 = 0 \end{aligned}$$

Die einzige reelle Lösung: 1.122 8

Schnittpunkte von Polynomen 3-ten Grades mit Polynomen tieferen Grades.

Durch Gleichsetzen der entsprechenden Ausdrücke entsteht eine Gleichung, welche durch Umformungen auf das Nullstellenproblem eines Polynoms dritten Grades führt. Dadurch werden die $x-$Koordinaten der Schnittstellen bestimmt. Anschliessend sind die $y-$Koordinaten dieser $x-$Koordinaten zu berechnen. Es gibt minimal einen oder maximal drei Schnittpunkte.

Beispiel 3.6.6.

$$\begin{aligned} g(x) &= 14x^3 - 2x^2 + x - 14 \\ f(x) &= 5 \end{aligned}$$

ergibt

$$14x^3 - 2x^2 + x - 19 = 0$$

und die reelle Lösung 1.134 4. *Damit ist der Schnittpunkt* $(1.1344, 5)$ ◊

Beispiel 3.6.7.

$$\begin{aligned} g(x) &= 14x^3 - 2x^2 + x - 14 \\ f(x) &= 5x + 2 \end{aligned}$$

ergibt

$$14x^3 - 2x^2 - 4x - 16 = 0$$

und die einzige reelle Lösung 1.19. *Damit ist der Schnittpunkt* $(1.19, 7.95)$ ◊

Beispiel 3.6.8.

$$g(x) = 14x^3 - 2x^2 + x - 14$$
$$f(x) = 5x^2 + 2x$$

ergibt

$$14x^3 - 7x^2 - x - 14 = 0$$

und die einzige reelle Lösung $1.224\,9$. *Damit ist der Schnittpunkt mit* $f(1.2249) = 9.9517$ $(1.2249, 9.9517)$
$\Diamond$

Berechnung von Polynomen 3-ten Grades aus Punkten

Ein Polynom dieser Form ist durch vier Punkte $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, $(x_3, f(x_3)), (x_4, f(x_4))$ mit $x_i, f(x_i)) \in \mathbb{R}$, $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$, bestimmt, wenn das unten stehende Gleichungssystem eine eindeutige Lösung hat (d.h. kennen wir vier geordnete Paare der Funktion, so können wir das Polynom durch eine Formel hinschreiben). Die Berechnung erfolgt durch das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= a_3x_1^3 + a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0 \\ f(x_2) &= a_3x_2^3 + a_2x_2^2 + a_1x_2 + a_0 \\ f(x_3) &= a_3x_3^3 + a_2x_3^2 + a_1x_3 + a_0 \\ f(x_4) &= a_3x_4^3 + a_2x_4^2 + a_1x_4 + a_0 \end{aligned} \tag{3.6.15}$$

Dieses muss nach a_0, a_1, a_3, a_4 aufgelöst werden.

Beispiel 3.6.9. *Gegeben seien die Punkte* $(1, 2)$, $(3, 8)$, $(-3, 4)$ *und* $(-8, -5)$ *eines Polynoms dritten Grades. Gesucht ist die Funktionsgleichung. Wir stellen das Gleichungssystem auf:*

$$\begin{aligned} 2 &= a_3 1^3 + a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0 \\ 8 &= a_3 3^3 + a_2 \cdot 3^2 + a_1 \cdot 3 + a_0 \\ 4 &= a_3 (-3)^3 + a_2 \cdot (-3)^2 + a_1 \cdot (-3) + a_0 \\ -5 &= a_3 (-8)^3 + a_2 \cdot (-8)^2 + a_1 \cdot (-8) + a_0 \end{aligned}$$

Die Lösung ist: $a_0 = \frac{79}{55}, a_1 = -\frac{13}{660}, a_2 = \frac{251}{495}, a_3 = \frac{151}{1980}$ *(Rechnen Sie das nach! Entsprechende Berechnungen werden wir in Kürze maschinell machen. Es lohnt sich aber, ein solches Gleichungssystem wenigstens einmal von Hand gelöst zu haben). Die Funktionsgleichung ist damit* $f(x) = \frac{151}{1980}x^3 + \frac{251}{495}x^2 - \frac{13}{660}x + \frac{79}{55}$. *(s. Abbildung 3.6.44)*

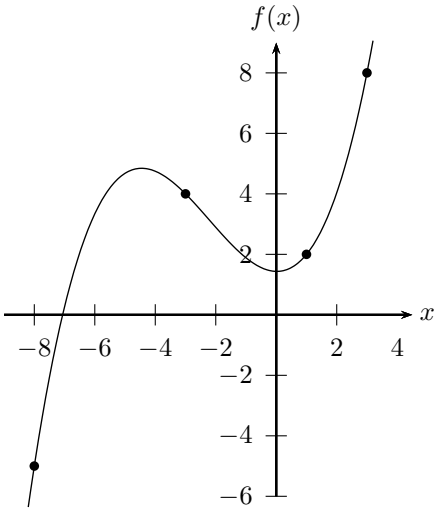


Abbildung 3.6.44: Graphik fürs Beispiel: gegebene Punkte und berechnetes Polynom 3. Grades durch die Punkte

◊

Ökonomisches Beispiel

Sei wiederum ein Monopolist gegeben. Die Preisfunktion, welche den Preis in Abhängigkeit von der angebotenen Menge angibt, sei gegeben durch

$$p(x) = 500 - 20x.$$

Der Erlös, den der Monopolist aus dem Verkauf seiner Produkte macht, ist dann wieder:

$$E(x) = xp(x) = x(500 - 20x) = 500x - 20x^2.$$

Ferner sei die folgende Kostenfunktion gegeben:

$$K(x) = 0.2x^3 - 6x^2 + 80x + 100.$$

Die Gewinnfunktion ist dann

$$\begin{aligned} G(x) = E(x) - K(x) &= 500x - 20x^2 - \left(0.2x^3 - 6x^2 + 80x + 100\right) \\ &= 420x - 14x^2 - 0.2x^3 - 100. \end{aligned}$$

Man bestimme den Gewinnbereich. Dazu muss man die 0-Stellen des Polynoms $G(x) = 420x - 14x^2 - 0.2x^3 - 100$ bestimmen, d.h. wir berechnen

$$420x - 14x^2 - 0.2x^3 - 100 = 0$$

Die Lösungen sind: $22.470, 0.240\,02, -92.710$. Die Gewinnfunktion schneidet die x-Achse dreimal. Wir berechnen den Wert der Gewinnfunktion zwischen 0.24002 und 22.47 für eine beliebige Zahl (z.B. für $x = 10$): $420 \cdot 10 - 14 \cdot 10^2 - 0.2 \cdot 10^3 - 100 = 2500$ ($G(0) = -100; G(25) = -1475$). Damit liegt der positive Bereich der Gewinnfunktion im Intervall $]0.24002, 22.47[$. Interessant wäre es auch hier zu wissen, wo der Gewinn am grössten ist und wieviel dieser maximale Gewinn beträgt. Die Lösung dieses Problems wird später angegangen. Für die graphische Darstellung der Funktionen des Beispiels s. die Abbildung 3.6.45)

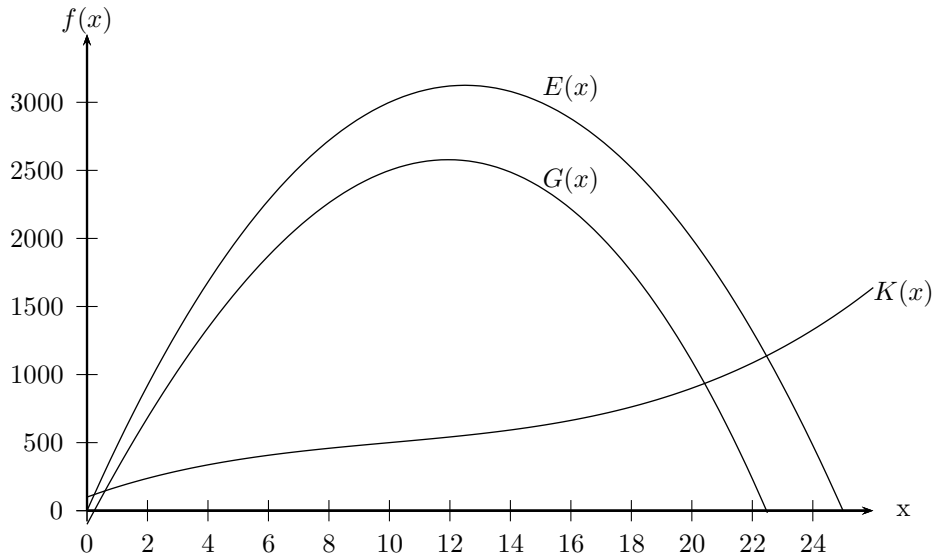


Abbildung 3.6.45: Graphische Darstellung der Kostenfunktion $K(x)$, der Erlösfunktion $E(x)$ und der Gewinnfunktion $G(x)$ des ökonomischen Beispiels

Bemerkung 3.6.10. *Kostenfunktionen, die zuerst immer weniger ansteigen und dann immer mehr, werden „ertragsgesetzliche Kostenfunktionen" genannt (überlegen Sie, wieso diese Form einer Kostenfunktion ökonomisch Sinn macht).* ◊

Übungen

1. Berechnen Sie ein Polynom dritten Grades durch die Punkte $(5, 6)$, $(8, 9)$, $(50, 7)$ und $(100, 30)$. Geben Sie den Schnittpunkt des Polynoms mit der $y - Achse$ an. Geben Sie die Nullstellen des Polynomes (= Schnittpunkt mit der $x - Achse$; Näherungsverfahren mit Excel; kontrollieren Sie das Resultat mit Hilfe eines Rechners oder eines Programms, z.B. Solver von Excel oder mit R). Berechnen Sie den Funktionswert in 70 und in 50. Könnte es sich um eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion handeln?

2. Berechnen Sie den Schnittpunkt des Polynomes $f(x) = 0.02x^3 - 2x^2 + x - 2$ mit $g(x) = 2x + 2$.

3. Monopolfall. Sei die folgende ertragsgesetzliche Kostenfunktion gegeben:

$$K(x) = 0.2x^3 - 0.9x^2 + 4x + 2$$

   Zudem sei die Preisfunktion $p(x) = -0.02x + 4$ gegeben.
   Berechnen Sie den Gewinnbereich
   Die Kosten in $x = 3$
   Der Erlös in $x = 3$
   Den Gewinn in $x = 3$.

4. Eine Produktionsfunktion drückt die produzierte Menge x als Funktion des Inputs von Rohstoffen oder Zwischenprodukten r aus. Eine ertragsgesetzliche Produktionsfunktion steigt zuerst immer mehr an, dann immer weniger und schliesslich sinkt sie.
   Überprüfen Sie graphisch, ob die folgende Produktionsfunktion x als ertragsgesetzliche zu betrachten ist.

$$x(r) = -0.4r^3 + 1.3r^2 + 5r$$

Berechnen Sie den ökonomisch sinnvollen Bereich der Funktion.
Berechnen Sie $x(5)$.

5. Lösen Sie die folgende Gleichung

$$5x^3 + 2x^2 - 4x^2 - 4 = 15x^2 + 5x^2 + 2$$

Lösungen

1.

$$\begin{aligned} 6 &= 5^3 a_3 + 5^2 a_2 + 5a_1 + a_0 \\ 9 &= 8^3 a_3 + 8^2 a_2 + 8a_1 + a_0 \\ 7 &= 50^3 a_3 + 50^2 a_2 + 50a_1 + a_0 \\ 30 &= 100^3 a_3 + 100^2 a_2 + 100a_1 + a_0 \end{aligned}$$

$a_0 = -\frac{44\,393}{82\,593} = -0.537\,49$
$a_1 = \frac{542\,891}{359\,100} = 1.\,511\,8$
$a_2 = -\frac{3500\,131}{82\,593\,000} = -4.\,237\,8 \times 10^{-2}$
$a_3 = \frac{25\,037}{82\,593\,000} : 3.\,031\,4 \times 10^{-4}$
Damit ist die Funktionsgleichung:

$$f(x) = 0.00030314x^3 - 0.042378x^2 + 1.5118x - 0.53749$$

Schnittstelle mit der y-Achse: -0.53749
Nullstellen: es gibt nur eine reelle Nullstelle: $0.359\,14$
Funktionswert in 70: $f(70) = 0.00030314 \cdot 70^3 - 0.042378 \cdot 70^2 + 1.5118 \cdot 70 - 0.53749 = 1.\,613\,3$
Funktionswert in 50: da $(50, 7)$ einer der Punkte ist, durch den wir die Funktion berechnet haben, kann man ohne zu rechnen schreiben $f\,(50) = 7$ (ausser man möchte die Korrektheit der berechneten Funktion überprüfen).
Funktionswert in 50: $f(50) = 7$.
Es könnte sich eher nicht um eine Kostenfunktion handeln, da der Schnittpunkt mit der $x - Achse$ positiv ist. Entsprechend gäbe es links des Schnittpunktes negative Kosten - ein ziemlich unrealistisches Szenario.

2. $f(x) = 0.02x^3 - 2x^2 + x - 2$ und mit $g(x) = 2x + 2$.

$$2x + 2 = 0.02x^3 - 2x^2 + x - 2$$

Nur eine reelle Nullstelle in 100.52. $g(100.52) = 2 \cdot 100.52 + 2 = 203.\,04$. Damit ist der Schnittpunkt $(100.52, 203.04)$.

3. $E(x) = p(x)x = -0.02x^2 + 4x$
$G(x) = E(x) - K(x) = -0.02x^2 + 4x - \left(0.2x^3 - 0.9x^2 + 4x + 2\right)$
$= 0.88x^2 - 0.2x^3 - 2$
Nullstellen der Gewinnfunktion: $3.649\,0, 2.073, -1.322\,0$
Wir überprüfen, wo im ersten Quadranten die Gewinnfunktion positiv ist:
$G(3) = 0.88 \cdot 3^2 - 0.2 \cdot 3^3 - 2 = 0.52 > 0$. Damit ist der Gewinnbereich: $]2.073, 3.6490[$.
Die Kosten in $x = 3 : K(3) = 0.2 \cdot 3^3 - 0.9 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 2 = 11.\,3$
Der Erlös in $x = 3 : E(3) = -0.02 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 = 11.\,82$
Den Gewinn in $x = 3 : 11.82 - 11.3 = 0.52$.

4. Für die Überprüfung der Merkmale einer ertragsgesetzlichen Produktionsfunktion s. die folgende Abbildung 3.6.46

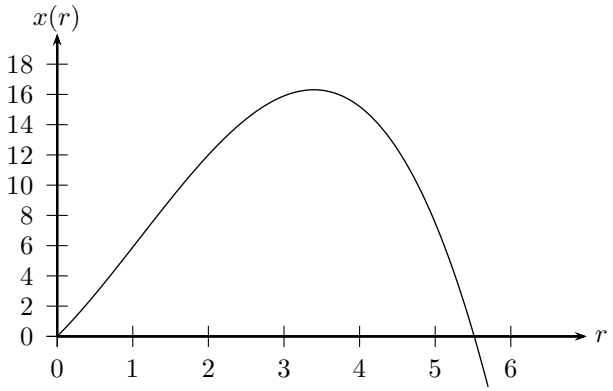


Abbildung 3.6.46: Graphische Darstellung der ertragsgesetzlichen Produktionsfunktion der Übung.

Die Kurve steigt zuerst immer mehr an, dann immer weniger (die Unterschiede sind allerdings gering - im steigenden Bereich zuerst fast eine Gerade) und schliesslich sinkt sie. Es handelt sich also um eine ertragsgesetzliche Produktionsfunktion.
$x(r) = -0.4r^3 + 1.3r^2 + 5r$
Die Funktion ist nur im ersten Quadranten sinnvoll interpretierbar. Die erste Nullstelle befindet sich in $r = 0$; die zweite ist in $5.\,516\,1$ (die dritte liegt nicht im ersten Quadranten). Damit ist der ökonomisch sinnvolle Bereich $[0, 5.5161]$.
$x(5) = -0.4 \cdot 5^3 + 1.3 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 = 7.\,5$

5. Lösungsmenge: $\{4.460\,3\}$

3.7 Polynome n-ten Grades

Definition 3.7.1. *$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ mit $a_n \neq 0$ ist ein Polynom $n-ten$ Grades.* ◊

- Ein Polynom dieser Form ist durch $n + 1$ Punkte (x_i, y_i) mit $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ und $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$, bestimmt, falls das entsprechende Gleichungssystem eindeutig lösbar ist, d.h. kennen wir $n + 1$ geordnete Paare der Funktion, so können wir das Polynom durch eine Formel hinschreiben.

- Der Schnittpunkt des Polynoms mit der y-Achse ist $(0, a_0)$.

- Ein Polynom $n - ten$ Grades hat höchstens n reelle Nullstellen.

- Ein Polynom ungeraden Grades hat mindestens eine reelle Nullstelle.

- Ein Polynom geraden Grades kann keine reelle Nullstelle haben.

- Nullstellen von Polynomen höheren Grades werden mit dem oben eingeführten Näherungsverfahren berechnet (oder mit einem der weiteren Verfahren, die nicht diskutiert wurden).

- Polynome geraden Grades sind nicht surjektiv und nicht injektiv. Polynome ungeraden Grades sind surjektiv. Manche sind injektiv und manche nicht injektiv.

Übungen

1. Berechnen Sie den Funktionswert der Funktion $f(x) = 17x^{10} + 6x^3 - 2$ in $x = 3$.
2. Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem man ein Polynom durch die folgenden Punkte berechnen könnte: $(5, 10), (6, 12), (7, 5), (8, 3), (9, 20), (10, 50)$.
3. Berechnen Sie mit dem Solver oder mit R einen der reellen Schnittpunkte der folgenden Polynome:

$$f(x) = 12x^5 + 6x^2 - 2$$
$$g(x) = 5x^7 - 2x^3 + 4x + 4$$

4. Finden Sie mit dem Solver oder mit R eine der reellen Lösungen des folgenden Gleichungssystems:

$$20x^9 - 10x^4 + 2x + 4 = 14x^6 + 12x^5$$

Lösungen

1. $f(3) = 1003\,993$
2. Es hat 6 Punkte. Man kann also von einem Polynom 5. Grades ausgehen: $f(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$$\begin{aligned}
10 &= 5^5a_5 + 5^4a_4 + 5^3a_3 + 5^2a_2 + 5a_1 + a_0\\
12 &= 6^5a_5 + 6^4a_4 + 6^3a_3 + 6^2a_2 + 6a_1 + a_0\\
5 &= 7^5a_5 + 7^4a_4 + 7^3a_3 + 7^2a_2 + 7a_1 + a_0\\
3 &= 8^5a_5 + 8^4a_4 + 8^3a_3 + 8^2a_2 + 8a_1 + a_0\\
20 &= 9^5a_5 + 9^4a_4 + 9^3a_3 + 9^2a_2 + 9a_1 + a_0\\
50 &= 10^5a_5 + 10^4a_4 + 10^3a_3 + 10^2a_2 + 10a_1 + a_0
\end{aligned}$$

Die Lösung des Gleichungssystems: $a_0 = 1895, a_1 = -\frac{9467}{6} = -1577.8$,
$a_2 = \frac{1523}{3} = 507.67, a_3 = -\frac{157}{2} = -78.5, a_4 = \frac{35}{6} = 5.833\,3$,
$a_5 = -\frac{1}{6} = -0.166\,67$
Das Polynom ist damit: $f(x) = 1895 - \frac{9467}{6}x + \frac{1523}{3}x^2 - \frac{157}{2}x^3 + \frac{35}{6}x^4 - \frac{1}{6}x^5$. (s. Abbildung 3.7.47)

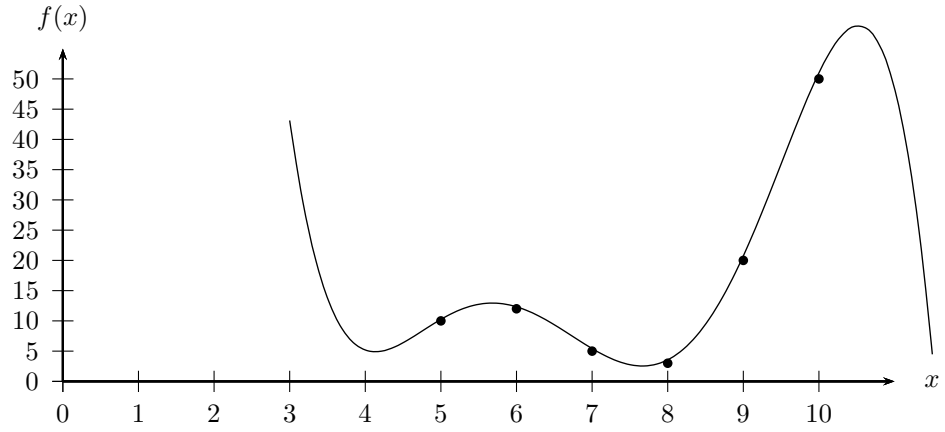


Abbildung 3.7.47: Graphik fürs Beispiel: gegebene Punkte und berechnetes Polynom 5. Grades durch die Punkte. Man sieht, dass ausserhalb des Bereichs mit den Punkten dieses Formen annimmt, die keine Tendenz in den gegebenen Punkten reflektiert

3. Das Problem kann auf das folgende Nullstellenproblem zurückgeführt werden.

$$5x^7 - 12x^5 - 2x^3 - 6x^2 + 4x + 6 = 0$$

Die reellen Nullstellen sind. 0.8539979, -1.4893849 und 1.6159621. Es gilt
$f(0.8539979) = 7.826\,7$. Damit ist ein Schnittpunkt $(0.8539979, 7.8267)$
$f(-1.4893849) = -76.636$. Damit ist ein weiterer Schnittpunkt $(-1.4893849, -76.636)$
$f\,(1.6159621) = 145.9$. Der letzte Schnittpunkt ist $(1.6159621, 145.9)$

4. Wir gelangen auf das folgende Nullstellenproblem:

$$20x^9 - 14x^6 - 12x^5 - 10x^4 + 2x + 4 = 0$$

Ein Element der Lösungsmenge ist: 0.70471345
Weitere reelle Nullstellen: -0.6904269; 1.1368600

3.8 Lernziele

- Die Definition eines Polynoms $n - ten$ Grades kennen.
- Den Schnittpunkt eines Polynoms mit der $y - Achse$ angeben können.
- Die Nullstellen von Polynomen berechnen können (für Polynome 2-ten Grades mit Hilfe der Formel, für Polynome höheren Grades mit Hilfe eines Näherungsverfahrens (mit Excel). Zudem mit Hilfe des Solvers von Excel oder mit R.
- Die Schnittpunkte von Polynomen berechnen können.
- Ein Polynom n-ten Grades durch $n + 1$ Punkte berechnen können.
- Gleichungen $n - ten$ Grades in einer Variablen lösen können.
- Übungen der obigen Art lösen können.

Kapitel 4

Weitere elementare reelle Funktionen

Neben den Polynomen spielen weitere elementare reelle Funktionen in der ökonomischen Analyse eine Rolle. Wir betrachten einige dieser Funktionstypen und liefern jeweils ökonomische Beispiele.

4.1 Rationale Funktionen

Definition 4.1.1. *f ist eine rationale Funktion genau dann, wenn es zwei Polynomfunktionen g und h gibt, so dass*

$$f : \mathbb{R}\backslash\{x \mid h(x) = 0\} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) := \frac{g(x)}{h(x)}.$$

Wir müssen den Definitionsbereich des Polynoms h einschränken, damit keine Division durch 0 entsteht. Wir nennen $\frac{g(x)}{h(x)}$ einen „rationalen Ausdruck“.

◊

Bemerkung 4.1.2. *In ökonomischen Mathematikbüchern werden die „rationalen Funktionen“ oft „gebrochen rationale Funktionen“ genannt.* ◊

Beispiel 4.1.3. *Sei K eine Kostenfunktion (z.B. $K : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$; $K(x) = 5x + 2$). Dann ist die Stückkostenfunktion*

$$k(x) = \frac{5x + 2}{x} = 5 + \frac{2}{x}.$$

Die Stückkostenfunktion drückt die Kosten pro Stück in Abhängigkeit von der produzierten Menge aus. Sie ist definiert auf dem Bereich $\mathbb{R}^+\backslash\{0\} =]0, \infty[$ (siehe Abbildung 4.1.1).

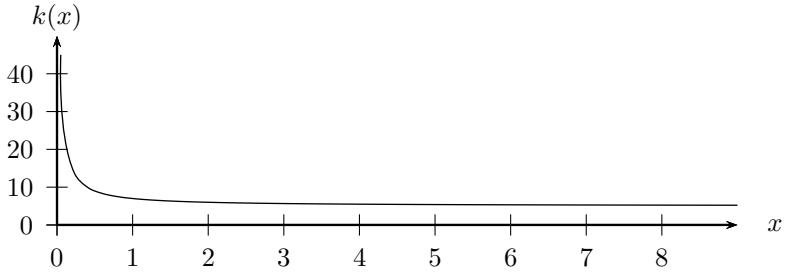


Abbildung 4.1.1: Graphische Darstellung der Stückkostenfunktion $k(x) = \frac{K(x)}{x}$ des ökonomischen Beispiels

$\Diamond$

Bemerkung 4.1.4. *Begründung des Verbots der Division durch* 0*: Wir starten mit einer Definition der Division:*
Definition: $\frac{a}{b} = c$ *genau dann, wenn* $a = bc$ *(für* $a, b, c \in \mathbb{R}, b \neq 0$*).*
Der Grund für den Ausschluss von $b = 0$ *kann nun einfach gezeigt werden: würde für jedes* $a \in \mathbb{R}$ *ein eindeutig bestimmtes* $c \in \mathbb{R}$ *existieren, so dass* $\frac{a}{0} = c$*, würde sich ergeben, dass z.B. für alle* $a \neq 0$ *gemäss Definition* $0 \cdot c = a$ *ist. Nun ist aber* $0 \cdot c = 0$ *und daraus resultiert für* $a \neq 0$ *der Widerspruch* $0 = a \neq 0$*.*

Man kann ein Opfer der verbotenen Division durch 0 *durch mechanisches Anwendung von Regeln werden:*

$$\begin{aligned} 5x + 6 &= 4x + 3 \\ x^2 + 5x + 6 &= x^2 + 4x + 3 \\ (x + 2)(x + 3) &= (x + 1)(x + 3) \\ x + 2 &= x + 1 \\ 2 &= 1 \end{aligned}$$

-3 *ist eine Lösung von* $5x + 6 = 4x + 3$*, da*

$$\begin{aligned} 5 \cdot (-3) + 6 &= -9 \\ 4 \cdot (-3) + 3 &= -9. \end{aligned}$$

Entsprechend erfolgt von der Linie 4 auf die Linie 5 eine implizite Division durch Null ($-3+3 = 0$*). Dies erlaubt es auf die letzte Linie zu gelangen, welche dem Satz* $2 \neq 1$ *wiederspricht. Noch eine Beispiel, bei dem die Division durch* 0 *offensichtlicher ist, aber bei sturer gedankenloser Anwendung von Regeln auch nicht bemerkt wird:*

$$\begin{aligned} x &= x \\ x^2 &= x^2 \\ x^2 - x^2 &= x^2 - x^2 \\ x(x - x) &= (x - x)(x + x) \\ x &= x + x = 2x \\ 1 &= 2. \end{aligned}$$

$\Diamond$

4.1.1 Nullstellen

Bei Nullstellenberechnungen ist darauf zu achten, dass die Funktion an eventuellen Nullstellen überhaupt definiert ist. So ist z.B.

$$f : \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) := \frac{5x - 2.5}{x - \frac{1}{2}}$$

an der Stelle $\frac{1}{2}$ nicht definiert. Lösen wir die Gleichung

$$\frac{5x - 2.5}{x - \frac{1}{2}} = 0$$

auf, erhalten wir

$$5x - 2.5 = 0 \Longrightarrow$$
$$x = \frac{1}{2}$$

An dieser Stelle gilt aber nicht $f(\frac{1}{2}) = 0$, da die Funktion an dieser Stelle nicht definiert ist. Entsprechend hat f keine Nullstelle, sondern im Beispiel eine sogenannte „Lücke“. Solche Lücken ergeben sich bei rationalen Funktion, wenn sie so gekürzt werden können, dass bis auf den Definitionsbereich ein Polynom entsteht. Im Beispiel gilt etwa

$$\frac{5x - 2.5}{x - \frac{1}{2}} = \frac{5(x - 0.5)}{x - \frac{1}{2}}$$
$$= 5.$$

(siehe Abbildung 4.1.2)

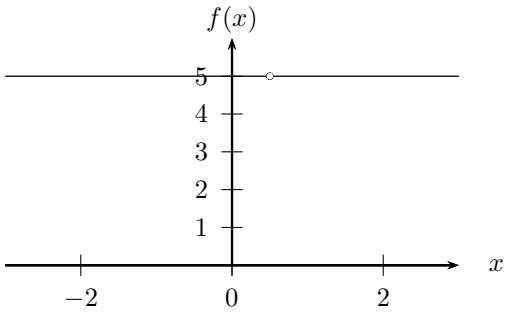


Abbildung 4.1.2: Graphische Darstellung der Funktion $f(x) = \frac{5x-2.5}{x-\frac{1}{2}}$, die an der Stelle 0.5 nicht definiert ist. Die Funktion weist in 0.5 eine sogenannte Lücke auf

Neben Lücken gibt es bei rationalen Funktionen oft „Unendlichkeitsstellen“. In der Nähe der Nullstellen des Nennerpolynoms gehen die Funktionsgraphen gegen unendlich (s. Abbildungen 4.1.3 und 4.1.4).

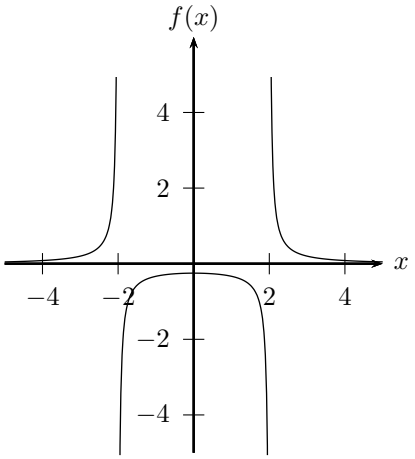


Abbildung 4.1.3: Rationale Funktion $f(x) = \frac{1}{(x)^2-4}$ mit Unendlichkeitsstellen in $x = -2$ und $x = 2$

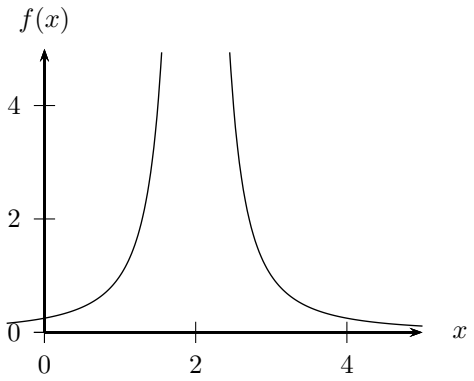


Abbildung 4.1.4: Rationale Funktion $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ mit einer Unendlichkeitsstelle in $x = 2$

Man sieht, dass rationale Funktionen das Vorzeichen der Funktionswerte nicht nur in den Nullstellen, sondern auch an Stellen ändern können, an denen sie nicht definiert sind.

4.1.2 Gleichungen mit rationalen Ausdrücken

Das Lösen von Gleichungen, die nur rationale Ausdrücke und Polynome enthalten, führt auf die Nullstellenberechnung von Polynomen. Es ist aber zusätzlich darauf zu achten, welche Zahlen für die Lösungsmenge wegen einer allfälligen Division durch Null nicht in Frage kommen. Multiplizieren wir z.B.

$$\frac{5x+2}{x-\frac{1}{2}} = \frac{4+x}{x-\frac{1}{2}} \tag{4.1.1}$$

auf beiden Seiten mit $x - \frac{1}{2}$ und kürzen wir, so erhalten wir

$$\begin{aligned} &5x + 2 = 4 + x \Longrightarrow \\ &4x - 2 = 0, \end{aligned}$$

wobei die Nullstelle $\frac{1}{2}$ ist. $\frac{1}{2}$ ist aber keine Lösung von (4.1.1) , da beim Einsetzen in die Gleichung eine Division durch Null erfolgt. Entsprechend muss bei solchen Gleichungssystemen vorgängig abgeklärt werden, welche Zahlen überhaupt Elemente der Lösungsmenge sein können - die Nullstellen des Nenners können nicht zur Lösungsmenge gehören.

Zur Erinnerung:

Definition 4.1.5. *Für* $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, n \in \mathbb{N}^*$

$$x^{-n} := \frac{1}{x^n}$$

$\Diamond$

Satz 4.1.6. *Es gilt:* $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ *für* $m \neq n$ *und* $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} = x^0 = 1$ *für* $m = n$.

Beweis. (a) (durch Induktion): (1)

$$\begin{aligned} \frac{x^1}{x^2} &= \frac{x}{xx} = \frac{1}{x} = x^{-1} = x^{1-2} \\ \frac{x^2}{x} &= \frac{xx}{x} = x = x^{2-1} \end{aligned}$$

(2) Es gelte $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$. Damit gilt

$$\frac{x^{m+1}}{x^n} = \frac{x^m x}{x^n} = x^{m-n}x = x^{m-n+1} = x^{m+1-n}$$
$$\frac{x^m}{x^{n+1}} = \frac{x^m}{x^n x} = \frac{x^{m-n}}{x} = \frac{x^{m-n-1}x}{x} = x^{m-n-1} = x^{m-(n+1)}$$

(b) Der Satz gelte für n, d.h. $\frac{x^n}{x^n} = 1$. Damit gilt für

$$\frac{x^{n+1}}{x^{n+1}} = \frac{x^n x}{x^n x} = \frac{x^n}{x^n}\frac{x}{x} = 1 \cdot 1 = 1 = x^{n+1-(n+1)} = x^0.$$

□

Das Ergebnis $x^0 = 1$ ist leicht verständlich: Es gilt z.B. $\frac{x^4}{x^4} = \frac{xxxx}{xxxx} = 1$ und es ist $\frac{x^4}{x^4} = x^4 x^{-4} = x^{4-4} = x^0$. Für $x = 0$ wird oft per Definition $0^0 = 1$ gesetzt, damit $x^0 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Manchmal wird der Ausdruck mit 0 identifiziert, damit $0^x = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Manchmal wird der Ausdruck undefiniert belassen. R liefert 1, Excel eine Fehlermeldung. Hier setzen wir $0^0 = 1$.

Übungen

1. Berechnen Sie $f(24)$ für
$$f(x) = \frac{15x + 2x^2}{4x^2 + 5x + 3}$$
Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion an.

2. Die Quartalskosten K für die elektrische Energie eines Betriebes setzen sich zusammen aus der Quartalsgebühr in der Höhe von 150 GE und einem Preis von 0.17 GE pro kWh. Berechnen Sie die Gesamtkostenfunktion K, die Funktion der variablen Kosten K_v, die Funktion der fixen Kosten K_f und die Stückkostenfunktion k.

3. Sei die folgende Gesamtkostenfunktion gegeben:
$$K(x) = 0.06x^3 - 1.8x^2 + 70x + 265$$
Zeichnen Sie diese mit Excel oder mit einem anderen Programm. Geben Sie die Funktionsgleichungen von K_v, K_f und k an. Berechnen Sie $k(25)$. Berechnen Sie die Stückgewinnfunktion, wenn die Preisfunktion $p(x) = -2x + 4$ ist (Monopol).

4. Finden Sie die Nullstellen der folgenden Funktionen:
a)
$$f(x) = \frac{2x^2 + 5x - 2x}{3x^2 + 4}$$
b)
$$f(x) = \frac{2x^2 + 5x - 2x}{4x^2 - 9}$$

5. Lösen Sie die folgenden Gleichungen auf:
a)
$$5x^2 + 3x - 5 = \frac{3x^2 - 4x + 5}{2x^2}$$
b)
$$\frac{10x^2 + 4x + 5}{2x + 3} = 4x + 14$$

6. Berechnen Sie die Schnittpunkte der folgenden Funktionen:

$$f(x) = \frac{5x^2 + 2x - 5}{3x^2 - 1}$$
$$g(x) = 14x + 4$$

Lösungen

1. Zuerst ist der Definitionsbereich der Funktion zu berechnen, bevor $f(24)$ berechnet werden kann: Man berechnet die Nullstellen von $g(x) = 4x^2 + 5x + 3$. Es gibt keine reelle Nullstellen. Entsprechend ist f auf $\mathbb{R}$ definiert.

$$f(24) = \frac{15 \cdot 24 + 2 \cdot 24^2}{4 \cdot 24^2 + 5 \cdot 24 + 3} = 0.622\,99$$

2.

$$K(x) = 0.17x + 150$$
$$K_v(x) = 0.17x$$
$$K_f(x) = 150$$
$$k(x) = 0.17 + \frac{150}{x}$$

Es gilt also

$$K(x) = K_v(x) + K_f(x)$$

3. Zeichnung:

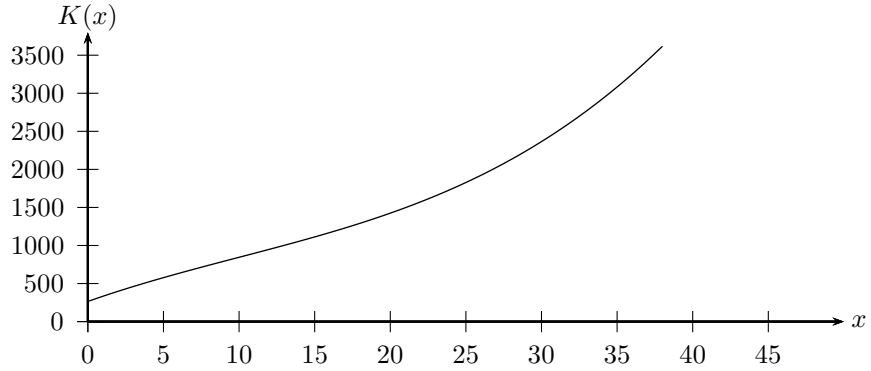


Abbildung 4.1.5: Graphische Darstellung der Funktion $K(x) = 0.06x^3 - 1.8x^2 + 70x + 265$

$$K_v(x) = 0.06x^3 - 1.8x^2 + 70x$$
$$K_f(x) = 265$$
$$k(x) = \frac{0.06x^3 - 1.8x^2 + 70x + 265}{x}$$
$$= 0.06x^2 - 1.8x + 70 + \frac{265}{x}$$

Der Definitionsbereich von k ist $\mathbb{R}^+ \backslash \{0\}$.

$$k(25) = 0.06 \cdot 25^2 - 1.8 \cdot 25 + 70 + \frac{265}{25}$$
$$= 73.1$$

$$\begin{aligned}
E(x) &= xp(x) = -2x^2 + 4x \\
G(x) &= E(x) - K(x) \\
&= -2x^2 + 4x - \left(0.06x^3 - 1.8x^2 + 70x + 265\right) \\
&= -0.06x^3 - 0.2x^2 - 66x - 265 \\
g(x) &= \frac{-0.06x^3 - 0.2x^2 - 66x - 265}{x} \\
&= -0.06x^2 - 0.2x - 66 - \frac{265}{x}
\end{aligned}$$

4. a) Wir bestimmen die Nullstellen von $g(x) = 3x^2 + 4$. Dieses Polynom hat keine Nullstellen. Somit ist f in $\mathbb{R}$ definiert. Zu bestimmen ist damit

$$\begin{aligned}
\frac{2x^2 + 5x - 2x}{3x^2 + 4} = 0 \Longrightarrow \\
2x^2 + 5x - 2x = 0 \Longrightarrow
\end{aligned}$$

Lösungsmenge: $\left\{0, -\frac{3}{2}\right\}$
b)

$$f(x) = \frac{2x^2 + 5x - 2x}{4x^2 - 9}$$

Die Nullstellen von $g(x) = 4x^2 - 9$ sind $\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$. Damit ist der Definitionsbereich von f : $\mathbb{R}\backslash\{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\}$.

$$\begin{aligned}
\frac{2x^2 + 5x - 2x}{4x^2 - 9} = 0 \Longrightarrow \\
2x^2 + 5x - 2x = 0
\end{aligned}$$

Die Lösungsmenge des Nullstellenproblems ist $\left\{0, -\frac{3}{2}\right\}$. Damit ist die Lösungsmenge $\{0\}$ – da $-\frac{3}{2}$ nicht zum Definitionsbereich von f gehört, kann $-\frac{3}{2}$ nicht zur Lösungsmenge gehören.

5. a) Lösungen müssen Elemente von $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ sein, da $2x^2 = 0$ für $x = 0$. Man erhält man für $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}
5x^2 + 3x - 5 = \frac{3x^2 - 4x + 5}{2x^2} \Longrightarrow \\
2x^2\left(5x^2 + 3x - 5\right) = 3x^2 - 4x + 5 \Longrightarrow \\
10x^4 + 6x^3 - 10x^2 = 3x^2 - 4x + 5 \Longrightarrow \\
10x^4 + 6x^3 - 13x^2 + 4x - 5 = 0
\end{aligned}$$

Man erhält: 0.937752327 und -1.6479071.
Kontrolle:

$$\begin{aligned}
5 \cdot 0.937752327^2 + 3 \cdot 0.937752327 - 5 = 2.210\,2 \\
\frac{3 \cdot 0.937752327^2 - 4 \cdot 0.937752327 + 5}{2 \cdot 0.937752327^2} = 2.210\,2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5 \cdot (-1.6479071)^2 + 3\,(-1.6479071) - 5 = 3.\,634\,3 \\
\frac{3 \cdot (-1.6479071)^2 - 4 \cdot (-1.6479071) + 5}{2 \cdot (-1.6479071)^2} = 3.\,634\,3
\end{aligned}$$

b) Element der Lösungsmenge müssen von $-\frac{3}{2}$ verschieden sein, denn für $2x+3=0$ gilt $x=-\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned}\frac{10x^2+4x+5}{2x+3} &= 4x+14 \Longrightarrow\\ 10x^2+4x+5 &= (4x+14)(2x+3)\\ &= 40x+8x^2+42 \Longrightarrow\\ 2x^2-36x-37 &= 0\end{aligned}$$

$9-\frac{1}{2}\sqrt{398}=-0.974\,97$; $\frac{1}{2}\sqrt{398}+9=18.975$. Damit ist die Lösungsmenge

$$\{-0.974\,97, 18.975\}$$

Wir kontrollieren das Ergebnis durch Einsetzen in die Gleichung:

$$\frac{10\cdot(-0.974\,97)^2+4\cdot-0.974\,97+5}{2\cdot-0.974\,97+3} = 10.1$$
$$4\cdot-0.974\,97+14 = 10.1$$

$$\frac{10\cdot 18.975^2+4\cdot 18.975+5}{2\cdot 18.975+3} = 89.9$$
$$4\cdot 18.975+14 = 89.9$$

6. Bestimmung des Definitionsbereiches von $f: 3x^2-1=0$

$$\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3}\right\}$$

Wobei $-\frac{1}{3}\sqrt{3}=-0.577\,35$. Wir setzen gleich:

$$\begin{aligned}\frac{5x^2+2x-5}{3x^2-1} &= 14x+4 \Longrightarrow\\ 5x^2+2x-5 &= (14x+4)\left(3x^2-1\right)\\ &= 42x^3+12x^2-14x-4 \Longrightarrow\\ 42x^3+7x^2-16x+1 &= 0\end{aligned}$$

Man erhält die Nullstellen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= 0.5\\ -\frac{1}{21}\sqrt{70}-\frac{1}{3} &= -0.731\,742863\\ \frac{1}{21}\sqrt{70}-\frac{1}{3} &= 0.065076243\end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned}14\cdot 0.5+4 &= 11\\ 14\cdot -0.731\,742863+4 &= -6.244\,4\\ 14\cdot 0.065076243+4 &= 4.911\,1\end{aligned}$$

erhält man die Menge der Schnittpunkte (s. die graphische Darstellung 4.1.6):

$$\{(-0.731742863, -6.244\,4), (0.065076243, 4.911\,1), (0.5, 11)\}$$

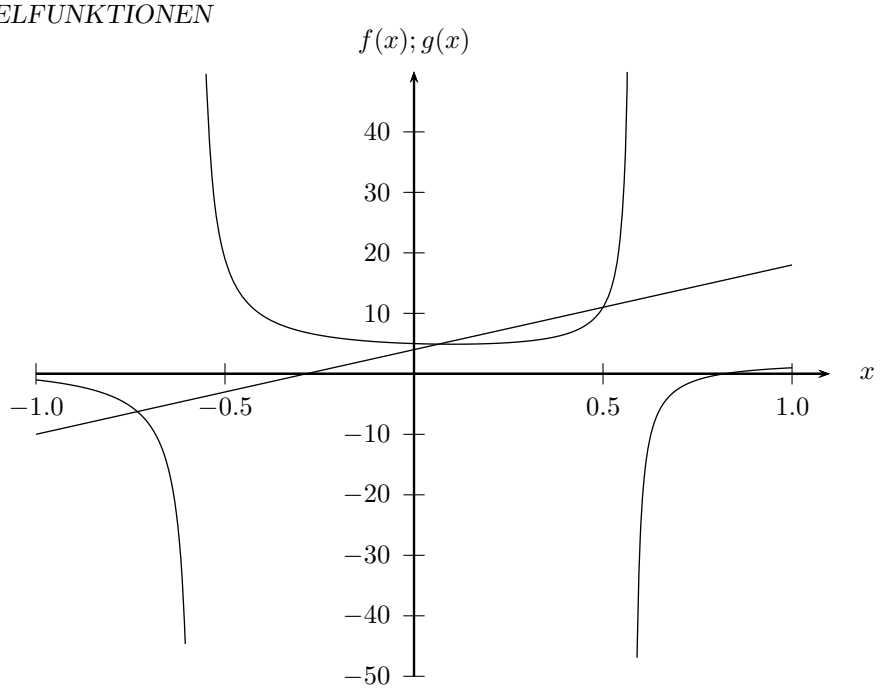


Abbildung 4.1.6: Schnittpunkte der Funktionen $f(x) = \frac{5x^2+2x-5}{3x^2-1}$ und $g(x) = 14x + 4$

4.2 Wurzelfunktionen und Verkettung von Funktionen

Definition 4.2.1. *Sei f eine reelle Funktion mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann nennen wir $g : E \to \mathbb{R}$ mit $E \subset \mathbb{R}$ und $f(x) = g(x)$ für $x \in E$ die „Restriktion von f auf E“ oder die „Einschränkung von f auf E“*

◊

Oft wird der Wertebereich der Funktion eingeschränkt, um eine Surjektion zu erhalten.

Polynome $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^n$ sind injektiv. Ihr Bild ist $\mathbb{R}^+$. Entsprechend ist $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ eine Bijektion und die Umkehrfunktion existiert. Für die Umkehrfunktion dieser auf $\mathbb{R}^+$ eingeschränkten Polynome führen wir eine spezielle Abkürzung ein. Wir definieren:

Definition 4.2.2. *Ist $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ mit $y := f(x) = x^n$, dann gilt per Definition:*

$$\sqrt[n]{y} := f^{-1}(y)$$

für $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$. Wir nennen Abbildungen

$$g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
$$g(x) := \sqrt[n]{x}$$

Wurzelfunktionen. ◊

Satz 4.2.3. *Ist f^{-1} die Umkehrfunktion von f, dann gilt:*

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

(„$\iff$“ wird gelesen als „genau dann, wenn“)

Beweis. Sei $f(x) = y$. Damit ist (x, y) gemäss Definition der Schreibweise $f(x) = y$ Element des Graphen der Funktion f. Entsprechend ist (y, x) Element des Graphen der Umkehrfunktion f^{-1}, d.h. $f^{-1}(y) = x$. Umgekehrt sei $f^{-1}(y) = x$. Entsprechend ist (y, x) Element des Graphen der Umkehrfunktion f^{-1}. Also ist (x, y) Element der Funktion f, d.h. $f(x) = y$. □

Satz 4.2.4. $\sqrt[n]{y} = x \Longleftrightarrow x^n = y$

Beweis. Die Wurzelfunktionen sind die Umkehrfunktion der Polynome x^n. Entsprechend gilt der Satz mit dem Satz 4.2.3 unmittelbar. □

Beispiel 4.2.5.

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

◊

Beispiel 4.2.6. *Das Sozialprodukt Y eines Landes hängt vom Arbeitsinput A ab. Der Zusammenhang sei durch die folgende Funktion gegeben:*

$$Y : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
$$Y(A) := \sqrt[5]{A}.$$

(siehe Abbildung 4.2.7).

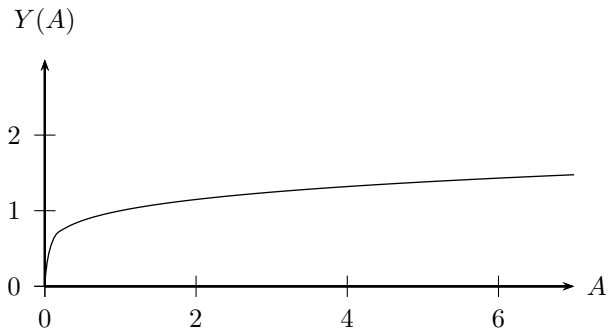


Abbildung 4.2.7: Graphische Darstellung der Funktion $Y(A) = A^{0.2}$

Bei einem Arbeitsinput von 200 würde damit das Sozialprodukt

$$Y(200) = \sqrt[5]{200} = 2.885\,4$$

betragen. ◊

Es gilt offensichtlich der Satz:

Satz 4.2.7. *Die Nullstelle von Wurzelfunktionen ist* 0

Beweis. $\sqrt[n]{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt[n]{x}^n = 0^n \Leftrightarrow x = 0$ □

Wie üblich definiert man:

Definition 4.2.8. $x^{\frac{1}{m}} := \sqrt[m]{x}$ ◊

Zur Wiederholung halten wir ein paar Sätze (Rechenregeln) fest:

Satz 4.2.9. *Für $x, y \geq 0$ und $n, m \in \mathbb{N}^*$*

	Wurzelschreibweise	*Potenzschreibweise*
a)	$\sqrt[n]{x^n} = x$	$(x^n)^{\frac{1}{n}} = x$
b)	$\sqrt[n]{x}^n = x$	$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x$
c)	$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$	$(xy)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}}$
d)	$\sqrt[n]{\frac{1}{y}} = \frac{1}{\sqrt[n]{y}}$ $(y > 0)$	$\left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{y^{\frac{1}{n}}}$ $(y > 0)$
e)	$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$ $(y > 0)$	$\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{x^{\frac{1}{n}}}{y^{\frac{1}{n}}}$ $(y > 0)$
f)	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$	$\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{1}{nm}}$
g)	$\sqrt[n]{x}\sqrt[m]{x} = \sqrt[nm]{x^{m+n}}$	$x^{\frac{1}{n}} x^{\frac{1}{m}} = (x^{m+n})^{\frac{1}{nm}} = x^{\frac{m+n}{nm}}$
h)	$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x^{m-n}}$ $(x > 0)$	$\frac{x^{\frac{1}{n}}}{x^{\frac{1}{m}}} = x^{\frac{m-n}{mn}}$ $(x > 0)$

Bemerkung 4.2.10. *Polynome $f(x) = x^{2n+1}$ mit $n \in \mathbb{N}^*$ sind auf $\mathbb{R}$ bijektiv. Entsprechend ist für diese Polynome die Umkehrfunktion ohne Einschränkung auf $\mathbb{R}$ definiert. Trotzdem werden Wurzelfunktionen aus Gründen der einheitlichen Behandlung gewöhnlich auch für diesen Fall auf $\mathbb{R}^+$ definiert. Damit wird nicht ausgesagt, dass die Umkehrfunktion von $f(x) = x^{2n+1}$ für negative x nicht definiert ist, sondern dass man die Schreibweisen $x^{\frac{1}{n}}$ und $\sqrt[n]{x}$ nur für positive x verwendet. Die Berechnung der Werte der Umkehrfunktion von $f(x) = x^{2n+1}$ für negative x kann man mit der Wurzelschreibweise ausdrücken durch $-\left(\sqrt[2n+1]{|x|}\right)$ oder $-\left(|x|^{\frac{1}{2n+1}}\right)$. Würde man Wurzelfunktionen bei ungeradem Exponenten auf die reellen Zahlen definieren, würde z.B. die Regel $a^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{2n}{2m}}$ nicht mehr ohne Einschränkungen gelten, wie das folgende Beispiel zeigt:*

$$-2 \underset{falsch}{=} \sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$$

(Widerspruch!). Zu beachten ist dreierlei: (1) falsch ist der erste Schritt auf Grund der hier vorgenommenen Definition von „Wurzelfunktion". Es gibt Bücher, die diesen Begriff anders definieren und Mathematiker lassen sich nicht gerne vorschreiben, wie sie etwas zu definieren haben. Lässt man ungerade Wurzeln für negative Zahlen zu, so wird der Fehler im dritten Schritt gemacht. (2) Excel mit „=(-8)^(1/3)" oder andere Programme (nicht aber R) sowie manche Rechner liefern auch eine Antwort auf die Eingabe von $\sqrt[3]{-8}$. In diesem Fall ist $\sqrt[3]{-8}$ gemäss vorgenommener Definition als alternative Schreibweise für $-\sqrt[3]{8}$ zu betrachten. (3) Beim Lösen von $x^2 = 4$ schreiben wir $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$, da sowohl -2 als auch 2 die Gleichung $x^2 = 4$ wahr machen. ◊

4.2.1 Verkettung von Funktionen

Neue Abbildungen können durch Verkettung zweier Abbildungen f und g gebildet werden, wobei die Operation der Verkettung mehrmals angewendet werden kann. Die Verkettung von f mit g besteht darin, dass wir den Argumenten von g die Funktionswerte von f zuordnen. Damit eine Abbildung vom Definitionsbereich von g auf den Wertebereich von f entsteht, muss das Bild von g eine Teilmenge des Definitionsbereichs von f sein. Ist dies nicht der Fall, muss man den Definitionsbereich von g entsprechend einschränken, sonst würden manchen Elementen des Definitionsbereichs von g keine Objekte zugeordnet werden.

Definition 4.2.11. *Die Verkettung von f mit g ist für zwei Abbildungen mit*

$$g : A \to B$$
$$f : D \to C$$

und $Bild(g) \subset D$ definiert durch

$$h : A \to C$$
$$h(x) = f(g(x))$$

$f(g(x))$ wird statt „f verkettet mit g von x“ oft auch gelesen als „f nach g von x“ oder kurz „f von g von x“. Für die Verkettung von f mit g wird oft die Abkürzung $f \circ g$ verwendet. Wir werden kurz $f(g)$ schreiben und lesen „f von g“, „f nach g“ oder „f verkettet mit g“.
◊

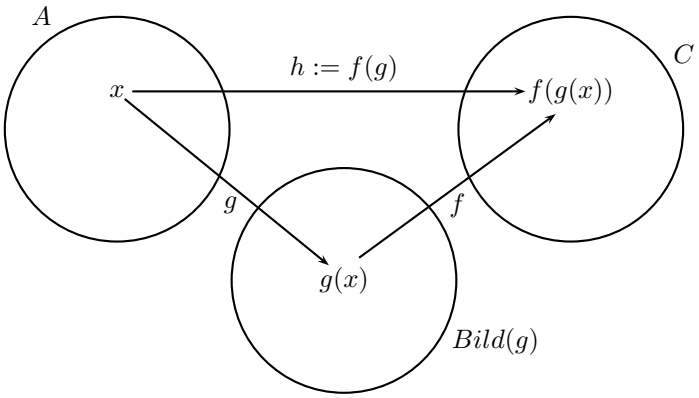


Abbildung 4.2.8: Graphische Erläuterung zur Verkettung h von f mit g

Um den Funktionswert von $h(x) = f(g(x))$ zu berechnen, berechnen wir zuerst $g(x)$ und dann $f(g(x))$.

Beispiel 4.2.12. *Sei*

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$f(x) := \sqrt{x}$$

und

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$g(x) := 2x^2$$

Es gilt $Bild(g) = \mathbb{R}^+$. Damit ist

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$h(x) := f(g(x))$$

definiert. Wollen wir $h(5)$ berechnen, können wir zuerst $g(5)$ berechnen:

$$g(5) = 2 \cdot 5^2 = 50$$

und dann $f(50)$

$$f(50) = \sqrt{50} = 7.071\,1.$$

◊

Liegen für die Zuordnungen Funktionsgleichungen vor, so erhält man eine Funktionsgleichung für $h(x) = f(g(x))$ durch Einsetzen $g(x)$ in die Variable der Funktionsgleichung von f. Im Beispiel 4.2.12 erhalten wir also

$$h(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}|x|$$

Die Verkettung ist nicht kommutativ, obwohl manchmal $f(g) = g(f)$ gilt.

Beispiel 4.2.13. *Im Beispiel 4.2.12 gilt* $f(g(x)) = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}|x|$ *und* $g(f(x)) = 2(f(x))^2 = 2\sqrt{x}^2 = 2x$ *für* $x \geq 0$ *- also unterschiedliche Ergebnisse. Für* $g(f)$ *ist der Definitionsbereich* $\mathbb{R}^+$*, für* $f(g)$ *aber* $\mathbb{R}$*.* ◊

Bemerkung 4.2.14. *Bestimmung des Definitionsbereiches: Wurzelfunktionen sind nur für nicht-negative Zahlen definiert. Zieht man die Wurzel eines Ausdrucks, z.B. des Polynoms* $f(x) = x^4 - 27x^2 - 14x + 120$*, ist die Funktion* $\sqrt{f(x)} = \sqrt{x^4 - 27x^2 - 14x + 120}$ *nur definiert für* x*, so dass* $f(x) \geq 0$*. Man muss entsprechend überprüfen, auf welchen Intervallen die Funktionswerte des Polynoms nicht-negativ sind (s. die Abbildung 4.2.9).*

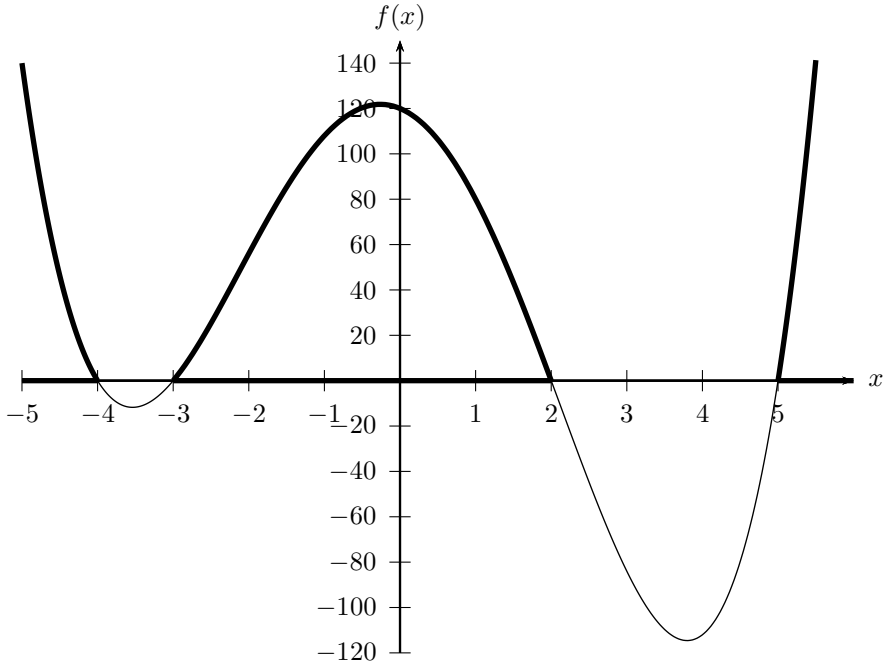


Abbildung 4.2.9: Bestimmung des Definitionsbereiches. Die Wurzel aus $f(x)$ ist nur für x definiert, für die $f(x) \geq 0$.

Wir berechnen dazu die Nullstellen des Polynoms:

$$x^4 - 27x^2 - 14x + 120 = 0$$

und man erhält $-4, -3, 2, 5$*. Um zu wissen, wo das Polynom positive oder negative Funktionswerte zwischen zwei benachbarten Nullstellen aufweist, berechnet man beliebige Funktionswerte zwischen jeweils zwei solchen Nullstellen (geht mit Excel oder R effizient). Zusätzlich berechnet man für ein beliebiges* x *links der ersten Nullstelle und rechts der letzten Nullstelle je einen Funktionswert.*

Man würde z.B. fürs Beispiel erhalten:

$-5 \in\ ]-\infty,-4[$	$f(-5)=140$
$-3.5 \in\ ]-4,-3[$	$f(-3.5)=-11.6875$
$0 \in\ ]-3,2[$	$f(0)=120$
$3 \in\ ]2,5[$	$f(3)=-84$
$6 \in\ ]5,\infty[$	$f(6)=360$

Da Polynome keine Sprünge machen, kann man daraus schliessen, dass die Funktion f nicht-negativ auf $]\text{-}\infty,-4] \cup [-3,2] \cup [5\ ,\infty[$ *ist. Diese Menge ist der Definitionsbereich von* $\sqrt{f(x)}$. $\Diamond$

Die Verkettung ist ein wirkungsvolles Instrument, um aus den bisher eingeführten Typen von reellen Funktionen zusätzliche Funktionen zu entwickeln, die durch die Definitionen der Polynome, rationalen Funktionen und Wurzelfunktionen nicht abgedeckt sind.

Beispiel 4.2.15. *Sei*

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) &= 5x^3 - 3x^4 + 5x \\ g &: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ g(x) &= \sqrt{x^5} \end{aligned}$$

dann ist

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= 5\left(g\left(x\right)\right)^3 - 3\left(g\left(x\right)\right)^4 + 5\left(g\left(x\right)\right) \\ & 5\sqrt{x^5}^3 - 3\sqrt{x^5}^4 + 5\sqrt{x^5} \\ &= \sqrt{x^5}\left(5\sqrt{x^5}^2 - 3\sqrt{x^5}^3 + 5\right) \\ &= \sqrt{x^5}\left(5x^{\frac{5\cdot 2}{2}} - 3x^{\frac{5\cdot 3}{2}} + 5\right) = \sqrt{x^5}\left(5x^5 - 3x^{\frac{15}{2}} + 5\right) \end{aligned}$$

Das Bild von g ist $\mathbb{R}^+$ *und damit Teilmenge von* $\mathbb{R}$. *Da g auf* $\mathbb{R}^+$ *definiert ist, ist* $f(g)$ *eine Abbildung von* $\mathbb{R}^+$ *nach* $\mathbb{R}$. $g(f(x)) = \sqrt{\left(5x^3 - 3x^4 + 5x\right)^5}$ *ist ohne Einschränkung des Definitionsbereiches von f nicht definiert, da in manchen Intervallen* $f(x) < 0$ *und g nur auf nicht-negativen Bereichen definiert ist. Um zu garantieren, dass* $f(x) \geq 0$, *berechnen wir die Nullstellen von* $f(x) = 5x^3 - 3x^4 + 5x$, *da* $\left(5x^3 - 3x^4 + 5x\right)^5 \geq 0$ *genau dann, wenn* $5x^3 - 3x^4 + 5x \geq 0$. *Die Nullstellen sind* 0 *und* $2.059\,6$. *Da* $f(-1) = 5(-1)^3 - 3(-1)^4 + 5(-1) = -13$, $f(3) = 5(3)^3 - 3(3)^4 + 5(3) = -93$ *und* $f(1) = 5 - 3 + 5 = 7 > 0$, *ist die Funktion nur im Intervall* $[0, 2.0596]$ *nicht negativ. Man muss also den Definitionsbereich von f auf* $[0, 2.0596]$ *einschränken, damit die Funktion* $g(f(x))$ *definiert ist und man kann festlegen:* $g(f) : [0, 2.0596] \to \mathbb{R}$. $\Diamond$

Beispiel 4.2.16. *Sei*

$$h(x) = \sqrt[4]{2x^2 - 5x - 2}.$$

Diese Funktion ist die Verkettung von

$$f(x) = \sqrt[4]{x}$$

mit

$$g(x) = 2x^2 - 5x - 2,$$

denn $f\left(g\left(x\right)\right) = \sqrt[4]{g\left(x\right)} = \sqrt[4]{2x^2 - 5x - 2}$. *Die Funktion g ist nach oben geöffnet. Die Nullstellen sind*

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{5}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{41} = -0.350\,78 \\ x_2 &= \frac{1}{4}\sqrt{41} + \frac{5}{4} = 2.\,850\,8. \end{aligned}$$

Damit sind im Intervall $]\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{41},\frac{1}{4}\sqrt{41}+\frac{5}{4}[$ *die Funktionswerte von g negativ. Entsprechend ist der Definitionsbereich D von h*

$$D = \quad \left]-\infty,\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{41}\right] \quad \cup \quad \left[\frac{1}{4}\sqrt{41}+\frac{5}{4},\infty\right[.$$

$\Diamond$

Bei der Nullstellenberechnung verketteter Funktionen ist immer zu prüfen, ob gefundene Kandidaten für Nullstellen überhaupt Elemente des Definitionsbereiches sind.

Beispiel 4.2.17. *Zu suchen ist die Nullstelle von* $f(x)=\sqrt[4]{\frac{x^2-5x+4}{(x-4)}}$. *Für den Definitionsbereich muss gelten:* $x-4\neq 0$
und $\frac{x^2-5x+4}{(x-4)}\geq 0$. $x-4=0$ *genau dann, wenn* $x=4$. *Zudem gilt*

$$\begin{aligned}\frac{x^2-5x+4}{(x-4)}=0 &\Longleftrightarrow\\ x^2-5x+4=0 &\Longleftrightarrow\\ x_1=4 \text{ oder } x_2=1,&\end{aligned}$$

wobei die Funktion $g(x)=x^2-5x+4$ *nach oben offen ist. Entsprechend ist der Definitionsbereich*

$$]-\infty,1]\cup]4,\infty[.$$

Berechnen wir nun die Nullstellen, ergibt sich

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{\frac{x^2-5x+4}{(x-4)}}=0 &\Longleftrightarrow\\ \frac{x^2-5x+4}{(x-4)}=0 &\Longleftrightarrow\\ x^2-5x+4=0 &\Longleftrightarrow\\ x_1=4 \text{ oder } x_2=1.&\end{aligned}$$

Da 4 nicht zum Definitionsbereich gehört, ist die einzige Nullstelle 1. $\Diamond$

Beispiel 4.2.18. *Man möchte den Definitionsbereich der folgenden Funktion berechnen:*

$$f(x)=\sqrt{\frac{4x^3+2x-8}{17x^2+4x-2}}$$

Die umschliessende Funktion (äussere Funktion) ist $\sqrt{}$. *Die umschlossene Funktion (innere) ist*

$$g(x)=\frac{4x^3+2x-8}{17x^2+4x-2}$$

Um Teilen durch 0 zu verhindern, muss man die Nullstellen des Nenners von g berechnen. Diese dürfen nicht zum Definitionsbereich gehören:

$$17x^2+4x-2=0$$

$0.244\,97$, $-0.480\,26$ *(zwei reelle Nullstellen). Anschliessend gilt es die Intervalle zu bestimmen, auf denen g nicht-negativ ist - die Wurzel ist ja nur für solche Zahlen definiert. Wir suchen die Nullstellen von g :*

$$\frac{4x^3+2x-8}{17x^2+4x-2}=0 \Longleftrightarrow 4x^3+2x-8=0$$

Nur eine reelle Nullstelle: $1.128\,2$. *An den Nullstellen des Nenners (in der Tabelle unten grau, dort wo die Funktion g nicht definiert ist) und bei den Nullstellen von g, kann die Funktion g das Vorzeichen wechseln. Wir schreiben diese kritischen Punkte in aufsteigender Ordnung hin und berechnen je einen Funktionswert von g links des ersten kritischen Punktes, zwischen allen benachbarten kritischen Stellen und nach der letzten kritischen Stelle. Daraus können wir ersehen, wo die Funktion g positiv oder negative Funktionswerte aufweist:*

	−		+		−		+
kritische Stellen		$-0.480\,26$		$0.244\,97$		$1.128\,2$	
$g(-1) = -1.273$			$g(0) = 4$		$g(1) = -0.105$		$g(2) = 0.378$

Der Definitionsbereich ist also: $]-0.480\,26, 0.244\,97[\cup [1.128\,2, \infty[$ *(Beachten Sie die Richtung der eckigen Klammern: da* $-0.480\,26, 0.244\,97$ *Nullstellen des Nenners sind, gehören sie nicht zum Definitionsbereich. Da* $1.128\,2$ *nicht eine Nullstelle des Nenners ist und die Wurzel aus* $g(1.128\,2) = 0$ *definiert ist, gehört* $1.128\,2$ *zum Definitionsbereich.*
Mit R: zd=polyroot(c(-2,4,17)); zn=polyroot(c(-8,2,0,4)); zt=c(zd,zn[1]) #man pickt aus zn die reelle Nullstelle, die an erster Stelle des Tripels liegt).
zt=zt[order(zt)].
*g=function(x) ((4*x^3+2*x-8)/(17*x^2+4*x-2))*
g(c(-1,0,1,2)) ◊

Auch beim Auflösen von Gleichungen mit Ausdrücken, die verkettete Funktionen definieren, ist darauf zu achten, dass Kandidaten für Lösungen Zahlen sind, die überhaupt zur Lösungsmenge gehören können. Der Ausdruck links und rechts einer Gleichung definiert jeweils eine Funktion. Die Lösungsmenge einer Gleichung muss Teilmenge der Schnittmenge der Definitionsmengen dieser Funktionen sein.

Beispiel 4.2.19.

$$\sqrt[2]{3x^3 + 5x^2 + 5} = \frac{2x^3 + 2}{4x^2 - 2}$$

$f(x) = \sqrt[2]{3x^3 + 5x^2 + 5}$ *und* $g(x) = \frac{2x^3+2}{4x^2-2}$ *definieren Funktionen auf spezifische Definitionsbereiche und die Lösungsmenge ist die Menge der x so das* $f(x) = g(x)$. *Entsprechend müssen diese x Element der Definitionsbereiche von f und von g sein. Bezüglich f muss gelten:* $5x^2 + 3x^3 + 5 \geq 0$. *Entsprechend gilt es die Nullstellen zu berechnen:* $3x^3 + 5x^2 + 5 = 0$. *Es gibt nur eine Nullstelle:* -2.059576504. *Links davon ist die Funktion negativ, rechts davon positiv. Der Definitionsbereich von f ist damit* $[-2.059576504, \infty[$. *Bezüglich Definitionsbereich von g kann man feststellen: der Ausdruck ergibt eine Division durch 0 für* $x_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} = -0.707\,11$ *und* $x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}. = 0.707\,11$. *Der Definitionsbereich von g ist damit* $\mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\}$. *Die Schnittmenge dieser beiden Definitionsbereiche ist*

$$[-2.059576504, \infty[\ \cap \ \left(\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\}\right) = [-2.059576504, \infty[\setminus \{-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\}$$

und die Lösungsmenge muss Teilmenge dieser Schnittmenge sein. Fürs Beispiel erhalten wir:

$$\begin{aligned}
3x^3 + 5x^2 + 5 = \frac{\left(2x^3 + 2\right)^2}{\left(4x^2 - 2\right)^2} = \frac{4x^6 + 8x^3 + 4}{16x^4 - 16x^2 + 4} &\Longrightarrow \\
\left(3x^3 + 5x^2 + 5\right)\left(16x^4 - 16x^2 + 4\right) = 4x^6 + 8x^3 + 4 &\Longrightarrow \\
48x^7 + 80x^6 - 48x^5 + 12x^3 - 60x^2 + 20 = 4x^6 + 8x^3 + 4 &\Longrightarrow \\
48x^7 + 76x^6 - 48x^5 + 4x^3 - 60x^2 + 16 = 0 &
\end{aligned}$$

Mit polyroot(c(16,0,-60,4,0,-48,76,48)) erhält man die reellen Nullstellen: 0.5296681, -0.5806644, 0.8673963, -0.7767448, -2;

wobei $\{0.5296681, -0.5806644, 0.8673963, -0.7767448, -2\} \subset [-2.059576504, \infty[\setminus \{-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\}$,
also ist $\{0.5296681, -0.5806644, 0.8673963, -0.7767448, -2;\}$ *die Lösungsmenge.* $\left(\text{denn } -\frac{1}{2}\sqrt{2} = -0.707\,11\right)$
$\Diamond$

Beispiel 4.2.20. *Wir erhalten aus* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R};\ f(x) := x^n$ *und* $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R};\ g(x) := \sqrt[m]{x}$ *durch Verkettung von* f *mit* g

$$f(g(x)) = \left(\sqrt[m]{x}\right)^n$$

sowie durch Verkettung von g *mit* f

$$g(f(x)) = \sqrt[m]{x^n}$$

wobei in diesem Spezialfall bekanntlich

$$f(g(x)) = g(f(x))$$

gilt - das Kommutativgesetz gilt für Verkettungen im Allgemeinen nicht!

$\Diamond$

Satz 4.2.21.

$$\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$$
$$\left(\sqrt[m]{x}\right)^n = x^{\frac{n}{m}}$$

Beweis.

$$\sqrt[m]{x^n} = (x^n)^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{n}{m}}$$
$$\left(\sqrt[m]{x}\right)^n = \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^n = x^{\frac{n}{m}}$$

□

Die Nullstellen verketteter Funktionen berechnet man im allgemeinen mit einer Näherungsmethode, sofern es um die Nullstelle herum ein Intervall gibt, in dem die Funktion keine Sprünge, Unendlichkeitsstellen oder Lücken aufweist. Die im Rahmen der Polynome dritten Grades eingeführte Methode kann auch für diese Art von Funktionen verwendet werden.

4.2.2 Umkehrfunktionen und Verkettung

Verketten wir die Umkehrfunktion mit der ursprünglichen Funktion, erhalten wir eine Funktion, welche x die Zahl x zuordnet. Diese Funktion wird *Identitätsfunktion* genannt.

Satz 4.2.22. $f^{-1} : Bild(f) \to \mathbb{R}$ *ist die Umkehrfunktion von* $f : D \to \mathbb{R}$ *genau dann, wenn* $f^{-1}(f(x)) = x$ *für* $x \in D \subset \mathbb{R}$.

Beweis. Gemäss der Definition $f(x) = y :\Longleftrightarrow (x, y) \in g_f$ (g_f ist der Graph der Funktion f) und der Definition der Umkehrfunktion gilt:

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) = x &\Longleftrightarrow (f(x), x) \in g_{f^{-1}} \\ &\Longleftrightarrow (x, f(x)) \in g_f \\ &\Longleftrightarrow f(x) = f(x) \end{aligned}$$

Da $f(x) = f(x)$ logisch wahr ist (jedes Objekt ist mit sich selbst identisch), gilt damit auch $f^{-1}(f(x)) = x$. □

Beispiel 4.2.23. *Sei*

$$f(x) = 5x + 3$$

Wie gezeigt, ist f eine Bijektion und die Umkehrfunktion existiert:

$$\begin{aligned} y = 5x + 3 &\Longrightarrow \\ y - 3 = 5x &\Longrightarrow \\ x = \frac{y-3}{5} & \end{aligned}$$

Es gilt nun

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) = \frac{(5x+3)-3}{5} = \\ = \frac{5x}{5} = x. \end{aligned}$$

$\Diamond$

Beispiel 4.2.24. *Sei $f(x) = x^n$ und $g(x) = \sqrt[n]{x}$, d.h. g ist gemäss Definition die Umkehrfunktion von f und es gilt*

$$\begin{aligned} g(f(x)) = & \sqrt[n]{x^n} \\ = & x^{\frac{n}{n}} \\ = & x. \end{aligned}$$

$\Diamond$

Bemerkung 4.2.25. *Trägt man die Funktion*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ f(x) := x^2 \end{aligned}$$

und deren Umkehrfunktion

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

in ein Koordinatennetz ab, so zeigt sich, dass die Bildung der Umkehrfunktion auf eine Spiegelung an der $h(x) = x$-Geraden hinausläuft. Dies leuchtet unmittelbar ein, da die Umkehrfunktion als Graphen alle geordneten Paare der ursprünglichen Funktion einfach umgekehrt aufweist, z.B. wird $(1.5, 1.5^2) \in g_f$ zu $(1.5^2, 1.5) \in g_{f^{-1}}$. Anderseits kann man das auch beweisen: die Gerade $d(x) = ax + b$ durch $(x_1, x_2) \in g_f$ und $(x_2, x_1) \in g_{f^{-1}}$ hat die Steigung $\frac{x_1 - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{x_1 - x_2}{-(x_1 + x_2)} = -1$, steht also senkrecht auf der Geraden $h(x) = x$, welche die Steigung 1 hat. Da $(x_1, x_2) \in d$, ist der Ordinatenabschnitt b der Geraden d wegen $x_2 = -x_1 + b$:

$$b = x_1 + x_2.$$

Es gilt also

$$d(x) = -x + x_1 + x_2.$$

Die Lage x_0 auf der x-Achse des Schnittpunktes von d mit h ist dann wegen

$$h(x) = x = -x + x_1 + x_2 = d(x):$$

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Damit gilt $h\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \frac{x_1+x_2}{2}$. *Der Schnittpunkt von* h *und* d *ist also*

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

Die Distanz zwischen (x_1, x_2) *und* $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}\right)$ *ist*

$$\sqrt{\left(x_1 - \frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{x_1+x_2}{2}\right)^2}$$

und zwischen (x_2, x_1) *und* $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}\right)$ *ebenfalls*

$$\sqrt{\left(x_2 - \frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 + \left(x_1 - \frac{x_1+x_2}{2}\right)^2}.$$

Damit halbiert die Gerade h *die Strecke zwischen den Punkten* (x_1, x_2) *und* (x_2, x_1) *und man erhält* (x_2, x_1) *aus* (x_1, x_2)*, indem man den Punkt* (x_1, x_2) *an der Geraden* h *spiegelt. (siehe Abbildung 4.2.10).*

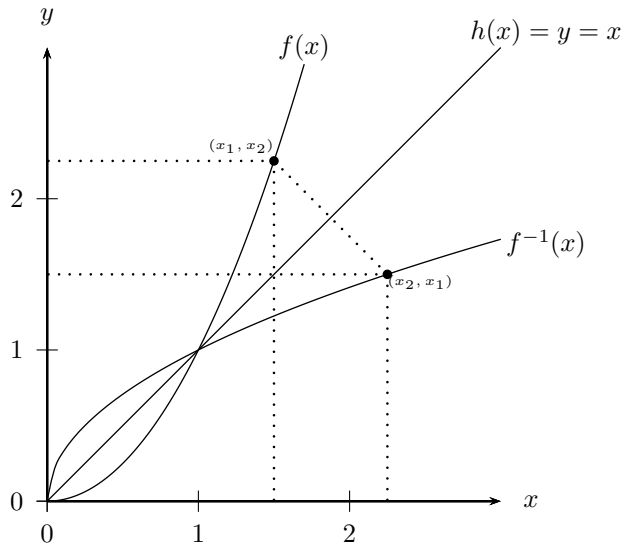


Abbildung 4.2.10: Graphische Darstellung der Funktion $f(x) = x^2$ und deren Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ als Spiegelung an der $h(x) = x$-Geraden

◊

Satz 4.2.26. *Wenn* f^{-1} *die Umkehrfunktion von* $f = (A, B, g_f)$ *ist, dann ist* f *die Umkehrfunktion von* $f^{-1} = \left(B, A, g_{f^{-1}}\right)$.

Beweis. Sei f^{-1} die Umkehrfunktion von f. Da f eine Umkehrfunktion hat, ist f injektiv, d.h. für $(x, y), (z, r) \in g_f$ (= Graph der Funktion f) und $x \neq z$ ist $y \neq r$. Entsprechend gilt für diese (y, x) und $(r, z) \in g_{f^{-1}}$: wenn $y \neq r$, dann $x \neq z$. f^{-1} ist also injektiv. f^{-1} ist surjektiv auf den Definitionsbereich von f, da f eine Abbildung ist: Für alle $x \in A$ gibt es ein $(x, y) \in g_f$ und für diese ist $(y, x) \in g_{f^{-1}}$. Entsprechend tauchen alle Werte $x \in A$ auch im Bild von f^{-1} auf. Da zudem für $f = (A, B, g_f)$ gilt: $f^{-1} = \left(B, A, g_{f^{-1}}\right)$, gibt es keine Werte, die im Wertebereich von f^{-1} sind, ohne Elemente von A zu sein. Damit ist f^{-1} bijektiv und f^{-1} hat eine Umkehrfunktion $\left(f^{-1}\right)^{-1}$. Sei nun $(x, y) \in g_f$. Damit ist $(y, x) \in g_{f^{-1}}$ und $(x, y) \in g_{(f^{-1})^{-1}}$. Sei umgekehrt $(x, y) \in g_{(f^{-1})^{-1}}$. Damit ist $(y, x) \in g_{f^{-1}}$ und $(x, y) \in g_f$. Also ist $(x, y) \in g_f$ genau dann, wenn $(x, y) \in g_{(f^{-1})^{-1}}$.

Also ist $g_f = g_{(f^{-1})^{-1}}$. Offensichtlich stimmen auch die Definitions- und Wertebereiche überein: Denn für die Umkehrfunktion von $f = (A, B, g_f)$ gilt $f^{-1} = \left(B, A, g_{f^{-1}}\right)$. Für die Umkehrfunktion von f^{-1} gilt damit $\left(f^{-1}\right)^{-1} = \left(A, B, g_{(f^{-1})^{-1}}\right)$. Da $g_f = g_{(f^{-1})^{-1}}$, gilt $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$. □

4.2.3 Monotonie

Eine Funktion kann in einem offenen Intervall für wachsende x unter anderem im Intervall überall grösser werdende, überall gleichbleibende oder überall fallende Funktionswerte aufweisen. Wir sagen kurz, die Funktion wachse, sei konstant oder falle im Intervall. So wächst z.B. die Funktion $f(x) = x^2$ im Intervall $]0, \infty[$, während sie im Intervall $]-\infty, 0[$ fällt. Die Funktion $g(x) = 2x + 5$ wächst in $\mathbb{R}$, während $h(x) = -2x + 5$ in $\mathbb{R}$ fällt. Wir halten noch präziser fest:

Definition 4.2.27. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und das offene Intervall $I \subset D \subset \mathbb{R}$*

- *f wächst in I strikt monoton genau dann, wenn für alle $x, y \in I$ mit $x > y$ gilt: $f(x) > f(y)$.*
- *f wächst im offenen Intervall I monoton genau dann, wenn für alle $x, y \in I$ mit $x > y$ gilt: $f(x) \geq f(y)$.*
- *f fällt im offenen Intervall I strikt monoton genau dann, wenn für alle $x, y \in I$ mit $x > y$ gilt: $f(x) < f(y)$.*
- *f fällt im offenen Intervall I monoton genau dann, wenn für alle $x, y \in I$ mit $x > y$ gilt: $f(x) \leq f(y)$.*
- *Ist f in I (strikt) monoton wachsend ist oder in I (strikt) monoton fallend, nennen wir f „(strikt) monoton“.*

◊

(s. die folgenden Abbildungen 4.2.11 und 4.2.12 für graphische Darstellungen).

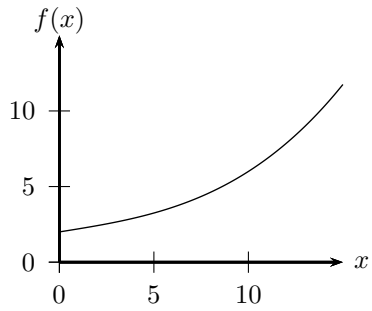


Abbildung 4.2.11: Beispiel für eine in $\mathbb{R}^+$ strikt monoton wachsende Funktion: $f(x) = 0.002x^3 + 0.2x + 2$

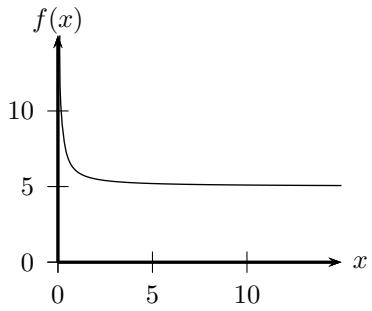


Abbildung 4.2.12: Beispiel für eine in $\mathbb{R}^+ \backslash \{0\}$ strikt monoton sinkende Funktion: $f(x) = \frac{1}{x} + 5$

Beispiel 4.2.28. *Nachweis des strikt monotonen Wachstums für $g(x) = 2x + 5$. Sei $y > x$. Dann gilt: $2y > 2x$ und $2y + 5 > 2x + 5$. Somit ist $f(y) > f(x)$.* ◊

Beispiel 4.2.29. *Nachweis der strikt monotonen Wachstums für $f(x) = x^2$ mit $x \in]0, \infty[$. Sei $y > x$ und $y, x > 0$. Dann gilt $y^2 > x^2$. Es gilt also $f(y) > f(x)$.* ◊

Beispiel 4.2.30. *Nachweis des strikt monotonen Fallens für $f(x) = x^2$ mit $x \in\ ]-\infty, 0[$. Sei $y > x$ und $y, x < 0$. Dann gilt $y^2 < x^2$. Es gilt also $f(y) < f(x)$.* ◊

Der Nachweis des Wachsens oder Fallens einer Funktion in einem Intervall kann mit der obigen Definition recht mühsam sein - ist z.B. $f(x) = x^3-3x^2+4x+5$ in $]5, 6[$ wachsend oder fallend? Man müsste z.B. für das strikt monotone Wachsen zeigen, dass $x^3 - 3x^2 + 4x + 5 > y^3 - 3y^2 + 4y + 5$ für $x > y$ und $x, y \in]5, 6[$, was nicht einfach ist. Entsprechend werden dafür später Methoden eingeführt, deren Handhabung praktischer ist.

Bemerkung 4.2.31. *Eine Funktion kann in einem Intervall wachsend, im nächsten sinkend, dann wieder wachsend, etc. sein. Polynome des Grades $n \geq 1$ sind bis auf jeweils die Punkte, wo wachsendes in sinkendes (oder sinkendes in wachsendes) Verhalten übergeht, strikt monoton auf allen übrigen Punkten (s. Abbildung 4.2.13).*

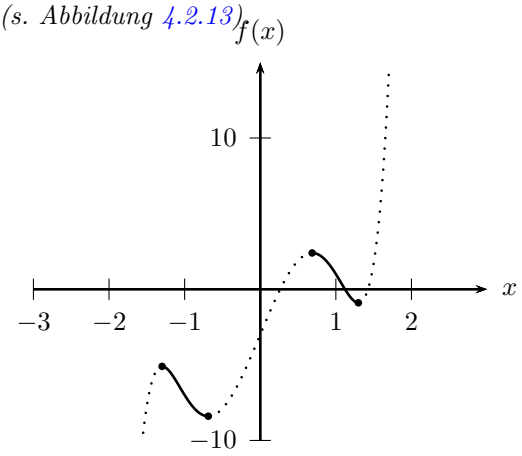


Abbildung 4.2.13: punktierte Linie strikt monoton steigend, durchgezogene Linie strikt monoton sinkend, in Punkten weder steigend noch sinkend

◊

Ökonomische Funktionen machen oft nur Sinn, wenn sie in manchen Bereichen monoton wachsend oder monoton fallend sind. So muss eine Kostenfunktion monoton wachsend sein: je mehr man produziert, desto mehr Kosten fallen an. Der Barwert eines Kapitals nimmt mit späterem Zeitpunkt des Kapitalbezugs ab. Nur Funktionen, die monoton fallend sind, können damit den Barwert als Funktion der Zeit ausdrücken.

Satz 4.2.32. *Im offenen Intervall I strikt monotone Funktionen sind auf I injektiv.*

Beweis. Wir nehmen an, f sei nicht injektiv. Dann gibt es $x \neq y, x, y \in I$ so dass $f(x) = f(y)$. Nun ist $x < y$ oder $x > y$. Ist $x > y$, muss auf Grund der strikten Monotonie gelten, dass $f(x) > f(y)$ oder $f(x) < f(y)$. Entsprechend gilt $f(x) \neq f(y)$. Analog argumentiert man für $x < y$. Also gilt $f(x) \neq f(y)$, was im Widerspruch zu $f(x) = f(y)$ steht. Entsprechend ist f injektiv. □

4.2.4 Konkavität und Konvexität

Eine Funktion ist in einem offenen Intervall I konkav, wenn sie immer weniger wächst oder wenn sie immer mehr fällt. Eine Funktion ist in einem offenen Intervall I konvex, wenn sie immer mehr wächst oder immer weniger fällt (s. die folgenden Abbildungen für graphische Darstellungen 11.0.1 und 11.0.4).

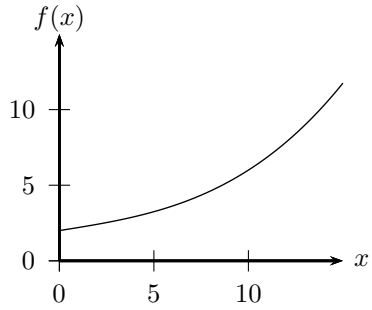


Abbildung 4.2.14: konvexes Wachstum

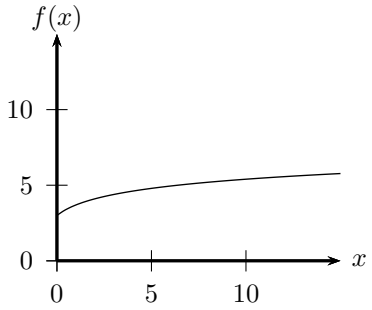


Abbildung 4.2.15: konkaves Wachstum

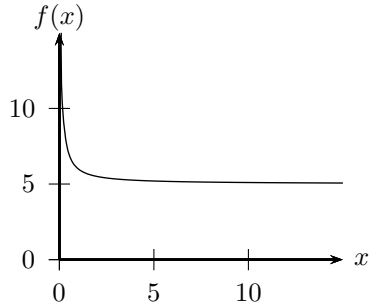


Abbildung 4.2.16: konvexes Fallen

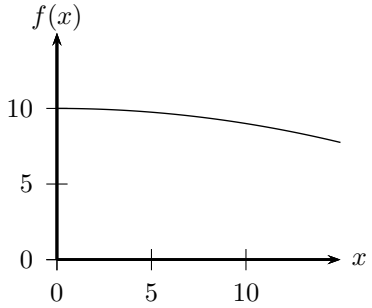


Abbildung 4.2.17: konkaves Fallen

Formalere Definitionen:

Definition 4.2.33. *$f : D \to \mathbb{R}$, mit offenem Intervall $I \subset D \subset \mathbb{R}$. Dann ist f konkav in I genau dann, wenn für alle $x, y \in I$ mit $y > x$ und die Gerade g durch $(x, f(x))$ und $(y, f(y))$ gilt. $g(z) < f(z)$ für $z \in\ ]x, y[$.*
$f : D \to \mathbb{R}$, mit offenem Intervall $I \subset D \subset \mathbb{R}$. Dann ist f konvex in I genau dann, wenn für alle $x, y \in I$ mit $y > x$ und die Gerade g durch $(x, f(x))$ und $(y, f(y))$ gilt. $g(z) > f(z)$ für $z \in\ ]x, y[$. (s. für eine graphische Erläuterung der Definition die Abbildungen 4.2.18 und 4.2.19) $\Diamond$

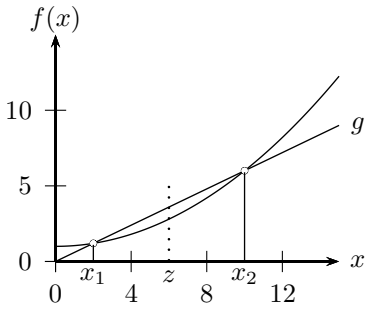


Abbildung 4.2.18: Konvexe Funktion in $]0, 16[$; für alle $x_2 > x_1$ mit $x_2, x_1 \in\ ]0, 16[$ gilt: $g(z) > f(z)$ für alle $z \in]x_1, x_2[$

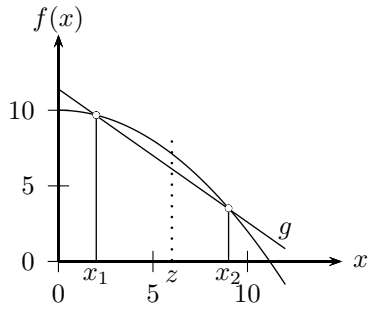


Abbildung 4.2.19: Konkave Funktion in $]0, 12[$; für alle $x_2 > x_1$ mit $x_2, x_1 \in\ ]0, 12[$ gilt: $g(z) < f(z)$ für alle $z \in]x_1, x_2[$

Es ist recht schwierig, mit Hilfe der obigen Definitionen direkt die Konkavität oder Konvexität von Funktionen nachzuweisen. Deshalb werden später handlichere Methoden eingeführt. Für den Augenblick genügt es, die Definitionen zu verstehen und in Graphiken konkave und konvexe Intervalle angeben zu können.

Bemerkung 4.2.34. *Eine Funktion kann in einem Intervall konkav, im nächsten konvex, dann wieder konkav, etc. sein. Polynome des Grades $n \geq 2$ sind bis auf jeweils die Punkte, wo konkaves in konvexes (oder konvexes in konkaves) Verhalten übergeht, strikt konkav oder strikt konkav auf allen übrigen Punkten (s. Abbildung 4.2.20).*

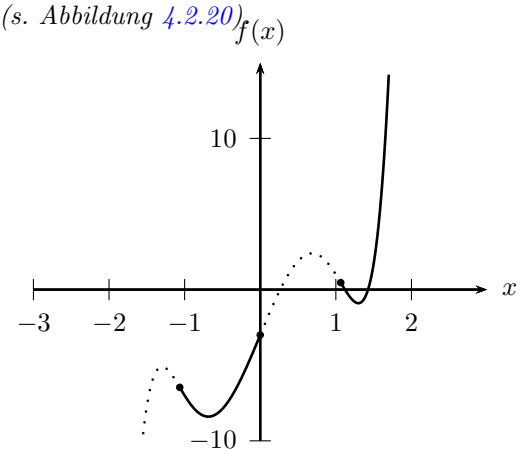


Abbildung 4.2.20: punktierte Linie strikt konkav, durchgezogene Linie strikt konvex, in Punkten weder konkav noch konvex

◊

Konkavität oder Konvexität spielen bei vielen ökonomischen Funktionen eine wesentliche Rolle. Bei der ertragsgesetzlichen Kostenfunktion, die wir bereits kennen gelernt haben (s. Graphik 3.6.45 auf der Seite 103), muss zuerst ein konkaver Verlauf, dann ein konvexer Verlauf der Kurve vorliegen - die Kosten steigen zwar immer an, zuerst aber immer weniger. Nach einem angebbaren Punkt steigen sie immer mehr an.

Ohne Beweis halten wir fest:

Satz 4.2.35. *Wurzelfunktionen sind strikt monoton steigend und konkav auf $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.*

Übungen

1. Es ist bekannt, dass in Immobilien mehr investiert wird, wenn der Zinssatz i tiefer ist - oder anders formuliert: je höher der Zinssatz, desto kleiner sind die Investitionen I - wir unterscheiden dabei zwischen Zinsfuss p und Zinssatz i, wobei gilt $i = \frac{p}{100}$. Wir nehmen an, wir hätten eine Funktion $I(i) := \frac{5}{\sqrt{i}} - 9$, die den Zusammenhang zwischen Investitionen und Zinssatz beschreibt. Berechnen Sie die Investitionen bei einem Zinssatz von 0.01 und 0.1. Berechnen Sie die Nullstelle im Bereich $i \in]0, \infty[$ und interpretieren Sie diese ökonomisch.

2. Berechnen Sie den maximal zulässigen Definitionsbereich für

$$f(x) = \sqrt[4]{x^3 - 4}$$

3. Gegeben sei eine Produktionsfunktion, welche den Output einer Firma als Funktion des Inputs angibt. Diese sei gegeben durch

$$x(r) = \sqrt{3r - 80} - 20$$

a) Berechnen Sie den Definitionsbereich, der mathematisch Sinn macht, und den Definitionsbereich, der ökonomisch Sinn macht.
b) Es werde ein Output von 60 ME produziert. Berechnen Sie die Kosten, wenn der Input pro Einheit 6 GE kostet. Berechnen Sie den Umsatz, wenn wenn der Marktpreis 170 GE pro

Output-Einheit beträgt.
c) Ermitteln Sie die Kostenfunktion K, die die Kosten in Abhängigkeit von der produzierten Menge angibt (Kosten des Inputs der Produktionsfunktion 6 GE pro ME).
d) Welcher Output muss produziert (und abgesetzt) werden, damit die Unternehmung einen Gewinn produziert (Geben Sie den Gewinnbereich an).

4. Berechnen Sie die Schnittpunkte der reellen Funktionen, nachdem Sie den maximal zulässigen Definitionsbereich bestimmt haben.

$$f(x) = 2\sqrt[2]{x-1} + 2$$
$$g(x) = 2x^2 - 3$$

5. Finden Sie die Nullstelle der folgenden reellen Funktion, nachdem Sie den maximal zulässigen Definitionsbereich bestimmt haben.

$$f(x) = \sqrt[2]{5x^2 - 2x + 5} - 2$$

6. Lösen Sie die folgende Gleichung, nachdem Sie die Menge bestimmt haben, deren Teilmenge die Lösungsmenge sein muss

$$\frac{2x^2 - 2x + 5}{3x^2 + 2} = \sqrt[2]{2x - 1}$$

7. Bestimmen Sie den Definitionsbereich von

$$f\left(x\right) = \sqrt{\frac{7x^4 - 2x^2 + 4x - 8}{13x^3 - 5x^2 - 10x + 2}}$$

8. Beweisen Sie den Satz 4.2.9 (fakultativ)

Lösungen

1. $I(0.01) = \frac{5}{\sqrt{0.01}} - 9 = 41$, $I(0.1) = \frac{5}{\sqrt{0.1}} - 9 = 6.811$.
Nullstelle: $\frac{5}{\sqrt{i}} - 9 = 0 \Longrightarrow i = \frac{25}{81} = 0.308\,64$. Interpretation: Von einem Zinssatz von 30.864% an würden Investitionen abgezogen (Für die graphische Darstellung s. Abbildung 4.2.21).

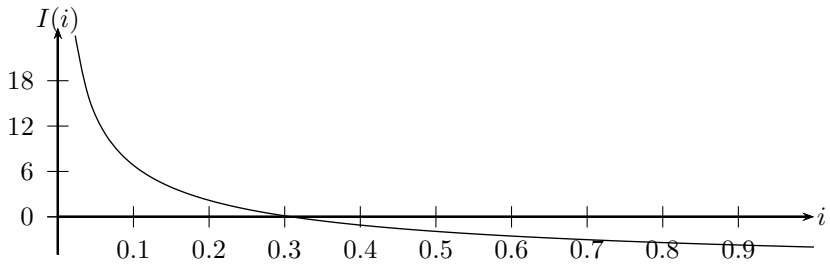


Abbildung 4.2.21: Investitionsfunktion - Investitionen I in Abhängigkeit vom Zinssatz i

2. Wir bestimmen die Nullstelle von $x^3 - 4 : \sqrt[3]{4} = 1.\,587\,4$. Die Funktion steigt von links nach rechts an. Entsprechend ist der Definitionsbereich: $[1.5874, \infty[$

3. a) Mathematisch muss gelten: $3r - 80 \geq 0$, d.h. $r \geq \frac{80}{3} = 26.667$. Damit ist der Definitionsbereich die Menge $[\frac{80}{3}, \infty[$. Ökonomisch macht ein negativer Output keinen Sinn. Entsprechend muss gelten:

$$\sqrt{3r - 80} - 20 \geq 0$$

Dies gilt für $r \geq 160$. Der ökonomisch sinnvolle Bereich ist damit $[160, \infty[$, wobei $[160, \infty[\subset [\frac{80}{3}, \infty[$.
b)

$$\begin{aligned} \sqrt{3r - 80} - 20 = 60 &\Longrightarrow \\ r = 2160 & \end{aligned}$$

2160 liegt im ökonomisch sinnvollen Bereich. Die Kosten sind also

$$2160 \cdot 6 = 12960 \text{ GE.}$$

Der Erlös ist

$$60 \cdot 170 = 10200$$

Die Unternehmung würde bei dieser Produktionsmenge einen Verlust machen.
c) Wir müssen wissen, wieviel Input r wir für x Output brauchen. Entsprechend ist die Umkehrfunktion $r(x)$ von $x(r)$ zu bilden - wobei $r(x)$ im Definitionsbereich injektiv mit $Bild(f) = \mathbb{R}^+$ ist.

$$\begin{aligned} \sqrt{3r - 80} - 20 = x(r) &\Longrightarrow \\ r(x) = \frac{1}{3}(x + 20)^2 + \frac{80}{3} & \end{aligned}$$

Wir nehmen keinen Variablentausch vor, da die Variablen ökonomisch interpretiert sind. Die Kostenfunktion ist dann $K : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} K(x) := 6r(x) &= 6\left(\frac{1}{3}(x + 20)^2 + \frac{80}{3}\right) \\ &= 2(x + 20)^2 + 160 \\ &= 2x^2 + 80x + 960 \end{aligned}$$

d) Die Erlösfunktion ist $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $E(x) := 170x$.
Damit gilt dann

$$\begin{aligned} G(x) &= E(x) - K(x) \\ &= 170x - \left(2x^2 + 80x + 960\right) \\ &= -2x^2 + 90x - 960 \end{aligned}$$

Die Nullstellen sind: $x_1 = \frac{45}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{105} = 17.377$
$\frac{1}{2}\sqrt{105} + \frac{45}{2} = 27.623$. Wir kontrollieren, ob die Punkte im ökonomisch sinnvollen Bereich liegen:

$$\begin{aligned} r(17.377) &= \frac{1}{3}(17.377 + 20)^2 + \frac{80}{3} \\ &= 492.35 \\ r(27.623) &= \frac{1}{3}(27.623 + 20)^2 + \frac{80}{3} \\ &= 782.65 \end{aligned}$$

Beide Mengen liegen im ökonomisch sinnvollen Bereich. Da die Kurve nach unten geöffnet ist, liegt der Gewinnbereich zwischen diesen beiden Zahlen: $]17.377, 27.623[$.

4. Definitionsbereich von f ist $\mathbb{R}^+$ (gerade Wurzel). $x-1\geq 0$ für $[1,\infty[$. Wir setzen gleich:

$$\begin{aligned} 2\sqrt[2]{x-1}+2 &= 2x^2-3 \Longrightarrow \\ \sqrt[2]{x-1} &= x^2-2.5 \Longrightarrow \\ x-1 &= \left(x^2-2.5\right)^2 \Longrightarrow \\ x-1 &= x^4-5x^2+6.25 \Longrightarrow \\ -x^4+5x^2+x-7.25 &= 0 \end{aligned}$$

Mit polyroot(c(-7.25,1,5,0,-1)) erhält man 1.374159 und 1.849827. Beide gehören zum Definitionsbereich von f und man erhält als Schnittpunkt mit $2\cdot 1.374159^2-3=0.776\,63$ und $2\cdot 1.849827^2-3=3.843\,7$ $(1.374159, 0.776\,63)$ und $(1.849827, 3.843\,7)$.

5. $5x^2-2x+5$ weist keine reelle Nullstelle auf. Da $5>0$ ist damit $5x^2-2x+5\geq 0$ für alle $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \sqrt[2]{5x^2-2x+5}-2 &= 0 \Longrightarrow \\ \sqrt[2]{5x^2-2x+5} &= 2 \Longrightarrow \\ 5x^2-2x+5 &= 4 \Longrightarrow \\ 5x^2-2x+1 &= 0 \end{aligned}$$

Keine reelle Lösung. Entsprechend gibt es keine Nullstelle.

6. Es muss gelten: $2x-1\geq 0$, d.h. $x\in[\frac{1}{2},\infty[$. Zudem muss gelten: $3x^2+2\neq 0$. Das gilt für alle $x\in\mathbb{R}$. Man erhält:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2x^2-2x+5}{3x^2+2}\right)^2 &= 2x-1 \Longrightarrow \\ \frac{4x^4-8x^3+24x^2-20x+25}{9x^4+12x^2+4} &= 2x-1 \Longrightarrow \\ 4x^4-8x^3+24x^2-20x+25 &= (2x-1)\left(9x^4+12x^2+4\right) \\ &= 18x^5-9x^4+24x^3-12x^2+8x-4 \Longrightarrow \\ 0 &= -18x^5+13x^4-32x^3+36x^2-28x+29 \end{aligned}$$

Es gibt eine reelle Nullstellen in $x=1$ (Graphik, dann mit dem Solver von Excel mit geeigneten Nebenbedingungen). Die Lösungsmenge ist also $\{1\}$. Wir kontrollieren das Resultat:

$$\frac{2\cdot(1)^2-(2)+5}{3\cdot 1^2+2}=1$$

$$\sqrt[2]{2\cdot 1-1}=1$$

7.

$$f(x)=\sqrt{\frac{7x^4-2x^2+4x-8}{13x^3-5x^2-10x+2}}$$

Die Nullstellen des Nenners von g müssen aus dem Definitionsbereich entfernt werden:

$$g(x)=\frac{7x^4-2x^2+4x-8}{13x^3-5x^2-10x+2}$$

$$13x^3-5x^2-10x+2=0$$

drei reelle Nullstellen: 0.190 83 , $-0.806\,21$ und 1
Wir bestimmen die Intervalle, auf denen die Funktion $g \geq 0$ (Wurzeln aus negativen Zahlen sind nicht definiert).

$$\frac{7x^4 - 2x^2 + 4x - 8}{13x^3 - 5x^2 - 10x + 2} = 0 \Longleftrightarrow$$
$$7x^4 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$$

Zwei reelle Lösungen: -1.2282295, 0.9623093. Wir setzen die grob gerundeten kritischen Stellen in aufsteigender Ordnung aufs Papier und berechnen vor, zwischen und nach den kritischen Stellen je einen Funktionswert von g, um die Vorzeichen von g zu bestimmen:

$-$		$+$		$-$		$+$		$-$		$+$		
pts crit.	-1.23		-0.81		0.19		0.96		1			
$g(-2)$		$g(-1)$		$g(0)$		$g(0.5)$		$g(0.98)$		$g(2)$		
$= -0.8$		$= 1.1$		$= -4$		$= 2.3$		$= -1.2$		$= 1.6$		

Der Definitionsbereich ist also:$[-1.2282295, -0.806\,21[\cup]0.190\,83, 0.9623093] \cup]1, \infty[$ (Achten Sie auf die Richtung der eckigen Klammern! Nullstellen des Nenners gehören nicht zum Definitionsbereich, Nullstellen des Zählers, die nicht Nullstellen des Nenners sind, gehören zum Definitionsbereich).
Mit R: zd=polyroot(c(2,-10,-5,13)); zn=polyroot(c(-8,4,-2,0,7))
zt=c(zd,zn[c(2,4)]) #die reellen Nullstellen einsammeln
zt=zt[order(zt)]
g=function(x) ((7*x^4-2*x^2+4*x-8)/(13*x^3-5*x^2-10*x+2))
g(c(-2,-1,0,0.5,0.98,2))

8. Man zeigt:

   (a) $\sqrt[n]{x^n} = x$: $\sqrt[n]{y} = x$ genau dann, wenn $x^n = y$ (Satz 4.2.4). Setzt man für y den Ausdruck x^n, erhält man: $\sqrt[n]{x^n} = x$ genau dann, wenn $x^n = x^n$. Also ist $\sqrt[n]{x^n} = x$

   (b) $\sqrt[n]{x}^n = x$: Sei $x^n = y$ und damit gemäss Satz 4.2.4 $\sqrt[n]{y} = x$. Damit erhält man - $\sqrt[n]{y}$ für x in $x^n = y$ gesetzt - $\sqrt[n]{y}^n = y$.

   (c) $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$: $(xy)^n = x^n y^n$. Also ist $\left(\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}\right)^n = \sqrt[n]{x}^n \sqrt[n]{y}^n = xy = \sqrt[n]{xy}^n$ und entsprechend $\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$.

   (d) $\sqrt[n]{\frac{1}{y}} = \frac{1}{\sqrt[n]{y}}$: $\sqrt[n]{\frac{1}{y}}\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{\frac{1}{y}y} = \sqrt[n]{1} = 1$ und damit $\sqrt[n]{\frac{1}{y}} = \frac{1}{\sqrt[n]{y}}$

   (e) $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$: $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \sqrt[n]{x\frac{1}{y}} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{\frac{1}{y}} = \sqrt[n]{x}\frac{1}{\sqrt[n]{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

   (f) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}$: Es gilt $\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}\right)^{nm} = \left(\sqrt[m]{x}\right)^m = x = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = \left(\sqrt[m]{\left(\sqrt[n]{x}\right)^n}\right)^m$ und $x = \left(\sqrt[mn]{x}\right)^{mn}$ damit der Satz.

   (g) $\sqrt[n]{x}\sqrt[m]{x} = \sqrt[nm]{x^{m+n}}$: $\left(\sqrt[n]{x}\sqrt[m]{x}\right)^{nm} = \sqrt[n]{x}^{nm}\sqrt[m]{x}^{nm} = x^m x^n = x^{m+n} = \left(\sqrt[nm]{x^{m+n}}\right)^{nm}$. Also $\sqrt[n]{x}\sqrt[m]{x} = \sqrt[nm]{x^{m+n}}$.

   (h) $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x^{m-n}}$: $\left(\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[m]{x}}\right)^{nm} = \frac{\sqrt[n]{x}^{nm}}{\sqrt[m]{x}^{nm}} = \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} = \left(\sqrt[nm]{x^{m-n}}\right)^{nm}$. Also $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x^{m-n}}$.

   Die rechte Seite (Potenzschreibweise) erhält man durch direkte Anwendung der Definition $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$. Man kann allerdings die Verträglichkeit des Potenzrechnens (samt

Bruchrechnen in den Potenzen) mit dem Wurzelrechnen einsehen, indem man rechnet:

$$x^{\frac{n}{n}} = x^1 = x = (x^n)^{\frac{1}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n$$
$$\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{mn}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}$$
$$x^{\frac{1}{n}} x^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} = x^{\frac{m}{mn}+\frac{n}{mn}} = x^{\frac{m+n}{mn}}$$
$$\frac{x^{\frac{1}{n}}}{x^{\frac{1}{m}}} = x^{\frac{1}{n}} x^{-\frac{1}{m}} = x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}} = x^{\frac{m}{mn}-\frac{n}{mn}} = x^{\frac{m-n}{mn}}$$

4.3 Exponential- und Logarithmusfunktionen

4.3.1 Exponentialfunktionen

Definition 4.3.1. *f ist eine Exponentialfunktion zur Basis a, $a \in \mathbb{R}^+\backslash\{0\}$, genau dann, wenn*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) := a^x$$

◊

Für die graphische Darstellung von

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) := 2^x$$

siehe die Abbildung 4.3.22

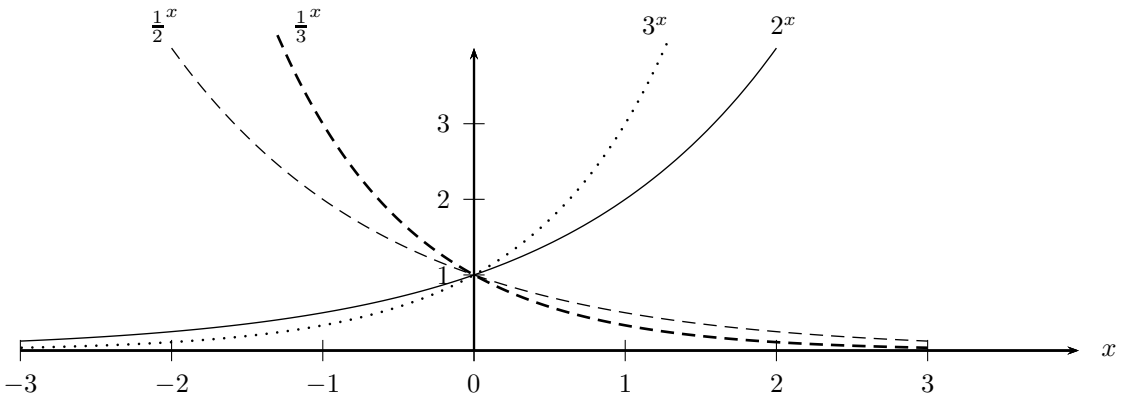


Abbildung 4.3.22: Graphische Darstellung der Graphen von $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3^x$, $h(x) = \frac{1}{3}^x$, $k(x) = \frac{1}{2}^x$

Bemerkung 4.3.2. *Es werden nur positive Basen zugelassen, da unter anderem Wurzeln aus negativen Zahlen resultieren würden. Es ist z. B.* $(-3)^{0.2} = (-3)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{-3}$. ◊

Bemerkung 4.3.3. *Eine Teilmenge des Graphen von 3^x ist z. B. :*
$\{\left(-4, 3^{-4}\right), (-3, 3^{-3}), (-2, 3^{-2})(-1, 3^{-1}), (-0.5, 3^{-0.5}), (0, 3^0), (1, 3^1), (1.5, 3^{1.5}), (2, 3^2), (3, 3^3)\} =$
$\{\left(-4, \frac{1}{3^4}\right), (-3, \frac{1}{3^3}), (-2, \frac{1}{3^2}), (-1, \frac{1}{3}), (-0.5, \frac{1}{3^{0.5}}), (0, 1), (1, 3), (1.5, 3^{\frac{3}{2}}), (2, 9), (3, 27)\} =$
$\{(-4, 0.012345679), (-3, 0.037037), (-2, 0.11111), (-1, 0.333333), (-0.5, 0.577\,35), (0, 1), (1, 3),$
$(1.5, 5.196\,2), (2, 9), (3, 27)\}$ ◊

Bemerkung 4.3.4. *Wir nennen x in 2^x den „Exponenten“ und 2 die „Basis“* ◊

Von besonderer Bedeutung ist der Spezialfall $a = e$, wobei e die reelle, nicht rationale Eulersche Zahl ist. Sie wird wie folgt definiert

Definition 4.3.5. $e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
mit $k! = k\,(k-1)\,(k-2)\,.....2 \cdot 1$ *und* $0! = 1! = 1$. *„$k!$“ wird „k Fakultät“ genannt.* ◊

Die ersten 7 Summanden der Summe, die e^x definiert:

$$\begin{aligned} e^x &= \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + ... \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + ... \end{aligned}$$

Es handelt sich um eine unendliche Summe von Polynomen der Art $\frac{x^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$.

Satz 4.3.6. $e^1 = e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

Durch Berechnung der Summe der erste 17 Summanden, d.h.

$$\begin{aligned} e &\approx \frac{1^0}{0!} + \frac{1^1}{1!} + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^4}{4!} + \frac{1^5}{5!} + \frac{1^6}{6!} + ... + \frac{1^{17}}{17!} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + ... + \frac{1}{17!}, \end{aligned}$$

erhält man:

$$e \approx 2.71828182845905$$

Definition 4.3.7.

$$\begin{aligned} \exp(x) &:= e^x \\ \exp_a(x) &:= a^x \end{aligned}$$

◊

Satz 4.3.8. *Für Exponentialfunktionen f und $a, b > 0$ gilt:*

- $f(0) = 1$, *denn* $f(0) = a^0 = 1$.
- $Bild(f) =]0, \infty[$, *denn positive Zahlen hoch irgend eine Zahl sind positiv.*
- *Ist* $a > 1$, *dann ist f strikt monoton wachsend, denn mit* $a > 1$ *ist* $a^x > a^y$ *für* $x > y$.
- *Ist* $0 < a < 1$, *dann ist f strikt monoton fallend, denn mit* $0 < a < 1$ *ist* $a^x < a^y$ *für* $x > y$.
- *f ist konvex.*
- $a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$ *(y-Achsensymmetrie von* a^x *und* $\left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$, *da* $\left(\frac{1}{a}\right)^{-x} = \frac{1}{a^{-x}} = a^x$*; man erhält z.B.* $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$ *durch Spiegelung von* 3^x *an der y-Achse, s. Abbildung 4.3.22)*
- $a^x a^y = a^{x+y}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$

- $a^x b^x = (ab)^x$
- $1^x = 1$ $(\Longrightarrow 1^0 = 1)$

Beispiel 4.3.9.

$$K : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$K(t) = K_0(1+i)^t$$

ist das Produkt der Konstanten K_0 (Anfangskapital) und der Exponentialfunktion zur Basis $(1+i)$, wobei i der Zinssatz ist. Mit dieser Funktion kann das Kapital nach t Jahren des Kapitals K_0 mit Zinseszins zu einem Satz von i berechnet werden. Innerhalb der Jahre ergeben sich nicht die üblichen Zinsen, da Banken innerhalb der Jahre gewöhnlich linear rechnen (d.h. mit einem Dreisatz), während die Funktion K konvex ist und damit innerhalb der Jahre etwas weniger Endkapital ergibt als die übliche Berechnungsweise. ◊

Eine weitere Klasse von Funktionen erhält man, indem man für die Basis von Exponentialfunktionen nicht nur Konstanten zulässt, sondern Funktionen f, deren Definitionsbereich so eingeschränkt wird, dass das Bild von f Teilmenge der positiven reellen Zahlen (ohne die Null) wird.

Beispiel 4.3.10. *Sei $g(x) = 5x + 2$; $5x + 2 > 0$ für $]-\frac{2}{5}, \infty[$. Entsprechend ist*

$$g :]-\frac{2}{5}, \infty[\ \to \mathbb{R}$$
$$g(x) = (5x+2)^x$$

eine wohldefinierte Abbildung. ◊

Durch die Verkettung von Exponentialfunktionen mit bisher bekannten Funktionstypen erhalten wir neue Funktionen, wobei jeweils auf die maximal sinnvollen Definitionsbereiche der neuen Funktion zu achten ist.

Beispiel 4.3.11. *Für die Funktionen*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = 5^x$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$g(x) = 3x + 2$$

erhält man

$$f(g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(g(x)) = 5^{3x+2}$$

oder

$$g(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$g(f(x)) = 3 \cdot 5^x + 2$$

Im Beispiel müssen die Definitionsbereiche nicht eingeschränkt werden. ◊

Beispiel 4.3.12. *Für*

$$f : \mathbb{R}^+ \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = (5x)^x$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$g(x) = 3x + 2$$

erhält man für $f\,(g)$:

$$f(g):\ ]-\frac{2}{3},\infty[\ \to\mathbb{R}$$
$$f(g(x))=(5(3x+2))^{3x+2}$$

dann $5(3x+2)>0$ genau dann, wenn $x\in]-\frac{2}{3},\infty[$. ◊

Bemerkung 4.3.13. *Offensichtlich gilt z.B. $0^4=0\cdot0\cdot0\cdot0=0$, d.h. $0^x=0$ für $x\neq0$. 0^0 wird demgegenüber oft per Definition mit 1 gleichgesetzt. Damit ergibt sich für alles $x\in\mathbb{R}$: $x^0=1$. Diese Festlegung ermöglicht oft einfachere Formulierungen von Sätzen, ohne Nachtteile zur Folge zu haben. Es gibt Programme, die $0^0=1$ liefern (z.B. R). Excel hingegen liefert bei 0^0 eine Fehlermeldung.* ◊

4.3.2 Logarithmusfunktionen

Exponentialfunktionen f zur Basis $a>0$ und $a\neq1$ sind strikt monoton und damit injektiv, wobei der Definitionsbereich $\mathbb{R}$ ist und das Bild von f die Menge $\mathbb{R}^+\backslash\{0\}$ ist. $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^+\backslash\{0\}$ ist somit surjektiv und damit bijektiv. Die Umkehrfunktion existiert also und ist eine bijektive Abbildung von $\mathbb{R}^+\backslash\{0\}$ nach $\mathbb{R}$. Wir führen für die Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen wegen ihrer Wichtigkeit eine eigene Schreibweise ein:

Definition 4.3.14. *Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+\backslash\{0\}$; $f\,(x):=a^x$ mit $a>0$ und $a\neq1$, dann ist per Definition*

$$\log_a(y):=f^{-1}\,(y)$$

Wir nennen Abbildungen

$$g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$$
$$g(x):=\log_a\,(x)$$

Logarithmusfunktionen. ◊

„$\log_a$“ wird gelesen als „Logarithmus zur Basis a“, „$\log_a(y)=x$“ wird gelesen als „der Logarithmus zur Basis a von y ist x“. Der Logarithmus x ist die Hochzahl, mit der man die Basis a potenzieren muss, um y zu erhalten - Logarithmen sind also Hochzahlen! Statt $\log_a(y)$ schreiben wir gewöhnlich $\log_a y$. Es gilt:

Satz 4.3.15.

$$\log_a(y)=x\Longleftrightarrow a^x=y$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus dem Satz 4.2.3. □

Für die Basis e schreibt man (ausser in der US-amerikanischen Literatur, in der man oft $\log x:=\log_e x$ verwendet):

Definition 4.3.16.

$$\ln x:=\log_e x$$

$\ln x$ *wird „natürlicher Logarithmus“ oder „Logarithmus Naturalis“ genannt.* ◊

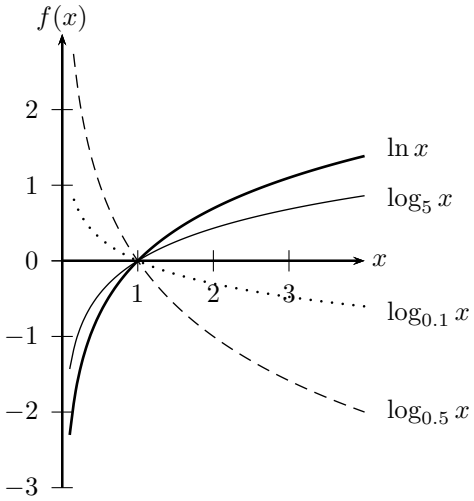


Abbildung 4.3.23: Graphische Darstellungen von Logarithmusfunktionen

Bemerkung 4.3.17. *Eine Teilmenge des Graphen der Funktion* ln*:*
$\{(0.1, -2.302585093), (0.5, -0.693147181), (1,0), (2, 0.693147181), (3, 1.098612289), (4, 1.386294361), (5, 1.609437912), (6, 1.791759469)\}$ ◊

Es gilt:

Satz 4.3.18. *Für Logarithmusfunktionen* $\log_a$ *gilt:*

- *Die Nullstellen der Funktionen sind 1, denn* $\log_a y = 0$ *genau dann, wenn* $y = a^0 = 1$.
- *Logarithmusfunktionen sind strikt monoton wachsend für* $a > 1$.
- *Logarithmusfunktionen sind konkav für* $a > 1$.
- *Ist* $a > 1$*, so gilt für* $x > 1$ *die Ungleichung* $\log_a x > 0$ *und für* $0 < x < 1$ *die Ungleichung* $\log_a x < 0$.
- *Logarithmusfunktionen sind strikt monoton fallend für* $0 < a < 1$.
- *Ist* $0 < a < 1$*, so gilt für* $x > 1$ *die Ungleichung* $\log_a x < 0$ *und für* $0 < x < 1$ *die Ungleichung* $\log_a x > 0$.
- *Logarithmusfunktionen sind konvex für* $0 < a < 1$.

Wir beweisen ein paar bekannte Sätze:

Satz 4.3.19. $\log_a a^x = x$

Beweis. Da $\log_a x$ die Umkehrfunktion von a^x ist, folgt der Satz unmittelbar - s. Satz 4.2.22 auf der Seite 125. Übungshalber rechnen wir nach: Gemäss Satz 4.3.15 gilt durch mechanisches Einsetzen von a^x für y:

$$\log_a a^x = x \iff a^x = a^x.$$

Da die rechte Seite gilt, folgt daraus

$$\log_a a^x = x.$$

□

Bemerkung 4.3.20. *Intuitiv ist der Satz leicht zu verstehen. Womit muss man die Basis a potenzieren, um a^x zu erhalten? Mit x natürlich!* ◊

Satz 4.3.21. $a^{\log_a x} = x$

Beweis. Da a^x die Umkehrfunktion von $\log_a x$ ist, gilt der Satz unmittelbar. Übungshalber rechnen wir nach: Wir setzen im Satz 4.2.3 mechanisch $\log_a x$ für x und x für y und erhalten:

$$\log_a x = \log_a x \Longleftrightarrow a^{\log_a x} = x.$$

Da $\log_a x = \log_a x$ gilt, erhalten wir das Gewünschte. □

Bemerkung 4.3.22. *Für $a^{\log_a x} = x$ überlegt man sich: da $\log_a x$ die Hochzahl ist, mit der man a potenzieren muss, um x zu erhalten, ist a hoch diese Hochzahl mit x identisch.* ◊

Bemerkung 4.3.23. *Für die Basis e gilt mit den Sätzen 4.3.19 und 4.3.2 und mittels den eingeführten Schreibweisen kurz:*

$$\ln(\exp x) = x$$
$$\exp(\ln x) = x$$

◊

Satz 4.3.24. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

Beweis. Gemäss Satz 4.3.21 gilt:

$$a^{\log_a(xy)} = xy$$
$$a^{\log_a x} = x$$
$$a^{\log_a y} = y$$

Damit gilt durch Einsetzen der zwei letzten Gleichungen in die erste und mittels Potenzrechnen:

$$\begin{aligned} a^{\log_a xy} &= a^{\log_a x} a^{\log_a y} \\ &= a^{\log_a x + \log_a y} \end{aligned}$$

und da die Basen identisch sind folgt aus dieser Gleichung die Gleichheit der Exponenten

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y.$$

□

Die folgenden Sätze beweist man analog. Der Beweis des ersten sei als Übung überlassen:

Satz 4.3.25. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

Satz 4.3.26. $log_a x^y = y \log_a x$

Beweis. Gemäss Satz 4.3.21 gilt:

$$a^{\log_a x^y} = x^y$$
$$a^{\log_a x} = x$$

Durch Einsetzen der ersten Gleichung in die zweite und mittels Potenzrechnen erhält man:

$$\begin{aligned} a^{\log_a x^y} &= \left(a^{\log_a x}\right)^y \\ &= a^{y \log_a x} \end{aligned}$$

Da die Basen identisch sind, folgt aus der Gleichung die Gleichheit der Exponenten:

$$\log_a x^y = y \log_a x$$

□

Satz 4.3.27. $\log_a a = 1$

Beweis. Gemäss Satz 4.3.15 gilt durch Ersetzen von y durch a und x durch 1:

$$\log_a a = 1 \iff a = a^1$$

Da $a = a$ gilt, so gilt $\log_a a = 1$ (Intuitive Überlegung: Womit muss man die Basis a potenzieren, um a zu erhalten?) □

Bemerkung 4.3.28. *Für die Basis e gilt entsprechend* $\ln e = 1$. ◊

Bei Gleichungen verwenden wir oft die Regel, dass beide Seiten der Gleichung logarithmiert werden können. Dabei sind auf beiden Seiten der Gleichung identische Basen zu wählen, die Wahl der Basis ist aber willkürlich. Der folgende Satz rechtfertigt dieses Vorgehen:

Satz 4.3.29. *Für reelle Funktion f und g mit $f(x) = g(x)$ und $f(x), g(x) > 0$ gilt*

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \log_a f(x) = \log_a g(x) &\iff \\ \exp_a\left(\log_a f(x)\right) = \exp_a\left(\log_a g(x)\right) &\iff \\ f(x) = g(x) & \end{aligned}$$

oder intuitiver: Ist $f(x) = g(x)$, so muss man die Basis a mit der gleichen Hochzahl potenzieren, um $f(x)$ oder $g(x)$ zu erhalten. □

Satz 4.3.30. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

Beweis. Gemäss Satz 4.3.21 gilt:

$$\begin{aligned} b^{\log_b x} &= x \\ a^{\log_a x} &= x \end{aligned}$$

Damit gilt dann

$$b^{\log_b x} = a^{\log_a x}$$

Logarithmieren wir beide Seiten (es gilt $b^{\log_b x}, a^{\log_a x} > 0$) erhält man:

$$\log_b b^{\log_b x} = \log_b a^{\log_a x}$$

und mit dem Satz 4.3.26

$$\log_b x \cdot \log_b b = \log_a x \cdot \log_b a$$

und da $\log_b b = 1$

$$\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a.$$

Also ist

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

□

Damit kann man Logarithmen beliebiger Basis in solche mit anderen beliebigen Basen umrechnen. Insbesondere gilt damit auch:

Satz 4.3.31. $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

Satz 4.3.32. $a^x = e^{x \ln a}$

Beweis. $e^{x \ln a} = \exp(\ln a^x) = a^x$ □

Beispiel 4.3.33. *Wollen wir wissen, nach wieviel Zeit bei einem Anfangskapital von K_0 und einem Zinssatz von i ein spezifisches Kapital $K(t)$ erreicht wird, , so müssen wir*

$$K_t := K(t) = K_0(1+i)^t$$

nach t auflösen. Man erhält:

$$\begin{aligned} \frac{K_t}{K_0} &= (1+i)^t \iff \\ \ln \frac{K_t}{K_0} &= t \ln(1+i) \iff \\ t &= \frac{\ln K_t - \ln K_0}{\ln(1+i)}. \end{aligned}$$

Der zweite Schritt ist gerechtfertigt, da $\frac{C_t}{C_0} > 0$ für $C_t, C_0 > 0$.Beachten Sie, dass dadurch nur eine Näherung an die Ergebnisse der üblichen Berechnungsmethode berechnet wird, da oft innerhalb des Jahres linear und nicht mit der obigen Formel gerechnet wird. Die Resultate der üblichen Berechnungsmethode erhalten wir nur, wenn $t \in \mathbb{N}$. ◊

Logarithmusfunktionen können mit anderen behandelten Funktionen verkettet werden, ebenso die übrigen Funktionen mit Logarithmusfunktionen. Dabei ist besonders auf den zulässige Definitionsbereich $\mathbb{R}^+\backslash\{0\}$ zu achten.

Beispiel 4.3.34. *Welches ist der Definitionsbereich von $\ln(f(x)) = \ln\left(x^4 - 27x^2 - 14x + 120\right)$ ($f(x) = x^4 - 27x^2 - 14x + 120$). Es ist die Menge der x, so dass $f(x) > 0$, da $\ln(f(x))$ nur für positive Zahlen definiert ist. Siehe die Graphik 4.2.9 und die Berechnungen der Bemerkung 4.2.14 auf der Seite 121. Lösung:*

$$D =]-\infty, -4[\ \cup \ ]-3, 2[\ \cup \ ]5, \infty[$$

(im Gegensatz zu $\sqrt{f(x)}$ sind die Intervalle des Definitionsbereiches von $\ln(f(x))$ alle offen). ◊

Beispiel 4.3.35. *Seien zwei Funktionen gegeben mit:*

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^+\backslash\{0\} \to \mathbb{R} \\ f(x) &:= \ln x \\ g &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ g(x) &:= 5x + 2 \end{aligned}$$

Dann ist

$$f(g(x)) = \ln(5x+2)$$

nur für $5x + 2 > 0$ definiert, d.h. für $x \in]-\frac{2}{5}, \infty[$. Umgekehrt ist

$$g(f(x)) = 5 \ln x + 2$$

für $\mathbb{R}^+\backslash\{0\}$ definiert. ◊

Logarithmen können von Hand oder mit Excel mit einem Näherungsverfahren berechnet werden. Wir zeigen dies an einem Beispiel. Zu berechnen sei $\log_3 5$. Wir müssen also eine Zahl x suchen, so das $3^x = 5$. Wir starten mit zwei Zahlen x_1 und x_2, so dass $3^{x_1} < 5$ und $3^{x_2} > 5$. So ist z.B. $3^1 = 3 < 5$ und $3^2 = 9 > 5$. Als nächstes berechnen wir $3^{\frac{x_1+x_2}{2}} = 3^{1.5} = 5.196\,2$. Diese Zahl ist grösser als 5. Entsprechend setzen wir $x_2 := 1.5$ und berechnen wiederum $3^{\frac{x_1+x_2}{2}} = 3^{\frac{1+1.5}{2}} = 3^{1.25} = 3.948\,2$. Diese Zahl ist kleiner als 5 und wir setzen $x_1 := 1.25$. Wir berechnen wieder $3^{\frac{x_1+x_2}{2}} = 3^{\frac{1.25+1.5}{2}} = 3^{1.375} = 4.5294$. Wir wissen mittlerweile, dass der gesuchte Logarithmus zwischen 1.375 und 1.5 liegt. Führen wir das Verfahren fort, können wir den Logarithmus bis auf allfällige Rundungsfehler beliebig genau bestimmen. Mit Excel ist das Verfahren recht effizient durchzuführen.

Bemerkung 4.3.36. *Wir haben bisher $f(x) = a^x$ für $x \in \mathbb{Q}$ erklärt, nicht jedoch für $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Mit den neuen Mitteln können wir $a^x := \exp(x \ln a)$ für $x \in \mathbb{R}$ und $a > 0$ definieren.* exp *haben wir sauber definiert (Definition 4.3.5) und damit ist auch die Umkehrfunktion von* exp*, nämlich* ln*, sauber definiert. Nicht streng hergeleitet ist damit allerdings z.B. die Regel $a^x a^y = a^{x+y}$, die wir bei der Herleitung einer der Logarithmusregel verwendet haben. Deren Beweis setzt technische Hilfsmittel voraus, die uns in diesem Kurs nicht zur Verfügung stehen.* ◊

Übungen

1. Berechnen Sie ohne technische Hilfsmittel die folgenden Logarithmen:
   $\log_2 4 =$
   $\log_2 8 =$
   $\log_3 27 =$
   $\log_4 4 =$
   $\log_5 625 =$
   $\log_{10} 10000000 =$

2. Berechnen Sie die Werte der folgenden Funktionen:
   $f(5)$ und $f(-3)$ für $f(x) = e^x$
   $f(5)$, $f(0.5)$, $f(0)$ und $f(-5)$ für $f(x) = \ln x$
   $f(5)$ und $f(0.5)$ für $f(x) = \log_2 x$
   $f(5)$ und $f(0.5)$ für $f(x) = \log_{0.2} x$

3. Berechnen Sie den Endwert einer Anlage $K = 500$ und $i = 0.025$ für 5.5 Jahre mit der obigen Formel $K(t) = K_0(1+i)^t$ und mit der Berechnungsmethode, welche innerhalb der Jahre mit $(t-n)(K_{n+1} - K_n)$ arbeitet (wobei $n \leq t \leq n+1$ und $n \in \mathbb{N}$) und vergleichen Sie.

4. Wie lange muss ein Kapital von 1000 GE angelegt sein, um bei einem Zinssatz von 0.03 ein Endkapital von 5000 GE zu ergeben (Zinseszins; rechnen Sie mit der Exponentialfunktion, die auf $\mathbb{R}^+$ definiert ist). Wie lange, wenn Sie die übliche Berechnungsmethode verwenden?

5. Zu welchem Zinssatz muss ein Kapital von 1000 GE angelegt sein, um nach 6 Jahren ein Endkapital von 4000 GE zu ergeben (Zinseszins)

6. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich der folgenden Funktionen:
$$f(x) = \ln\left(5x^2 + 3x - 5\right)$$
$$g(x) = \frac{5x^2 + 4}{\ln\left(\frac{5x-3}{4x^2-2}\right)}$$

7. Eine Volkswirtschaft wachse jährlich im Durchschnitt um 1.8%. Wie viele Jahre dauert es, bis sich das BSP verdoppelt hat?

8. Zwei Gummibälle fallen zu Boden und steigen wieder auf. Gummiball A erreicht nach jedem Aufprall am Boden jeweils 90% der Höhe, von welcher aus er gefallen ist. Bei Gummiball B liegt dieser Wert bei 86%.

   (a) Wie lautet die Gleichung der Exponentialfunktion für Gummiball A (x = Anzahl Aufpralle, f(x) = Aufstiegshöhe in cm) falls dieser ursprünglich aus 3 m Höhe zu Boden fällt?

   (b) Wie hoch steigt Gummiball A nach 8 Aufschlägen?

   (c) Nach wie vielen Aufschlägen beträgt die Aufstiegshöhe von Gummiball A noch 45 cm?

   (d) Gummiball B fällt aus 6.5 m Höhe. Berechnen Sie nach wie vielen Aufschlägen am Boden die beiden Gummibälle gleich hoch steigen.

9. Die Ökopop-Volksinitiative (Abstimmung vom 30. November 2014) verlangte, dass das Bevölkerungswachstum der Schweiz auf 0.2% pro Jahr beschränkt werde (0.2% jeweils auf das Vorjahr berechnet). Um wieviel % (auf das Jahr 2014 berechnet) wäre die Bevölkerung in 20 Jahren gewachsen, wenn die Initiative akzeptiert worden wäre und das Wachstum die erlaubte Grenze jeweils erreicht hätte?
   Im Mittel der Jahre 2000 bis 2011 wuchs die Schweiz um 0.880114592% jährlich (Prozente jeweils auf das Vorjahr berechnet). Um wieviel Prozent (auf 2014 berechnet) wüchse die CH-Bevölkerung in den folgenden 20 Jahren, wenn dieses Mittel fortgeschrieben würde. Wenn 2014 die Bevölkerung 8 Millionen Einwohner umfasste, wieviel wären es nach diesen beiden Szenarien nach 20 Jahren?

10. Berechnen Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion, die durch die Gleichung $f(x) = \ln\left(3x + 6 + \ln x^2\right)$ gegeben ist.

11. Ein Auto verliere jedes Jahr 20% an Wert (auf den Wert des Vorjahres berechnet). Heute hat das Auto einen Wert von 30% des Anfangswertes. Wie alt ist das Auto?
    Wie lange ist die Halbwertszeit? (= Zeit, in der das Auto die Hälfte an Wert verliert).

12. Sei die Produktionsfunktion $x(r) = \sqrt{r}$ gegeben (produzierte Menge x als Funktion der verwendeten Rohstoffe r). r kostet pro Einheit 10 CHF.

    (a) Berechnen Sie die Kostenfunktion, welche die Kosten als Funktion der produzierten Menge ausdrückt. (Hinweis: die Umkehrfunktion $r(x)$ von $x(r)$ drückt die benötigten Rohstoffe als Funktion der produzierten Menge x aus.)

    (b) Berechnen Sie die Kosten für eine produzierte Menge von 12 Mengeneinheiten.

    (c) Berechnen sie die Gewinnfunktion (Preisnachfragefunktion: $p(x) = -0.3x^2 + 110$)

    (d) Berechnen Sie den Gewinnbereich.

    (e) Rechnen Sie das Beispiel auch für $x(r) = \ln r$ durch

13. Produktionsfunktionen drücken die produzierte Menge (output) einer Unternehmung als Funktion der benötigten Rohstoffe (input) aus. Wir gehen von der einfachen Situation aus, dass eine Unternehmung nur ein Gut produziert und dazu nur eine Art von Rohstoff braucht. Die produzierte Menge x als Funktion des verwendeten Inputs r sei durch die folgende Gleichung gegeben:

$$x(r) = \ln(r + 1)$$

    (a) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion x. Geben Sie das Intervall an, auf dem die Funktion nicht-negativ ist

    (b) Geben Sie den mathematisch maximalen Definitionsbereich der Funktion an

    (c) Geben Sie den ökonomisch maximalen Definitionsbereich der Funktion an

(d) Eine Einheit des Inputs r koste 8 Geldeinheiten. Geben Sie die Kostenfunktion K des Gutes x an.

(e) Die Preisfunktion ist gegeben durch $p(x) = 260$ (perfekte Konkurrenz). Berechnen Sie die Gewinnfunktion und das Intervall der x, so dass die Produktion gewinnbringend ist.

14. Zeigen Sie, dass $\log_a \frac{c}{b} = -\log_a \frac{b}{c}$

15. Es gilt, dass die graphische Darstellung von $\log_{\frac{1}{a}}(x)$ die Spiegelung an der $x-$Achse der graphischen Darstellung von $\log_a(x)$ ist. Es gilt also

$$\log_a(x) = -\log_{\frac{1}{a}}(x)$$

Versuchen Sie das mit Hilfe der eingeführten Regeln zu beweisen.

Lösungen

1. $\log_2 4 = 2$, da $2^2 = 4$.
$\log_2 8 = 3$, da $2^3 = 8$.
$\log_3 27 = 3$, da $3^3 = 27$.
$\log_4 4 = 1$, da $4^1 = 4$.
$\log_5 625 = 4$, da $5^4 = 625$.
$\log_{10} 10\,000\,000 = 7$, da $10^7 = 10\,000\,000$.

2. $e^5 = 148.41$
$e^{-3} = \frac{1}{e^3} = 0.049787$
$\ln 5 = 1.6094$
$\ln 0.5 = -0.69315$
$\ln 0$ ist undefiniert
$\ln(-5)$ ist undefiniert.
$\log_2 5 = 2.3219 = \frac{\ln 5}{\ln 2}$
$\log_2 0.5 = -1.0 = \frac{\ln 0.5}{\ln 2}$
$\log_{0.2} 5 = -1.0 = \frac{\ln 5}{\ln 0.2}$
$\log_{0.2} 0.5 = 0.43068 = \frac{\ln 0.5}{\ln 0.2}$

3. Gemäss obiger Formel:

$$\begin{aligned} K(5.5) &= 500(1+0.025)^{5.5} \\ &= 572.73 \end{aligned}$$

Mit Formel:

$$\begin{aligned} K(5.5) &= K(5) + (5.5-5)(K(6) - K(5)) \\ &= 500(1+0.025)^5 + \frac{500(1+0.025)^6 - 500(1+0.025)^5}{2} \\ &= 572.78 \end{aligned}$$

Die Differenz beträgt 5 Rappen.

4.

$$\begin{aligned} 5000 &= 1000(1+0.03)^t \Longrightarrow \\ \ln 5000 &= \ln 1000 + t \ln 1.03 \Longrightarrow \\ t &= \frac{\ln 5000 - \ln 1000}{\ln 1.03} \\ &= 54.449 \end{aligned}$$

Dies ergibt 54 Jahre und $0.449 \cdot 360 = 161.64$ Tage.
Mit der üblichen Methode: die 54 Jahre berechnen wir mit:

$$K(54) = 1000\,(1.03)^{54} = 4934.1$$

Die Differenz zum gesuchten Endkapital beträgt

$$5000 - 4934.1 = 65.9$$

und der Jahreszins im Jahr 55

$$\begin{aligned} K(55) - K(54) &= 1000\,(1.03)^{55} - 1000\,(1.03)^{54} \\ &= 148.02 \end{aligned}$$

Wir erhalten $\frac{65.9 \cdot 360}{148.02} = 160.28$ Tage zu den 54 Jahren. Der Unterschied der beiden Berechnungsmethoden beträgt damit $161.64 - 160.28 = 1.36$ Tage.

5.

$$\begin{aligned} 4000 = 1000\,(1+i)^6 &\Longrightarrow \\ \ln 4000 = \ln 1000 + 6\ln(1+i) &\Longrightarrow \\ \frac{\ln 4000 - \ln 1000}{6} = \ln(1+i) &\Longrightarrow \\ \exp\left(\frac{\ln 4000 - \ln 1000}{6}\right) = \exp\ln(1+i)) & \\ = 1+i &\Longrightarrow \\ i = \exp\left(\frac{\ln 4000 - \ln 1000}{6}\right) - 1 & \\ = 0.259\,92 & \end{aligned}$$

(in Prozenten: 25.992%)>
Die Methode ist etwas kompliziert: in der Tat kann man auch rechnen:

$$\begin{aligned} 4000 &= 1000\,(1+i)^6 \\ \frac{4000}{1000} &= (1+i)^6 \\ \sqrt[6]{\frac{4000}{1000}} &= 1+i \\ i &= \sqrt[6]{\frac{4000}{1000}} - 1 \end{aligned}$$

6. a) $5x^2 + 3x - 5 > 0$ genau dann, wenn

$$x \in \left]-\infty, -\frac{1}{10}\sqrt{109} - \frac{3}{10}\right[\cup \left]\frac{1}{10}\sqrt{109} - \frac{3}{10}, \infty\right[$$

Diese Menge stellt damit den maximalen Definitionsbereich für f dar.

b) $\frac{5x-3}{4x^2-2}$ ist definiert für $4x^2 - 2 \neq 0$.
$4x^2 - 2 = 0 \Longleftrightarrow 4x^2 = 2 \Longleftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.
$\frac{5x-3}{4x^2-2}$ ist also definiert für $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$
$\ln \frac{5x-3}{4x^2-2}$ ist definiert für $\frac{5x-3}{4x^2-2} > 0$.

Um die x zu finden, so dass $\frac{5x-3}{4x^2-2} > 0$ muss man zwei Fälle unterscheiden:
$4x^2 - 2 > 0$ oder $4x^2 - 2 < 0$.

$4x^2 - 2 > 0$ auf $]-\infty, -\frac{1}{2}\sqrt{2}[\cup]\frac{1}{2}\sqrt{2}, \infty[$
$\frac{5x-3}{4x^2-2} > 0 \Longrightarrow 5x - 3 > 0 \Longrightarrow 5x > 3 \Longrightarrow x > \frac{3}{5}$.
$\frac{5x-3}{4x^2-2}$ ist also positiv auf $\{x|x > \frac{3}{5}\} \cap \left(]-\infty, -\frac{1}{2}\sqrt{2}[\ \cup \ ]\frac{1}{2}\sqrt{2}, \infty[\right) \ = \ ]\frac{1}{2}\sqrt{2}, \infty[$

$4x^2 - 2 < 0$ auf $]-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}[$
$\frac{5x-3}{4x^2-2} > 0 \Longrightarrow 5x - 3 < 0 \Longrightarrow 5x < 3 \Longrightarrow x < \frac{3}{5}$. (durch die Multiplikation mit einer negativen Zahl wird $>$ zu $<$).
$\frac{5x-3}{4x^2-2}$ ist positiv auf $\{x|x < \frac{3}{5}\} \cap]-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}[=]-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{5}[$

Insgesamt ist $\frac{5x-3}{4x^2-2}$ auf $]-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{5}[\cup]\frac{1}{2}\sqrt{2}, \infty[$ positiv.

$\ln \frac{5x-3}{4x^2-2}$ ist also definiert für

$$x \in \left]-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{5}\right[\ \cup \ \left]\frac{1}{2}\sqrt{2}, \infty\right[$$

Zudem muss $\ln \frac{5x-3}{4x^2-2}$ von 0 verschieden sein, um eine Division durch 0 zu verhindern.
$\ln x = 0$ genau dann, wenn $x = 1$.
$\frac{5x-3}{4x^2-2}$ muss also von 1 verschieden sein:
$\frac{5x-3}{4x^2-2} = 1 \Longleftrightarrow 5x - 3 = 4x^2 - 2 \Longleftrightarrow -4x^2 + 5x - 1 = 0 \Longleftrightarrow x \in \left\{1, \frac{1}{4}\right\}$
Da $\frac{1}{4} = 0.25 < \frac{3}{5}$, gibt es nichts einzuschränken. Da $1 > \frac{3}{5}$ muss man 1 aus dem Definitionsbereich entfernen. .
Der maximale Definitionsbereich ist also ($\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.707\,11$)

$$\left(\left]-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{5}\right[\ \cup \ \left]\frac{1}{2}\sqrt{2}, \infty\right[\right) \setminus \left\{1, \frac{1}{4}\right\}$$

7. Im ersten Jahr ergibt sich

$$BNP(1) = BNP_0(1 + 0.018) \tag{4.3.2}$$

Im zweiten Jahr ergibt sich

$$BNP(2) = BNP(1)(1 + 0.018) \tag{4.3.3}$$

und durch Einsetzen von (4.3.2) in (4.3.3)

$$\begin{aligned} BNP(2) &= BNP_0(1 + 0.018)(1 + 0.018) \\ &= BNP_0(1 + 0.018)^2 \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

Im dritten Jahr ergibt sich

$$BNP(3) = BNP(2)(1 + 0.018) \tag{4.3.5}$$

und durch Einsetzen von (4.3.4) in (4.3.5)

$$\begin{aligned} BNP(3) &= BNP_0(1 + 0.018)^2(1 + 0.018) \\ &= BNP_0(1 + 0.018)^3 \end{aligned}$$

Allgemein gilt also offenbar:

$$BNP(n) = BNP_0\,(1 + 0.018)^n$$

und wenn wir die Funktion auf $\mathbb{R}^+$ statt auf $\mathbb{N}$ definieren:

$$BNP(t) = BNP_0 \left(1 + 0.018\right)^t$$

wobei sich im Beispiel wegen der Verdoppelung $BNP(t) = 2BNP_0$ ergibt. Damit erhält man

$$\begin{aligned} 2BNP_0 &= BNP_0 \left(1 + 0.018\right)^t \Longrightarrow \\ 2 &= \left(1 + 0.018\right)^t \Longrightarrow \\ \ln 2 &= t \ln(1 + 0.018) \Longrightarrow \\ t &= \frac{\ln 2}{\ln(1 + 0.018)} \\ &= 38.854 \end{aligned}$$

8. Zwei Gummibälle fallen zu Boden und steigen wieder auf. Gummiball A erreicht nach jedem Aufprall am Boden jeweils 90% der Höhe, von welcher aus er gefallen ist. Bei Gummiball B liegt dieser Wert bei 86%.

   (a) $f(x) = 300 \cdot (0.9)^x$ (3 m = 300 cm)

   (b) $f(8) = 300 \cdot (0.9)^8 = 129.14$ cm

   (c) $f(x) = 45$; $300 \cdot (0.9)^x = 45$; $x = \frac{\ln \frac{45}{300}}{\ln 0.9} = 18.006$

   (d) $g(x) = 650 \cdot 0.86^x = f(x) = 300 \cdot 0.9^x$
   $\frac{0.86^x}{0.9^x} = \frac{300}{650}$
   $x \ln(0.86) - x \ln 0.9 = \ln\left(\frac{300}{650}\right)$
   $x = \frac{\ln\left(\frac{300}{650}\right)}{\ln(0.86) - \ln(0.9)} = 17.007$

9. $1.002^{20} = 1.040\,8$ (um 4.08%; nach 20 Jahren also $8 \cdot 1.0408 = 8.326$ Millionen ($= 8 \cdot 1.002^{20} = 8.326$)
   $1.00880114592^{20} = 1.191\,5$ (um 19.15%; nach 20 Jahren also $8 \cdot 1.1915 = 9.532$ Millionen ($= 8 \cdot 1.00880114592^{20} = 9.532$) (Bemerkung: es ist sehr gewagt, Trends rein mathematisch ohne Berücksichtigung der politischen und wirtschaftlichen europäischen und globalen Rahmenbedingungen und deren wahrscheinlichen Entwicklungspfade in die Zukunft zu projizieren).

10. $f(x) = \ln\left(3x + 6 + \ln x^2\right)$; $\ln f(x)$ ist nur für $f(x) > 0$ definiert. Entsprechend ist für $\ln x^2$ die Zahl 0 aus dem Definitionsbereich herauszunehmen. Zudem muss aus demselben Grund gelten: $3x + 6 + \ln x^2 > 0$. Wir suchen die Nullstellen, z.B. mit R:
    f=function(x) 3*x+6+log(x^2)
    plot(f,xlim=c(-5,5))
    Auf Grund der Graphik gibt es vermutlich 3 Nullstellen: zwei in der der Nähe von 0 und eine zwischen -2 und -4.
    uniroot(f,c(-4,-2)): Resultat: -2.649605
    uniroot(f,c(-2,-0.000000000001)): Resultat: -0.05399684
    uniroot(f,c(0.000000000001,2)): Resultat: 0.0464659
    $f(-3) = -0.8027754$
    $f(-2) = 1.386294$
    Damit liegt zwischen -2.649605 und -0.05399684 ein positiver Bereich vor.
    $f(-0.01) = -3.24034$
    $f(0.01) = -3.18034$
    $f(1) = 9$
    Damit liegt in $]0.0464659, \infty[$ ein positiver Bereich vor.
    Der maximale Definitionsbereich ist damit
    $\mathbb{R} \setminus (]-\infty, -2.649605] \cup [-0.05399684, 0.0464659]) =]-2.649605, -0.05399684[\cup]0.0464659, \infty[$

11. V_a für Anfangswert. Wir setzen: $0.3V_a = V_a\left(1-0.2\right)^t$. Man löst nach t auf:
$0.3 = \left(1-0.2\right)^t$
$\ln\left(0.3\right) = t\ln\left(0.8\right)$
$t = \frac{\ln 0.3}{\ln 0.8} = 5.395\,5$
Oder, wenn man die Gleichung nicht direkt setzen kann: Nach einem Jahr hat der Wagen einen Wert von $V_1 := 0.8V_a$
Am Ende des zweiten Jahres hat der Wagen einen Werte von $V_2 := 0.8V_1 = 0.8\left(0.8V_a\right) = 0.8^2V_a$
Am Ende des dritten Jahres hat der Wagen einen Wert von $V_3 := 0.8V_2 = 0.8^3V_a$, u.s.w.
Allgemeine Formel für einen Abschreibungssatz von 20%: $V_n = 0.8^nV_a$. Indem man zu einer Exponentialfunktion übergeht (kontinuierliche Zeit):
$V\left(t\right) = 0.8^tV_a$. Da $V\left(t\right) = 0.3V_a$ erhält man $0.3V_a = V_a\left(0.8\right)^t$.

$V\left(t\right) = 0.5V_a$. $0.5V_a = V_a\left(0.8\right)^t$
$t = \frac{\ln 0.5}{\ln 0.8} = 3.106\,3$

12. (a) Umkehrfunktion von $x\left(r\right) : r\left(x\right) = x^2$.
da der Preis für eine Einheit 10 ist, gilt: $K\left(x\right) = 10\cdot r\left(x\right) = 10x^2$ (Kostenfunktion)
(b) Kosten für eine produzierte Menge von 12 Mengeneinheiten: $K\left(12\right) = 10\cdot 12^2 = 1440$
(c) Gewinnfunktion (Preisnachfragefunktion: $p\left(x\right) = -0.3x^2 + 110$)
$E\left(x\right) = xp\left(x\right) = x\left(-0.3x^2 + 110\right) = 110x - 0.3x^3$
$G\left(x\right) = E\left(x\right) - K\left(x\right) = 110x - 0.3x^3 - \left(10x^2\right) = -0.3x^3 - 10x^2 + 110x$
(d) Gewinnbereich.
$-0.3x^3 - 10x^2 + 110x = 0$, Lösungen: $8.719\,2, -42.053, 0$
$G\left(1\right) = -0.3 - 10 + 110 = 99.7 > 0$.
Gewinnbereich: $]0, 8.7192[$
(e) für $x\left(r\right) = \ln r$; Umkehrfunktion: $\exp\left(x\left(r\right)\right) = r \quad \left(r\left(x\right) = e^x\right)$.
Kostenfunktion: $K\left(x\right) = 10e^x$
Gewinnfunktion: $G\left(x\right) = 110x - 0.3x^3 - 10e^x$
Gewinnbereich $110x - 0.3x^3 - 10e^x = 0$
(Nullstellen mit uniroot von R - f = function(x) $110 * x - 0.3 * x\hat{}3 - 10 * \exp\left(x\right)$
plot(f,xlim=c(-2,4)) (günstige Intervallgrenzen durch Probieren)
uniroot(f,c(-2,3)): 0.1005251
uniroot(f,c(3,10)): 3.657509
$f\left(0\right) = -10$; $f\left(1\right) = 82.51718 > 0$; $f\left(4\right) = 110\cdot 4 - 0.3\cdot 4^3 - 10e^4 = -125.18$;
Gewinnbereich: $]0.1005251, 3.657509[$

13. Man erhält:

(a) Nullstelle: es gilt $\ln\left(1\right) = 0$, also NS, wo r+1=1, also wenn $r = 0$. Gemäss Theorie sind Logarithmusfunktionen mit Basis grösser als 1 strikt monoton steigend. Entsprechend ist die Funktion rechts von r=0 strikt positiv.
(b) Maximaler Definitionsbereich: $r + 1 > 0$ genau dann, wenn $r > -1$. $D_x =]-1, \infty[$
(c) negativer Input und Output ist sinnlos. Entsprechen gilt: ökonomisch sinnvoller Definitionsbereich ist: $]0, \infty[$. Dort ist beides positiv (s. a)
(d) Zu berechnen ist die Umkehrfunktion, welche den Input als Funktion des Outputs ausdrückt:

$$\exp\left(x\right) = \exp\left(\ln\left(r+1\right)\right) = r\left(x\right) + 1$$
$$\Longrightarrow r\left(x\right) = e^x - 1$$

und die Kostenfunktion

$$K\left(x\right) = 8r\left(x\right) = 8\left(e^x - 1\right) = 8e^x - 8$$

(e) Die Preisfunktion ist gegeben durch $p(x) = 260$ (perfekte Konkurrenz). Erlös: $E(x) = xp(x) = 260x$
Gewinn: $G(x) = E(x) - K(x) = 260x - (8e^x - 8) = 260x - 8e^x + 8$
Erste NS: 0, denn $260 \cdot 0 + 8e^0 - 8 = 8 \cdot 1 - 8 = 0$.
Zweite Nullstellen mit uniroot von R: Graphisch mit
f=function(x) 260*x-8*exp(x)+8; plot(f,xlim=c(0,6)); abline(h=0)
sieht, man, dass es eine NS zwischen 5 und 6 hat. Mit uniroot(f,c(5,6)) erhält man die NS: 5.120478
Da $G(1) = 260 - 8e + 8 = 246.25 > 0$ und $G(6) < 0$ ist die Gewinnzone $]0, 5.120478[$.

14. $\log_a \frac{c}{b} = \log_a c - \log_a b = -(\log_a b - \log_a c) = -\log_a \frac{b}{c}$.

15. Es gilt (x-Achsensymmetrie):

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{a}}(x) &= \frac{\log_a(x)}{\log_a \frac{1}{a}} \quad \text{(Satz 4.3.30)} \\ &= \frac{\log_a(x)}{-\log_a a} \quad \text{(Übung 14).} \\ &= -\log_a(x) \end{aligned}$$

Ein graphisches Beispiel: $\log_3 x = -\log_{\frac{1}{3}} x$

4.4 Intervallweise definierte Funktionen

Sei D die Vereinigungsmenge von n reellen Intervallen I_i mit $I_i \cap I_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $i, j \in \mathbb{N}_n$. Zudem seien Funktionen $f_i : I_i \to \mathbb{R}$ definiert. Dann nennen wir die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ als aus den Funktion f_i zusammengesetzt (= abschnittsweise definiert) genau dann, wenn f auf I_i mit f_i für alle $i \in \mathbb{N}_n$ übereinstimmt. Zusammengesetzte Funktionen werden i.A. dadurch angegeben, dass für jedes der Intervalle die entsprechende Funktionsgleichung geliefert wird, gewöhnlich hinter einer geschwungenen Klammer. Will man den Funktionswert $f(x)$ von x berechnen, muss man überprüfen, in welchem Intervall sich das x befindet. Wenn $x \in I_i$, dann ist $f(x) = f_i(x)$.

Beispiel 4.4.1. *Betragsfunktion:*

$$\begin{aligned} |\,| &:= \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ |x| &= \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

So ist z.B.

$$\begin{aligned} |5| &= 5 \\ |-5| &= 5 \\ |-20| &= 20. \end{aligned}$$

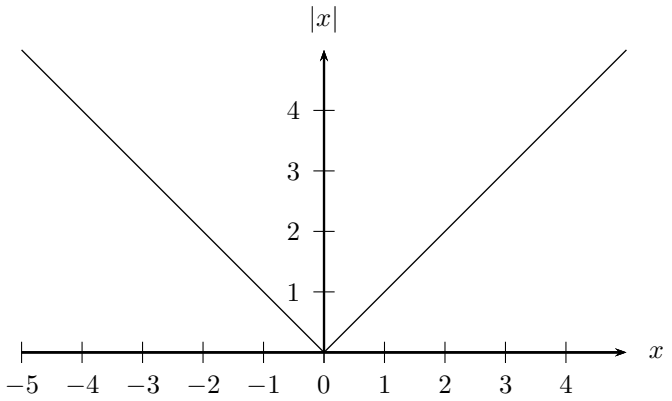


Abbildung 4.4.24: Graphische Darstellung der Betragsfunktion

◊

Satz 4.4.2. $|x|^2 = x^2$

Beweis. Für $x \geq 0$, $|x| = x$ und damit $|x|^2 = x^2$. Für $x < 0$, $|x| = -x$ und damit $|x|^2 = (-x)^2 = x^2$. □

Satz 4.4.3. $|x|\,|y| = |xy|$

Beweis. Wenn $x = 0$ oder $y = 0$, dann ist $|x|\,|y| = 0 = |xy|$. Wir nehmen an, dass $x < 0$ und $y > 0$. Damit ist $-x = |x|$ und $|y| = y$. Folglich ist $|x|\,|y| = -xy$. Zudem ist $-xy > 0$ und damit gemäss Definition $|-yx| = -yx$. Man schliesst: $|x|\,|y| = |xy|$. Man verwendet dieselbe Argumentation für $x > 0$ und $y < 0$. Wenn $x, y > 0$, ist $x = |x|$ und $|y| = y$, und damit $xy = |x|\,|y|$. Zudem ist für $xy > 0$: $|yx| = yx$. Man erhält $|x|\,|y| = |xy|$. Schliesslich gilt für $x, y < 0$, $-x = |x|$ und $|y| = -y$. Damit ist $|x|\,|y| = (-x)\,(-y) = xy > 0$. Da $xy > 0$, ist $|yx| = yx$. Also $|x|\,|y| = |yx|$. □

Satz 4.4.4. $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(Dreiecksungleichung)*

Beweis. Da $|x + y|, |x|, |y| \geq 0$, gilt

$$\begin{aligned} |x + y| \leq |x| + |y| &\Longleftrightarrow |x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2 \\ &\Longleftrightarrow (x + y)^2 \leq |x|^2 + 2\,|x|\,|y| + |y|^2 = x^2 + 2\,|xy| + y^2 \end{aligned}$$

Nun ist $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. Da $xy \leq |x|\,|y| = |xy|$, ist die Ungleichung bewiesen. □

Beispiel 4.4.5. *Charakteristische Funktion (oder Indikatorfunktion)*

$$1_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A \\ 0 & \text{für } x \notin A \end{cases}$$

für $A \subset \mathbb{R}$. Mit der Indikatorfunktion kann man intervallweise zusammengesetzte Funktion ohne die Klammernotation ausdrücken. Die Betragsfunktion kann definiert werden durch: $|x| = -x \cdot 1_{]-\infty,0[}(x) + x \cdot 1_{[0,\infty[}(x)$ ◊

Beispiel 4.4.6. *Sei*

$$f_1 :]-\infty, 5] \to \mathbb{R}$$
$$f_1(x) = 2x$$

und

$$f_2 :]5, \infty[\to \mathbb{R}$$
$$f_2(x) = 5x^2 + e^x.$$

Dann wird die aus f_1 und f_2 zusammengesetzte Funktion f z.B. beschrieben durch:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x \in \ ]-\infty, 5] \\ 5x^2 + e^x & \text{für } x \in \ ]5, \infty[\end{cases}$$

oder auch durch

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } -\infty < x \leq 5 \\ 5x^2 + e^x & \text{für } 5 < x < \infty \end{cases} .$$

Im betrachteten Beispiel ist $D =]-\infty, 5] \cup]5, \infty[= \mathbb{R}$.
Funktionswerte von 3 und 6 :

$$f(3) = f_1(3) = 2 \cdot 3 = 6$$
$$f\,(6) = f_2(6) = 5 \cdot 6^2 + e^6 = 583.\,43.$$

◊

Beispiel 4.4.7. *Sei*

$$f_1 :]0, 3] \to \mathbb{R}$$
$$f_1(x) = 2 \ln(x)$$

$$f_2 :]3, 10[\to \mathbb{R}$$
$$f_2(x) = e^x$$

und

$$f_3 :]11, 15[\to \mathbb{R}$$
$$f_3\,(x) = \frac{3}{x}$$

Dann wird die aus f_1, f_2 und f_3 zusammengesetzte Funktion f z.B. beschrieben durch:

$$f :]3, 10] \cup \ ]11, 15[\ \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} 2 \ln(x) & \text{für } x \in \ ]0, 3] \\ e^x & \text{für } x \in \ ]3, 10[\\ \frac{3}{x} & \text{für } x \in \ ]11, 15[\end{cases}$$

Im betrachteten Beispiel ist $D =]0, 10] \cup]11, 15[$. ◊

Beispiel 4.4.8. *Eine Europäische Option (auch Vanilla-Option genannt) ist eine Art Vertrag, welcher das Recht verleiht, einen Basiswert (neudeutsch auch „underlying“ genannt) (Aktie, Edelmetall, Ware, Währung, etc.) zu einem bestimmten Zeitpunkt T (= Strike, Ausübungsdatum, Maturity oder Verfalldatum) zu einem bestimmten Preis k (= Strike Preis, Ausübungspreis oder*

exercice price) zu kaufen (Kaufoption; Call-Option) oder zu verkaufen (Verkaufsoption; Put-Option).

Optionen sind standardisierte, börsenkotierte Derivate. Wer das Recht erwirbt, einen Basiswert zu verkaufen oder zu kaufen, wird Käufer der Option genannt, wer das Recht verleiht, dass ein Basiswert verkauft oder gekauft wird, wird Verkäufer der Option genannt. Dem Verkäufer ist für die Option vom Käufer eine Prämie c zu zahlen. Optionen sind damit eine Art Versicherung, welche es erlauben, für ein Gut in der Zukunft einen bestimmten Preis zu realisieren (Verkaufsoption) oder ein Gut in der Zukunft zu einem bestimmten Preis zu kaufen (Kaufoption). Optionen dienen damit z.B. der Absicherung von Währungsrisiken, von Absatz- oder von Zulieferpreisen in der Zukunft. Eine Option wird ausgeübt, wenn der Basiswert zu T ausgetauscht wird (s. die Übersicht Tabelle 4.4.1).

Zum Ausübungsdatum hat	Call-Option	Put-Option
Käufer der Option hat das Recht, Basiswert zu	kaufen	verkaufen
Verkäufer der Option die Pflicht, Basiswert zu	verkaufen	kaufen

Tabelle 4.4.1: Übersicht Call-Put-Optionen

Eine Verkaufsoption wird von einem ökonomisch handelnden Käufer der Option ausgeübt, wenn der Marktwert S_T des Basiswertes zum Zeitpunkt T tiefer ist als der Ausübungspreis k.

1. *Verwendet er die Option als Versicherung, so kann er in diesem Fall zum höheren Preis k verkaufen. Er verdient durch den Verkauf $k - S_T - c$ mehr als ohne die Option.*

2. *Ein Spekulant kann den Basiswert zum Marktpreis $S_T < k$ kaufen und ihn dann zum Ausübungspreis k verkaufen. Er gewinnt $k - S_T - c$.*

Ist hingegen $S_T \geq k$, wird die Option nicht ausgeübt. Der Käufer der Option zahlt in beiden Fällen die Prämie c.

Diesen Sachverhalt kann man mit einem sogenannten Auszahlungsdiagramm - auch „pay-off-Diagramm“ genannt - darstellen, welches die Auszahlungsfunktion f (Auszahlung der Option als Funktion des Marktpreises S_T des Basiswertes und der Konstanten $-c$) im kartesischen Koordinatennetz repräsentiert. Die Auszahlungsfunktion ist damit die Netto-Gewinn-Verlust-Funktion der Option - wenn man Gebühren ausser acht lässt. Damit ergibt sich für S_T im Bereich $[0, k[$ - dort ist ja $S_T < k$ und die Option wird ausgeübt - als Auszahlungsfunktion

$$f(S_T) = k - S_T - c,$$

und im Bereich $[k, \infty[$, in dem die Option nicht ausgeübt wird, $f(S_T) = -c$, mit der Klammerschreibweise dargestellt:

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$f(S_T) = \begin{cases} k - S_T - c & \text{für } 0 \leq S_T < k \\ -c & \text{für } k \leq S_T < \infty \end{cases}.$$

Um die Funktion zu zeichnen, beachten wir, dass $f(S_T) = k - S_T - c$ in $[0, k[$ eine Gerade (affines Polynom ersten Grades) beschreibt, die den Ordinatenabschnitt $k - c$ und die Steigung -1 aufweist sowie die Nullstelle: $f(S_T) = k - S_T - c = 0 \Longrightarrow -S_T = -k + c \Longrightarrow S_T = k - c$.

Die Differenz $k - S_T$ kompensiert einen Teil der Prämie, solange $k - S_T < c$. c wird genau kompensiert, wenn $k - S_T = c$, und ein Netto-Gewinn ergibt sich, wenn $k - S_T > c$. Für $k = 60$

und $c = 5$ erhält man die folgende graphische Darstellung 4.4.25 der Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$f(S_T) = \begin{cases} 60 - S_T - 5 & \text{für } 0 \leq S_T < 60 \\ -5 & \text{für } 60 \leq S_T < \infty \end{cases} :$$

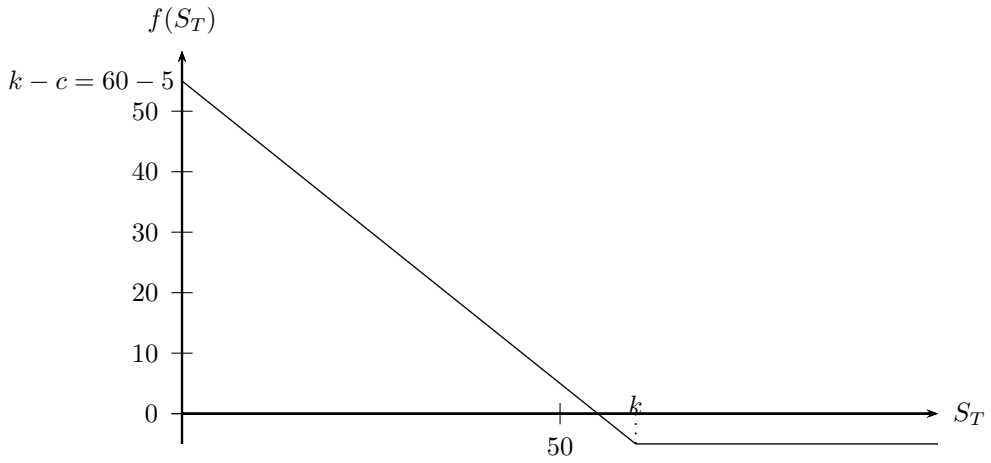


Abbildung 4.4.25: Auszahlungsdiagramm für den Käufer einer Put-Option mit dem Ausübungspreis $k = 60$ und der Prämie $c = 5$

Die Auszahlung bei $S_T = 30$ ist $f(30) = 60 - 30 - 5 = 25$. Die Auszahlung bei $S_T = 70$ ist $f(70) = -5$ - es liegt also ein Verlust der Prämie vor. Die Auszahlung bei $S_T = 58$ ist $f(58) = 60 - 58 - 5 = -3$. Es liegt der Verlust eines Teils der Prämie vor.

Für den Verkäufer der Verkaufsoption ergibt sich ebenfalls ein Auszahlungsdiagramm. Er gewinnt, wenn der Käufer verliert und umgekehrt. Sein Auszahlungsdiagramm ist die Spiegelung der Funktion im Auszahlungsdiagramm 4.4.25 an der $x-$Achse. Man erhält fürs Beispiel:

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$f(S_T) = \begin{cases} S_T - 55 & \text{für } 0 \leq S_T < 60 \\ 5 & \text{für } 60 \leq S_T < \infty \end{cases}$$

$\Diamond$

Beispiel 4.4.9. *Eine Kaufoption wird ausgeübt, wenn der Marktpreis S_T zum Zeitpunkt T höher ist als der Ausübungspreis k der Option, also im Bereich $]k, \infty[$.*

1. *Ein Käufer der Option, der den Basiswert zu T kaufen will, kann zu einem tieferen Preis als zum aktuellen Marktpreis kaufen. Er spart damit $S_t - k - c$.*

2. *Ein Spekulant kann den Basiswert zum Ausübungspreis kaufen und dann zum höheren Marktpreis verkaufen. Er macht einen Gewinn von $S_T - k - c$.*

In $]k, \infty[$ gilt entsprechend $f(S_T) = S_T - k - c$ und in $[0, k]$ $f(S_T) = -c$. Die Steigung ist 1. Die Nullstelle mit $S_T - k - c = 0$ ist $c + k$. In Klammerschreibweise ergibt sich damit die folgende Auszahlungsfunktion:

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$f(S_T) = \begin{cases} -c & \text{für } 0 \leq S_T \leq k \\ S_T - k - c & \text{für } k < S_T < \infty \end{cases}$$

Für $k = 70$ und $c = 6$ ergibt sich

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$f(S_T) = \begin{cases} -6 & \text{für } 0 \leq S_T \leq 70 \\ S_T - 76 & \text{für } 70 < S_T < \infty \end{cases}$$

und graphisch (s. Abbildung 4.4.26):

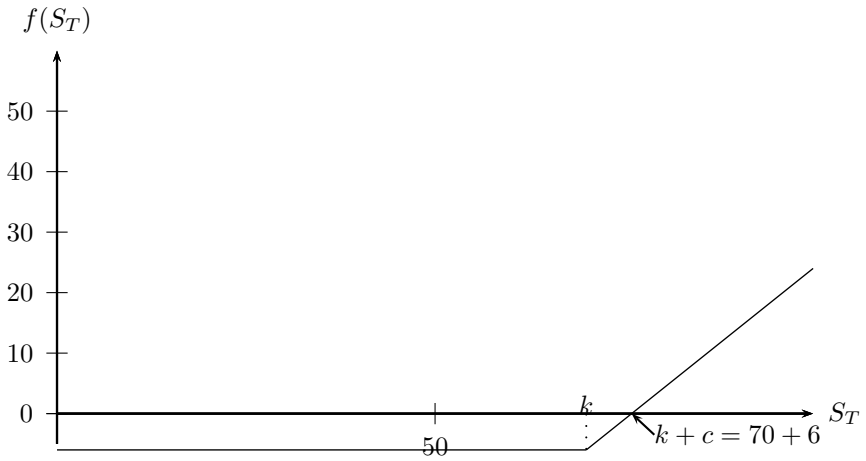


Abbildung 4.4.26: Auszahlungsdiagramm für den Käufer einer Call-Option mit dem Ausübungspreis $k = 70$ und der Prämie $c = 6$

Das Auszahlungsdiagramm des Verkäufers einer Kaufoption besteht in der Spiegelung von der Funktion in der Abbildung 4.4.26 an der $x-$Achse. Man erhält fürs Beispiel

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$f(S_T) = \begin{cases} 6 & \text{für } 0 \leq S_T \leq 70 \\ 76 - S_T & \text{für } 70 < S_T < \infty \end{cases} .$$

◊

Bemerkung 4.4.10. *Eine Verkaufsoption wird als Versicherung verwendet, wenn man davon ausgeht, dass man den Basiswert zum Zeitpunkt T produziert hat (z.B. in der Landwirtschaft oder als Unternehmung). Man will sich gegen eine Preiszerfall des Produktes auf dem Markt absichern. Die Verkaufsoption wird als Spekulationsinstrument verwendet, wenn man nicht gedenkt, den Basiswert zu produzieren. Man will vielmehr den Basiswert auf dem Markt zum Zeitpunkt T kaufen, um ihn dann zum Ausübungspreis k zu verkaufen. Man spekuliert also darauf, dass der Marktpreis zum Zeitpunkt T tiefer liegt als der Ausübungspreis. Die einzige Investition ist die Prämie. Im obigen Beispiel $f(S_T) = \begin{cases} 60 - S_T - 5 & \text{für } 0 \leq S_T < 60 \\ -5 & \text{für } 60 \leq S_T < \infty \end{cases}$ und bei einem Marktpreis von 52 würde man die Option ausüben. Man würde das Produkt für 52 kaufen und dann für 60 mittels Ausübung der Option verkaufen. Man gewinn nach Abzug der Prämie 3. Dies entspricht einem Gewinn von*

$\frac{3}{5} \cdot 100 = 60\%$ *(dieses Phänomen wird „Hebelwirkung" genannt). Liegt der Marktpreis aber nicht unter 60, so verliert man 100% der Investition. Die spekulative Verwendung von Optionen ist also sehr risikoreich.*
Eine Kaufoption wird als Versicherung verwendet, wenn man den Basiswert zum Zeitpunkt T tatsächlich kaufen will, weil man ihn z.B. für die Produktion verwendet (Rohstoffe). Man möchte sich gegen eine Hausse der Rohstoffpreise absichern. Die Kaufoption wird als Spekulationswerkzeug verwendet, wenn man nicht gedenkt, den Basiswert zu T zu kaufen. Man spekuliert darauf, dass der Marktpreis des Basiswerte zum Zeitpunkt T über dem Ausübungspreis liegt. Man übt in diesem Fall die Option aus und verkauft den Basiswert zum höheren Marktpreis. Im obigen Beispiel $f(S_T) = \begin{cases} -6 & \text{für } 0 \leq S_T \leq 70 \\ S_T - 76 & \text{für } 70 < S_T < \infty \end{cases}$ *würde man den Basiswert bei einem Marktpreis von* 78 *zum Ausübungspreis von* 70 *kaufen und dann zum Marktpreis von* 78 *verkaufen. Der Gewinn beträgt nach Abzug der Prämie* $\frac{2}{6} \cdot 100 = 33.333\%$. *Selbstverständlich ist diese Art von Option bei spekulativer Verwendung ebenso risikoreich wie die Verkaufsoption.* ◊

Übungen

1. Zeichnen Sie die folgende zusammengesetzte Funktion - im Intervall $]-10, 10[$:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} 0.2x & \text{für } x \in]-\infty, 3] \\ \frac{1}{x} & \text{für } x \in]3, 7[\\ \ln\left(x^2\right) & \text{für } x \in]7, \infty[\end{cases}$$

   und berechnen Sie $f(-5)$, $f(4), f(8)$.

2. Geben Sie die Auszahlungsfunktion für den Käufer der folgenden Verkaufsoption: Ausübungspreis = 40; Prämie = 4 an. Zeichnen Sie das Auszahlungsdiagramm. Berechnen Sie die Auszahlungen für den Marktpreis S_T des Basiswertes für $S_T = 30; S_T = 38; S_T = 50$.
   Geben Sie die Auszahlungsfunktion der selben Option für den Verkäufer an und zeichnen Sie das Auszahlungsdiagramm.

3. Geben sie die Auszahlungsfunktion für den Käufer der folgenden Kaufoption an: Ausübungspreis = 45; Prämie = 3.5. Zeichnen Sie das Auszahlungsdiagramm. Geben sie die Auszahlungsfunktion der selben Option für den Verkäufer an. Zeichnen Sie das Auszahlungsdiagramm.

Lösungen

1. Die graphische Darstellung ist:

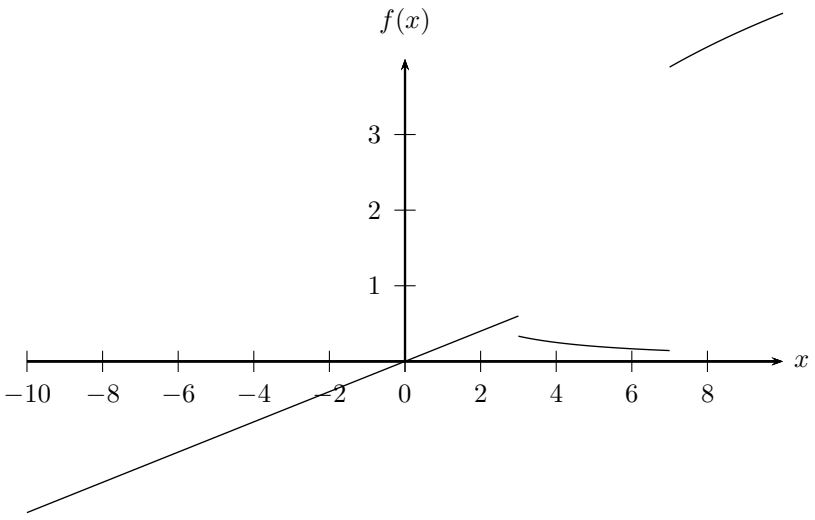


Abbildung 4.4.27: Graphische Darstellung der Funktion der Übung

Mit R:
plot(1,type="n",xlim=c(-1,10),ylim=c(-1,6)) #Nötig um angemessen Zeichenfläche zu haben
f1=function(x) 0.2*x
curve(f1,xlim=c(-1,3),add=T)
f2=function(x) 1/x
curve(f2,xlim=c(3,7),add=T)
f3=function(x) log(x^2)
curve(f3,xlim=c(7,10),add=T)

$f(-5) = 0.2 \cdot -5 = -1$
$f(4) = 1/4$
$f(8) = \ln\left(8^2\right) = 4.1589$

2. Die Auszahlungsfunktion des Käufers ist (Verkaufsoption; $c = 4; k = 40$):

$$f_L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$f_L\left(S_T\right) = \begin{cases} 40 - S_T - 4 & \text{für } 0 \leq S_T < 40 \\ -4 & \text{für } \infty > S_T \geq 40 \end{cases}$$

Die Auszahlungsfunktion des Verkäufers ist:

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$f_S(S_T) = \begin{cases} -(40 - S_T - 4) & \text{für } 0 \leq S_T < 40 \\ 4 & \text{für } 40 \leq S_T < \infty \end{cases}$$

Graphische Darstellungen:

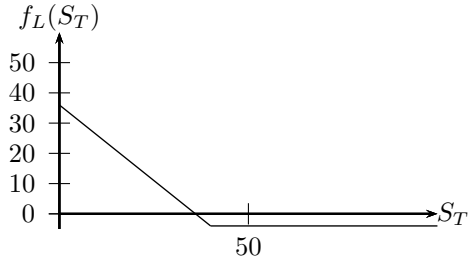


Abbildung 4.4.28: Auszahlungsdiagramm für den Käufer einer Put-Option mit dem Ausübungspreis $k = 40$ und der Prämie $c = 4$

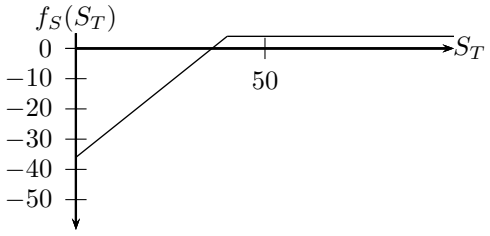


Abbildung 4.4.29: Auszahlungsdiagramm für den Verkäufer einer Put-Option mit dem Ausübungspreis $k = 40$ und der Prämie $c = 4$

$f_L(30) = 40 - 30 - 4 = 6$
$f_L(38) = 40 - 38 - 4 = -2$
$f_L(50) = -4$
Das L in $f_L(x)$ erinnert daran, dass der Kauf der Option als das Einnehmen einer „long position“ bezeichnet wird, während das S in $f_S(x)$ daran erinnert, dass der Verkauf einer Option als Einnehmen einer „short position“ benannt wird.

3. Die Auszahlungsfunktionen sind (Kaufoption, $k = 45, c = 3.5$)

$$f_L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$f_L(S_T) = \begin{cases} -3.5 & \text{für } 0 \leq S_T \leq 45 \\ S_T - 45 - 3.5 & \text{für } \infty > S_T > 45 \end{cases}$$

$$f_S : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$f_S(S_T) = \begin{cases} 3.5 & \text{für } 0 \leq S_T \leq 45 \\ -(S_T - 45 - 3.5) & \text{für } \infty > S_T > 45 \end{cases}$$

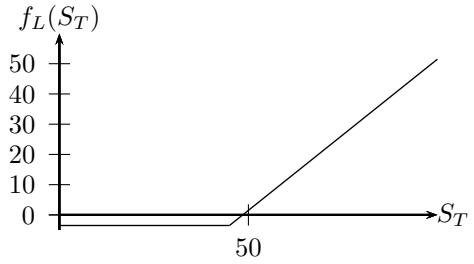


Abbildung 4.4.30: Auszahlungsdiagramm für den Käufer einer Call-Option mit dem Ausübungspreis $k = 45$ und der Prämie $c = 3.5$

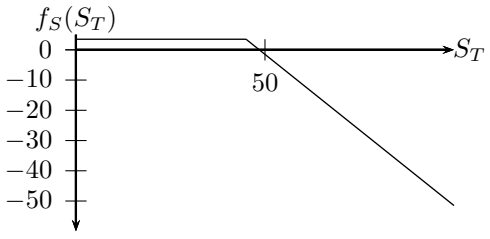


Abbildung 4.4.31: Auszahlungsdiagramm für den Verkäufer einer Call-Option mit dem Ausübungspreis $k = 45$ und der Prämie $c = 3.5$

4.5 Lernziele

- Definitionen der behandelten Funktionen hinschreiben können (rationale Funktionen, Wurzelfunktionen, Exponential- und Logarithmusfunktionen). Definitionsbereiche und Nullstellen dieser Funktionen festlegen respektive berechnen können.
- Den Begriff der Verkettung von Funktionen erklären können. Verkettungen berechnen können. Funktionswerte von verketteten Funktionen berechnen können.
- Den Begriff der Umkehrfunktion auf die behandelten Funktionstypen anwenden können. Wissen, dass die Verkettung der Umkehrfunktion und der umgekehrten Funktion allen Argumente diese selber als Funktionswerte zuordnet. Wissen, dass die Logarithmusfunktion die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist.
- Die Begriff der (strikten) Monotonie, des (strikt) monotonen Fallens und des (strikt) monotonen Wachsens kennen. Begriffe der strikten Konkavität und Konvexität kennen.
- Die Logarithmussätze anwenden können.
- Den Begriff der Zusammengesetzten Funktion kennen und die angegebenen ökonomischen Beispiele (Verkaufs- und Kaufoption; Put- und Call-Option) kennen und berechnen können.
- Aufgaben der Art der Übungen lösen können.

Kapitel 5

Grenzwerte einer reellen Funktion

Bei nicht-linearen Optimierungsproblemen stellt der Begriff der „Steigung“ eine wichtige Rolle. In der Tat nehmen viele Funktionen dort ihr Maximum oder Minimum an, wo die Steigung der Kurve 0 ist. Bisher konnten wir nur die Steigung von Polynomen ersten Grades berechnen. Die Steigung eines Polynoms ersten Grades $y = ax + b$ ist in jedem Punkt $(x, f(x))$ dieselbe, nämlich a. Andere Funktionen haben in jedem Punkt eine andere Steigung - zum Beispiel: $y = x^2$. Es geht nun darum die Steigung einer Funktion an einer Stelle x für eine möglichst grosse Klasse von Funktionen zu definieren und zu berechnen. Dazu brauchen wir den Grenzwertbegriff, dessen verschiedenen Varianten nun eingeführt werden: wir untersuchen Grenzwerte, die es erlauben, das Verhalten von Funktionen für x gegen Unendlich oder x gegen minus Unendlich zu beschreiben. Zudem führen wir einen Grenzwertbegriff ein, der die Untersuchung des Verhaltens von Funktionen in der Nähe von reellen Punkten erlaubt.

5.1 Der Grenzwert einer Funktion für „x gegen Unendlich“

Wir untersuchen Funktionen f mit $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oder $I \to \mathbb{R}$ (I ist Teilmenge von $\mathbb{R}$, die nach rechts unbeschränkt ist, d.h. es gibt keine Zahl a, so dass $x < a$ für $x \in I$). Wie verhalten sich z.B. die folgenden Funktionen, die auf $\mathbb{R}^+ \backslash \{0\}$ definiert seien, wenn x wächst? (s. die folgende Abbildung 5.1.1)

$$f(x) = \frac{1}{x}$$
$$g(x) = \frac{1}{x^2}$$
$$h(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$$
$$k(x) = \frac{3x - 1}{x}$$

$f(x) = \frac{1}{x}$ nähert sich 0, $g(x) = \frac{1}{x^2}$ nähert sich 0. $h(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$ nähert sich 1, $k(x)$ nähert sich 3.

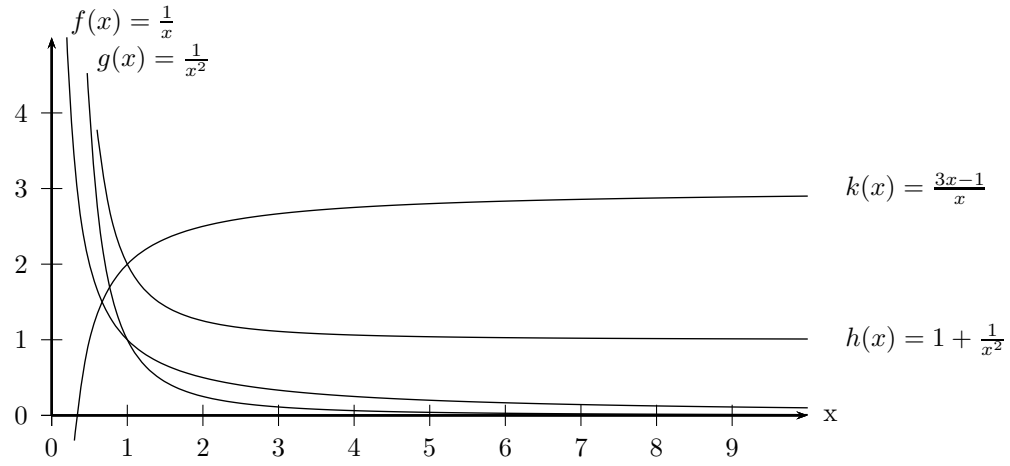


Abbildung 5.1.1: Verhalten von Funktionen für x gegen Unendlich

Für f und g ist damit 0 eine Zahl, der sich die Werte $f(x)$ und $g(x)$ beliebig nähern, wenn x gegen Unendlich geht. Für h ist 1 ein Wert, dem sich h beliebig nähert, wenn x gegen Unendlich geht. Schliesslich ist für k die Zahl 3 ein Wert, dem sich $k(x)$ beliebig nähert, wenn x gegen Unendlich geht. Die Zahlen, denen sich eine Funktion beliebig nähert, nennen wir „Grenzwert der Funktion".

Umgekehrt gibt es Funktionen, die bei gegen Unendlich gehendem x gegen $+\infty$ und $-\infty$ gehen (z.B. $f(x) = 3x + 2$ geht bei gegen Unendlich gehendem x gegen $+\infty$, während $f(x) = -3x + 2$ gegen $-\infty$ geht). In der Folge geht es darum, diesen ersten Grenzwertbegriff präzise zu definieren: es muss festgelegt werden, was die etwas umgangssprachliche und recht ungenaue Redensart „die Funktion nähert sich bei steigendem x beliebig der Zahl a" bedeutet. ∞ und $-\infty$ sind dabei durchaus auch Zahlen, allerdings nicht reelle Zahlen. Sie zeigen bei Grenzwertberechnungen oft von den reellen Zahlen abweichende Eigenschaften.

5.1.1 Definitionen und Sätze

Definition 5.1.1. *Für die Redensart „a ist der Grenzwert der Funktion f für x gegen Unendlich" wird geschrieben:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a$$

◊

Die Abkürzung entstammt dem lateinischen Wort „limes" für „Grenze". Für „$\lim_{x\to\infty} f(x) = a$" schreibt man aber etwa auch „$f(x) \to a$ für $x \to \infty$" (sprich „$f(x)$ geht gegen a für x gegen Unendlich").

Definition 5.1.2. $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ *genau dann, wenn für alle* $k > 0$ *gilt, es gibt ein* x'*, so dass für alle* x *gilt: wenn* $x > x'$*, dann* $|f(x) - a| < k$
($f : D \to \mathbb{R}$ *ist eine reelle Funktion; D ist nach rechts unbeschränkt;* $x, x' \in D; a \in \mathbb{R}$*).* ◊

k ist irgend eine reelle, positive Zahl. Die Definition fasst die intuitive Bedeutung von „$f(x)$ nähert sich dem Wert a beliebig, wenn x grösser wird": wenn a der Grenzwert von f ist, dann können wir ein beliebig kleines k wählen. Wir finden immer ein x', so dass für alle x gilt:, wenn $x > x'$, dann $|f(x) - a| < k$.

Wir illustrieren die Definition an einem graphischen Beispiel 5.1.3.

Beispiel 5.1.3. *Der Grenzwert der Funktion* $f(x) = \frac{2x-1}{x}$ $(x > 0)$ *ist für x gegen Unendlich ist die Zahl* 2*. Wenn wir ein* $k > 0$ *bestimmen, z.B.* $k = 0.5$*, so gibt es auf der x-Achse ein* x'*, so*

dass für alle $x > x'$ gilt: $|f(x) - 2| < k$. Im Beispiel gilt z.B. für alle $x > 3$, dass $|f(x) - 2| < 0.5$. So gilt z.B. $f(4) = \frac{2\cdot 4-1}{4} = 1.75$ und $2 - 1.75 = 0.25 < 0.5$. (s. Abbildung 5.1.2)

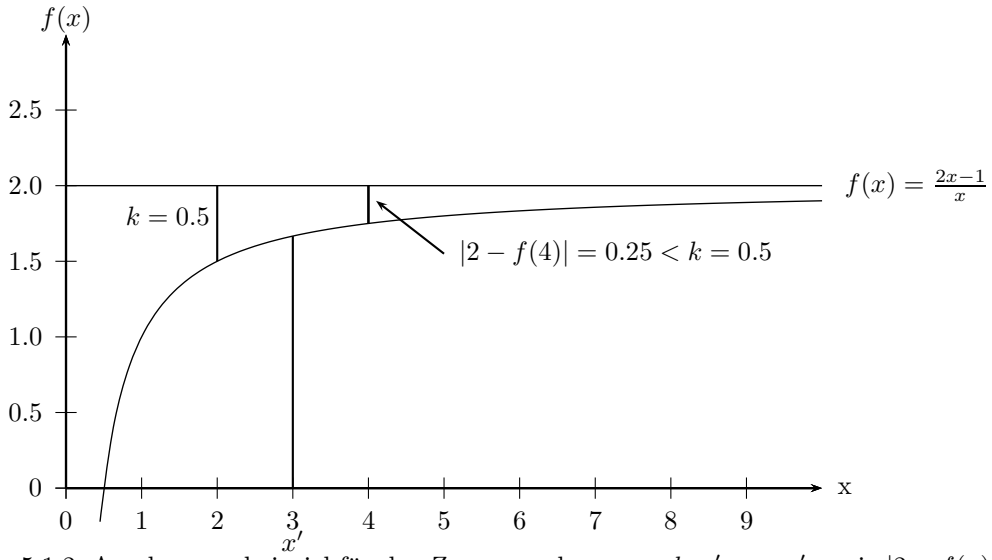


Abbildung 5.1.2: Anschauungsbeispiel für den Zusammenhang von $k, x', x > x'$ sowie $|2 - f(x)|$

◊

Bemerkung 5.1.4. *Die Wahl von x' ist beliebig. Es gäbe im obigen Beispiel $x'' < x'$ (z.B. $2.5, 2.1, 2.00001$), so dass für $x > x''$ gilt $|f(x) - 2| < k$. Man könnte auch das kleinste solche x'' für x' wählen und das wäre im Beispiel $f^{-1}(a - k) = f^{-1}(2 - 0.5) = 2$. Darauf kommt es aber nicht an! Es genügt für jedes k ein x' zu finden, für das die Bedingung gilt, wenn $x > x'$, dann $|f(x) - 2| < k$. Im graphischen Beispiel ist $x' = f^{-1}(a - k) + 1$* ◊

Bemerkung 5.1.5. *Es muss betont werden, dass Grenzwerte Zahlen sind und nicht Näherungsverfahren. In der angewandten Mathematik werden oft Näherungsverfahren verwendet. Um mit der Zahl π oder mit $\sqrt{2}$ zu rechnen, verwenden wir Zahlen, die diesen Zahlen möglichst nahe kommen, da wir leider nicht mit diesen Zahlen selber numerisch rechnen können. Um solche näherungsweise Zahlen zu berechnen, verwenden wir Näherungsverfahren. Ein Grenzwert ist aber davon verschieden. Er ist eine exakt bestimmt Zahl und kann z.B. auch eine irrationale Zahl wie $\pi, \sqrt{2}$ oder e sein.* ◊

Bemerkung 5.1.6. *Wenn wir den Grenzwert a einer Funktion f (für x gegen Unendlich) kennen, können wir mit Hilfe der Definition beweisen, dass $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$. Allerdings sind solche Beweise recht aufwendig, so dass wir darauf verzichten. Wir werden statt dessen im Regeln einführen, die es erlauben, Grenzwerte für manche Funktionen zu berechnen. Exemplarisch werden manche der Regeln in einem fakultativen Unterkapitel am Schluss bewiesen.* ◊

Bemerkung 5.1.7. *Durch die obige Definition ist ein reeller Grenzwert genau bestimmt, wenn er existiert. Wir beleuchten dies am obigen Beispiel. Keine Zahl grösser als 2 ist ein Grenzwert dieser Funktion. So ist z.B. 3 nicht ein Grenzwert der betrachteten Funktion $f(x) = \frac{2x-1}{x}$ für $x \to \infty$. Es gibt nicht für jedes k ein x', so dass für alle x gilt, wenn $x > x'$, dann $|f(x) - 3| < k$. Als Beispiel wählen wir $k = 0.002$. Da es kein $f(x) > 2$ gibt, kann es kein $f(x)$ geben, so dass $|f(x) - 3| < 0.002$, denn $|f(x) - 3| > 1$ für alle x. Diese Überlegung gilt für beliebige noch so kleine Zahlen, die grösser als 2 sind. Analog für Zahlen, die kleiner sind als 2. So ist z.B. 1.9 kein*

Grenzwert von $f(x)$ für $x \to \infty$. Denn mit $k = 0.01$ gilt für alle $x > 5000 : |f(x) - 1.9| > 0.01$, denn $f(5000) = \frac{2 \cdot 5000 - 1}{5000} = 1.999\,8$ und damit $|1.9 - 1.9998| = 0.099\,8 > 0.01$. Diese Überlegungen zeigen, dass der reelle Grenzwert einer Funktion eine eindeutig bestimmte reelle Zahl ist, wenn die Funktion gegen einen reellen Grenzwert geht(s. Abbildungen 5.1.3 und 5.1.4)

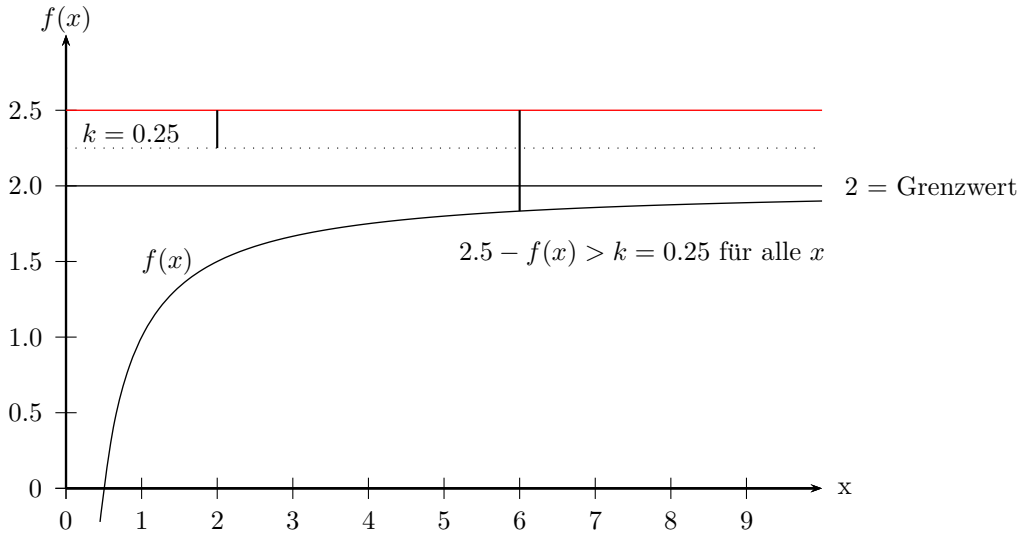


Abbildung 5.1.3: Illustration der Tatsache, dass der reelle Grenzwert einer Funktion eindeutig bestimmt ist. $f(x)$ nähert sich 2.5, denn $2.5 - f(x)$ wird immer kleiner, je grösser x wird - trotzdem ist 2.5 nicht ein Grenzwert von f. Für $k = 0.25$ gibt es z.B. kein x', so dass für alle $x > x'$, $2.5 - f(x) < 0.25$. Diese Differenz ist grösser als 0.5 für alle positiven x.

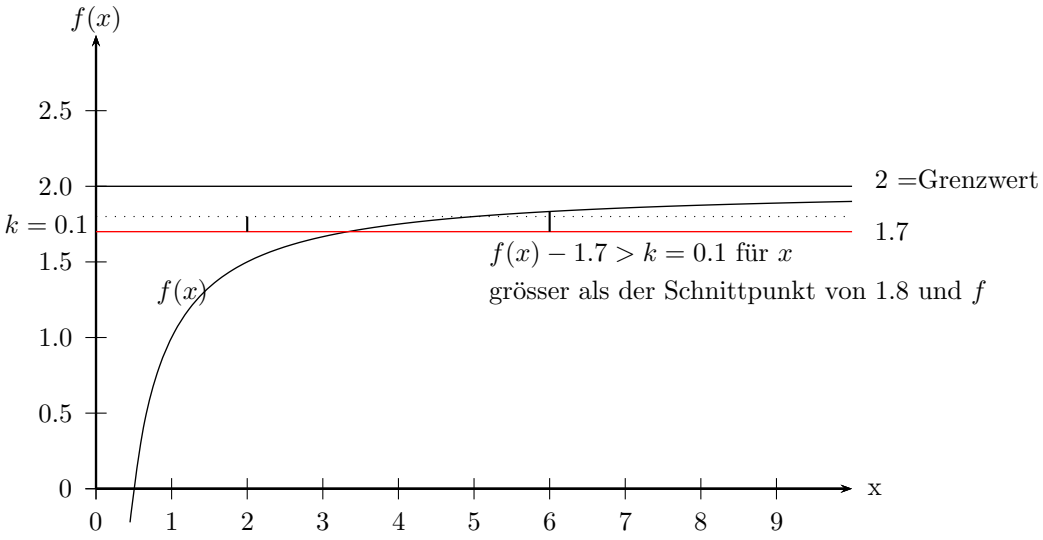


Abbildung 5.1.4: Illustration der Tatsache, dass der reelle Grenzwert einer Funktion eindeutig bestimmt ist. 1.7 z.B. ist nicht ein Grenzwert der Funktion f. $f(x)$ entfernt sich nach dem Schnitt mit 1.7 von 1.7 und für genügend kleine k, z.B. 0.1, gibt es kein x', so dass für alle $x > x'$, $f(x) - 1.7 < 0.1$. Nach dem Schnitt der Funktion mit der Konstante $1.7 + 0.1$, ist diese Differenz immer grösser als 0.1.

$\Diamond$

Bemerkung 5.1.8. *Wenn a der Grenzwert von f für $x \to \infty$ ist, kann $f(x)$ für manche x den*

Wert a annehmen oder nicht. Bei konstanten Funktionen ist der Grenzwert in allen x mit dem Funktionswert identisch. Im Beispiel mit der Abbildung 5.1.2 ist der Grenzwert eine sogenannte Asymptote. Er wird von der Funktion in keinem x angenommen, die Funktion nähert sich ihm aber beliebig. Bei oszillierenden Funktionen (s. Abbildung 5.1.6) wird der Grenzwert vom Funktionswert in unendlich vielen Punkten angenommen. Zwischen diesen Punkten gibt es Intervalle, in denen er nicht angenommen wird. ◊

Bemerkung 5.1.9. *In der Definition wird das Betragszeichen verwendet, da eine Funktion sich unter anderem dem Grenzwert a von unten (s. Abbildung 5.1.2), von oben (s. Abbildung 5.1.5) oder oszillierend von beiden Seiten (s. Abbildung 5.1.6) nähern kann. Wenn die Funktion sich von oben nähert, ist $f(x) - a > 0$, wenn sie sich von unten nähert ist $f(x) - a < 0$. Bei oszillierenden Funktionen gilt manchmal $f(x) - a > 0$ und manchmal $f(x) - a < 0$. Diesen Varianten kann man Rechnung tragen, indem man das Betragszeichen verwendet.*

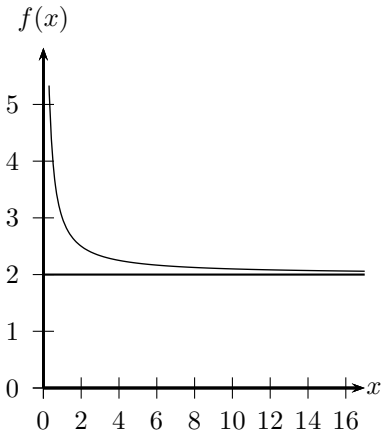


Abbildung 5.1.5: Funktion nähert sich von oben der Funktion. Für den Grenzwert $a = 2$ gilt: $f(x) - a > 0$ während für das Beispiel der Abbildung 5.1.2 $f(x) - a < 0$.

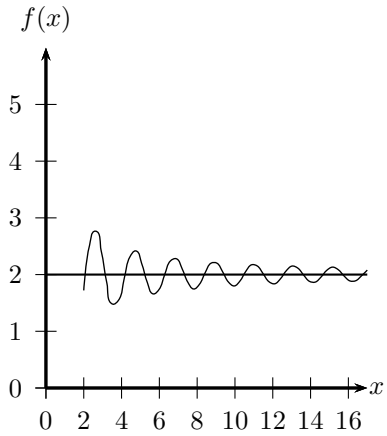


Abbildung 5.1.6: Oszillierende Funktion mit Grenzwert $a = 2$. Manchmal ist $f(x) - a > 0$, manchmal $f(x) - a < 0$, während $|f(x) - a| \geq 0$ für alle $x > 2$ gilt.

◊

Bemerkung 5.1.10. *Neben der Möglichkeit $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ oder $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ können Funktionen keinen reellen Grenzwert aufweisen, obwohl sie beschränkt sind. Wir nennen eine Funktion beschränkt, wenn es eine positive reelle Zahl a gibt, so dass $|f(x)| < a$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir betrachten dafür ein Beispiel. Sei*

$$\lfloor\rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\lfloor x \rfloor := \max\{z | z \leq x \text{ und } z \in \mathbb{Z}\}$$

für $x \in \mathbb{R}$ jene ganze Zahl z (d.h. $z \in \mathbb{Z}$), die durch Streichung der Dezimalstellen nach dem Komma entstehen. So wäre z.B. $\lfloor 5.523 \rfloor = 5$ ($\lfloor x \rfloor$ ist also eine reelle Funktion!). Wir definieren nun die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } \frac{\lfloor x \rfloor}{2} \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir ordnen also x 1 zu, wenn $\lfloor x \rfloor$ im Bereiche der ganzen Zahlen durch 2 teilbar ist, sonst ordnen wir -1 zu. Graphisch ergibt dies (s. Abbildung 5.1.7):

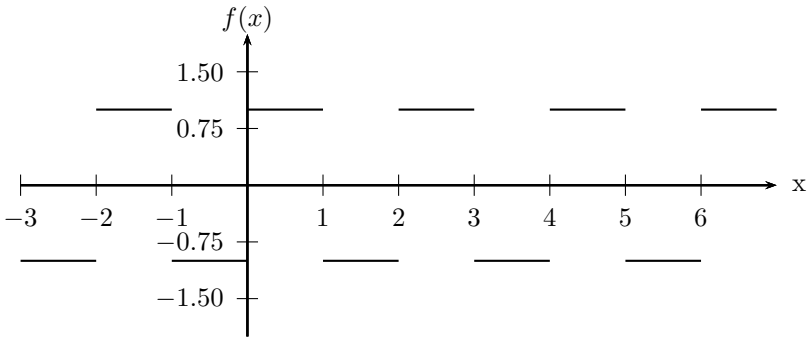


Abbildung 5.1.7: Beispiel einer beschränkten Funktion, die keinen reellen Grenzwert aufweist.

◊

Wenn $f(x)$ gegen Unendlich geht (für $x \to \infty$) (z.B. $y = x^2$) schreiben wir: $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$. Geht die Funktion für steigende x gegen $-\infty$, schreiben wir: $\lim_{x\to\infty} x^2 = -\infty$.

Definition 5.1.11. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ *genau dann, wenn es für jedes* $k > 0$ *ein* x' *gibt, so dass für alle* x *gilt: wenn* $x > x'$*, dann* $f(x) > k$*.*

◊

Wir betrachten zur Definition ein Beispiel:

Beispiel 5.1.12. *Zu untersuchen ist, wie sich* $f(x) = 0.5x - 1$ *für* x *gegen Unendlich verhält. Wir finden in der Tat für jedes* $k > 0$ *ein* x'*, so dass für alle* $x > x'$ *gilt:* $f(x) > k$*. Für* $k = 5$ *kann ein solches* x' *leicht durch* $f^{-1}(k) + 1$ *bestimmt werden (man könnte im Beispiel aber auch* $f^{-1}(k)$ *wählen, s. Abbildung 5.1.8).*

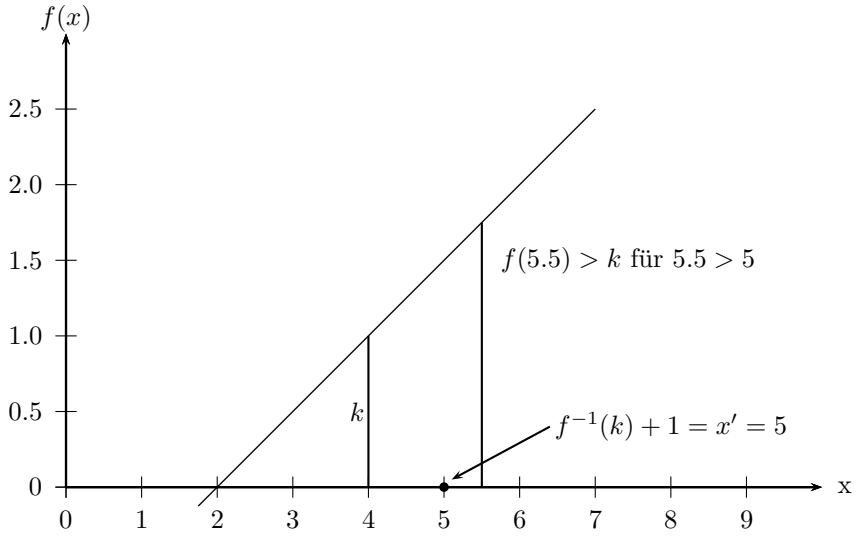


Abbildung 5.1.8: Anschauungsbeispiel für den Zusammenhang von $k, x', x > x'$: $f(x) > k$ für $x > 5$

◊

Definition 5.1.13. $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ *genau dann, wenn es für jedes* $k < 0$ *ein* x' *gibt, so dass für alle* x *gilt: wenn* $x > x'$*, dann* $f(x) < k$*.* ◊

Machen Sie zur Definition eine zur Abbildung 5.1.8 analoge Skizze!

Als nächstes werden Sätze aufgeführt, welche die Berechnung von Grenzwerten für manche reelle Funktionen für $x \to \infty$ erlauben. Beispielhaft werden ein paar Sätze im letzten Unterkapitel bewiesen.

Satz 5.1.14. *Wenn* $\lim_{x\to\infty} f(x), \lim_{x\to\infty} g(x) \in \mathbb{R}$, *dann*

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} g(x),$$

Satz 5.1.15. *Wenn* $\lim_{x\to\infty} f(x), a \in \mathbb{R}$, *dann*

$$a \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (af(x))$$

Satz 5.1.16. *Wenn* $\lim_{x\to\infty} f(x), \lim_{x\to\infty} g(x) \in \mathbb{R}$, *dann*

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to\infty} f(x) \cdot \lim_{x\to\infty} g(x)$$

Satz 5.1.17. *Wenn* $\lim_{x\to\infty} f(x), \lim_{x\to\infty} g(x) \in \mathbb{R}$ *und* $\lim_{x\to\infty} g(x) \neq 0$, *dann*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to\infty} f(x)}{\lim_{x\to\infty} g(x)}$$

Satz 5.1.18. $\lim_{x\to\infty} \frac{a}{x^n} = 0$ *($n > 0, a \in \mathbb{R}$).*

Satz 5.1.19. $\lim_{x\to\infty} a = a$ *für* $a \in \mathbb{R}$

Wenn man mit den gelieferten Regeln den Grenzwert einer Funktion berechnet, muss man garantieren, dass $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to\infty} g(x)$ tatsächlich reelle Zahlen bezeichnen. Die Kunst des Berechnens von Grenzwerten besteht oft in der folgenden Strategie: durch Erweitern oder durch Kürzen versuchen wir,

1. den Nenner des Ausdrucks so umzuwandeln, dass eine Division durch 0 vermieden wird.
2. die Teilterme des Ausdrucks so umzuwandeln, dass sich Ausdrücke der Form $\frac{a}{x^n}$ ($n > 0, a \in \mathbb{R}$) ergeben, die man beim Berechnen des Grenzwerte mit 0 identifizieren kann und
3. die Teilterme des Ausdrucks so umzuwandeln, dass sich Terme der Form $\lim_{x\to\infty} a$, $a \in \mathbb{R}$, ergeben, die man bei der Grenzwertberechnung mit a identifizieren kann.

Wir liefern für 2. und 3. ein erstes Beispiel (für 1. ein Beispiel später).

Beispiel 5.1.20. *Im folgenden Beispiel*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2+x}{1+2x}$$

geht sowohl der Nenner wie auch der Zähler für x gegen Unendlich. Wir können die obigen Regeln jedoch nur anwenden, wenn diese Ausdrücke gegen reelle Zahlen gingen. Wir können die

Anwendbarkeit der obigen Sätze (= Regeln) erreichen, indem wir mit $\frac{1}{x}$ erweitern:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{2+x}{1+2x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}(2+x)}{\frac{1}{x}(1+2x)}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+1}{\frac{1}{x}+2}\\ &= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2}{x}+1)}{\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{x}+2)}\\ &= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}1}{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}2}\\ &= \frac{0+1}{0+2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Die Gleichung $\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2}{x}+1)}{\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{x}+2)} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}1}{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}2}$ ist korrekt, weil $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}1$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}2\in\mathbb{R}$. Damit ist auch der Schritt $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+1}{\frac{1}{x}+2} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2}{x}+1)}{\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{x}+2)}$ gerechtfertigt, da damit $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2}{x}+1)$, $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{x}+2)\in\mathbb{R}$. Wir müssen die korrekte Anwendung der Regeln also teilweise „rückwärts" kontrollieren. ◊

Wir halten noch ohne Beweise fest:

Satz 5.1.21.

- *Für $a\in\mathbb{R}$:* $\lim\limits_{x\to\infty}a^x = \begin{cases}\infty & \text{für } a>1\\ 1 & \text{für } a=1\\ 0 & \text{für } 0<a<1\end{cases}$
- *Für $a\in\mathbb{R}$:* $\lim\limits_{x\to\infty}a^{-x} = \begin{cases}0 & \text{für } a>1\\ 1 & \text{für } a=1\\ \infty & \text{für } 0<a<1\end{cases}$
- *Wenn $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, dann $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)}=0$.*
- $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$
- *Für $a\in\mathbb{R}$:* $\lim\limits_{x\to\infty}\log_a x=\infty \quad (a>1) \quad$ *und* $\quad \lim\limits_{x\to\infty}\log_a x=-\infty \quad (0<a<1)$
- *Wenn $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ und $a\in\mathbb{R}$:, dann* $\lim\limits_{x\to\infty}(af(x)) = \begin{cases}\infty & \text{für } a>0\\ -\infty & \text{für } a<0\end{cases}$
- *Wenn $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$ und $a\in\mathbb{R}$, dann* $\lim\limits_{x\to\infty}(af(x)) = \begin{cases}\infty & \text{für } a<0\\ -\infty & \text{für } a>0\end{cases}$
- *Wenn $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ und $a\in\mathbb{R}$, dann $\lim\limits_{x\to\infty}(a+f(x))=\infty$*
- *Wenn $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$ und $a\in\mathbb{R}$, dann $\lim\limits_{x\to\infty}(a+f(x))=-\infty$*
- $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)^n) = \left(\lim\limits_{x\to\infty}f(x)\right)^n$ *($n\in\mathbb{N}$)*
- $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{g(x)} = \sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}g(x)}$ *(für $g(x)\geq 0$)*
- $\lim\limits_{x\to\infty}e^{f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}f(x)}$

- $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(f(x)) = \ln(\lim\limits_{x\to\infty} f(x))$ *(für $f(x) > 0$)*
- *Wenn* $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = -\infty$ *dann* $\lim\limits_{x\to\infty} a^{g(x)} = 0.$ $(a > 1, a \in \mathbb{R})$
- *Ist f ein Polynom $n-$ten Grades ($n > 0$), so gilt:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } a_n > 0 \\ -\infty & \text{für } a_n < 0 \end{cases}$$

5.1.2 Übungen

1. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:
   (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4-x}{2+x}$
   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(4 - \frac{8}{x}\right)$
   (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+3}{5x^2-1}$
   (d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+3}{x^2+3}$
   (e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2-11x-20}{3x+4}$
   (f) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{20x^2-7x-6}{4x-3}$
   (g) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{21x^2-6x-5}{3x-3}$
   (h) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{210x^3-34x^2-80x+24}{7x-3}$

2. Für das Gesamteinkommen eines expandierenden Wirtschaftszweiges sagt man folgenden Entwicklungspfad voraus: (t = 0 der augenblickliche Zeitpunkt):
   $Y(t) = \frac{210}{0.1+20e^{-0.5t}}$
   Beschreiben Sie das Verhalten der Funktion für t gegen Unendlich.
   Wie interpretieren Sie den Grenzwert der Funktion ökonomisch?

3. Der Konsum C von Lebensmitteln in einem Haushalt sei eine Funktion des Einkommens Y des Haushaltes: $C(Y) = \frac{40Y-140}{Y+8}$, $Y > 0$. Bestimmen Sie den Grenzwert für Y gegen Unendlich.

4. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:
   (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3-\frac{1}{x}}{5-\frac{2}{x^2}}$
   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-\frac{5}{x}}$
   (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{6x^3+4x^2-7}{x^3+x}$
   (d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{-a-b}{2x+d}\right)^3$

5.1.3 Lösungen

1. Man erhält:
   (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4-x}{2+x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}(4-x)}{\frac{1}{x}(2+x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{4}{x}-\frac{x}{x}}{\frac{2}{x}+\frac{x}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{4}{x}-1}{\frac{2}{x}+1} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4}{x}-1\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}+1\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x} - \lim\limits_{x\to\infty} 1}{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x} + \lim\limits_{x\to\infty} 1} = \frac{4\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-1}{2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+1} = \frac{(4\cdot 0)-1}{(2\cdot 0)+1} = -1$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(4-\frac{8}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}4-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8}{x}=4-8\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=4-(8\cdot 0)=4$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{5x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x^2}}{5-\frac{1}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{3}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5-\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}2+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}5-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}=$
$\frac{2+3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{5-0}=\frac{2+(3\cdot 0)}{5}=\frac{2}{5}$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x^2+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{3}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}}=$
$\frac{2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{1+3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}=\frac{(2\cdot 0)+(3\cdot 0)}{1+(3\cdot 0)}=0$

(e) Lässt sich der Nenner wegkürzen, muss man den Zähler so faktorisieren können, dass der Nenner als Faktor auftaucht. Entsprechend berechnen wir die folgende Polynomdivision:

$$\begin{array}{r} \left(\quad 3x^2-11x-20\right):\left(3x+4\right)=x-5 \\ \underline{-\,3x^2\;\;-4x} \\ -15x-20 \\ \underline{\;\;15x+20} \\ 0 \end{array}$$

Damit gilt: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-11x-20}{3x+4}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3x+4)(x-5)}{3x+4}=\lim\limits_{x\to\infty}(x-5)=\infty$

(f)
$$\begin{array}{r} \left(\quad 20x^2\;\;-7x-6\right):\left(4x-3\right)=5x+2 \\ \underline{-\,20x^2+15x} \\ 8x-6 \\ \underline{-\,8x+6} \\ 0 \end{array}$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{20x^2-7x-6}{4x-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(4x-3)(5x+2)}{4x-3}=\lim\limits_{x\to\infty}(5x+2)=\infty$

(g)
$$\begin{array}{r} \left(\quad 21x^2\;\;-6x\;\;-5\right):\left(3x-3\right)=7x+5+\dfrac{10}{3x-3} \\ \underline{-\,21x^2+21x} \\ 15x\;\;-5 \\ \underline{-\,15x+15} \\ 10 \end{array}$$

Da der Zähler nicht durch $3x-3$ ohne Rest teilbar ist, können wir mit den eingeführten Methoden den Grenzwert nicht berechnen.

(h)
$$\begin{array}{r} \left(\quad 210x^3-34x^2-80x+24\right):\left(7x-3\right)=30x^2+8x-8 \\ \underline{-\,210x^3+90x^2} \\ 56x^2-80x \\ \underline{-\,56x^2+24x} \\ -56x+24 \\ \underline{\;\;56x-24} \\ 0 \end{array}$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{210x^3-34x^2-80x+24}{7x-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(30x^2+8x-8\right)(7x-3)}{7x-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(30x^2+8x-8\right)=\infty$

2. $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{210}{0.1+20e^{-0.5t}}=\frac{\lim\limits_{t\to\infty}210}{\lim\limits_{t\to\infty}(0.1+20e^{-0.5t})}=\frac{210}{\lim\limits_{t\to\infty}0.1+\lim\limits_{t\to\infty}20e^{-0.5t}}=$
$\frac{210}{0.1+20\lim\limits_{t\to\infty}e^{-0.5t}}=\frac{210}{0.1+(20\cdot 0)}=2100$

3. $\lim\limits_{Y\to\infty}\frac{40Y-140}{Y+8}=\lim\limits_{Y\to\infty}\frac{40-\frac{140}{Y}}{1+\frac{8}{Y}}=\frac{\lim\limits_{Y\to\infty}\left(40-\frac{140}{Y}\right)}{\lim\limits_{Y\to\infty}\left(1+\frac{8}{Y}\right)}=\frac{\lim\limits_{Y\to\infty}40-\lim\limits_{Y\to\infty}\frac{140}{Y}}{\lim\limits_{Y\to\infty}1+\lim\limits_{Y\to\infty}\frac{8}{Y}}=$
$\frac{40-140\lim\limits_{Y\to\infty}\frac{1}{Y}}{1+8\lim\limits_{Y\to\infty}\frac{1}{Y}}=\frac{40-(140\cdot 0)}{1+(8\cdot 0)}=40$

4. Man erhält:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3-\frac{1}{x}}{5-\frac{2}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\frac{1}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5-\frac{2}{x^2}\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 3-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty} 5-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}} = \frac{3-0}{5-2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}} = \frac{3}{5-(2\cdot 0)} = \frac{3}{5}$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-\frac{5}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}-\frac{5}{x}} = e^{-5\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}} = e^{-5\cdot 0} = e^0 = 1$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{6x^3+4x^2-7}{x^3+x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3\left(6+\frac{4}{x}-\frac{7}{x^3}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{6+\frac{4}{x}-\frac{7}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(6+\frac{4}{x}-\frac{7}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 6+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty} 1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}} = \frac{6+4\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-7\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}{1+0} = \frac{6+(4\cdot 0)-(7\cdot 0)}{1+0} = \frac{6+0-0}{1} = 6$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-a-b}{2x+d}\right)^3 = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-\frac{a}{x}-\frac{b}{x}}{2+\frac{d}{x}}\right)^3 = \left(\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-\frac{a}{x}-\frac{b}{x}}{2+\frac{d}{x}}\right)^3 = \left(\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{a}{x}-\frac{b}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{d}{x}\right)}\right)^3 = \left(\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{a}{x}\right)-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{b}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty} 2+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{d}{x}}\right)^3 = \left(\frac{-a\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-b\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}{2+d\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}\right)^3 = \left(\frac{(-a\cdot 0)-(b\cdot 0)}{2+(d\cdot 0)}\right)^3 = \left(\frac{0-0}{2+0}\right)^3 = 0$

5.2 Der Grenzwert einer Funktion für $x \to -\infty$

Definition 5.2.1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$ *genau dann, wenn es für jedes* $k > 0$ *ein* x' *gibt, so dass für alle* x *gilt: wenn* $x < x'$*, dann* $|f(x) - a| < k$.
($f : D \to \mathbb{R}$ *ist eine reelle Funktion;* D *ist nach links unbeschränkt;* $x, x' \in D; a \in \mathbb{R}$). ◊

Diese Definition entspricht der *Definition 5.1.2*. Nur die Richtung des Relationszeichens im Ausdruck „$x < x'$“ hat gewechselt.

Wir betrachten ein Beispiel:

Beispiel 5.2.2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = y = \frac{2x-1}{x}$ $(x < 0)$. $f(x)$ *nähert sich* 2, *wenn* x *kleiner wird* $(x < 0)$. *Wir schreiben:* $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{x} = 2$. *(s. Abbildung 5.2.9).*

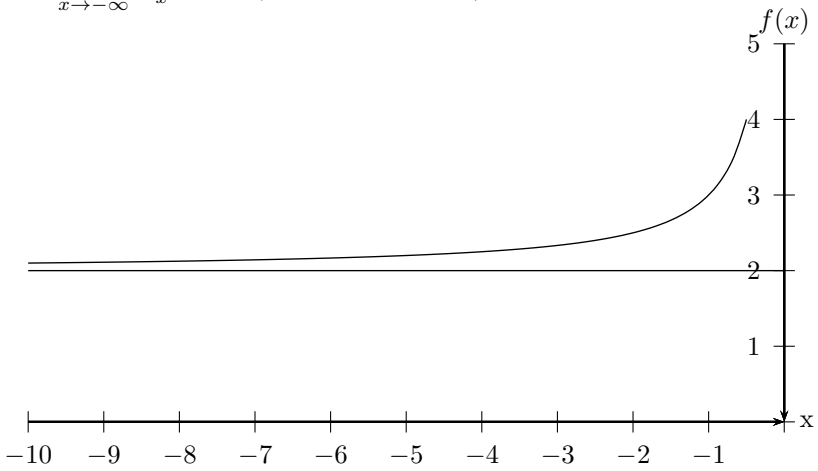


Abbildung 5.2.9: Beispiel einer Funktion mit reellem Grenzwert für $x \to -\infty$

◊

Um den Grenzwert für $x \to -\infty$ zu berechnen, wenden wir wiederum Sätze an. Meistens gelten die im vorigen Unterkapitel erwähnten Sätze. Manche müssen entsprechend umformuliert werden. Überlegen Sie sich, welche Sätze nach welcher Umformulierung gelten.

Wenn wir im Beispiel 5.2.9 den Definitionsbereich auf $\mathbb{R}$ erweitern, stellen wir fest:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{x} = 2$$

Dies ist nicht für alle Funktionen gültig, wobei das folgende Beispiel eine besondere rechnerische Tücke in sich birgt:

Beispiel 5.2.3. $f(x) = \frac{2x+\sqrt{x^2+1}}{x}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{2x+\sqrt{x^2+1}}{x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x} + \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}{\frac{x}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}{1} \\
&= \lim_{x\to\infty} \left(2+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} 2 + \lim_{x\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 2+\sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} \\
&\quad 2+\sqrt{\lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}} \\
&= 2+\sqrt{1+0} = 2+1 = 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+\sqrt{x^2+1}}{x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2x}{x} + \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}{\frac{x}{x}} \overset{*}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2-\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}{1} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \left(2-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) \\
&= \lim_{x\to-\infty} 2 - \lim_{x\to-\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 2-\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} \\
&= 2-\sqrt{\lim_{x\to-\infty} 1 + \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}} \\
&= 2-\sqrt{1+0} = 2-1 = 1
\end{aligned}$$

(s. Abbildung 7.3.4). (Bemerkung zum Übergang von der zweiten zur dritten Gleichung: für $x < 0$ gilt: $-\sqrt{x^2} = x$)*

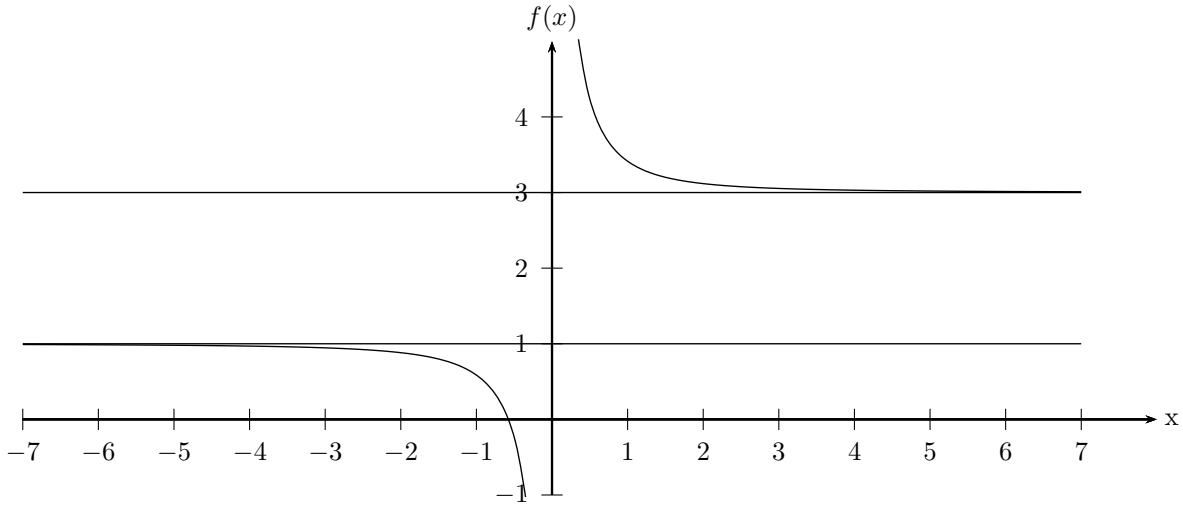


Abbildung 5.2.10: Beispiel einer Funktion mit unterschiedlichen Grenzwerten für $x \to \infty$ und für $x \to -\infty$

◊

Auch für $x \to -\infty$ kann f entweder gegen $-\infty$ oder gegen ∞ gehen:

Definition 5.2.4. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ *genau dann, wenn es für jedes* $k > 0$ *ein* x' *gibt, so dass für alle* $x < x'$ *gilt:* $f(x) > k$.
($f : D \to \mathbb{R}$ *ist eine reelle Funktion;* $x, x' \in D$). ◊

Definition 5.2.5. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ *genau dann, wenn es für jedes* $k < 0$ *ein* x' *gibt, so dass für alle* $x < x'$ *gilt:* $f(x) < k$.
($f : D \to \mathbb{R}$ *ist eine reelle Funktion;* $x, x' \in D$). ◊

Beispiel 5.2.6. $f(x) = x^3$ *geht für* $x \to -\infty$ *gegen* $-\infty$, *während* $f(x) = -x^3 + 3$ *für* $x \to -\infty$ *gegen* ∞ *geht(s. Abbildung 5.2.11).*

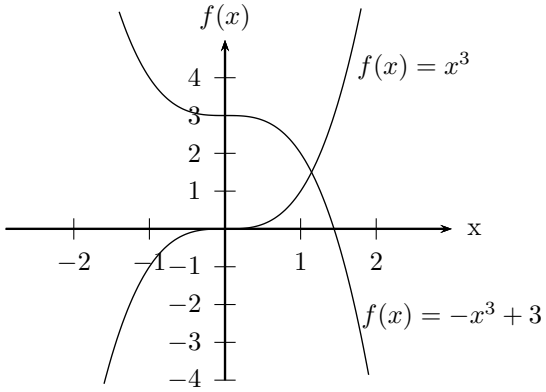


Abbildung 5.2.11: Beispiele für das Verhalten von Funktionen für $x \to \infty$ und für $x \to -\infty$

Satz 5.2.7. *Ist f ein Polynom $n-$ten Grades $(n > 0)$, so gilt:*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } a_n > 0 \text{ und } n \text{ gerade} \\ -\infty & \text{für } a_n < 0 \text{ und } n \text{ gerade} \\ -\infty & \text{für } a_n > 0 \text{ und } n \text{ ungerade} \\ \infty & \text{für } a_n < 0 \text{ und } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

◊

5.3 Grenzwert einer Funktion f für $x \to x_0$

Um das Verhalten von Funktionen im Inneren eines bestimmten Intervalls zu untersuchen oder in der Umgebung eines bestimmten Punktes x_0, brauchen wir den Begriff des Grenzwertes einer Funktion f für $x \to x_0$. Wir definieren zuerst den eben verwendeten Begriff der Umgebung.

Definition 5.3.1. *Unter Umgebung eines Punktes x_0 verstehen wir ein Intervall $]x_0 - k; x_0 + k[$ mit $k > 0$. Man schreibt für eine Umgebung von x_0 : $U(x_0)$ oder $U_k(x_0)$.*

◊

Definition 5.3.2. *$x_0 \in \mathbb{R}$ ist ein Häufungspunkt einer Menge $D \subset \mathbb{R}$ genau dann, wenn es in jeder Umgebung von x_0 ein $x \in D$ gibt.*

◊

Nun können wir zur (nicht ganz einfach zu durchschauenden) Definition eines Grenzwertes von $f : D \to \mathbb{R}$ für $x \to x_0$ übergehen. Sie drückt aus, dass in einer beliebig kleinen

Beispiel 5.3.3. *$5 \notin]5, 10]$, aber $V_r(5) =]5 - r; 5 + r[\cap]5, 10] \neq \emptyset$ für alle $r > 0$. Entsprechend ist 5 ein Häufungspunkt von $]5, 10]$, ohne Element dieser Menge zu sein.* ◊

Umgebung von x_0 die Funktionswerte $f(x)$ beliebig nahe an den Grenzwert a herankommen.

Definition 5.3.4. $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ *genau dann, wenn es für jedes $k > 0$ ein $r > 0$ gibt, so dass für alle x mit $0 < |x_0 - x| < r$ gilt: $|f(x) - a)| < k$*
($f : D \to \mathbb{R}$ ist eine reelle Funktion; $x \in D; a \in \mathbb{R}$; x_0 ist ein Häufungspunkt von D; x_0 kann, muss aber nicht, Element von D sein; $k, r > 0; k, r \in \mathbb{R}$).

◊

Bemerkung 5.3.5. *Die Bedingung $0 < |x_0 - x| < r$ ist äquivalent mit $x_0 - r < x < x_0 + r$ für $x \neq x_0$.* ◊

Um das Funktionieren der Definition graphisch darzustellen, betrachten wir ein Beispiel:

Beispiel 5.3.6. *Wir gehen von der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 3$ aus, für die gilt $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$ (s. Abbildung 5.3.12).*

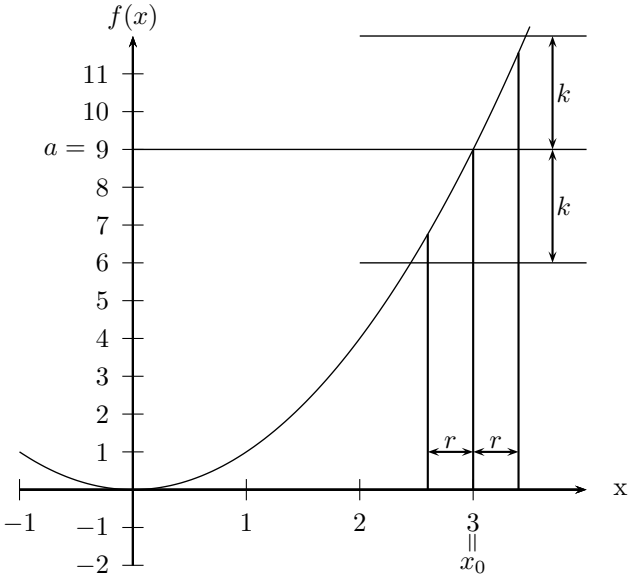


Abbildung 5.3.12: Für $k > 0$ gibt es ein $r > 0$, so dass $|f(x) - a| < k$ für $|x - x_0| < r$

◊

Bemerkung 5.3.7. *x_0 kann im Definitionsbereich D enthalten sein oder nicht.* ◊

Bemerkung 5.3.8. *Mit Hilfe des Umgebungsbegriffs (s. Definition 5.3.1) kann man die Definition 5.3.4 wie folgt äquivalent umformulieren: $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ genau dann, wenn es für jede Umgebung $U(a)$ eine Umgebung $U(x_0)$ gibt, so dass für alle $x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$ gilt: $f(x) \in U(a)$.* ◊

Bemerkung 5.3.9. *Während eine Funktion nur höchstens je einen Grenzwert für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ aufweist, kann eine Funktion in jedem $x_0 \in \mathbb{R}$ einen Grenzwert für $x \to x_0$ haben! Für $y = x^2$ kann man sogar behaupten, dass für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\lim_{x \to x_0} x^2 = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = x_0^2$$

(z.B. $\lim_{x \to 4} x^2 = 16 = 4^2$; $\lim_{x \to 11} x^2 = 121 = 11^2$). Deshalb könnte man etwas vorschnell auf Grund unseres Beispiels $y = x^2$ schliessen, dass der Ausdruck $\lim_{x \to x_0} f(x)$ witzlos sei. Die Behauptung $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ist allerdings kein allgemeingültiger Satz, sondern gilt nur für manche Funktionen und für viele Funktionen nur in manchen Bereichen. Betrachten wir ein konkretes Gegenbeispiel: Für $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-2}$, gilt $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-3x+2}{x-2} = 1$, obwohl $f(2)$ gar nicht existiert (denn die Division durch 0 $(= 2 - 2)$ ist nicht definiert und deshalb $2 \notin D$). Die Funktion $f(x)$ hat in $x = 2$ eine Lücke. Trotz dieses Umstandes kann man für jedes $k > 0$ ein $r > 0$ finden, so dass gilt: wenn $|2 - x| < r$,dann $|f(x) - 1| < k$. Deshalb hat die Funktion f für $x \to x_0$ in $x_0 = 2$ den Grenzwert 1. Wir werden in der Folge weitere Beispiele sehen. ◊

Bemerkung 5.3.10. *Es lohnt sich an Funktionen, die für ein x_0 keinen Grenzwert für x gegen x_0 aufweisen, zu zeigen, wie die Definition funktioniert und zur Verwerfung der Aussage führt, dass dort ein Grenzwert vorliegt (s. Abbildungen 5.3.13 und 5.3.14).*

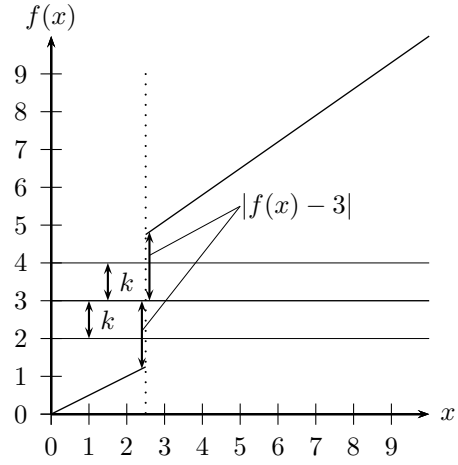


Abbildung 5.3.13: In x_0=2.5 gibt es für die zusammengesetzte Funktion $f(x) = 0.5x$ in $[0, 2.5]$ und $f(x) = 0.7x + 3$ in $]2.5, \infty[$ keinen Grenzwert für x gegen 2.5, da für genügend kleine k es keine r gibt, so dass für alle x mit $|x - x_0| < r$ $|f(x) - 3| < k$, denn es gilt dann $|f(x) - 3| > k$. Das gilt für beliebige hypothetische Grenzwerte zwischen 1.25 und 4.75 und erst recht für Werte ausserhalb dieses Intervalls.

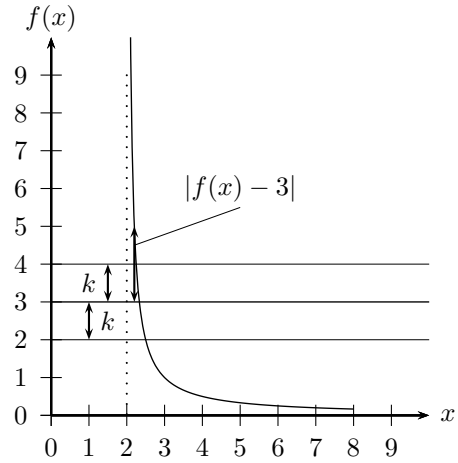


Abbildung 5.3.14: In $x_0 = 2$ gibt es für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x-2}$ keinen reellen Grenzwert für x gegen 2, da für genügend kleine k es keine r gibt, so dass für alle x mit $|x - x_0| < r$ $|f(x) - 3| < k$, denn es gilt dann $|f(x) - 3| > k$. Das gilt für beliebige hypothetische Grenzwerte.

◊

Wie in Bezug auf die Grenzwerte für $x \to \infty$ und für $x \to -\infty$ verwenden wir Sätze, um den Grenzwert für $x \to x_0$ in x_0 der Funktion f zu berechnen. Wegen der Wichtigkeit der Sätze für die künftigen Entwicklungen werden die Beweise der Sätze 5.3.11 bis 5.3.19 im letzten Unterkapitel geliefert.

Satz 5.3.11. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ *für* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x), \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \in \mathbb{R}$

Satz 5.3.12. $\lim\limits_{x\to x_0} (bf(x) = b \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *für* $b, \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$

Satz 5.3.13. $\lim\limits_{x\to x_0} a = a$ *(für* $a \in \mathbb{R}$*)*

Satz 5.3.14. $\lim\limits_{x\to x_0} fg\,(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \lim\limits_{x\to x_0} g\,(x)$ *für* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x), \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \in \mathbb{R}$

Satz 5.3.15. $\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n$ *für* $x, x_0 \in \mathbb{R}$ *und* $n \in \mathbb{N}^*$

Aus diesen Sätzen folgt, dass für Polynome $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$.

Satz 5.3.16. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$ *für* $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$ *und* $\lim_{x\to x_0} f(x), \lim_{x\to x_0} g(x) \in \mathbb{R}$.

Satz 5.3.17. *Sei* f *bijektiv,* $x_0 \in \mathbb{R}$ *und* $\lim_{x\to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$, *dann ist* $\lim_{y\to a} f^{-1}(y) = x_0$.

Satz 5.3.18. $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ *gilt für Exponentialfunktionen auf* $\mathbb{R}$, *für rationale Funktionen im Inneren ihres Definitionsbereichs sowie für Wurzel- und Logarithmusfunktionen auf* $]0, \infty[$.

Satz 5.3.19. *Wenn* $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ *und* $\lim_{x\to a} g(x) = b$, *dann* $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = b$, *für* $a, b \in \mathbb{R}$ *(Kettenregel)*

Satz 5.3.20. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{h\to 0} f(x_0 + h)$

Wenn x gegen x_0 geht, können wir ebenso gut schreiben, dass die Differenz $h := x - x_0$ gegen 0 geht. Deshalb kann man in den Formeln „x“ durch „$x_0 + h$“ ersetzen, um den Grenzwert für $x \to x_0$ zu berechnen, indem man den Grenzwert für $h \to 0$ berechnet. Dies wird in vielen Lehrbüchern gemacht, wobei für h oft Δ verwendet wird (= delta für Differenzen)

Ein Berechnungsbeispiel:

Beispiel 5.3.21. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-1)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x-1) = \lim_{x\to 2} x - \lim_{x\to 2} 1 = 2 - 1 = 1$
Es muss betont werden, dass die Verteilung des Ausdrucks $\lim_{x\to 2}$ *auf den ersten Bruch nicht zum Ziel führt, da* $\lim_{x\to 2}(x-2) = \lim_{x\to 2} x - \lim_{x\to 2} 2 = 2 - 2 = 0$ *und eine Division durch* 0 *nicht definiert ist. Für die selbe Funktion kann sich für ein spezifisches* x_0 *eine Berechnung aufdrängen, die für ein anderes* x_0 *unnötig ist:*
$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-3x+2}{x-2} = \frac{\lim_{x\to 3}(x^2-3x+2)}{\lim_{x\to 3}(x-2)} = \frac{\lim_{x\to 3} x^2 - \lim_{x\to 3} 3x + \lim_{x\to 3} 2}{\lim_{x\to 3} x - \lim_{x\to 3} 2} =$
$\frac{9-3\lim_{x\to 3} x+2}{3-2} = \frac{9-3\cdot 3+2}{1} = 2$ ◊

5.3.1 Übungen

Finden Sie die folgenden Grenzwerte:

1. $\lim_{x\to 3} \frac{5x^3-4}{x^2}$
2. $\lim_{y\to 12} \frac{2y+1}{5y^5-y}$
3. $\lim_{y\to \infty} \frac{2y+1}{5y^5-y}$
4. $\lim_{y\to -\infty} \frac{2y+1}{5y^5-y}$ (fakultativ)
5. $\lim_{x\to 5} \frac{x^3}{8}$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{8}$
7. $\lim_{x\to \infty} \frac{8}{x^3}$
8. $\lim_{x\to 5} \frac{8}{x^3}$

9. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{8}{x^3}$
10. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+3x-4}{2x^2-9x+7}$
11. $\lim\limits_{x\to\frac{4}{5}}\frac{3x+8}{15x^2+28x-32}$
12. $\lim\limits_{x\to3}\frac{15x^2+28x-32}{3x+8}$
13. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\frac{168x^3+206x^2-30x-8}{56x^2-6x-2}$
14. $\lim\limits_{x\to2}\frac{168x^3+206x^2-30x-8}{56x^2-6x-2}$

5.3.2 Lösungen

1. $\lim\limits_{x\to3}\frac{5x^3-4}{x^2}=\frac{\lim\limits_{x\to3}\left(5x^3-4\right)}{\lim\limits_{x\to3}x^2}=\frac{\lim\limits_{x\to3}5x^3-\lim\limits_{x\to3}4}{9}=\frac{5\lim\limits_{x\to3}x^3-4}{9}=\frac{(5\cdot27)-4}{9}=\frac{131}{9}$
2. $\lim\limits_{y\to12}\frac{2y+1}{5y^5-y}=\frac{\lim\limits_{y\to12}(2y+1)}{\lim\limits_{y\to12}(5y^5-y)}=\frac{\lim\limits_{y\to12}2y+\lim\limits_{y\to12}1}{\lim\limits_{y\to12}5y^5-\lim\limits_{y\to12}y}=\frac{2\lim\limits_{y\to12}y+1}{5\lim\limits_{y\to12}y^5-12}=$
$\frac{(2\cdot12)+1}{(5\cdot12^5)-12}=\frac{25}{1244\,148}$
3. $\lim\limits_{y\to\infty}\frac{2y+1}{5y^5-y}=\lim\limits_{y\to\infty}\frac{\frac{2}{y^4}+\frac{1}{y^5}}{5-\frac{1}{y^4}}=\frac{\lim\limits_{y\to\infty}\left(\frac{2}{y^4}+\frac{1}{y^5}\right)}{\lim\limits_{y\to\infty}\left(5-\frac{1}{y^4}\right)}=\frac{\lim\limits_{y\to\infty}\frac{2}{y^4}+\lim\limits_{y\to\infty}\frac{1}{y^5}}{\lim\limits_{y\to\infty}5-\lim\limits_{y\to\infty}\frac{1}{y^4}}=$
$\frac{2\lim\limits_{y\to\infty}\frac{1}{y^4}+0}{5-0}=\frac{(2\cdot0)+0}{5-0}=0$
4. $\lim\limits_{y\to-\infty}\frac{2y+1}{5y^5-y}=\lim\limits_{y\to-\infty}\frac{\left(\frac{2}{y^4}\right)+\left(\frac{1}{y^5}\right)}{5-\left(\frac{1}{y^4}\right)}=\frac{\lim\limits_{y\to-\infty}\left(\frac{2}{y^4}+\frac{1}{y^5}\right)}{\lim\limits_{y\to-\infty}\left(5-\frac{1}{y^4}\right)}=$
$\frac{\lim\limits_{y\to-\infty}\left(\frac{2}{y^4}\right)+\lim\limits_{y\to-\infty}\left(\frac{1}{y^5}\right)}{\lim\limits_{y\to-\infty}5-\lim\limits_{y\to-\infty}\left(\frac{1}{y^4}\right)}=\frac{2\lim\limits_{y\to-\infty}\left(\frac{1}{y^4}\right)+0}{5-0}=\frac{(2\cdot0)}{5}=0$
5. $\lim\limits_{x\to5}\frac{x^3}{8}=\frac{1}{8}\lim\limits_{x\to5}x^3=\frac{1}{8}5^3=\frac{125}{8}$
6. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3}{8}=\frac{1}{8}\lim\limits_{x\to0}x^3=\frac{1}{8}0^3=0$
7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8}{x^3}=8\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}=8\cdot0=0$
8. $\lim\limits_{x\to5}\frac{8}{x^3}=8\lim\limits_{x\to5}\frac{1}{x^3}=8\frac{\lim\limits_{x\to5}1}{\lim\limits_{x\to5}x^3}=8\frac{1}{5^3}=\frac{8}{125}$
9. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{8}{x^3}=8\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}=0$
10. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+3x-4}{2x^2-9x+7}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x+4)(x-1)}{(2x-7)(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x+4)}{(2x-7)}=\frac{\lim\limits_{x\to1}(x+4)}{\lim\limits_{x\to1}(2x-7)}=\frac{\lim\limits_{x\to1}x+\lim\limits_{x\to1}4}{\lim\limits_{x\to1}2x-\lim\limits_{x\to1}7}=$
$\frac{1+4}{2\lim\limits_{x\to1}x-7}=\frac{5}{(2\cdot1)-7}=-1$
11. Beim Einsetzen von $\frac{4}{5}$ würde eine Division durch 0 erfolgen. Wir versuchen den Nenner zu faktorisieren, um zu kürzen.

$$\begin{array}{l}\left(\quad 15x^2+28x-32\right):\left(3x+8\right)=5x-4\\ \underline{-\,15x^2-40x}\\ \qquad\quad -\,12x-32\\ \qquad\quad \underline{12x+32}\\ \qquad\qquad\quad 0\end{array}$$

$\lim\limits_{x\to\frac{4}{5}} \frac{3x+8}{15x^2+28x-32} = \lim\limits_{x\to\frac{4}{5}} \frac{3x+8}{(5x-4)(3x+8)} = \lim\limits_{x\to\frac{4}{5}} \frac{1}{5x-4}$. $5 \cdot \frac{4}{5} - 4 = 0$. Mit den eingeführten Methoden gibt es keine Lösung.

12. $3 \cdot 3 + 8 = 17$. Wir können damit mittels Überspringen einiger Regeln unmittelbar einsetzen: $\lim\limits_{x\to 3} \frac{15x^2+28x-32}{3x+8} = \frac{15\cdot 3^2+28\cdot 3-32}{3\cdot 3+8} = 11$

13. Beim Einsetzung von $\frac{1}{4}$ in den Nenner gilt: $56 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 6 \cdot \frac{1}{4} - 2 = 0$
Wir versuchen zu faktorisieren:
$$\begin{array}{l} \left(\quad 168x^3 + 206x^2 - 30x - 8\right) : \left(56x^2 - 6x - 2\right) = 3x + 4 \\ \underline{-\,168x^3 \quad +\,18x^2 \quad +\,6x} \\ \qquad\qquad 224x^2 - 24x - 8 \\ \qquad\qquad \underline{-\,224x^2 + 24x + 8} \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$
Damit gilt $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}} \frac{168x^3+206x^2-30x-8}{56x^2-6x-2} = \lim\limits_{x\to\frac{1}{4}} \frac{\left(56x^2-6x-2\right)(3x+4)}{56x^2-6x-2} = \lim\limits_{x\to\frac{1}{4}} (3x+4) = \frac{19}{4}$

14. $56 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 - 2 = 210$. Wir können damit mittels Überspringen einiger Regeln einsetzen: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{168x^3+206x^2-30x-8}{56x^2-6x-2} = \frac{168\cdot 2^3+206\cdot 2^2-30\cdot 2-8}{56\cdot 2^2-6\cdot 2-2} = 10$

5.4 Rechts- und linksseitige Grenzwerte für $x \to x_0$

Eine Funktion kann nicht nur für $x \to \infty$, sondern auch für $x \to x_0$ gegen Unendlich gehen.

Beispiel 5.4.1. *Die Funktion $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ geht für $x \to 2$ gegen Unendlich (s. Abbildung 5.4.15).*

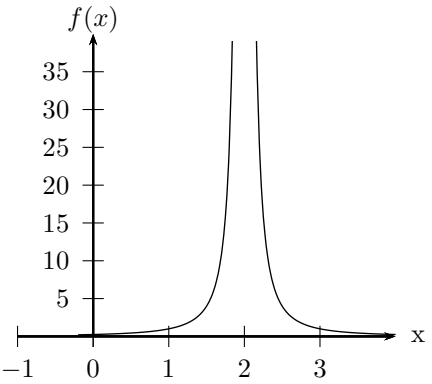


Abbildung 5.4.15: Beispiel einer Funktion, die für x gegen $x_0 = 2$ gegen Unendlich geht

◊

Zudem kann die Funktion ein unterschiedliches Verhalten rechts und links eines Punktes x_0, für $x \to x_0$ aufweisen:

Beispiel 5.4.2. *Die Funktion $f(x) = \frac{1}{(x-2)^3}$ geht gegen $-\infty$, wenn man sich 2 von links her nähert, und gegen ∞, wenn man sich 2 von rechts her nähert (s. Abbildung 5.4.16).*

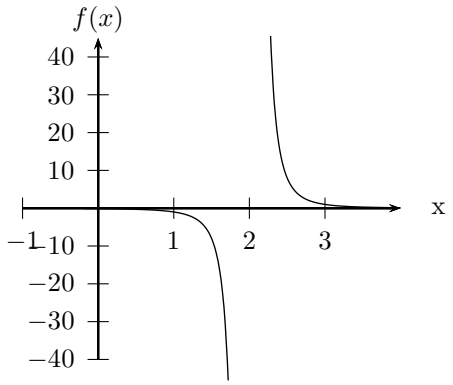


Abbildung 5.4.16: Beispiel einer Funktion, die für x gegen $x_0 = 2$ von links und von rechts unterschiedliches Verhalten aufweist

$\Diamond$

Um solches Verhalten aufzudecken, brauchen wir die Begriffe des rechts- und des linksseitigen Grenzwertes.

Definition 5.4.3. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a$ *genau dann, wenn es für jedes* $k > 0$ *ein* $r > 0$ *gibt, so dass: wenn* $0 < x - x_0 < r$, *dann* $|f(x) - a| < k$.
($f : D \to \mathbb{R}$ *ist eine reelle Funktion;* $x \in D; a \in \mathbb{R}$; x_0 *ist ein Häufungspunkt von* $D \cap \{x | x > x_0\}$, x_0 *kann Element von* D *sein, muss aber nicht).* $\Diamond$

" $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a$" liest man: „der rechtsseitige Grenzwerte von f für x gegen x_0 ist mit a identisch." oder „$f(x)$ geht gegen a für x von rechts her (von oben) gegen x_0".

Definition 5.4.4. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = a$ *genau dann, wenn es für jedes* $k > 0$ *ein* $r > 0$ *gibt, so dass: wenn* $0 < x_0 - x < r$, *dann* $|f(x) - a| < k$.
($f : D \to \mathbb{R}$ *ist eine reelle Funktion;* $x \in D; a \in \mathbb{R}$; x_0 *ist ein Häufungspunkt von* $D \cap \{x | x < x_0\}$, x_0 *ist Element von* D *oder nicht).* $\Diamond$

" $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = a$" liest man „der linksseitige Grenzwert von f für x gegen x_0 ist mit a identisch" oder als „$f(x)$ geht gegen a für x von links her (von unten) gegen x_0".

Definition 5.4.5. *Für* $f : D \to \mathbb{R}$ *ist eine reelle Funktion;* $x \in D$, x_0 *ist bei* $x \to x_0^-$ *ein Häufungspunkt von* $D \cap \{x | x < x_0\}$, *bei* $x \to x_0^+$ *ein Häufungspunkt von* $D \cap \{x | x > x_0\}$ *und ist Element von* D *oder nicht:*

- $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$ *genau dann, wenn es für jedes* $k > 0$ *ein* $r > 0$ *gibt, so dass: wenn* $0 < x - x_0 < r$, *dann* $f(x) > k$.

- $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$ *genau dann, wenn es für jedes* $k < 0$ *ein* $r > 0$ *gibt, so dass: wenn* $0 < x - x_0 < r$, *dann* $f(x) < k$.

- $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$ *genau dann, wenn es für jedes* $k > 0$ *ein* $r > 0$ *gibt, so dass: wenn* $0 < x_0 - x < r$, *dann* $f(x) > k$.

- $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ *genau dann, wenn es für jedes* $k < 0$ *ein* $r > 0$ *gibt, so dass: wenn* $0 < x_0 - x < r$, *dann* $f(x) < k$.

$\Diamond$

Für den rechts- und linksseitigen Grenzwert von f für x gegen x_0, gelten zum Grenzwert für x gegen x_0 analoge Sätze.

Zudem können wir festhalten:

Satz 5.4.6. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = \infty$

Satz 5.4.7. $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{für gerades } n \\ -\infty & \text{für ungerades } n \end{cases}$

Satz 5.4.8. $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$ *für* $a > 1$ *und* $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = \infty$ *für* $0 < a < 1$.

Definition 5.4.9. *Das Innere der Intervalle* $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$ *ist* $]a, b[$. *Ist der Definitionsbereich einer Abbildung ein Intervall, ist das Innere des Definitionsbereichs das Innere dieses Intervalls. Besteht der Definitionsbereich aus mehreren Intervallen, so ist das Innere des Definitionsbereichs die Vereinigung des Inneren dieser Intervalle.* $\Diamond$

Satz 5.4.10. *Im Inneren des Definitionsbereichs einer Abbildung* f *gilt:* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *existiert genau dann, wenn* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ *und* $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ *existieren und* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$. *In diesem Falle gilt* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.

Beweis. (i) Wenn der links- und rechtsseitige Grenzwert in x_0 nicht identisch sind , gibt es nicht für jedes $k > 0$ ein $r > 0$, so dass: wenn $|x_0 - x| < r$, dann $|f(x) - a| < k$. Um ein k zu finden, für das es kein positives r gibt, so dass wenn $|x_0 - x| < r$, dann $|f(x) - a| < k$, genügt es ein genügend kleines k zu wählen: $k < \left| \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \right|$. Also existiert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ nicht. (ii) Existiert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, so folgt unmittelbar aus den entsprechenden Definitionen, dass $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$. $\square$

Bei Polynomen, rationalen Funktionen, Wurzelfunktionen, Exponential- und Logarithmusfunktionen sowie deren Verkettung fallen im Inneren des zulässigen Definitionsbereichs D gemäss Satz 5.3.18 der Funktionswert und der Grenzwert für $x_0 \in D$ zusammen. Mit dem Satz 5.4.10 gilt damit

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

Um die jeweiligen Grenzwerte in $x_0 \in D$ zu berechnen, genügt es entsprechend den Funktionswert der jeweiligen Funktion zu finden. Übungshalber werden in den Übungen aber trotzdem auch Grenzwerte für solche Funktionen in $x_0 \in D$ berechnet.

Für rationale Funktionen enthält der Definitionsbereich die eventuellen Nullstellen $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n$ des Nenners nicht und $f(x_i)$, $1 \leq i \leq n$, ist nicht definiert. Die Nullstellen x_i des Nenners sind Häufungspunkte von D, die nicht zu D gehören. Man muss $\lim\limits_{x \to x_i^-} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to x_i^+} f(x)$ berechnen, um zu wissen, ob die Grenzwerte reell sind oder nicht und um zu kontrollieren, ob der rechts- und der linksseitige Grenzwerte übereinstimmen oder nicht. Wenn sie übereinstimmen,

existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_i} f(x)$ (reell oder nicht), sonst nicht. Wenn z.B. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$, dann existiert $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ nicht!

Wie bei rationalen Funktionen verfährt man auch bei anderen Funktionstypen, die in einzelnen Häufungspunkten von D nicht definiert sind. (z. B. $f(x) = \frac{x}{|x|}$ mit dem Häufungspunkt 0 von D, der nicht Element des Definitionsbereichs von $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist).

Für intervallweise definierte Funktionen (s. Seite 151 ff.) muss man $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ für Zahlen x_0 berechnen, bei denen sich die Intervalle, auf denen die Funktionen definiert sind, berühren. Wenn beide Grenzwerte existieren und zusammenfallen, dann existiert $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ und ist mit $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ identisch. Wenn beide Grenzwerte nicht zusammenfallen, existiert $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ nicht (z.B. Wenn $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = 3$ und $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = 2$, existiert $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ nicht!).

Beispiel 5.4.11.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{für } x \geq 2 \\ \frac{1}{2}x + 1 & \text{für } x < 2 \end{cases}$$

2 *ist ein kritisches* x_0.
2 *ist ein Häufungspunkt und Element des Definitionsbereichs.*
$f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ *ist definiert.*
Existiert $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$?
Wir berechnen $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ *und* $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$*: links von* 2 *ist die Funktion definiert durch* $\frac{x}{2} + 1$*. Wir berechnen:* $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ *mit Hilfe der bekannten Sätze:* $\lim\limits_{x\to 2^-} (\frac{x}{2} + 1) = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x}{2} + \lim\limits_{x\to 2^-} 1 = \frac{1}{2} \lim\limits_{x\to 2^-} x + 1 = \left(\frac{1}{2} \cdot 2\right) + 1 = 2$
Rechts von 2 *ist die Funktion durch* $\frac{x}{2}$ *definiert. Wir rechnen:* $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \lim\limits_{x\to 2^+} x = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$.
Der rechts- und linksseitige Grenzwerte fallen nicht zusammen. Die untersuchte Funktion „springt" in $x_0 = 2$*:* $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ *existiert nicht (s. Abbildung 5.4.17).*

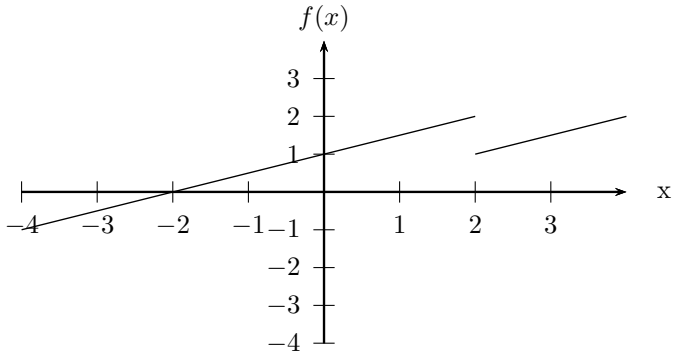


Abbildung 5.4.17: Beispiel für unterschiedliche links- und rechtsseitige Grenzwerte in 2 (Sprungstelle), wobei f in 2 definiert ist.

In jedem anderen Punkt x_0 *(ausser* $x_0 = 2$*) ist die Funktion beidseitig von* x_0 *durch jeweils dieselbe Teil-Funktion definiert und sie ist überall definiert. Gemäss den Regeln für diese Funktionstypen fallen die rechts- und linksseitigen Grenzwerte zusammen. Die Berechnung des rechts- und linksseitigen Grenzwertes führen jeweils zum selben Resultat, z.B.* $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) =$

$\lim_{x\to 3} f(x) = 2.5$. *Der Grenzwert* $\lim_{x\to 3} f(x)$ *existiert in diesem Punkt und fällt mit dem Funktionswert zusammen.* ◊

Wenn die Funktion in x_0 intervallweise definiert ist , kann $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$ trotzdem gelten:

Beispiel 5.4.12.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} 3x - 7 & \text{für } x \leq 3 \\ -4x + 14 & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

3 *ist ein kritisches* x_0.
3 *ist ein Häufungspunkt und Element des Definitionsbereichs.*
$f(3) = 3 \cdot 3 - 7 = 2$ *ist definiert.*
Wir wollen überprüfen, ob $\lim_{x\to 3} f(x)$ *existiert. Wir berechnen:*
$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (-4x + 14) = \lim_{x\to 3^+} (-4x) + \lim_{x\to 3^+} 14 = -4 \lim_{x\to 3^+} x + 14 = (-4 \cdot 3) + 14 = 2$
$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (3x - 7) = \lim_{x\to 3^-} (3x) - \lim_{x\to 3^-} 7 = 3 \lim_{x\to 3^-} x - 7 = (3 \cdot 3) - 7 = 2$
Man kann daraus schliessen: $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = 2 \Longrightarrow \lim_{x\to 3} f(x) = 2$ *existiert und* $f(3) = \lim_{x\to 3} f(x)$ *(s. Abbildung 5.4.18).*

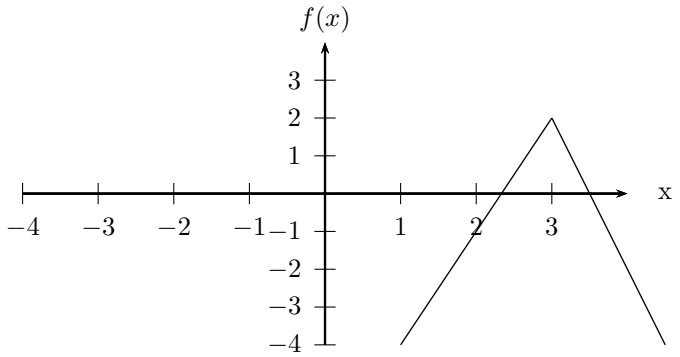


Abbildung 5.4.18: Beispiel für intervallweise definierte Funktion mit identischem links- und rechtsseitige Grenzwerte in 3, wobei f in 3 definiert ist.

◊

Beispiel 5.4.13. $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{|x|}{x}$. *Dies ist äquivalent mit*

$$f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} & \text{für } x > 0 \\ -\frac{x}{x} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

0 *ist ein kritisches* x_0.
0 *ist ein Häufungspunkt ohne Element des Definitionsbereichs zu sein.*
$f(0)$ *ist nicht definiert.*
Wir wollen überprüfen, ob $\lim_{x\to 0} f(x)$ *existiert.*
Wir rechnen: $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$ *und* $\lim_{x\to 0^-} \left(-\frac{x}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-} (-1) = -1$. *Die rechts- und linksseitigen Grenzwerte fallen in* $x_0 = 0$ *nicht zusammen.* $\lim_{x\to 0} f(x)$ *existiert nicht. Für jedes andere* x_0

ist die Funktion eine Konstante (also ein Polynom). Der links- und rechtsseitige Grenzwert sowie der Funktionswert fallen zusammen (s. Abbildung 5.4.19).

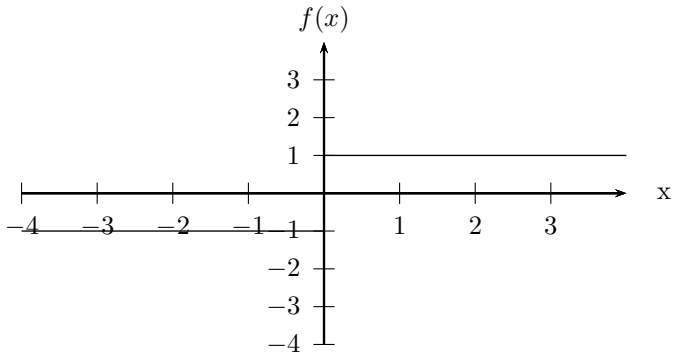


Abbildung 5.4.19: Beispiel für unterschiedliche links- und rechtsseitige Grenzwerte in 0 (Sprungstelle), wobei f in 0 nicht definiert ist.

◊

Beispiel 5.4.14.

$$f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

0 *ist ein kritisches* x_0.
0 *ist ein Häufungspunkt ohne Element des Definitionsbereichs zu sein.*
$f(0)$ *ist nicht definiert.*
Wir wollen wissen, ob $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ *existiert. Wir berechnen den links- und rechtsseitigen Grenzwert:*
$\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{x^2}\right) = \infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x^2}\right) = \infty$
Die Funktion weist in $x_0 = 0$ *den nicht reellen Grenzwert* ∞ *auf (s. Abbildung 5.4.20).*

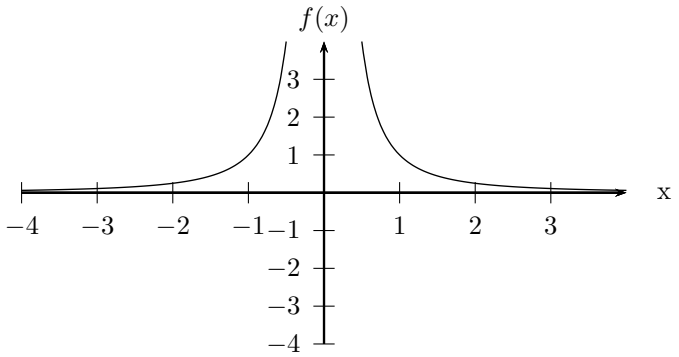


Abbildung 5.4.20: Beispiel für identische, aber nicht reelle, links- und rechtsseitige Grenzwerte in Unendlichkeitsstelle bei 0. Grenzwert in 0 ist ∞. f ist in 0 nicht definiert.

◊

Beispiel 5.4.15.

$$f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{8}{x^3}$$

0 *ist ein kritisches* x_0.
0 *ist ein Häufungspunkt ohne Element des Definitionsbereichs zu sein.*
$f(0)$ *ist nicht definiert.*
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{8}{x^3}$ *ist in* $x = 0$ *nicht definiert, denn:*
$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{8}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(8\frac{1}{x^3}\right) = -\infty$ *und* $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{8}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(8\frac{1}{x^3}\right) = \infty$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{8}{x^3}$ *existiert also nicht (s. Abbildung 5.4.21).*

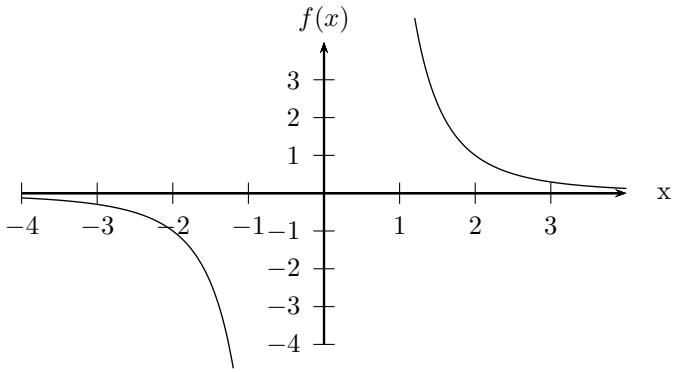


Abbildung 5.4.21: Beispiel für unterschiedliche links- und rechtsseitige Grenzwerte in 0 (Unendlichkeitsstelle). f ist in 0 nicht definiert, ebensowenig der Grenzwert.

◊

Beispiel 5.4.16.

$$f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$f(x)$ *ist nicht definiert in* $x = 1$. *Um zu überprüfen, ob* $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ *definiert ist, berechnen wir:*
$\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} (x+1) = \lim\limits_{x\to 1^+} x + \lim\limits_{x\to 1^+} 1 = 1 + 1 = 2$
$\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} (x+1) = \lim\limits_{x\to 1^-} x + \lim\limits_{x\to 1^-} 1 = 1 + 1 = 2$
Deshalb: $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = 2 = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1}$.
$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$ *ist eine reelle Zahl, obwohl* $f(1)$ *nicht definiert ist und damit* $1 \notin D$ *(s. Abbildung 5.4.22).*

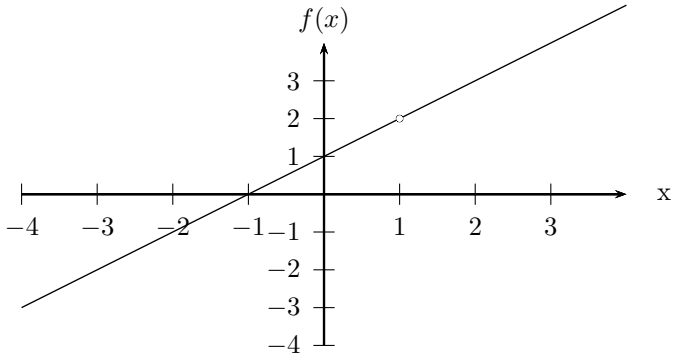


Abbildung 5.4.22: Beispiel für fehlenden Funktionswert in 1 und existierenden Grenzwert in 1 (Lücke)

◊

Zusammenfassend können wir festhalten:

- In den Beispielen 5.4.11 und 5.4.13 (intervallweise definierte Funktionen), hat die Funktion eine *Sprungstelle*. Es gibt ein x_0, so dass $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ nicht definiert ist (x_0 = Punkt, wo die Definitionsintervalle sich berühren). Der Funktion f ist in x_0 für das Beispiel 5.4.11 definiert, für das Beispiel 5.4.13 nicht definiert.
- Im Beispiel 5.4.12 (intervallweise definierte Funktion), ändert f die Steigung. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ ist für alle x_0 definiert, denn $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ für alle x_0. Der Funktion f ist in x_0 definiert.
- Im Beispiel 5.4.14 ist die Funktion f in $x_0 = 0$ nicht definiert und es wird der nicht-reelle Grenzwert ∞ angenommen. Wir sagen, die Funktion f habe in x_0 eine *Unendlichkeitsstelle*.
- Im Beispiel 5.4.15 ist die Funktion f in $x_0 = 0$ nicht definiert und der Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ ist nicht definiert, da $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$. Wir sagen, die Funktion f habe in x_0 eine *Unendlichkeitsstelle*.
- Im Beispiel 5.4.16, ist f in x_0 nicht definiert. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ ist definiert, denn $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$. Wir sagen, f habe in x_0 *eine Lücke*.

Beispiel	$f(x_0)$ definiert	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x_0)$ definiert
5.4.12	ja	ja
5.4.11	ja	nein
5.4.16	nein	ja
5.4.15	nein	nein

Grenzwerte in Punkten, denen ein Intervall vorausgeht, das nicht zum Definitionsbereich gehört oder denen ein solches Intervall folgt: Bei Wurzelfunktionen ist der Definitionsbereich $D = [0, \infty[$. Entsprechend ist 0 kein Häufungspunkt von $]-\infty, 0[\cap D$. Der linksseitige Grenzwert in 0 ist also nicht definiert - in der Definition 5.4.4 wird ja verlangt, dass x_0 ein Häufungspunkt von $D \cap]-\infty, x_0[$ ist. Der rechtsseitige Grenzwert von Wurzelfunktionen in 0 existiert demgegenüber und beträgt 0. Die Anwendung der Definition des Grenzwertes ergibt

$\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[n]{x} = 0$ - da die reellen Zahlen links von x_0 nicht zum Definitionsbereich gehören, spielen in der Definition 5.3.4 die Werte links von 0 keine Rolle: 0 ist in diesem Falle ein Häufungspunkt von D genau dann, wenn 0 eine Häufungspunkt von $D \cap]0, \infty[$ ist. Bei Wurzelfunktionen gilt damit

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[n]{x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{0} = 0.$$

Funktionswert und Grenzwert in 0 sind definiert und fallen zusammen.

Allgemeiner können wir festhalten.

Satz 5.4.17. *Gibt es ein Intervall $I = [a, x_0[$ oder $I =]a, x_0[$, so dass x_0 kein Häufungspunkt von $I \cap D$ ist und existiert $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, so gilt $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ (D ist der Definitionsbereich von f).*

Bei Logarithmusfunktionen gilt entsprechend

$$\lim_{x\to 0} \log_a x = \lim_{x\to 0^+} \log_a x,$$

wobei der Funktionswert in 0 nicht definiert ist und der Grenzwert definiert sowie nicht reell ist (s. Satz 5.4.8).

Analoge Überlegungen kann man für linksseitige Grenzwerte anstellen.

Satz 5.4.18. *Gibt es ein Intervall $I =]x_0, a[$ oder $I =]x_0, a]$, so dass x_0 kein Häufungspunkt von $I \cap D$ ist und existiert $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$, so gilt $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.*

5.4.1 Übungen

1. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (wenn nötig die links- und rechtsseitigen Grenzwerte)

   (a) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-3x+2}{x-2}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x-2}$

   (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}$

   (d) $\lim\limits_{x\to 11} \frac{1}{x^2}$

   (e) $f(x) = \begin{cases} 5x-2 & \text{für } x < 4 \\ 10x-8 & \text{für } x \geq 4 \end{cases}$
   $\lim\limits_{x\to -8} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -8^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -8^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

   (f) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x+\sqrt{2x^2+1}}{x}$

   (g) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{3x+\sqrt{2x^2+1}}{x}$ (fakulativ)

   (h) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{2x+\sqrt{x^2+1}}{x}$

   (i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x\sqrt{x^2+1}}{x}$

   (j) $\lim\limits_{x\to\infty} e^x$

   (k) $\lim\limits_{x\to 5} e^x$

   (l) $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x$

   (m) $\lim\limits_{x\to -5^-} e^x$

(n) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1.1^x}{0.1} \cdot \frac{1}{1.1^x}$

(o) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{5x^3+4x^2}{2x^5-8x^3}$

(p) $\lim\limits_{p\to 0} \sqrt{\frac{p^3-3p^2+8p}{p^4+p}}$

(q) $\lim\limits_{p\to 3} \sqrt{\frac{p^3-3p^2+8p}{p^4+p}}$

(r) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$

(s) $\lim\limits_{h\to -2} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$

2. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (wenn nötig, den rechts- und linksseitige Grenzwert)

(a) $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{3t^5+3t^3}{5t^2-8t^4}$

(b) $\lim\limits_{t\to -5} \frac{3t^5+3t^3}{5t^2-8t^4}$

(c) $\lim\limits_{z\to 1} 5\left(\ln \frac{2z^2-3z+1}{z^2-1}\right)$

(d) $\lim\limits_{z\to 2^-} 5\left(\ln \frac{2z^2-3z+1}{z^2-1}\right)$

(e) $\lim\limits_{z\to \infty} 5\left(\ln \frac{2z^2-3z+1}{z^2-1}\right)$

(f) $\lim\limits_{x\to -2^-} \frac{x^2+x-2}{x^3+5x^2+8x+4}$

(g) $\lim\limits_{x\to -2^+} \frac{x^2+x-2}{x^3+5x^2+8x+4}$

(h) $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{1+x^2} & \text{für } 0 < x < 1 \\ 2 & \text{für } x = 1 \\ \frac{x^3-1}{6(1-x)} & \text{für } x > 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x);\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x);\ \lim\limits_{x\to 1} f(x);\ \lim\limits_{x\to 6} f(x)$

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+4}{x}$

(j) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2+x}{1+2x}$

(k) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3}{8}$

(l) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^3}{8}$

(m) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{8}{x^5}$

5.4.2 Lösungen

1. Wir erhalten:

(a) a) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-3x+2}{x-2} = \frac{\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2-3x+2\right)}{\lim\limits_{x\to 3}(x-2)} = \frac{\lim\limits_{x\to 3} x^2 - \lim\limits_{x\to 3}(3x) + \lim\limits_{x\to 3} 2}{\lim\limits_{x\to 3} x - \lim\limits_{x\to 3} 2} =$
$\frac{3^2-3\lim\limits_{x\to 3} x+2}{3-2} = \frac{9-(3\cdot 3)+2}{1} = 2$

(b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-1)(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x-1) = \lim\limits_{x\to 2} x - \lim\limits_{x\to 2} 1 = 2-1 = 1$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

(d) $\lim\limits_{x\to 11} \frac{1}{x^2} = \frac{\lim\limits_{x\to 11} 1}{\lim\limits_{x\to 11} x^2} = \frac{1}{11^2} = \frac{1}{121}$

(e) $\lim\limits_{x\to -8} (5x-2) = \lim\limits_{x\to -8} (5x) - \lim\limits_{x\to -8} 2 = 5 \lim\limits_{x\to -8} x - 2 = (5\cdot -8) - 2 = -42$
$\lim\limits_{x\to -8^-} (5x-2) = \lim\limits_{x\to -8^-} (5x) - \lim\limits_{x\to -8^-} 2 = 5 \lim\limits_{x\to -8^-} x - 2 = (5\cdot -8) - 2 = -42$
$\lim\limits_{x\to -8^+} (5x-2) = \lim\limits_{x\to -8^+} (5x) - \lim\limits_{x\to -8^+} 2 = 5 \lim\limits_{x\to -8^+} x - 2 = (5\cdot -8) - 2 = -42$
$\lim\limits_{x\to 4^-} (5x-2) = \lim\limits_{x\to 4^-} (5x) - \lim\limits_{x\to 4^-} 2 = 5 \lim\limits_{x\to 4^-} x - 2 = (5\cdot 4) - 2 = 18$
$\lim\limits_{x\to 4^+} (10x-8) = \lim\limits_{x\to 4^+} (10x) - \lim\limits_{x\to 4^+} 8 = 10 \lim\limits_{x\to 4^+} x - 8 = (10\cdot 4) - 8 = 32$
$\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 4} f(x)$ existiert nicht. Es gibt einen Sprung in $x_0 = 4$.

(f) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x+\sqrt{2x^2+1}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{3x}{x}+\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x}}{\frac{x}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3+\sqrt{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}{1} =$
$\lim\limits_{x\to\infty} \left(3+\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} 3 + \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{2+\frac{1}{x^2}} = 3 + \sqrt{\lim\limits_{x\to\infty} \left(2+\frac{1}{x^2}\right)} =$
$3 + \sqrt{\lim\limits_{x\to\infty} 2 + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}} = 3 + \sqrt{2+0} = 3 + \sqrt{2}$

(g) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{3x+\sqrt{2x^2+1}}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\frac{3x}{x}+\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x}}{\frac{x}{x}} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{3-\sqrt{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}{1} =$
$\lim\limits_{x\to -\infty} \left(3-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}\right) = \lim\limits_{x\to -\infty} 3 - \lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{2+\frac{1}{x^2}} = 3 - \sqrt{\lim\limits_{x\to -\infty} \left(2+\frac{1}{x^2}\right)} =$
$3 - \sqrt{\lim\limits_{x\to -\infty} 2 + \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x^2}} = 3 - \sqrt{2+0} = 3 - \sqrt{2}$

(h) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{2x+\sqrt{x^2+1}}{x} = \frac{\lim\limits_{x\to 5}\left(2x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\lim\limits_{x\to 5} x} = \frac{\lim\limits_{x\to 5} 2x + \lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x^2+1}}{5} =$
$\frac{2\lim\limits_{x\to 5} x + \sqrt{\lim\limits_{x\to 5}(x^2+1)}}{5} = \frac{(2\cdot 5)+\sqrt{\lim\limits_{x\to 5} x^2 + \lim\limits_{x\to 5} 1}}{5} = \frac{10+\sqrt{25+1}}{5} = \frac{10+\sqrt{26}}{5} \approx 3.019\,8$

(i) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{2x\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{2\sqrt{x^2+1}}{1} = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(2\sqrt{x^2+1}\right) =$
$2 \lim\limits_{x\to 0^-} \left(\sqrt{x^2+1}\right) = 2\sqrt{\lim\limits_{x\to 0^-} (x^2+1)} = 2\sqrt{\lim\limits_{x\to 0^-} x^2 + \lim\limits_{x\to 0^-} 1} =$
$2\sqrt{0+1} = 2\cdot 1 = 2$
Analog ergibt sich $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2x\sqrt{x^2+1}}{x} = 2$. Damit ist der Grenzwert in $x_0 = 0$ definiert und ist 2.

(j) $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$

(k) $\lim\limits_{x\to 5} e^x = e^{\lim\limits_{x\to 5} x} = e^5 = 148.41$

(l) $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$

(m) $\lim\limits_{x\to -5^-} e^x = e^{\lim\limits_{x\to -5^-} x} = e^{-5} = 6.737\,9 \times 10^{-3}$

(n) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{1.1^x}{0.1} \cdot \frac{1}{1.1^x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{0.1} = \frac{1}{0.1} = 10$

(o) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{5x^3+4x^2}{2x^5-8x^3} = \frac{\lim\limits_{x\to 3}\left(5x^3+4x^2\right)}{\lim\limits_{x\to 3}(2x^5-8x^3)} = \frac{\lim\limits_{x\to 3} 5x^3 + \lim\limits_{x\to 3} 4x^2}{\lim\limits_{x\to 3} 2x^5 - \lim\limits_{x\to 3} 8x^3} = \frac{5\lim\limits_{x\to 3} x^3 + 4\lim\limits_{x\to 3} x^2}{2\lim\limits_{x\to 3} x^5 - 8\lim\limits_{x\to 3} x^3} =$
$\frac{\left(5\cdot 3^3\right)+\left(4\cdot 3^2\right)}{\left(2\cdot 3^5\right)-\left(8\cdot 3^3\right)} = \frac{19}{30} = 0.633\,33$

(p) $\lim\limits_{p\to 0} \sqrt{\frac{p^3-3p^2+8p}{p^4+p}} = \lim\limits_{p\to 0} \sqrt{\frac{p(p^2-3p+8)}{p(p^3+1)}} = \lim\limits_{p\to 0} \sqrt{\frac{p^2-3p+8}{p^3+1}} =$
$\sqrt{\lim\limits_{p\to 0} \frac{p^2-3p+8}{p^3+1}} = \sqrt{\frac{\lim\limits_{p\to 0}(p^2-3p+8)}{\lim\limits_{p\to 0}(p^3+1)}} = \sqrt{\frac{\lim\limits_{p\to 0} p^2 - \lim\limits_{p\to 0} 3p + \lim\limits_{p\to 0} 8}{\lim\limits_{p\to 0} p^3 + \lim\limits_{p\to 0} 1}} =$
$\sqrt{\frac{0-3\lim\limits_{p\to 0} p+8}{0+1}} = \sqrt{\frac{(-3\cdot 0)+8}{1}} = \sqrt{8} = \sqrt{4\cdot 2} = 2\sqrt{2}$

(q) $\lim\limits_{p\to 3}\sqrt{\frac{p^3-3p^2+8p}{p^4+p}}=\sqrt{\lim\limits_{p\to 3}\frac{p^3-3p^2+8p}{p^4+p}}=\sqrt{\frac{\lim\limits_{p\to 3}(p^3-3p^2+8p)}{\lim\limits_{p\to 3}(p^4+p)}}=$
$\sqrt{\frac{\lim\limits_{p\to 3}p^3-\lim\limits_{p\to 3}3p^2+\lim\limits_{p\to 3}8p}{\lim\limits_{p\to 3}p^4+\lim\limits_{p\to 3}p}}=\sqrt{\frac{3^3-3\lim\limits_{p\to 3}p^2+8\lim\limits_{p\to 3}p}{3^4+3}}=\sqrt{\frac{3^3-(3\cdot 3^2)+(8\cdot 3)}{3^4+3}}=\frac{1}{7}\sqrt{14}=0.534\,52$

(r) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}=$
$\lim\limits_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{3x^2+3xh+h^2}{1}=$
$\lim\limits_{h\to 0}\left(3x^2+3xh+h^2\right)=\lim\limits_{h\to 0}3x^2+\lim\limits_{h\to 0}3xh+\lim\limits_{h\to 0}h^2=3x^2+3x\lim\limits_{h\to 0}h+0=$
$3x^2+(3x\cdot 0)=3x^2$

(s) $\lim\limits_{h\to -2}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\frac{\lim\limits_{h\to -2}\left((x+h)^3-x^3\right)}{\lim\limits_{h\to -2}h}=\frac{\lim\limits_{h\to -2}(x+h)^3-\lim\limits_{h\to -2}x^3}{-2}=$
$\frac{\left(\lim\limits_{h\to -2}x+\lim\limits_{h\to -2}h\right)^3-x^3}{-2}=\frac{(x+-2)^3-x^3}{-2}=\frac{x^3-6x^2+12x-8-x^3}{-2}=3x^2-6x+4$

2. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (wenn nötig die links- und rechtsseitigen Grenzwerte)

(a) $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{3t^5+3t^3}{5t^2-8t^4}=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{t^2\left(3t^3+3t\right)}{t^2(5-8t^2)}=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{3t^3+3t}{5-8t^2}=\frac{\lim\limits_{t\to 0^+}\left(3t^3+3t\right)}{\lim\limits_{t\to 0^+}(5-8t^2)}=$
$\frac{\lim\limits_{t\to 0^+}3t^3+\lim\limits_{t\to 0^+}3t}{\lim\limits_{t\to 0^+}5-\lim\limits_{t\to 0^+}8t^2}=\frac{3\lim\limits_{t\to 0^+}t^3+3\lim\limits_{t\to 0^+}t}{5-8\lim\limits_{t\to 0^+}t^2}=\frac{(3\cdot 0)+(3\cdot 0)}{5-(8\cdot 0)}=\frac{0}{5}=0$

(b) $\lim\limits_{t\to -5}\frac{3t^5+3t^3}{5t^2-8t^4}=\frac{\lim\limits_{t\to -5}\left(3t^5+3t^3\right)}{\lim\limits_{t\to -5}(5t^2-8t^4)}=\frac{\lim\limits_{t\to -5}3t^5+\lim\limits_{t\to -5}3t^3}{\lim\limits_{t\to -5}5t^2-\lim\limits_{t\to -5}8t^4}=\frac{3\lim\limits_{t\to -5}t^5+3\lim\limits_{t\to -5}t^3}{5\lim\limits_{t\to -5}t^2-8\lim\limits_{t\to -5}t^4}=$
$\frac{\left(3\cdot(-5)^5\right)+\left(3\cdot(-5)^3\right)}{(5\cdot(-5)^2)-(8\cdot(-5)^4)}=2$

(c) $\lim\limits_{z\to 1}5\left(\ln\frac{2z^2-3z+1}{z^2-1}\right)=5\lim\limits_{z\to 1}\left(\ln\frac{2z^2-3z+1}{z^2-1}\right)=5\ln\left(\lim\limits_{z\to 1}\frac{2z^2-3z+1}{z^2-1}\right)=$
$5\ln\left(\lim\limits_{z\to 1}\frac{(2z-1)(z-1)}{(z+1)(z-1)}\right)=5\ln\left(\lim\limits_{z\to 1}\frac{2z-1}{z+1}\right)=5\ln\left(\frac{\lim\limits_{z\to 1}(2z-1)}{\lim\limits_{z\to 1}(z+1)}\right)=$
$5\ln\left(\frac{\lim\limits_{z\to 1}2z-\lim\limits_{z\to 1}1}{\lim\limits_{z\to 1}z+\lim\limits_{z\to 1}1}\right)=5\ln\left(\frac{2\lim\limits_{z\to 1}z-1}{1+1}\right)=5\ln\left(\frac{(2\cdot 1)-1}{2}\right)=5\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-3.465\,7$

(d) $\lim\limits_{z\to 2^-}5\left(\ln\frac{2z^2-3z+1}{z^2-1}\right)=5\lim\limits_{z\to 2^-}\left(\ln\frac{2z^2-3z+1}{z^2-1}\right)=5\ln\left(\lim\limits_{z\to 2^-}\frac{2z^2-3z+1}{z^2-1}\right)=$
$5\ln\left(\frac{\lim\limits_{z\to 2^-}\left(2z^2-3z+1\right)}{\lim\limits_{z\to 2^-}(z^2-1)}\right)=5\ln\left(\frac{\lim\limits_{z\to 2^-}2z^2-\lim\limits_{z\to 2^-}3z+\lim\limits_{z\to 2^-}1}{\lim\limits_{z\to 2^-}z^2-\lim\limits_{z\to 2^-}1}\right)=$
$5\ln\left(\frac{2\lim\limits_{z\to 2^-}z^2-3\lim\limits_{z\to 2^-}z+1}{2^2-1}\right)=5\ln\left(\frac{\left(2\cdot 2^2\right)-(3\cdot 2)+1}{2^2-1}\right)=0$

(e) $\lim\limits_{z\to\infty}5\left(\ln\frac{2z^2-3z+1}{z^2-1}\right)=5\lim\limits_{z\to\infty}\left(\ln\frac{2z^2-3z+1}{z^2-1}\right)=5\ln\left(\lim\limits_{z\to\infty}\frac{\frac{2z^2}{z^2}-\frac{3z}{z^2}+\frac{1}{z^2}}{\frac{z^2}{z^2}-\frac{1}{z^2}}\right)=$
$5\ln\left(\lim\limits_{z\to\infty}\frac{2-\frac{3}{z}+\frac{1}{z^2}}{1-\frac{1}{z^2}}\right)=5\ln\left(\frac{\lim\limits_{z\to\infty}\left(2-\frac{3}{z}+\frac{1}{z^2}\right)}{\lim\limits_{z\to\infty}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)}\right)=5\ln\left(\frac{\lim\limits_{z\to\infty}2-\lim\limits_{z\to\infty}\frac{3}{z}+\lim\limits_{z\to\infty}\frac{1}{z^2}}{\lim\limits_{z\to\infty}1-\lim\limits_{z\to\infty}\frac{1}{z^2}}\right)=$
$5\ln\left(\frac{2-0+0}{1-0}\right)=5\ln 2=3.465\,7$

(f) $\lim\limits_{x\to -2^-}\frac{x^2+x-2}{x^3+5x^2+8x+4}$; f ist in -2 nicht definiert.

$\lim\limits_{x\to -2^-}\frac{\frac{x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}-\frac{2}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{5x^2}{x^3}+\frac{8x}{x^3}+\frac{4}{x^3}}=\lim\limits_{x\to -2^-}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}}{1+\frac{5}{x}+\frac{8}{x^2}+\frac{4}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to -2^-}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to -2^-}\left(1+\frac{5}{x}+\frac{8}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)}=$
$=\frac{\lim\limits_{x\to -2^-}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to -2^-}\frac{1}{x^2}-\lim\limits_{x\to -2^-}\frac{2}{x^3}}{\lim\limits_{x\to -2^-}1+\lim\limits_{x\to -2^-}\frac{5}{x}+\lim\limits_{x\to -2^-}\frac{8}{x^2}+\lim\limits_{x\to -2^-}\frac{4}{x^3}}=\frac{\frac{1}{-2}+\frac{1}{4}-\frac{2}{-8}}{1+\frac{5}{-2}+\frac{8}{4}+\frac{4}{-8}}$

$1+\frac{5}{-2}+\frac{8}{4}+\frac{4}{-8}=0 \Longrightarrow$ Mit den eingeführten Regeln kann das Problem nicht gelöst werden.

(g) $\lim\limits_{x\to -2^+}\frac{x^2+x-2}{x^3+5x^2+8x+4}$; f ist in -2 nicht definiert. Mit den eingeführten Regeln kann das Problem nicht gelöst werden, da wie im vorhergehenden Fall der Zähler 0 wird.

(h) $f(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{1+x^2} & \text{für } 0<x<1\\ 2 & \text{für } x=1\\ \frac{x^3-1}{6(1-x)} & \text{für } x>1\end{cases}$

Die Funktion ist in $x\leq 0$ nicht definiert. Man kann überprüfen, ob der rechtsseitige Grenzwert existiert:
$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x-1}{1+x^2}=\frac{\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)}{\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x^2)}=\frac{\lim\limits_{x\to 0^+}x-\lim\limits_{x\to 0^+}1}{\lim\limits_{x\to 0^+}1+\lim\limits_{x\to 0^+}x^2}=\frac{0-1}{1+0}=-1$. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ existiert nicht, da die Funktion links von 0 nicht definiert ist.
Da die Funktion intervallweise definiert ist (Berührungspunkt 1), berechnen wir die links- und rechtsseitigen Grenzwerte:
$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x-1}{1+x^2}=\frac{\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)}{\lim\limits_{x\to 1^-}(1+x^2)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1^-}x-\lim\limits_{x\to 1^-}1}{\lim\limits_{x\to 1^-}1+\lim\limits_{x\to 1^-}x^2}=\frac{1-1}{1+1}=0$
$\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^3-1}{6(1-x)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{6(1-x)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{-(1-x)(x^2+x+1)}{6(1-x)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{-(x^2+x+1)}{6}=-\frac{1}{2}\Longrightarrow$
$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^+}\Longrightarrow\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ existiert nicht.
$\lim\limits_{x\to 6}\frac{x^3-1}{6(1-x)}=\frac{\lim\limits_{x\to 6}\left(x^3-1\right)}{\lim\limits_{x\to 6}(6(1-x))}=\frac{\lim\limits_{x\to 6}x^3-\lim\limits_{x\to 6}1}{6\lim\limits_{x\to 6}(1-x)}=\frac{6^3-1}{6\left(\lim\limits_{x\to 6}1-\lim\limits_{x\to 6}x\right)}=\frac{215}{6(1-6)}=-\frac{43}{6}$

(i) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+4}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}+\frac{4}{x}}{\frac{x}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{4}{x}}{1}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}1}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}1}=\frac{1+0}{1}=1$

(j) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+x}{1+2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+1}{\frac{1}{x}+2}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}+1\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+2\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}1}{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}2}=\frac{2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+1}{0+2}=\frac{(2\cdot 0)+1}{0+2}=\frac{1}{2}$

(k) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{8}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{8}x^3=\infty$

(l) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{8}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{8}x^3=-\infty$

(m) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{8}{x^5}$. f ist nicht definiert in 0. $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{8}{x^5}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+}:\frac{8}{x^5}=\infty$. Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0}\frac{8}{x^5}$ existiert nicht.

5.5 Grenzen der eingeführten Methoden

Etliche der Sätze bezüglich der Grenzwerte sind nur dann gültig, wenn die auftauchenden Grenzwerte reelle Zahlen sind. Wenn $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$, ist $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$ keine reelle Zahl. Deshalb kann der Satz „$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)+\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$“ nicht angewendet werden. Wir müssen die Formeln - falls möglich - vorgängig so umformen, bis die verschiedenen Ausdrücke reelle Zahlen sind. Wenn man diese Einschränkung nicht beachtet, kann man Widersprüche herleiten:

(1)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\frac{1}{2}x(x+1)\right)\underset{falsch}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}x(x+1)\right)$$
$$=0\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}x(x+1)\right)=0\cdot\infty=0$$

(2)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\frac{1}{2}x(x+1)\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\frac{1}{2}(x+1)\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{x+1}{x}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x}) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right)\\ &= \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Aus (1) und (2) könnte man herleiten: $0 = \frac{1}{2}$. In der ersten Linie haben wir den Satz 5.1.16 falsch angewendet, denn $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}x(x+1)\right) = \infty$. Deshalb bezeichnet „$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}x(x+1)\right)$“ keine reelle Zahl. Wenn es uns nicht gelingt die Formel so umzuwandeln, dass wir die Anforderungen der Sätze erfüllen können, scheitern die bisher eingeführten Methoden.

Beispiel 5.5.1. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4}{2x+5}$. *Wir versuchen zu erweitern:* $\frac{x^2+4}{2x+5}$*, zum Beispiel mit* $\frac{1}{x^2}$*:* $\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{4}{x^2}}{\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}$ *. Nach der Anwendung der Sätze wird der Nenner* 0*. Der Ausdruck ist somit nicht definiert. Wenn wir mit* $\frac{1}{x}$ *erweitern:* $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\frac{4}{x}}{2+\frac{5}{x}}$*, bleibt im Zähler ein Term, dessen Grenzwert gegen Unendlich geht. Wenn wir* x^2 *im Zähler und* x *im Nenner ausklammern:* $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}{x\left(2+\frac{5}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}{\left(2+\frac{5}{x}\right)}$*, bleibt im Zähler ein Term, der gegen Unendlich geht. Wenn wir im Nenner und im Zähler* x *ausklammern:* $\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(x+\frac{4}{x}\right)}{x\left(2+\frac{5}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x+\frac{4}{x}}{2+\frac{5}{x}}$*, bleibt im Zähler ein Term, dessen Grenzwert gegen Unendlich geht. Faktorisieren scheint auch nicht zum Ziel zu führen. Es gelingt uns somit nicht, unsere Regeln anzuwenden. Entsprechend müsste man zusätzliche Sätze und weitere Methoden einführen, um auch solche Probleme zu lösen.* ◊

5.6 Beweise einiger Grenzwertsätze (fakultativ)

Satz 5.3.11 von S. 176: $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0}f(x) + \lim_{x\to x_0}g(x)$ für $\lim_{x\to x_0}f(x), \lim_{x\to x_0}g(x)\in\mathbb{R}$

Beweis. Seien $\lim_{x\to x_0}f(x), \lim_{x\to x_0}g(x)\in\mathbb{R}$.
(i) Sei $k>0$. Damit ist auch $k' := \frac{k}{2} > 0$ und es gibt für alle solchen k' ein r', so dass für $0<|x-x_0|<r'$ gilt $\left|f(x)-\lim_{x\to x_0}f(x)\right| < k'$ und

es gibt für alle diese k' ein r'', so dass für $0<|x-x_0|<r''$ gilt $\left|g(x)-\lim_{x\to x_0}g(x)\right| < k'$.
(ii) Entsprechend gilt für $0<|x-x_0|<\min\{r',r''\}$

$$\left|f(x)-\lim_{x\to x_0}f(x)\right| + \left|g(x)-\lim_{x\to x_0}g(x)\right| < 2k' = k.$$

(iii) Weiterhin gilt
$\left|f(x)-\lim_{x\to x_0}f(x)+g(x)-\lim_{x\to x_0}g(x)\right| \le \left|f(x)-\lim_{x\to x_0}f(x)\right| + \left|g(x)-\lim_{x\to x_0}g(x)\right|$, wobei
$\left|f(x)-\lim_{x\to x_0}f(x)+g(x)-\lim_{x\to x_0}g(x)\right| = \left|f(x)+g(x)-\left(\lim_{x\to x_0}f(x)+\lim_{x\to x_0}g(x)\right)\right|$.
(iv) Damit gibt es für alle $k>0$ ein $r := \min\{r',r''\}>0$ so dass für $0<|x-x_0|<r$ gilt
$\left|f(x)+g(x)-\left(\lim_{x\to x_0}f(x)+\lim_{x\to x_0}g(x)\right)\right| < 2k' = k.$

(v) Also ist $\left(\lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)\right)$ der Grenzwert von $f(x)+g(x)$,
d.h. $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$. □

Satz 5.3.12 von S. 176: $\lim_{x\to x_0}(bf(x) = b\lim_{x\to x_0} f(x)$ für $b, \lim_{x\to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$

Beweis. Seien $b, \lim_{x\to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$. Der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert also und es gibt gemäss Definition für alle $k>0$ ein $r>0$, so dass für $0<|x-x_0|<r$ gilt: $\left|f(x) - \lim_{x\to\infty} f(x)\right| < k$. Es gibt für jedes $k>0$ und $c\in\mathbb{R}$ ein $k'>0$, so dass $k = |c|\,k'$. Da $k>0$, gibt es also für b ein $k'>0$, so dass $k = |b|\,k'$. Damit gilt $k' = \frac{k}{|b|}$. Da $k'>0$, gibt es gemäss Existenz des Grenzwertes ein r, so dass für alle $0<|x-x_0|<r$ gilt: $\left|f(x) - \lim_{x\to x_0} f(x)\right| < k' = \frac{k}{|b|}$. Daraus folgt $|b|\left|f(x) - \lim_{x\to x_0} f(x)\right| < k$. Zudem gilt

$$\left|b\left(f(x) - \lim_{x\to x_0} f(x)\right)\right| = \left|bf(x) - b\lim_{x\to x_0} f(x)\right| \le |b|\left|f(x) - \lim_{x\to x_0} f(x)\right| < k.$$

Entsprechend ist gemäss Grenzwertdefinition $b\lim_{x\to x_0} f(x)$ der Grenzwert von $bf(x)$, d.h.
$\lim_{x\to x_0} bf(x) = b\lim_{x\to x_0} f(x)$. □

Satz 5.3.13 von S. 176: $\lim_{x\to x_0} a = a$ (für $a\in\mathbb{R}$)

Beweis. Sei $f(x) = a$ für alle $x\in R$. Wir betrachten ein beliebiges $k>0$. Für jedes $k>0$ gibt es ein r, so dass für alle $|x-x_0|<r$ gilt $|f(x)-a|<k$. Denn $|f(x)-a| = |a-a| = 0$ für alle x. Gemäss Grenzwertdefinition gilt damit, dass a der Grenzwert von $f(x)=a$ ist, d.h. $\lim_{x\to x_0} a = a$. □

Satz 5.3.14 von S. 176: $\lim_{x\to x_0} fg(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} g(x)$ für $\lim_{x\to x_0} f(x), \lim_{x\to x_0} g(x)\in\mathbb{R}$

Beweis. $a := \lim_{x\to x_0} f(x)$ und $b := \lim_{x\to x_0} g(x)$. Sei $k>0$. Wir wollen ein $r>0$ finden, so dass $|f(x)g(x)-ab|<k$ für $0<|x-x_0|<r$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x)-ab| &= |f(x)g(x)-ag(x)+ag(x)-ab| \\
&= |\,(f(x)-a)\,g(x)+a\,(g(x)-b)\,| \\
&\le |\,(f(x)-a)\,g(x)|+|a\,(g(x)-b)\,| \quad \text{(Dreiecksungleichung)} \\
&= |f(x)-a||g(x)|+|a||g(x)-b|
\end{aligned}$$

Wir versuchen zu zeigen, dass jeder dieser zwei Summanden kleiner-gleich $\frac{k}{2}$ ist, da dann die Summe der beiden kleiner-gleich k ist.

Da $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$, gibt es eine Zahl $r_1>0$, so dass $|g(x)-b| < \frac{k}{2(1+|a|)}$ für $0<|x-x_0|<r_1$.
Ebenso gibt es ein $r_2>0$, so dass $|g(x)-b|<1$ für $0<|x-x_0|<r_2$. Damit gilt dann für $0<|x-x_0|<r_2$: $|g(x)| = |g(x)-b+b| \le |g(x)-b|+|b| < 1+|b|$

Da $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, gibt es eine Zahl $r_3>0$, so dass $|f(x)-a| < \frac{k}{2(1+|b|)}$ für $0<|x-x_0|<r_3$.

Sei nun $r := \min\{r_1, r_2, r_3\}$. Mit $0<|x-x_0|<r$ gilt dann

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x)-ab| &\le |f(x)-a||g(x)|+|a||g(x)-b| \\
&< \frac{k}{2(1+|b|)}(1+|b|)+|a|\frac{k}{2(1+|a|)} \\
&= \frac{k}{2}+|a|\frac{k}{2(1+|a|)}
\end{aligned}$$

Unter Beachtung von $\frac{|a|}{(1+|a|)} < 1$, gilt damit $|a|\frac{k}{2(1+|a|)} < \frac{k}{2}$ und insgesamt

$$|f(x)g(x) - ab| < \frac{k}{2} + \frac{k}{2} = k$$

Es ist also $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = ab$. □

Satz 5.3.15 von S. 177: $\lim\limits_{x\to x_0} x^n = x_0^n$ für $x, x_0 \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}^*$

Beweis. (i) Es gilt $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$, da es für jedes $k > 0$ ein $r > 0$ gibt, so dass für alle $r - x_0 < x < x_0 + r : f(x_0) - k < f(x) < f(x_0) + k$. f ist strikt monoton steigend, da für $x > y$ gilt: $f(x) = x > f(y) = y$. Wählen wir $r = f^{-1}(k)$ gilt für $x_0 - r < x < x_0 + r$ wegen der strikten Monotonie $f(x_0 - r) < f(x) < f(x_0 + r)$. Wegen der Linearität von $f(x) = x$ gilt $f(x_0 - r) = f(x_0) - f(r)$ und $f(x_0 + r) = f(x_0) + f(r)$ womit wir erhalten: $f(x_0) - f(r) < f(x) < f(x_0) + f(r)$ und mit $f(r) = k : f(x_0) - k < f(x) < f(x_0) + k$.

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0} x^n \underset{\text{Def. Potenz}}{=} \lim\limits_{x\to x_0} \left(\underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{\text{n mal}}\right) \underset{\text{Satz 5.6}}{=} \lim\limits_{x\to x_0} x \cdot \ldots \cdot \lim\limits_{x\to x_0} x \underset{\text{(i)}}{=} x_0 \cdot \ldots \cdot x_0 = x_0^n$. □

Satz 5.3.16 von S. 177: $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ für $g(x) \neq 0$ und $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \in \mathbb{R}$.

Beweis. (i) Wir zeigen zuerst für $a := \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq 0 : \lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a}$.

Für beliebige $k > 0$ ist jeweils ein r zu suchen, so dass für $0 < |x - x_0| < r$ gilt: $\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{a}\right| < k$.

Da $a := \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, gibt es ein r_1, so dass für $0 < |x - x_0| < r_1 : |f(x) - a| < \frac{|a|}{2}$.

Damit gilt für $0 < |x - x_0| < r_1$

$$-\frac{|a|}{2} < |f(x)| - |a| \leq |f(x) - a| < \frac{|a|}{2}$$

und damit

$$-\frac{|a|}{2} + |a| = \frac{|a|}{2} < |f(x)|.$$

Daraus folgt für $0 < |x - x_0| < r_1$:

$$\frac{1}{|f(x)|} < \frac{2}{|a|}$$

und damit

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|f(x)|}\frac{|f(x) - a|}{|a|} < \frac{2\,|f(x) - a|}{|a|^2}.$$

Für $\frac{|a|^2 k}{2}$ gibt es ein r_2, so dass für $0 < |x - x_0| < r_2 : |f(x) - a| < \frac{|a|^2 k}{2}$. Sei nun $r := \min\{r_1, r_2\}$. Damit gilt für $0 < |x - x_0| < r$:

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|f(x) - a|}{|f(x)||a|} < \frac{2\,|f(x) - a|}{|a|^2} < \frac{2\frac{|a|^2 k}{2}}{|a|^2} = k.$$

(ii) Der Satz folgt nun durch $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ und Satz 5.6 □

Satz 5.3.17 von S. 177: Sei f bijektiv und $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$, dann ist $\lim\limits_{y\to a} f^{-1}(y) = x_0$.

Beweis. Da $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, gibt es für jedes $k > 0$ ein $r > 0$, so dass für $0 < |x - x_0| < r$ gilt: $|f(x) - a| < k$. Sei $k' > 0$. Mit $r' := \min\{|a - f(x_0 - k')|, |a + f(x_0 + k')|\}$ gilt für $0 < |y - a| < r' : 0 < \left|f^{-1}(y) - x_0\right| < k'$. □

Satz 5.3.18 von S. 177: Für $\sqrt[n]{x}$ gilt $\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$ für $x_0 \in$ Definitionsbereich von $\sqrt[n]{x}$.

Beweis. Da $\sqrt[n]{x}$ die Umkehrfunktion von x^n und $\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n$ ist, gilt der Satz unmittelbar mit Satz 5.3.17. □

Satz 5.3.18 von S. 177: $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$

Beweis. Sei $k > 0$ mit $e^{x_o} - k > 0$ Da $\exp_a$ injektiv und $\log_a$ die Umkehrfunktion von $\exp_a$ ist, gibt es genau ein x_1, so dass $x_1 = \log_a(e^{x_0} - k)$. Ebenso gibt es genau ein x_2, so dass $x_2 = \log_a(e^{x_0} + k)$. Wählt man $r := \min\{|x_0 - x_1|, |x_0 - x_2|\}$, so gilt für $0 < |x - x_0| < r$: $|a^x - a^{x_0}| < k$, denn $\exp_a$ ist strikt monoton. □

Satz 5.3.18 von S. 177: $\lim_{x\to x_0} \log_a(x) = \log(x_0)$

Beweis. Da $\log_a$ die Umkehrfunktion $\exp_a$ ist, gilt der Satz gemäss Satz 5.3.17 unmittelbar. □

Satz 5.3.19 von S. 177: Wenn $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ und $\lim_{x\to a} g(x) = b$, dann $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = b$, für $a, b \in \mathbb{R}$ (Kettenregel)

Beweis. Da $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ gibt es für alle $k > 0$ ein $r > 0$ so dass für $0 < |x - x_0| < r$: $|f(x) - a| < k$.
Da $\lim_{x\to a} g(x) = b$ gibt es für alle $k' > 0$ ein $r' > 0$ so dass für $0 < |x - x_0| < r'$: $|g(x) - b| < k'$.
Wir wählen ein beliebiges $k_2 > 0$. Für dieses gibt es ein $r_2 > 0$ so dass für $0 < |x - x_0| < r_2$: $|f(x) - a| < k_2$.
Setzen wir $k_3 := r_2$, so gibt es gemäss Voraussetzungen ein r_3 so dass $|g(x) - b| < k_3$. Entsprechend ist $|f(g(x)) - a| < k_2$ für $0 < |x - x_0| < r_3$. □

Satz 5.1.14 von Seite 167:
$\lim_{x\to\infty}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} g(x)$ für $\lim_{x\to\infty} f(x), \lim_{x\to\infty} g(x) \in \mathbb{R}$.

Beweis. Seien $\lim_{x\to\infty} f(x), \lim_{x\to\infty} g(x) \in \mathbb{R}$. Für alle $k > 0$ gibt es also ein x', so dass für $x > x'$ gilt $\left|f(x) - \lim_{x\to\infty} f(x)\right| < k$ und $\left|g(x) - \lim_{x\to\infty} g(x)\right| < k$. Entsprechend gilt für solche x

$$\left|f(x) - \lim_{x\to\infty} f(x)\right| + \left|g(x) - \lim_{x\to\infty} g(x)\right| < 2k$$

Zudem gilt für solche x

$$\left|f(x) + g(x) - \left(\lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} g(x)\right)\right| \leq \left|f(x) - \lim_{x\to\infty} f(x)\right| + \left|g(x) - \lim_{x\to\infty} g(x)\right| < 2k$$

Damit gibt es für alle $k' := 2k > 0$ ein x', so dass für $x > x'$ gilt

$$\left|f(x) + g(x) - \left(\lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} g(x)\right)\right| < k'$$

(jedes $k' > 0$ kann durch $2k$ mit $k > 0$ ausgedrückt werden!). Entsprechend ist gemäss Grenzwertdefinition $\lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} g(x)$ der Grenzwert von $f(x) + g(x)$, d.h. $\lim_{x\to\infty}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} g(x)$. □

Satz 5.1.15 von Seite 167: $\lim_{x\to\infty}(bf(x) = b \lim_{x\to\infty} f(x)$ für $b, \lim_{x\to\infty} f(x) \in \mathbb{R}$

Beweis. (i) Seien b, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \in \mathbb{R}$. Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existiert also, d.h. für alle $k > 0$ gibt es ein x', so dass für alle $x > x'$ gilt, $\left|f(x) - \lim\limits_{x\to\infty} f(x)\right| < k$.
(ii) Es gibt für jedes $k > 0$ ein $k' > 0$ und ein $b \in \mathbb{R}$, so dass $k = |b|\, k'$.
(iii) Sei also $k > 0$. Gemäss (ii) gibt es $k' > 0$ und ein $b \in \mathbb{R}$, so dass $k = |b|\, k'$ und $k' > 0$. Damit gilt $k' = \frac{k}{|b|}$. Da $k' > 0$ gibt es gemäss (i) ein x', so dass für alle $x > x'$ gilt, $\left|f(x) - \lim\limits_{x\to\infty} f(x)\right| < k' = \frac{k}{|b|}$.
(iv) Aus $\left|f(x) - \lim\limits_{x\to\infty} f(x)\right| < \frac{k}{|b|}$ folgt $|b| \left|f(x) - \lim\limits_{x\to\infty} f(x)\right| < k$. Zudem gilt

$$\left|b\left(f(x) - \lim_{x\to\infty} f(x)\right)\right| = \left|bf(x) - b\lim_{x\to\infty} f(x)\right| \leq |b| \left|f(x) - \lim_{x\to\infty} f(x)\right| < k.$$

(v) (iii)-(iv) gilt für beliebige k, d.h. es gibt für jedes $k > 0$ ein x', so dass für alle $x > x'$ gilt $\left|bf(x) - b\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\right| < k$.
(vi) Mit der Grenzwertdefinition folgt daraus, dass $b\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ der Grenzwert von $bf(x)$ ist, d.h. $\lim\limits_{x\to\infty}(bf(x) = b\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. □

Satz 5.1.19 von Seite 167: $\lim\limits_{x\to\infty} a = a$ für $a \in \mathbb{R}$.

Beweis. Sei $f(x) = a \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir betrachten ein beliebiges $k > 0$. Für jedes solches k gibt es ein x', so dass für alle $x > x'$ gilt, $|f(x) - a| = |a - a| < k$ - denn $|f(x) - a| = |a - a| = 0 < k$ für beliebige x. Damit kann x' beliebig gewählt werden und es gibt entsprechend solche x'. Gemäss Grenzwertdefinition gilt damit, dass a der Grenzwert von a ist, d.h. $\lim\limits_{x\to\infty} a = a$. □

5.7 Lernziele

- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ unter Angabe der verwendeten Sätze berechnen können (in Aufgaben, die denen der Übungen entsprechen; die Sätze dürfen mit Hilfe einer Liste, die abgegeben wird, verwendet werden)
- Erklären können, was $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ bedeuten (in Worten, die exakten Definitionen werden nicht verlangt)
- Den Ausdruck „Umgebung von x_0“ und „Häufungspunkt einer Menge D“ definieren können.
- Das Verhalten von Funktionen in einer Umgebung von x_0 berechnen und beschreiben können (Sprungstelle, Lücke, Unendlichkeitsstelle, abrupte Veränderung der Steigung). Wann ist der Grenzwert einer Funktion eine reelle Zahl, obwohl die Funktion in x_0 nicht definiert ist?

Kapitel 6

Stetigkeit

Für auf $\mathbb{R}$ oder auf Intervalle $I \subset \mathbb{R}$ definierte Funktionen bedeutet Stetigkeit in einem Intervall, dass man sie im Intervall mit einem Zug zeichnen kann.

6.1 Definitionen und Sätze

Definition 6.1.1.
- *eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig in $x_0 \in I \subset D$ genau dann, wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ($D \subset \mathbb{R}$, I ist ein Intervall)*
- *eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist in $x_0 \in I \subset D$ rechtsstetig genau dann, wenn $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$*
- *eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist in $x_0 \in I \subset D$ linksstetig genau dann, wenn $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$*

$\Diamond$

Diese Definition impliziert, dass $f(x_0)$ definiert ist (existiert), wenn f in x_0 stetig ist. Ebenso kann f in x_0 nur stetig sein, wenn der entsprechende Grenzwert für x gegen x_0 definiert ist. Ist eine Funktion in x_0 links- und rechtsstetig, so ist sie in x_0 stetig.

Beispiel 6.1.2. *Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \in]-\infty, 5] \\ 2x+3 & \text{für } x \in]5, \infty[\end{cases}$ ist linksstetig in 5 ohne dort rechtsstetig zu sein. Sie ist nicht stetig in 5. Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \in]-\infty, 5[\\ 2x+3 & \text{für } x \in [5, \infty[\end{cases}$ ist nicht linksstetig, aber rechtsstetig in 5. Sie ist dort nicht stetig.* $\Diamond$

Definition 6.1.3.
- *Eine Funktion f ist im Intervall $I \subset \mathbb{R}$ stetig genau dann, wenn für alle $x \in I$ gilt: f ist stetig in x.*
- *Eine Funktion f ist stetig, genau dann wenn sie in $\mathbb{R}$ stetig ist.*

$\Diamond$

Dar folgende Satz folgt unmittelbar aus den im vorherigen Kapitel bewiesenen Sätzen.

Satz 6.1.4.
- *für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = a$ ist f stetig ($a \in \mathbb{R}$; konstante Funktionen!)*
- *$f(x) = x^n$ ist stetig in $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$.*
- *Die Summe $f + g$ im Intervall $I \subset \mathbb{R}$ stetiger Funktionen f und g ist stetig in I*
- *Ist f im Intervall $I \subset \mathbb{R}$ stetig, dann ist af in I stetig ($a \in \mathbb{R}$) (aus diesen ersten drei Teilsätzen folgt, dass alle Polynome stetig sind).*

- *Das Produkt fg im Intervall $I \subset \mathbb{R}$ stetiger Funktionen f und g ist stetig in I.*
- *Der Quotient $\frac{f}{g}$ im Intervall $I \subset \mathbb{R}$ stetiger Funktionen ist stetig in $I \backslash \{x | g(x) = 0\}$*
- *Ist f stetig im Intervall $I \subset \mathbb{R}$, dann ist $f(x)$ stetig im Intervall $J \subset I$.*
- *Ist f stetig und bijektiv auf I mit dem Bild I', so ist die Umkehrfunktion stetig auf I' (entsprechend ist $\sqrt[n]{x}$ stetig auf $\mathbb{R}^+$).*
- $\exp_a(x)$ *ist stetig auf $\mathbb{R}$ für beliebige $a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}$ (also ist $\log_a x$ ist stetig auf $\mathbb{R}^+ \backslash \{0\}$).*
- *Die Verkettung von stetigen Funktionen auf Intervallen ist stetig auf dem Definitionsbereich.*

Auf Grund der Sätze gilt nun z.B., dass jede Polynomfunktion in $\mathbb{R}$ stetig ist und dass rationale Funktionen (= Quotient von zwei Polynomfunktionen) im Definitionsbereich stetig sind. An Stellen, die nicht zum Definitionsbereich gehören, sind rationale Funktionen nicht stetig.

Bisher haben wir drei Typen von Unstetigkeit kennengelernt: es liegt ein Sprung, eine Unendlichkeitsstelle oder eine Lücke vor. Bei Lücken ist die Unstetigkeit in einem gewissen Sinne behebbar. Sei f eine Funktion, die in x_0 eine Lücke hat und die den Definitionsbereich $I \backslash \{x_0\}$ aufweist. Da in diesem Fall der Grenzwert definiert ist, können wir eine neue Funktion g definieren, die stetig ist und für die gilt:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in I \backslash \{x_0\} \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) & \text{für } x = x_0 \end{cases}$$

g ist eine stetige Funktion. Wir nennen g die „stetige Fortsetzung von f“.

Die meisten ökonomischen Funktionen sind nicht stetig. Güter etwa werden in diskreten Einheiten gemessen. Dies gilt auch für Güter wie Mehl, Erdöl und Elektrizität, die zwar auf metrischen Skalen gemessen werden, aber jeweils nur auf je nach Kontext unterschiedlich viele Stellen nach dem Komma. Um jedoch von den Vorteilen des Rechnens in den reellen Zahlen profitieren zu können (z.B. Existenz von Wurzeln, Logarithmen, Nullstellen von Polynomen, etc), setzt man im Allgemeinen stetige Funktionen, die auf $\mathbb{R}$ definiert sind, voraus. Es handelt sich um eine Idealisierung.

Trotzdem spielen unstetige Funktionen in der Wirtschaft eine Rolle. Fixkosten etwa sind nur in einem spezifischen Intervall wirklich fix. Sobald man die produzierte Menge über die Intervallgrenzen hinaus erhöht, müssen die Produktionskapazitäten durch den Kauf von neuen Maschinen oder von neuen Gebäuden erhöht werden - die Fixkosten steigen auf ein neues Niveau. Die dadurch erzeugten Kosten bewirken ein Anspringen der Fixkosten (Sprungstelle).

Beispiel 6.1.5. *Fixkostenfunktion (s. Abbildung 6.1.1)*

$$K_f(x) = \begin{cases} 2 & \textit{für } 0 \leq x < 3 \\ 3 & \textit{für } 3 \leq x < 5 \\ 4 & \textit{für } 5 \leq x < 7 \end{cases}$$

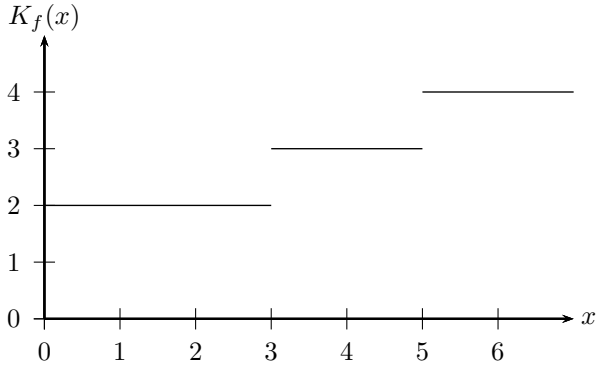


Abbildung 6.1.1: Graphische Darstellung einer Fixkostenfunktion mit Sprungstellen

Wir setzen voraus, die variablen Kosten könnten durch die folgende (stetige) Funktion dargestellt werden: $K_v = 3x$. *Wir erhalten nun die folgende nicht stetige Gesamtkostenfunktion (s. Abbildung 6.1.2):*

$$K(x) = \begin{cases} 2+3x & \textit{für } 0 \leq x < 3 \\ 3+3x & \textit{für } 3 \leq x < 5 \\ 4+3x & \textit{für } 5 \leq x < 7 \end{cases}$$

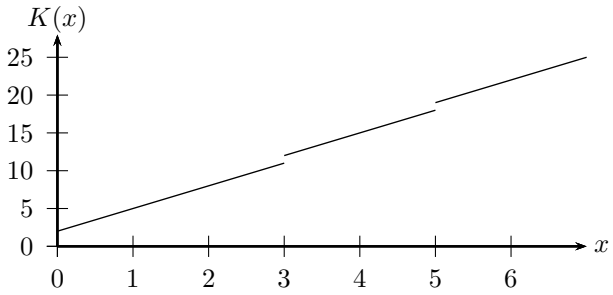


Abbildung 6.1.2: Graphische Darstellung einer Kostenfunktion mit Sprungstellen

Die entsprechende nicht stetige Stückkostenfunktion ist dann (s. Abbildung 6.1.3:

$$k(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}+3 & \textit{für } 0 < x < 3 \\ \frac{3}{x}+3 & \textit{für } 3 \leq x < 5 \\ \frac{4}{x}+3 & \textit{für } 5 \leq x < 7 \end{cases}$$

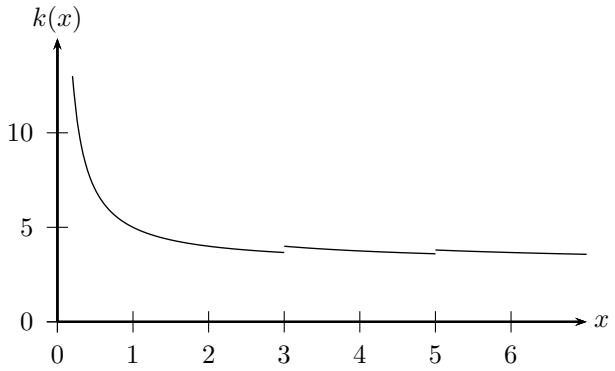


Abbildung 6.1.3: Graphische Darstellung einer Stückkostenfunktion mit Sprungstellen

◊

6.1.1 Übungen

1. Berechnen Sie die folgende Rechnungsbetragsfunktion P (zu bezahlender Nettobetrag als Funktion von der gekauften Menge): der Grundpreis einer Ware sei 100 GE pro ME. Wenn mehr als 1000 ME oder 1000 ME gekauft werden, wird ein Rabatt von 10%, ab (und inkl.) 2000 ME ein Rabatt von 20% auf den Grundpreis (für die Gesamtmenge) gewährt. Zeichnen Sie die Rechnungsbetragsfunktion. Ist die Rechnungsbetragsfunktion im Intervall $]0, \infty[$ stetig? Geben Sie die Unstetigkeitsstellen an (das hier vorausgesetzte Rabattsystem verleitet den Käufer mehr zu kaufen, als er eigentlich möchte. Nach welcher Menge wird ein Käufer mehr als Tausend kaufen, obwohl er weniger möchte (Lagerkosten und ähnliches lassen wir ausser acht).

2. Berechnen Sie die folgende Rechnungsbetragsfunktion P: Der Preis eine Ware sei 100 GE pro ME. Bei einer Bestellung von mehr als 1000 ME gewährt man 20%, von mehr als 2000 ME 40% Rabatt auf den Grundpreis (für die Menge, die die jeweiligen ME übersteigt). Zeichnen Sie die Funktion. Ist die Funktion im Intervall $]0, \infty[$ stetig?

3. K_f sei wie folgt definiert.

$$K_f(x) = \begin{cases} 30 & \text{für } 0 \leq x < 4 \\ 50 & \text{für } 4 \leq x < 10 \\ 70 & \text{für } 10 \leq x < 15 \end{cases}$$

   und $K_v(x) = 0.5x$. Bestimmen Sie die Gesamtkostenfunktion und die Stückkostenfunktion. Zeichnen Sie die Funktionen. Sind die Funktionen im Intervall $0 < x < 15$ stetig?

4. Bestimmen Sie die Intervalle, in denen die folgenden Funktionen stetig sind.
   $f(x) = 2x^3 + 2x - \ln x$
   $g(x) = 2x^3 + 2x - \ln(-x + 8)$
   $h(x) = 3x^5 - 8x^2 + \sqrt{-2x + 8}$
   $k(x) = 3x^5 - 8x^2 + \sqrt{2x^2}$

6.1.2 Lösungen

1. Die Funktion wird intervallweise durch die folgenden Ausdrücke definiert (s. Abbildung 6.1.4):

$$P(x) = \begin{cases} 100x & \text{für } 0 \leq x < 1000 \\ 90x & \text{für } 1000 \leq x < 2000 \\ 80x & \text{für } 2000 \leq x \end{cases}$$

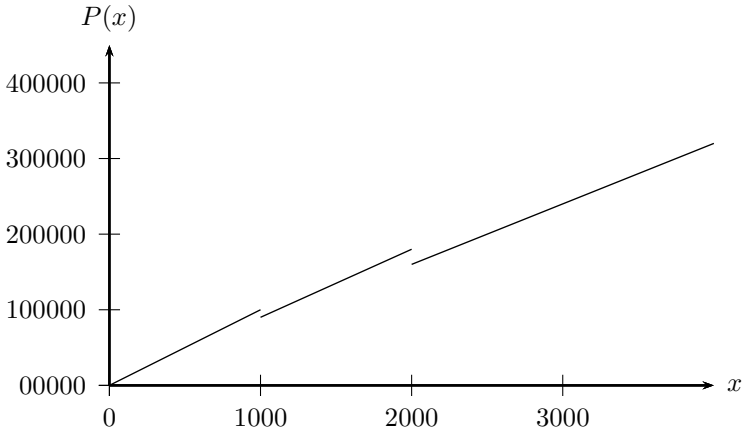


Abbildung 6.1.4: Graphische Darstellung einer Netto-Rechnungsbetragsfunktion mit Sprungstellen

Denn: Eine Mengeneinheit kostet im ersten Intervall 100 pro Stück. Somit kosten x Stücke $100x$. Im zweiten Intervall kostet eine ME pro Stück 90 GE. Damit kosten x Mengeneinheiten $90x$.
Die Funktion ist nicht stetig in 1000 und in 2000: Da dort der Grenzwert nicht definiert ist, kann der Funktionswert mit dem Grenzwert nicht zusammenfallen. Entsprechend ist die Funktion nicht stetig.
Für $x_0 = 1000$:
$\lim\limits_{x\to 1000^-}(100x) = \lim\limits_{x\to 1000^-} 100 \cdot \lim\limits_{x\to 1000^-} x = 100 \cdot 1000 = 100'000$
$\lim\limits_{x\to 1000^+}(90x) = \lim\limits_{x\to 1000^+} 90 \cdot \lim\limits_{x\to 1000^+} x = 90 \cdot 1000 = 90'000.$
Der links- und der rechtsseitige Grenzwert fallen nicht zusammen. Die Funktion ist in $x_0 = 1000$ nicht stetig.
Für $x_0 = 2000$:
$\lim\limits_{x\to 2000^-}(90x) = \lim\limits_{x\to 2000^-} 90 \cdot \lim\limits_{x\to 2000^-} x = 90 \cdot 2000 = 180'000$
$\lim\limits_{x\to 2000^+}(80x) = \lim\limits_{x\to 2000^+} 80 \cdot \lim\limits_{x\to 2000^+} x = 80 \cdot 2000 = 160'000.$
Der links- und der rechtsseitige Grenzwert fallen nicht zusammen. Die Funktion ist in $x_0 = 2000$ nicht stetig.
1001 kosten z.B. $(1001 \cdot 90) = 90\,090$ und damit weniger als $995 \cdot 100 = 99\,500$. Es geht darum, die Menge zu bestimmen, bis zu der es billiger ist, weniger zu kaufen. Offenbar ist dies $\frac{90000}{100} = 900$ (d.h. der rechtsseitige Grenzwert in 1000, geteilt durch die Kosten pro Stück im ersten Intervall). Ein solches Rabattsystem verleitet Käufer entsprechend, ab 900 benötigten Stück Tausend oder mehr als Tausend zu kaufen.

2. Wir erhalten

$$P(x) = \begin{cases} 100x & \text{für } 0 < x \leq 1000 \\ 80x + 20000 & \text{für } 1000 < x \leq 2000 \\ 60x + 60000 & \text{für } 2000 < x \end{cases}$$

Denn bis $x = 1000$ wir die Funktion wie bei Übung 6.1.1.1 durch $100x$ beschrieben. Der Rabatt wird nur für die ME, die 1000 übersteigen gewährt. Bei x ME $(1000 < x \leq 2000)$ wird der Rechnungsbetrag wie folgt berechnet: $1000 \cdot 100 + (x - 1000) \cdot 80 = 20\,000 + 80x$
Bei x ME $(2000 < x)$ wird der Rechnungsbetrag wie folgt berechnet: $1000 \cdot 100 + 1000 \cdot 80 + (x - 2000) \cdot 60 = 60000 + 60x$
Wir berechnen die links- und rechtsseitigen Grenzwerte an den Intervallgrenzen:
$\lim\limits_{x\to 1000^-}(100x) = \lim\limits_{x\to 1000^-} 100 \cdot \lim\limits_{x\to 1000^-} x = 100 \cdot 1000 = 100'000$

$\lim\limits_{x\to 1000^+}(80x + 20000) = \lim\limits_{x\to 1000^+} 80x + \lim\limits_{x\to 1000^+} 20000 = 80 \cdot 1000 + 20000 = 100000$
Damit fällt der links- und der rechtsseitige Grenzwert in 1000 zusammen. Damit existiert

der Grenzwert in 1000. Zudem ist der Grenzwert mit dem Funktionswert der Funktion in 1000 identisch. Somit ist die Funktion in 1000 stetig.

$$\lim_{x\to 2000^-}(80x+20000) = \lim_{x\to 2000^-} 80x + \lim_{x\to 2000^-} 20000 = 80\cdot 2000 + 20000 = 180000$$
$$\lim_{x\to 2000^+}(60x+60000) = \lim_{x\to 2000^+} 60x + \lim_{x\to 2000^+} 60000 = 60\cdot 2000 + 60000 = 180000$$

Damit fällt der links-und der rechtsseitige Grenzwert in 2000 zusammen. Deshalb existiert der Grenzwert in 2000. Zudem ist der Grenzwert mit dem Funktionswert der Funktion in 2000 identisch. Somit ist die Funktion in 2000 stetig (s. Abbildung 6.1.5.

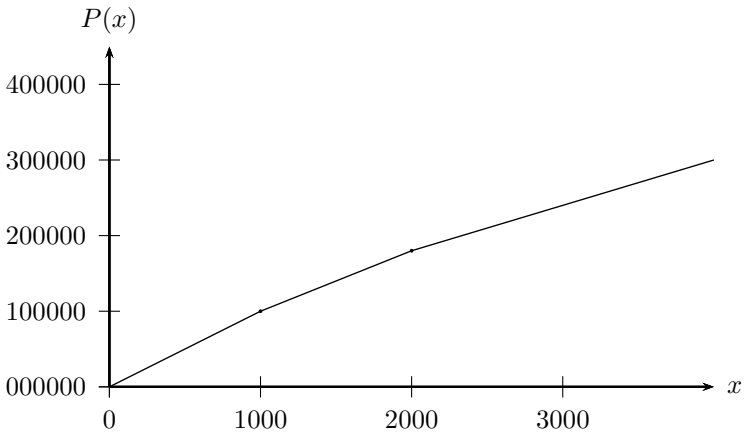


Abbildung 6.1.5: Graphische Darstellung einer stetigen Netto-Rechnungsbetragsfunktion mit Knickstellen

3. Wir erhalten für (s. Abbildung 6.1.6):

$$K_f(x) = \begin{cases} 30 & \text{für } 0 \le x < 4 \\ 50 & \text{für } 4 \le x < 10 \\ 70 & \text{für } 10 \le x < 15 \end{cases}$$

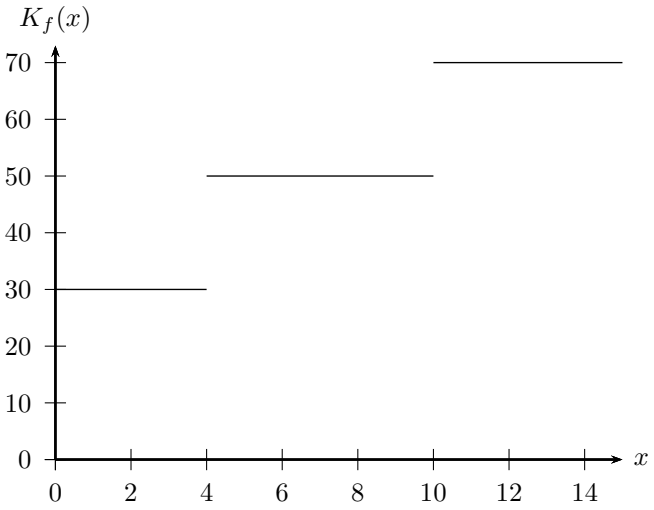


Abbildung 6.1.6: Graphische Darstellung einer Fixkostenfunktion mit Sprungstellen

Die Funktion ist nicht stetig in 4 und in 10, da:

$\lim_{x\to 4^-} 30 = 30$ und $\lim_{x\to 4^+} 50 = 50$. Der links- und der rechtsseitige Grenzwert fallen in 4 nicht zusammen. Somit ist der Grenzwert in 4 nicht definiert und kann deshalb auch nicht mit dem Funktionswert in 4 zusammenfallen. Somit nicht stetig.
$\lim_{x\to 10^-} 50 = 50$ und $\lim_{x\to 10^+} 70 = 70$. Der links- und der rechtsseitige Grenzwert fallen in 10 nicht zusammen. Somit nicht stetig.
Es ergibt sich die folgende Gesamtkostenfunktion (s. Abbildung 6.1.7):

$$K(x) = \begin{cases} 0.5x + 30 & \text{für } 0 \le x < 4 \\ 0.5x + 50 & \text{für } 4 \le x < 10 \\ 0.5x + 70 & \text{für } 10 \le x < 15 \end{cases}$$

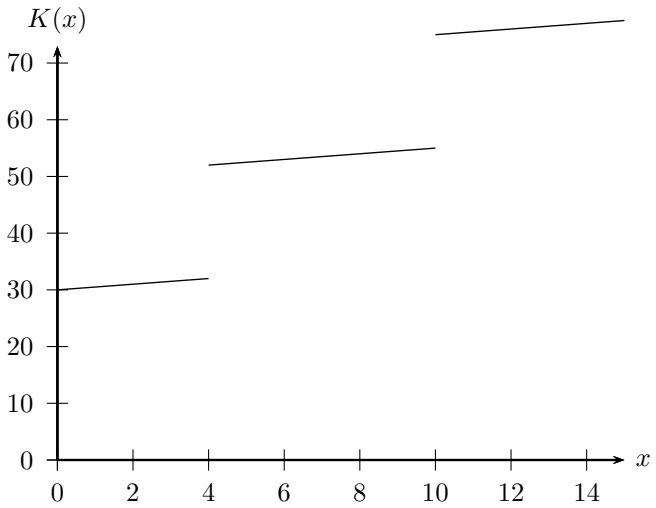


Abbildung 6.1.7: Graphische Darstellung einer Kostenfunktion mit Sprungstellen

Die Gesamtkostenfunktion ist nicht stetig:
$\lim_{x\to 4^-} (0.5x + 30) = 32$; $\lim_{x\to 4^+} (0.5x + 50) = 52 \Longrightarrow$ nicht stetig
$\lim_{x\to 10^-} (0.5x + 50) = 55$; $\lim_{x\to 10^+} (0.5x + 70) = 75 \Longrightarrow$ nicht stetig
Wir erhalten die folgende Stückkostenfunktion (s. Abbildung 6.1.8):

$$k(x) = \begin{cases} 0.5 + \frac{30}{x} & \text{für } 0 < x < 4 \\ 0.5 + \frac{50}{x} & \text{für } 4 \le x < 10 \\ 0.5 + \frac{70}{x} & \text{für } 10 \le x < 15 \end{cases}$$

.

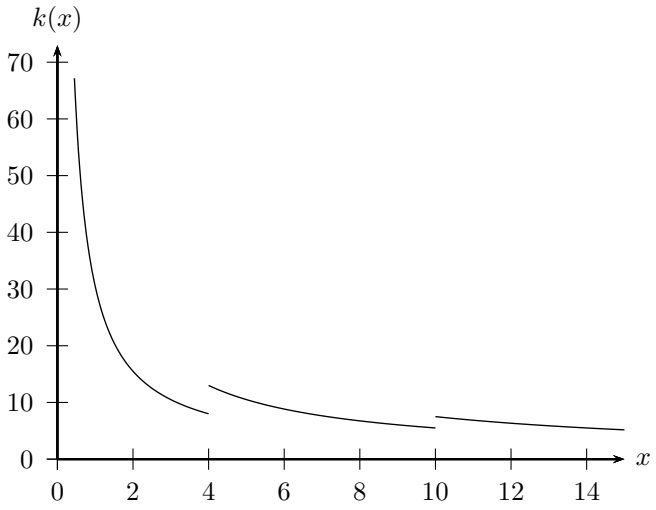


Abbildung 6.1.8: Graphische Darstellung einer Stückkostenfunktion mit Sprungstellen

$k(x)$ ist nicht stetig in 4 und in 10:

$$k(x) = \begin{cases} 0.5 + \frac{30}{x} & \text{für } 0 < x < 4 \\ 0.5 + \frac{50}{x} & \text{für } 4 \leq x < 10 \\ 0.5 + \frac{70}{x} & \text{für } 10 \leq x < 15 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 4^-} \left(0.5 + \frac{30}{x}\right) = 8$ und $\lim\limits_{x \to 4^+} \left(0.5 + \frac{50}{x}\right) = 13$
$\lim\limits_{x \to 10^-} \left(0.5 + \frac{50}{x}\right) = 5.5$ sowie $\lim\limits_{x \to 10^+} \left(0.5 + \frac{70}{x}\right) = 7.5$

4. Man erhält:

   (a) $f(x) = x$ ist als Polynom eine stetige Funktion in $\mathbb{R}$. Damit ist $\ln x$ stetig in $\mathbb{R}^+\backslash\{0\}$. Da $2x^3 + 2x$ in $\mathbb{R}$ stetig ist, ist $2x^3 + 2x$ in $\mathbb{R}^+\backslash\{0\}$ stetig. Damit ist $f(x) = 2x^3 + 2x - \ln x$ in $\mathbb{R}^+\backslash\{0\}$ stetig (als Summe von Funktionen).

   (b) Die Logarithmusfunktion ist nur für positive Werte definiert. Somit müssen wir den Bereich bestimmen, für den $-x + 8 > 0 \Longrightarrow x < 8$. Da $g'(x) = -x + 8$ stetig in $\mathbb{R}$ ist, ist damit $\ln g'(x)$ stetig in $\mathbb{R}\backslash\{x \mid x \geq 8\}$. Da $2x^3 + 2x$ stetig in $\mathbb{R}$ ist, ist $g(x) = 2x^3 + 2x - \ln(-x + 8)$ stetig in $\mathbb{R}\backslash\{x \mid x \geq 8\}$.

   (c) Die Wurzel ist in den reellen Zahlen nur für $h'(x) \geq 0$ bestimmt, also für $-2x + 8 \geq 0 \Longrightarrow x \leq 4$. Da $h'(x) = -2x + 8$ stetig ist in $\mathbb{R}$, ist $h'(x)$ stetig in $\mathbb{R}\backslash\{x \mid x > 4\}$ und damit ist dann $\sqrt{h'(x)}$ stetig in $\mathbb{R}\backslash\{x \mid x > 4\}$. Da $3x^5 - 8x^2$ stetig in $\mathbb{R}$ ist, ist $h(x) = 3x^5 - 8x^2 + \sqrt{-2x + 8}$ stetig in $\mathbb{R}\backslash\{x \mid x > 4\}$.

   (d) $\sqrt{2x^2}$ ist definiert für $2x^2 \geq 0$. Diese Ungleichung gilt für alle $x \in \mathbb{R}$. Da $2x^2$ als Polynom stetig in $\mathbb{R}$ ist, ist $\sqrt{2x^2}$ stetig in $\mathbb{R}$. Damit ist $3x^5 - 8x^2 + \sqrt{2x^2}$ stetig in $\mathbb{R}$.

6.2 Nullstellen stetiger Funktionen

Im Kapitel 3 (Polynome) entwickelten wir ein Näherungsverfahren für Nullstellen von Polynomen. Dabei setzten wir stillschweigend den folgenden Satz voraus:

Satz 6.2.1. *(Nullstellensatz) (i) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine im Intervall I stetige Funktion mit $a, b \in I, a < b, f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann gibt es mindestens eine Nullstelle zwischen a und b.*
(ii) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine im Intervall I stetige Funktion mit $a, b \in I, a < b$, $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$. Dann gibt es mindestens eine Nullstelle zwischen a und b.

Beweis. Beweis von (i): Wir definieren die Menge

$$I_{\leq} := \{x \mid f(x) \leq 0 \text{ und } x \in [a,b]\}.$$

Zudem definieren wir:
(1) s ist eine obere Schranke der Menge A genau dann, wenn für alle $x \in A$ gilt, $x \leq s$.
(2) $\sup A = S$ genau dann, wenn S eine obere Schranke von A ist und für alle oberen Schranken von s von A gilt: $S \leq s$.(Beispiele: Es gilt $\sup[a,d] = d = \sup[a,d[$; $[a,d]$ und $[a,d[$ sind Intervalle und damit Mengen)
(3) Sei $d := \sup I_{\leq}$. d liegt also auf der x-Achse.
Es gilt: $f(d) \leq 0$ oder $f(d) > 0$. Wir betrachten diese zwei Fälle:

(a) Sei $f(d) \leq 0$. Dann ist $f(d) < 0$ oder $f(d) = 0$.
Wir betrachten diese zwei Unterfälle:
(a.1) Sei $f(d) < 0$. Dann ist f in d nicht stetig. Rechts von d gilt nämlich $f(x) > 0$, sonst wäre $d \neq \sup I_{\leq}$. Damit kann man ein k mit $0 < k < -f(d)$ wählen. Für dieses k gibt es kein $r > 0$ gibt, so dass für alle $|x - d| < r$ gilt: $|f(x) - f(d)| < k$, denn in diesem Fall ist $|f(x) - f(d)| > k$ für alle x rechts von d. Somit ist $\lim_{x \to d} f(x)$ nicht definiert und kann nicht mit $f(d)$ zusammenfallen. Entsprechend wäre f in d nicht stetig.
(a.2) Sei $f(d) = 0$. Dann gibt es eine Nullstelle von f, denn d ist Element des Intervalls $[a,b]$ und f ist auf $[a,b]$ definiert und stetig, womit $f(d)$ definiert ist.

(b) $f(d) > 0$. In diesem Fall wäre f in d nicht stetig.
Wir unterscheiden zwei Fälle:
(b.1) Es gibt ein $c \in [a,b]$, so dass für $x \in]c,d[$ gilt: $f(x) \leq 0$. Damit gilt für alle $x \in]c,d[$: $f(d) - f(x) \geq f(d)$, womit es ein $k < f(d)$ gibt, für das es kein $r > 0$ gibt, so dass für $x \in]c,d[$ gilt, $f(d) - f(x) < k$. f wäre also in d nicht stetig.
(b.2) für jede Umgebung U von d in $[a,b]$ gibt es $x, y < d$, so dass $f(x) > 0$ und $f(y) \leq 0$. f wäre wiederum nicht stetig, denn dann gäbe es in jeder Umgebung von d ein y und ein k, so dass $f(d) - f(y) \geq f(d) > k$.
Fall (b) ist also unter der Voraussetzung nicht möglich, womit noch (a.2) bleibt: d ist eine Nullstelle der stetigen Funktion in $[a,b]$.

(ii) wird analog bewiesen. □

Für eine graphische Veranschaulichung zum Beweis s. Abbildung 6.2.9:

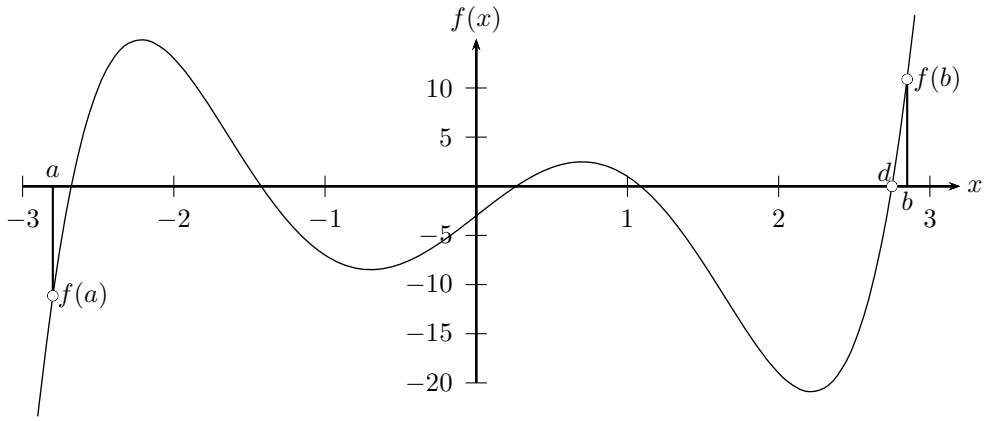


Abbildung 6.2.9: Graphische Darstellung zu einigen der Ideen bezüglich des Nullstellensatzes

Satz 6.2.2. *(Nullstellen strikt monotoner Funktionen) (i) Für eine stetige Funktion f gelte: $f(x_1) < 0$ und $f(x_2) > 0$ und f ist im Intervall $[x_1, x_2]$ strikt monoton steigend, dann gibt es genau eine Nullstelle zwischen x_1 und x_2*
(ii) Für eine stetige Funktion f gelte: $f(x_1) > 0$ und $f(x_2) < 0$ und f ist im Intervall $[x_1, x_2]$ strikt monoton sinkend, dann gibt es genau eine Nullstelle zwischen x_1 und x_2

Beweis. Wir beweisen den Satz für strikt steigende monotone Funktionen. Wir nehmen an, es gebe zwei Nullstellen a und b mit $b > a$. Wegen der strikten Monotonie muss gelten $f(b) > f(a)$, was im Widerspruch zu $f(b) = 0 = f(a)$ steht. Der Beweis von (ii) verläuft analog. □

Mit dem Nullstellensatz für stetige Funktionen sind die folgenden Sätze eng verwandt:

Satz 6.2.3. *(Zwischenwertsatz) (i) Ist die Funktion f im Intervall $I \subset \mathbb{R}$ $(I \neq \emptyset)$ stetig, dann gilt für alle $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in I)$ mit $f(x_1) < f(x_2)$: es gibt für jedes y mit $f(x_1) < y < f(x_2)$ mindestens ein $x_3 \in [x_1, x_2]$, so dass $f(x_3) = y$*
(ii) Ist die Funktion f im Intervall $I \subset \mathbb{R}$ $(I \neq \emptyset)$ stetig, dann gilt für alle $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in I)$ mit $f(x_1) > f(x_2)$: es gibt für jedes y mit $f(x_1) > y > f(x_2)$ mindestens ein $x_3 \in [x_1, x_2]$, so dass $f(x_3) = y$ (s. Abbildung 6.2.10)

Beweis. Berechnen wir $f^*(x) = f(x) - y$, so gilt $f^*(x_1)f^*(x_2) < 0$ und mit dem Nullstellensatz erhält man, dass es eine Nullstelle von f^* in $]x_1, x_2[$ gibt. Sei diese Nullstelle x_3. Dann gilt $f(x_3) = f^*(x_3) + y = y$.
Analog beweist man (ii)

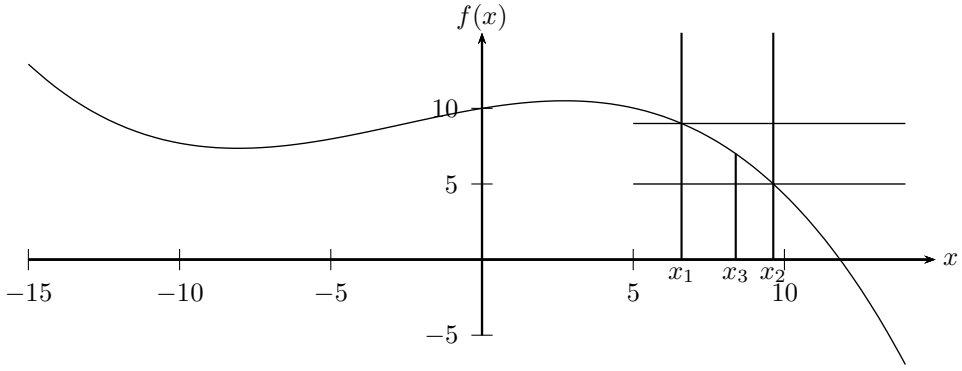


Abbildung 6.2.10: Graphik zum Zwischenwertsatz - für eine stetige Funktion gibt es für jedes $y : f(x_1) < y < f(x_2)$ ein $x_3 : x_1 < x_3 < x_2$ mit $f(x_3) = y$.

□

Satz 6.2.4. *Sei f in I stetig und sei $c \in I$ und $f(c) > 0$. Dann gibt es eine Umgebung U von c, so dass $f(x) > 0$ für $x \in U$.*

Beweis. Wir nehmen an, es gebe keine solche Umgebung. Dann gibt es für jede Umgebung von c ein x, so dass $f(x) \leq 0$. Entsprechend ist f in c nicht stetig, da es damit für $0 < k < f(c)$ kein r gibt, so dass für für alle $|x - c| < r$ gilt: $|f(x) - f(c)| < k$, denn für das x mit $f(x) \leq 0$ gilt: $f(c) - f(x) \geq f(c) > k$. Aus diesem Widerspruch zur Voraussetzung schliessen wir auf die Existenz einer Umgebung U von c, so dass $f(x) > 0$ für $x \in U$. □

Analog kann man für eine in I stetige Funktion und $c \in I$ und $f(c) < 0$ zeigen: es gibt eine Umgebung U von c, so dass $f(x) < 0$ für $x \in U$.

Gleichsam als Umkehrung des Nullstellensatzes gilt offensichtlich (wir sagen, dass eine Funktion f positiv auf einem Intervall I ist, wenn für $x \in I : f(x) > 0$ und dass eine Funktion f negativ auf einem Intervall I ist, wenn für $x \in I : f(x) < 0$).

Satz 6.2.5. *(1) Zwischen zwei benachbarten reellen Nullstellen einer stetigen Funktion f ist f entweder überall positiv oder überall negativ.*
(2) Gibt es rechts einer reellen Nullstelle einer stetigen Funktion f keine reelle Nullstellen mehr, so f hat rechts dieser Nullstelle überall dasselbe Vorzeichen.
(3) Gibt es links einer reellen Nullstelle einer stetigen Funktion f keine reellen Nullstellen mehr, so hat f links dieser Nullstelle überall dasselbe Vorzeichen.
(4) Wenn eine stetige Funktion keine reelle Nullstelle aufweist, ist sie entweder überall positiv oder überall negativ.

Beweis. (1) Zwei Nullstellen einer Funktion sind benachbart, wenn es zwischen ihnen keine Nullstelle der Funktion hat. Wir nehmen an, es gebe zwischen zwei benachbarten Nullstellen x_0 und x_1 einer stetigen Funktion einen positiven und einen negativen Funktionswert in x_3 beziehungsweise x_4 mit $x_0 < x_3 < x_4 < x_1$. Dann muss es gemäss Nullstellensatz zwischen x_3 und x_4 einen Nullstelle haben. Entsprechend sind x_0 und x_1 nicht benachbarte Nullstellen. Es kann also nicht negative und positive Funktionswerte zwischen zwei benachbarten Nullstellen einer stetigen Funktion haben.
(2) Hätte die stetige Funktion rechts der letzten reellen Nullstelle verschiedene Vorzeichen, müsste es zwischen Argumenten mit verschiedenen Vorzeichen der Funktionswerte eine Nullstelle haben. Dieser würde dem Umstand widersprechen, dass es rechts der letzten Nullstelle keine Nullstelle mehr hat.
(3) Argumentation wie (2).
(4) Wenn sie entgegengesetzte Vorzeichen aufwiese, müsste es zwischen den Argumenten mit unterschiedlichen Vorzeichen aufweisenden Funktionswerten eine Nullstelle haben - wegen der Stetigkeit der Funktion. Dies widerspricht der Voraussetzung, dass die Funktion keine reelle Nullstellen aufweist. □

Um zu überprüfen, ob eine stetige Funktion zwischen zwei benachbarten Nullstellen x_0 und x_1 überall positiv ist (oder überall negativ), genügt es also, einen Funktionswert für ein x mit $x_0 < x < x_1$ zu berechnen. Ist $f(x) > 0$ ist die Funktion im Intervall $]x_0, x_1[$ überall positiv, ist $f(x) < 0$, ist sie dort überall negativ. Weist eine stetige Funktion in einem Intervall keine Nullstelle auf, hat sie auf diesem Intervall überall dasselbe Vorzeichen. Man kann aus der Tatsache, dass die Funktion bei drei aufeinanderfolgenden Nullstellen x_0, x_1 und x_2 im Intervall $]x_0, x_1[$ negativ ist allerdings nicht schliessen, dass sie im Intervall $]x_1, x_2[$ positiv ist. Die Funktion könnte in x_1 die x-Achse nur berühren, ohne sie zu queren. Um das Vorzeichen einer stetigen Funktion rechts der letzten Nullstelle zu bestimmen, genügt es einen Funktionswert rechts dieser Nullstelle zu berechnen. Analog links der ersten Nullstelle. Weist eine stetige Funktion keine reelle Nullstelle auf, genügt es einen einzigen Funktionswert zu berechnen, um das Vorzeichen der Funktionswerte überall zu bestimmen.

Für stetige Funktionen kann für die Berechnung der Nullstellen das Näherungsverfahren verwenden, das im Rahmen der Polynome dritten Grades für diesen Zweck eingeführt wurde, sofern die Funktion an der entsprechenden Nullstelle die x-Achse durchquert und nicht nur berührt.

6.2.1 Übungen

1. Berechnen Sie die Nullstelle von $f(x) = \ln x - 1$ mit $x > 0$ (Berechnung von Hand und Näherungsverfahren und mit R).

2. Berechnen Sie die Nullstelle von $f(x) = 5x^3 - 1.5e + \ln(3x)$ mit Excel (Näherungsverfahren und mit R) auf 6 Stellen genau.

3. Bestimmen Sie für die vier Funktionen

$$f(x) = -3x^2 + 4x + 2$$
$$f(x) = 3x^3 + 6x^2 - 2$$
$$f(x) = \ln(x + 5)$$
$$f(x) = 3 - e^{x-5}$$
$$f(x) = 2x^2 + 2$$

die Intervall, wo $f(x) > 0$ und $f(x) < 0$. Bestimmen Sie vorgängig den Definitionsbereich der Funktionen.

4. Bestimmen Sie die Intervalle, auf denen die folgende Funktion positiv und auf denen sie negativ ist.

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{4-x}$$

6.2.2 Lösungen

1. Der Definitionsbereich von $f(x) = \ln(x) - 1$ ist $\mathbb{R}^+\backslash\{0\}$. f ist zudem für $x > 0$ stetig. Es gilt

$$\ln 1 - 1 = -1$$
$$\ln 10 - 1 = 1.302\,6$$

Damit gibt es zwischen 1 und 10 mindestens eine 0-Stelle. Da $\ln(x) - 1$ strikt monoton steigend ist, gibt es dort genau eine Nullstelle. Wir können ohne Näherungsverfahren berechnen: $f(x) = \ln x - 1 = 0$. Damit ist $\ln x = 1$ und $\exp(\ln x) = x = \exp(1) = e$.

2. Der Definitionsbereich von $\ln(3x)$ ist $\mathbb{R}^+\backslash\{0\}$, für die Konstante $-1.5e$ $\mathbb{R}$ und für das Polynom $5x^3$ ebenfalls $\mathbb{R}$. Somit ist der Definitionsbereich für f $\mathbb{R}^+\backslash\{0\}$. Damit können wir die Suche nach Nullstellen auf diesen Bereich beschränken. $5x^3 - 1.5e + \ln(3x)$ ist stetig in $\mathbb{R}^+\backslash\{0\}$. $5x^3$ ist für positive x strikt monoton steigend und $3x$ ebenfalls. Entsprechend ist $\ln(3x)$ strikt monoton steigend. Deshalb, und da $1.5e$ konstant ist, ist f im Definitionsbereich strikt monoton steigend. Entsprechend wird es höchstens eine Nullstelle geben. Die Nullstelle ist: 0.85585.

3. Es ergibt sich:

   (a) $-3x^2 + 4x + 2 > 0$ (Definitionsbereich $\mathbb{R}$, stetig auf $\mathbb{R}$)
   Wir berechnen die Nullstellen der Funktion:
   $x_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{10} \approx 1.720\,8$
   $x_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{10} \approx -0.387\,43$
   Da für $x = 0 \in]x_1, x_2[$ gilt: $f(x) = 2 > 0$, gilt: $f(x) > 0$ im Intervall $]x_1, x_2[$
   Somit ist die Lösungsmenge von $-3x^2 + 4x + 2 > 0$
   $S =]-0.38743, 1.7208[$

   Die Lösungsmenge von $-3x^2 + 4x + 2 < 0$
   $f(-2) = -3(-2)^2 + 4(-2) + 2 = -18$. Somit gilt $f(x) < 0$ für alle $x \in]-\infty, x_2[$
   $f(2) = -3(2)^2 + 4(2) + 2 = -2$. Somit gilt $f(x) < 0$ für alle $x \in]x_1, \infty[$
   Somit gilt: $S =]-\infty, -0.38743[\ \cup \ ]1.7208, \infty[$
   Die Lösungsmenge von $-3x^2 + 4x + 2 \leq 0$
   $S =]-\infty, -0.38743] \ \cup \ [1.7208, \infty[$

   (b) $f(x) = 3x^3 + 6x^2 - 2$ (Definitionsbereich: $\mathbb{R}$, stetig auf $\mathbb{R}$)
   Wir berechnen die Nullstellen: $3x^3 + 6x^2 - 2 = 0$
   $x_1 = -1.79251721397$;

$x_2 = -0.722351724464$,
$x_3 = 0.514868938439$.

Wir berechnen für jedes der Intervalle $]-\infty, x_1[$ $]x_1, x_2[$, $]x_2, x_3[$, $]x_3, \infty[$ je ein $f(x)$.
$f(-2) = 3 \cdot (-2)^3 + 6 \cdot (-2)^2 - 2 = -2$. Somit gilt für $x \in\ ]-\infty, x_1[$: $f(x) < 0$
$f(-1) = 3 \cdot (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 - 2 = 1$. Somit gilt für alle $x \in\ ]x_1, x_2[$: $f(x) > 0$
$f(0) = -2$. Somit gilt für alle $x \in\ ]x_2, x_3[$: $f(x) < 0$
$f(1) = 3 \cdot (1)^3 + 6 \cdot (1)^2 - 2 = 7$. Somit gilt für alle $x \in\ ]x_3, \infty[$: $f(x) > 0$

Wir erhalten somit als Lösungsmenge für $3x^3 + 6x^2 - 2 > 0:\ S = \ ]x_1, x_2[\ \cup\ ]x_3, \infty[$
Lösungsmenge für $3x^3 + 6x^2 - 2 < 0:\ S =]-\infty, x_1[\cup]x_2, x_3[$.

(c) $f(x) = \ln(x + 5)$
Logarithmen sind nur für positive reelle Zahlen definiert. Entsprechend muss $x + 5 > 0$ sein. Somit muss $x > -5$ gelten. Der Definitionsbereich D ist somit: $]-5, \infty[$, stetig auf D.
Wir berechnen die Nullstelle: $\ln(x + 5) = 0 \Longrightarrow e^{\ln(x+5)} = e^0 = 1$
Es gilt: $e^{\ln(x+5)} = x + 5$, da $\ln e^{\ln(x+5)} = \ln(x + 5) \Longleftrightarrow \ln(x + 5) \ln e = \ln(x + 5) \Longleftrightarrow \ln(x + 5) = \ln(x + 5)$
(Zur Erinnerung: $\ln e = 1$). Damit erhalten wir: $x + 5 = 1$ und $x = -4$

Wir berechnen rechts und links der Nullstelle je ein $f(x)$.
$f(-4.5) = \ln(-4.5 + 5) = -0.693\,15$
Somit gilt für alle $x \in\ ]-5, -4[$: $f(x) < 0$
$f(0) = \ln(5) = 1.\,609\,4$
Somit gilt für alle $x \in\ ]-4, \infty[$: $f(x) > 0$

Wir erhalten somit für die Ungleichung $\ln(x + 5) > 0$ die Lösungsmenge: $S =]-4, \infty[$
Wir erhalten für die Ungleichung $\ln(x + 5) < 0$ die Lösungsmenge $S =]-5, -4[$

(d) $f(x) = 3 - e^{x-5}$ Definitionsbereich: $\mathbb{R}$, stetig auf $\mathbb{R}$.
Wir suchen die Nullstelle: $3 - e^{x-5} = 0 \Longrightarrow e^{x-5} = 3 \Longrightarrow$
$\ln e^{x-5} = \ln 3 \Longrightarrow (x - 5) \ln e = \ln 3 \Longrightarrow x - 5 = \ln 3 \Longrightarrow x = 5 + \ln 3 \approx 6.\,098\,6$
Wir berechnen vor und nach der Nullstelle ein $f(x)$:
$f(0) = 3 - e^{-5} = 2.\,993\,3$. Somit gilt für alle $x \in\ ]-\infty, 5 + \ln 3[$: $f(x) > 0$
$f(10) = 3 - e^{10-5} = -145.\,41$. Somit gilt für alle $]5 + \ln 3, \infty[$: $f(x) < 0$
Wir erhalten als Lösungsmenge für $3 - e^{x-5} > 0:$ $\mathrm{S} =]-\infty, 5 + \ln 3[$
Lösungsmenge für $3 - e^{x-5} < 0:$ $\mathrm{S} =]5 + \ln 3, \infty[$

(e) $f(x) = 2x^2 + 2$ Definitionsbereich: $\mathbb{R}$, stetig auf $\mathbb{R}$.
Wir berechnen die Nullstellen: $2x^2 + 2 = 0 \Longrightarrow x^2 = -1 \Longrightarrow$ keine reelle Nullstelle.
Wir berechnen einen Wert $f(x)$: $f(0) = 2$. Somit gilt für $x \in \mathbb{R}$: $f(x) > 0$

4. Der Definitionsbereich der Funktion ist $\mathbb{R}\backslash\{1, 4\}$. Die Funktion ist stetig auf den Intervall $]-\infty, 1[,]1, 4[,]4, \infty[$. Eine Nullstelle hat sie in

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{4-x} &= 0 \\ \frac{x - 4 - 2\,(x-1)}{(x-1)\,(4-x)} &= 0 \\ x - 4 - 2x + 2 = -x - 2 &= 0 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Vorzeichenwechsel können an Unstetigkeitsstellen und an Nullstellen auftreten. Entsprechen

kontrollieren wir Funktionswerte vor und nach Nullstellen und Unstetigkeitsstellen:

$$y = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{4-x}$$
$$x = 5$$

$$f(0) = -\frac{3}{2}$$
$$f(1.5) = 1.2$$
$$f(2.5) = -\frac{2}{3}$$
$$f(5) = \frac{9}{4}$$

Die Funktion ist also negativ auf]-∞, 1[, positiv auf]1,2[, negativ auf]2,4[und positiv auf]4,∞[.
Machen Sie eine Graphik mit R, um die Aussage graphisch zu überprüfen:
f=function(x) 1/(x-1)-2/(4-x); plot(f,xlim=c(-1,5)); abline(0,0)
Mit der Methode kann man Ungleichungen wie $\frac{1}{x-1} \leq \frac{2}{4-x}$ auflösen. Aus de Ungleichung kann man schliessen: $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{4-x} \leq 0$. Es geht also darum, die Intervalle zu bestimmen, wo die Funktion $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{4-x} \leq 0$.

6.3 Lernziele

- Die Definition der Stetigkeit in einem Punkt (in einem Intervall) und der rechtseitigen und linkseitigen Stetigkeit an den Rändern eines geschlossenen Intervalls kennen.
- Die Definition der Stetigkeit in einem Intervall kennen und erklären können, was Stetigkeit fürs Zeichnen bezüglich einer auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierten Funktion bedeutet.
- Die wichtigsten stetigen Funktionen kennen und die Intervalle, auf denen diese stetig sind. Die Regeln kennen, wie sich Stetigkeit für verkettete Funktionen ermitteln lässt.
- Berechnungen wie in den Übungen machen können.
- Den Nullstellen- und den Zwischenwertsatz an Hand einer Zeichnung erläutern können.
- Nullstellenberechnungen für stetige Funktion mit Excel (Näherungsverfahren) und mit **R** durchführen können.
- Für stetige Funktionen die Intervalle berechnen können, auf denen die Funktion positiv (negativ) ist.

Kapitel 7

Die Steigung einer stetigen Funktion in einem Punkt

7.1 Definition der Steigung einer stetigen Funktion

Definition 7.1.1. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, I ein offenes Intervall. Ist*

$$m(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

definiert, so nennen wir $m(x_0)$ die Steigung der Funktion f in x_0. ◊

Für die Definiertheit von $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ist die Stetigkeit der Funktion f in x_0 eine notwendige, jedoch keine hinreichende Bedingung, wir wir sehen werden.

Die folgenden Überlegungen können die Definition plausibel machen:

1. In Bezug auf lineare und affine Funktionen wählen wir zwei beliebige Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$, um die Steigung $m = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ zu berechnen. Die Ähnlichkeit dieser Definition mit der Definition 7.1.1 springt ins Auge. Der Unterschied der Definitionen liegt im Folgenden: lineare und affine Funktionen haben überall (in allen x) die selbe Steigung. Andere Funktionen können jedoch in jedem Punkt eine andere Steigung aufweisen. Deshalb muss man eine Definition finden, die für die verschiedenen x_0 die Bestimmung der jeweiligen Steigung erlaubt.

2. Wir definieren eine Sekante g einer Funktion f in x_0 als eine Gerade, die durch $(x_0, f(x_0)$ läuft und die in einer Umgebung U von x_0 die Funktion f ein zweites Mal schneidet (s. Abbildung 7.1.1):

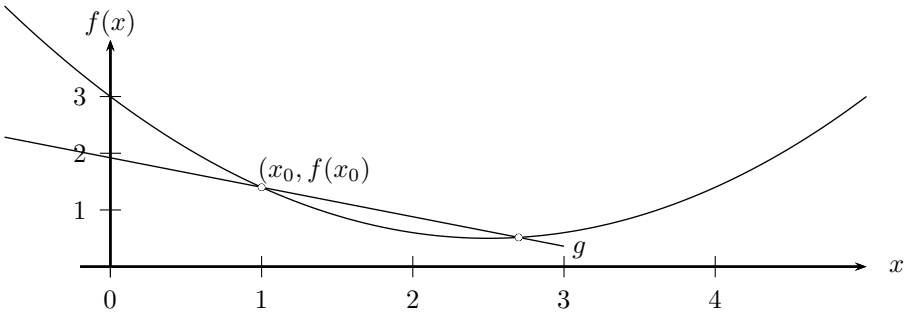


Abbildung 7.1.1: Die Funktion f mit einer Sekante im Punkt $(x_0, f(x_0))$

Wir bezeichnen den zweiten Schnittpunkt von g und f in einer Umgebung von x_0 mit $(x, f(x))$. Lassen wir nun x gegen x_0 gehen, nähern sich die Sekanten einer Geraden h, die mit f nur mehr einen Schnittpunkt gemeinsam hat und deren Steigung man sinnvollerweise mit der Steigung von f in x_0 identifiziert (s. Abbildung 7.1.2):

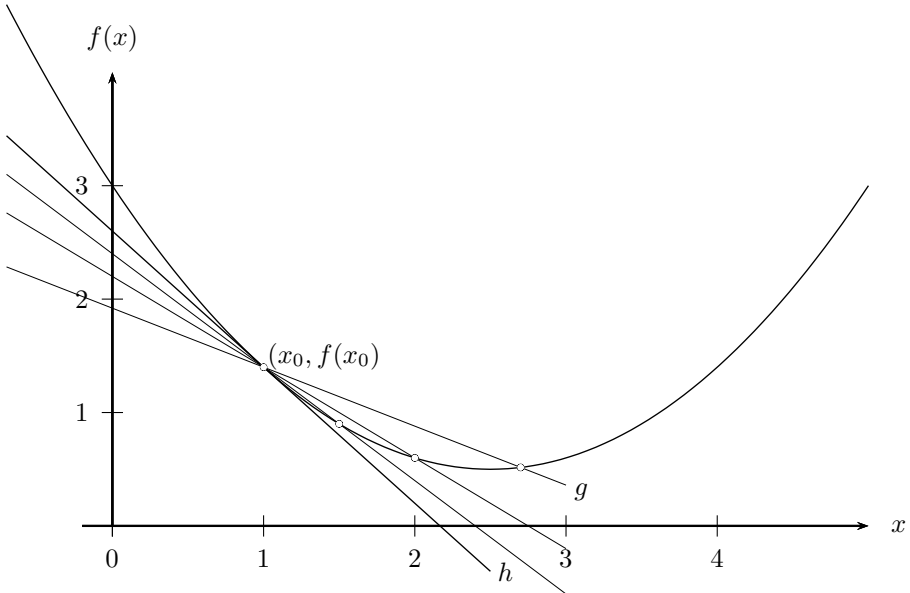


Abbildung 7.1.2: Sekanten durch $(x_0, f(x_0)$ und $(x, f(x)$ mit $x = 2.7, 2, 1.5$ und Gerade h, der sich die Sekanten für $x \to x_0$ nähern.

Die Steigungen der Sekanten sind $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Die Steigung von h identifiziert man sinnvoller weise mit dem Grenzwert der Steigungen der Sekanten für $x \to x_0$, d.h. mit

$$m_h = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Wir nennen h die Tangente von f in $(x_0, f(x_0)$.

3. Die *Definition* 7.1.1 führt für Geraden zum selben Resultat, wie die Definition $m = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Für $f(x) = ax + b$ erhalten wir:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{ax + b - (ax_0 + b)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{a(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} a = a$$

Die *Definition* 7.1.1 dient jedoch nicht nur dazu, bereits Bekanntes abzuleiten. Betrachten wir als Beispiel der weitergehenden Möglichkeiten der neuen Definition die Funktion $f(x) = x^2$. Wir können die Steigung dieser Funktion für jedes x_0 allgemein herleiten:
Wir substituieren in die *Definition 7.1.1*:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) \\ &= \lim_{x \to x_0} x + \lim_{x \to x_0} x_0 = x_0 + x_0 = 2x_0.\end{aligned}$$

Für die Steigung m der Funktion $f(x) = x^2$ gilt in jedem Punkt: $(x_0, f(x_0))$:

$$m(x_0) = 2x_0.$$

Die Steigung von $f(x) = x^2$ in $(1, 1)$ ist $2 \cdot 1 = 2$ (= die Steigung der Tangente in $(1, 1)$). In $(2, 4)$ beträgt die Steigung: $2 \cdot 2 = 4$, in $(3, 9) : 3 \cdot 2 = 6$, usw. (s. Abbildung 7.1.3)

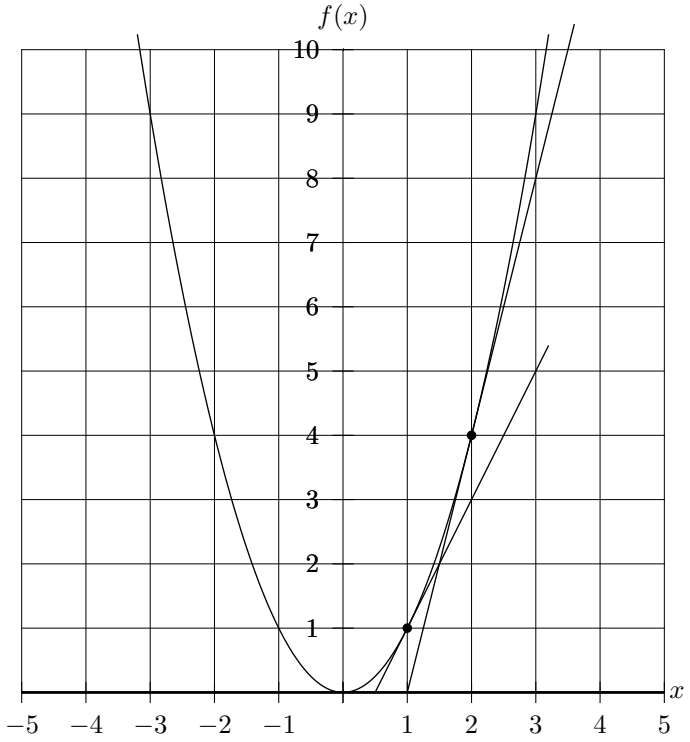


Abbildung 7.1.3: Steigungen der Tangenten an die Funktion $f(x) = x^2$ in $x_0 = 1$ und $x_0 = 2$. Die Steigung der Tangenten kann mit Hilfe des Gitters überprüft werden und sie ist mit der Steigung der Funktion in diesen Punkten identisch.

Bemerkung 7.1.2. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *ist der Grenzwert der Funktion* $F_{x_0}(x) := \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *für* x *gegen* x_0*. Dabei ist* F_{x_0} *für* $x = x_0$ *nicht definiert (Division durch 0), womit* F_{x_0} *in* x_0 *nicht stetig ist. Trotzdem gibt es für viele stetige Funktionen* f *jeweils den Grenzwert der Funktion* F_{x_0} *in* x_0*.* $\Diamond$

7.2 Die Ableitung einer stetigen Funktion f

Im betrachteten Beispiel $f(x) = x^2$ ist die Steigung der Funktion f in x_0 eine Funktion $m(x_0) = 2x_0$ von x_0. Da x_0 eine Variable wie x ist, verwenden wir x statt x_0. Wir nennen die Funktion m „Ableitung“ von f und wir kürzen diese ab durch f'.

In Bezug auf unser Beispiel $f(x) = x^2$ ist die Ableitung von f die Funktion $f'(x) = 2x$. Die Berechnung der Ableitung nennt man „ableiten“ oder „differenzieren“. Weitere gebräuchliche Symbolisierungen für $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{\triangle \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle) - f(x_0)}{\triangle} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle f(x)}{\triangle x} \\ &= \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{df(x)}{dx} \end{aligned}$$

Es ist nicht nötig, für jede Funktion durch die Verwendung der Definition *7.1.1* den entsprechenden Grenzwert für beliebige x_0 zu berechnen, um die Ableitungsfunktion zu bestimmen. Wir können Sätze beweisen, die es erlauben, ganze Klassen von Funktionen leicht abzuleiten.

Satz 7.2.1. *Wenn $f(x) = x^n$, dann $f'(x) = nx^{n-1}$ für $n > 0$.*

Beweis. Durch Einsetzen in die Definition erhält man

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0}.$$

Den Grenzwert können wir berechnen, wenn es uns gelingt, $x^n - x_0^n$ als Produkt

$$(x - x_0) \cdot A$$

darzustellen (faktorisieren), wobei A ein noch zu berechnender algebraischer Ausdruck ist. Damit kürzt sich dann in

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0) \cdot A}{x - x_0}$$

$x - x_0$ weg. Durch (etwas unübersichtliche) Polynomdivision erhält man

$$x^n - x_0^n : x - x_0 = \sum_{i=0}^{n-1} x_0^i x^{n-1-i}. \tag{7.2.1}$$

Man kann dieses Ergebnis durch Induktion beweisen.
(1) Der Satz gilt für $n = 2$:

$$\begin{array}{lll} x^2 - x_0^2 : & x - x_0 & = x + x_0 \\ \underline{x^2 - xx_0} & & \\ \quad xx_0 - x_0^2 & & \\ \quad \underline{xx_0 - x_0^2} & & \\ \quad 0 & & \end{array}$$

Nun ist

$$x + x_0 = x^1 x_0^0 + x^0 x_0^1 = \sum_{i=0}^{2-1} x_0^i x^{2-1-i}$$

Damit gilt der Satz für $n = 2$.
(2) Man nimmt nun an, der Satz gelte für n, d.h. es gilt (7.2.1). Es gilt nachzuweisen, dass er dann für $n + 1$ gilt:

$$\begin{array}{lll} x^{n+1} - x_0^{n+1} : & x - x_0 & = x^n \\ \underline{x^{n+1} - x^n x_0} & & \\ \quad x^n x_0 - x_0^{n+1} & & \end{array}$$

Nun gilt für den Rest $x^n x_0 - x_0^{n+1} = x_0 \left(x^n - x_0^n\right)$. Da der Satz für n gilt, erhält man

$$x_0 \left(x^n - x_0^n\right) : (x - x_0) = x_0 \sum_{i=0}^{n-1} x_0^i x^{n-1-i}$$

und damit

$$\begin{aligned} x^{n+1} - x_0^{n+1} : x - x_0 &= x^n + x_0 \sum_{i=0}^{n-1} x_0^i x^{n-1-i} \\ &= x^n + \sum_{i=0}^{n-1} x_0^{i+1} x^{n-1-i} \\ &= x_0^0 x^n + \sum_{i=0}^{n-1} x_0^{i+1} x^{n-1-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n} x_0^i x^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{(n+1)-1} x_0^i x^{(n+1)-1-i} \end{aligned}$$

(3) Damit gilt (Induktionsschluss)

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \sum_{i=0}^{n-1} x_0^i x^{n-1-i}$$

und entsprechend

$$x^n - x_0^n = (x - x_0) \sum_{i=0}^{n-1} x_0^i x^{n-1-i}$$

für alle $n \geq 2$.

Mit diesem Ergebnis können wir nun den Satz beweisen: Wir setzen in die Ableitungsdefinition ein und formen um:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0) \sum_{i=0}^{n-1} x_0^i x^{n-1-i}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \sum_{i=0}^{n-1} x_0^i x^{n-1-i} = \sum_{i=0}^{n-1} x_0^i \lim_{x \to x_0} x^{n-1-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} x_0^i x_0^{n-1-i} = \sum_{i=0}^{n-1} x_0^{i+n-1-i} = \sum_{i=0}^{n-1} x_0^{n-1} \\ &= n x_0^{n-1} \end{aligned}$$

□

Satz 7.2.2. *Wenn $h(x) = f(x) + g(x)$, dann $h'(x) = f'(x) + g'(x)$ (sofern $f'(x)$ und $g'(x) \in \mathbb{R}$).*

Beweis. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ wird zu:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)+g(x)-(f(x_0)+g(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\frac{(f(x)-f(x_0))+(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}\\ &= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\\ &= f'(x)+g'(x)\end{aligned}$$

□

Satz 7.2.3. *Wenn $f(x)=a$, dann $f'(x)=0$. (a ist eine reelle Zahl).*

Beweis. $f(x)=a=f(x_0)$. Und damit

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{a-a}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}0=0$$

□

Satz 7.2.4. *Wenn $h(x)=af(x)$, dann $h'(x)=af'(x)$ (wenn a und $f'(x)\in\mathbb{R}$).*

Beweis. $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ wird zu:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{af(x)-af(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\frac{a(f(x)-f(x_0))}{x-x_0}\\ &= a\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\ &= af'(x_0)\end{aligned}$$

□

Mit Hilfe dieser Regeln können wir alle Polynomfunktionen ableiten: z.B.

Beispiel 7.2.5. $f(x)=2x^2-14x+4\Longrightarrow f'(x)=4x-14$
(Denn: Auf Grund des Satzes 7.2.2 können wir eine Summe summandenweise ableiten. Zudem gilt: $\frac{d}{dx}\left(2x^2\right)=2\frac{d}{dx}\left(x^2\right)=2\cdot 2x=4x$; $\frac{d}{dx}(-14x)=-14\frac{d}{dx}x=-14\cdot 1=-14$;*(die Ableitung von* $f(x)=x$ *ist* 1, *da* $\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}1=1$. *Andere Argumentation:* $f(x)=x$ *ist die Winkelhalbierende des ersten und des dritten Quadranten und wird durch die Punkte* (x,x) *gebildet. Die Steigung der Geraden ist* $\frac{x}{x}=1$*))*
$\frac{d}{dx}(4)=0$; ◊

Mit anderen Worten können wir Polynome ableiten, indem wir für jeden Summanden den Koeffizienten mit der Hochzahl multiplizieren und die Hochzahl um eins zurücksetzen. Dabei ist zu beachten, dass der Koeffizient von x^n 1 ist und dass diese Regel bei x^1 den Ausdruck $1\cdot x^0=1\cdot 1=1$ ergibt.

Beispiel 7.2.6. $f(x)=3x^5-4x^2+x-78\Longrightarrow f'(x)=15x^4-8x+1$ ◊

Beispiel 7.2.7. $f(x)=24x^6-13x^5+143x^4-184x^3-99x^2+12x+4988\Longrightarrow$
$f'(x)=144x^5-65x^4+572x^3-552x^2-198x+12$ ◊

Satz 7.2.8. *Wenn f in x_0 differenzierbar ist, dann ist f stetig in x_0*

Beweis. Wir nehmen an, f sei in x_0 differenzierbar. Somit gibt es ein $b = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R}$.
Zudem gilt: $\lim\limits_{x\to x_0} (x - x_0) = 0$. Damit ist $\lim\limits_{x\to x_0} (x - x_0) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ eine reelle Zahl und es gilt: $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \lim\limits_{x\to x_0} (x - x_0) = 0$
Nun ist aber: $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \lim\limits_{x\to x_0} (x - x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot (x - x_0)\right) =$
$\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0} f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) - f(x_0)$
Somit gilt: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$
und damit: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Somit ist laut Definition der Stetigkeit f in x_0 stetig. □

Man beachte, dass die Umkehrung nicht gilt. Aus der Stetigkeit einer Funktion kann nicht auf die Differenzierbarkeit geschlossen werden. Doch dazu später mehr.

7.3 Monotonie und Ableitungen

Im Kapitel „weitere reelle Funktionen“ wurde kurz das Steigungsverhalten von Funktionen diskutiert, und es wurden die Begriffe des „strikt monotonen Steigens“ und „Fallens“ eingeführt (S. 128, Definition 4.2.27). Es wurde darauf hingewiesen, dass die Anwendungen der dortigen Definitionen recht schwierig ist. Die Differentialrechnung eröffnet diesbezüglich neue und einfachere Möglichkeiten, wie wir nun zeigen wollen.

Satz 7.3.1.
- *Sei f in $]a,b[$ stetig und differenzierbar: Wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in]a,b[$, so ist f in $]a,b[$ strikt monoton steigend*
- *Sei f in $]a,b[$ stetig und differenzierbar: wenn $f'(x) < 0$ für alle $x \in]a,b[$, dann ist f in $]a,b[$ strikt monoton sinkend.*

Beweis. Sei $f'(x_1) > 0$ für alle $x_1 \in]a,b[$. Für x_1 und beliebige $x \in]a,b[$, x verschieden von x_1, gilt dann

$$\lim_{x\to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} > 0.$$

Da f stetig in $]a,b[$ ist (sonst würde die Ableitung f' nicht existieren), ist

$$h(x) := \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

stetig in der Menge

$$]a,b[\ \setminus \ \{x_1\}.$$

Wir können nun die stetige Fortsetzung g von h betrachten, da der Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_1} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ definiert ist:

$$g(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} & \text{für } x \in]a,b[\setminus \{x_1\} \\ \lim\limits_{x'\to x_1} \frac{f(x')-f(x_1)}{x'-x_1} & \text{für } x = x_1 \end{cases}$$

Damit gilt dann

$$f'(x_1) = \lim_{x'\to x_1} \frac{f(x') - f(x_1)}{x' - x_1} = g(x_1) > 0.$$

Da $g(x_1) > 0$ und g in $]a,b[$ stetig ist, gibt es eine Umgebung I von x_1, so dass $g(x) > 0$ für $x \in I$. Es gilt nun für $x \neq x_1$: $x - x_1 > 0$ oder $x - x_1 < 0$. Im ersten Fall gilt, da $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} > 0$ für $x \in I$,

$f(x) - f(x_1) > 0$ und damit $f(x) > f(x_1)$.Mit anderen Worten: wenn $x > x_1$ dann $f(x) > f(x_1)$. Im zweiten Fall gilt wegen $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} > 0$ für $x \in I : f(x) - f(x_1) < 0$ und damit $f(x) < f(x_1)$. Damit gilt auch in diesem Fall: Wenn $x_1 > x$, dann $f(x_1) > f(x)$. Laut Definition ist f folglich strikt monoton steigend.
Der Beweis für den zweiten Teil des Satzes verläuft analog. □

Beispiel 7.3.2. *Ist* $f(x) = 5x^4 - 12x^3 + 6x^2 - 4x + 5$ *in* $]5, 6[$ *strikt monoton steigend oder strikt monoton sinkend? Eine Funktion ist in einem Intervall strikt monoton steigend, wenn die Ableitung im Intervall überall positiv ist. Wenn die Ableitung stetig ist, bedeutet das, dass im Intervall keine Nullstelle der Ableitung vorkommt und dass die Funktionswerte der Ableitung positiv sind. Kommt keine Nullstelle der stetigen Ableitung vor, genügt es einen Funktionswert der Ableitung zu berechnen, um zu wissen, ob die Ableitung im Intervall überall positiv ist oder überall negativ ist (s. Satz 6.2.5, Seite 207). Entsprechend müssen wir die Nullstellen der Ableitung berechnen:* $f'(x) = 20x^3 - 36x^2 + 12x - 4 = 0 \Longrightarrow x_1 = 1.4869$. *Da* x_1 *nicht in* $]5, 6[$ *liegt,* f' *stetig ist und* $f'(5.5) = 20\,(5.5)^3 - 36\,(5.5)^2 + 12\,(5.5) - 4 = 2300.5 > 0$, *ist* f' *in* $]5, 6[$ *überall positiv und* f *ist in* $]5, 6[$ *überall strikt monoton steigend.*
Demgegenüber ist f *strikt sinkend auf* $]-1, 1[$, *da es im Intervall keine Nullstelle der Ableitung hat,* f' *stetig ist und* $f'(0) = -4 < 0$.*Im Intervall* $]1, 2[$ *ist die Funktion weder strikt monoton steigend noch strikt monoton sinkend. Es liegt vielmehr ein Vorzeichenwechsel der Steigung vor, da die Ableitung eine Nullstelle aufweist. Links der Nullstelle der Ableitung nimmt die Ableitung negative Funktionswerte an. Deshalb ist dort die Funktion strikt monoton sinkend. Rechts der Nullstelle der Ableitung nimmt die Ableitung positive Funktionswerte an. Deshalb ist dort die Funktion strikt monoton steigend.*
Mit Hilfe der Nullstellen einer stetigen Ableitung und je einem Funktionswert der Ableitung links der ersten Nullstelle, zwischen benachbarten Nullstellen und rechts der letzten Nullstellen kann man das Steigungsverhalten der Funktion auf dem gesamten Definitionsbereich der Funktion beschreiben. Im Beispiel gibt es nur eine reelle Nullstelle der steigen Ableitung. Wir berechnen also rechts und links dieser Nullstelle einen Funktionswert der Ableitung (s. oben): Die Funktion ist also rechts von 1.4969 überall strikt monoton steigend und links davon überall strikt monoton sinkend.

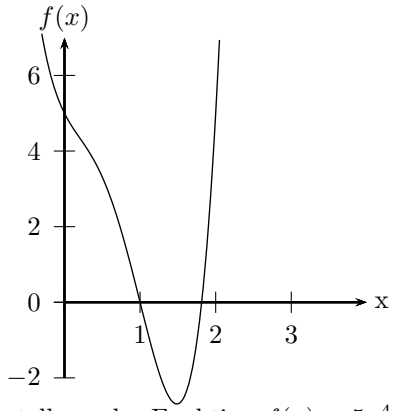


Abbildung 7.3.4: Graphische Darstellung der Funktion $f(x) = 5x^4 - 12x^3 + 6x^2 - 4x + 5$

◊

Man beachte, dass die Umkehrung des Satzes 7.3.1 nicht gilt. Aus der strikten Monotonie kann nicht auf das Vorzeichen der Ableitung geschlossen werden. So ist z.B. die Funktion $f(x) = x^3$ in $]-1, 1[$ strikt monoton steigend, es gilt jedoch: $\frac{d}{dx}\left(x^3\right) = 3x^2 \Longrightarrow f'(0) = 0$.

7.4 Maxima und Minima

Die Differentialrechnung kann bei vielen stetigen Funktionen dazu verwendet werden, um lokale Maxima und Minima zu bestimmen.

Definition 7.4.1.

- *In x_0 liegt ein (striktes) lokales Minimum der Funktion f genau dann, wenn es eine Umgebung U von x_0 gibt, so dass für alle $x \in U$ mit $x \neq x_0$ gilt: $f(x) > f(x_0)$*
- *In x_0 liegt ein (striktes) lokales Maximum der Funktion f genau dann, wenn es eine Umgebung U von x_0 gibt, so dass für alle $x \in U$ mit $x \neq x_0$ gilt: $f(x) < f(x_0)$*
- *In x_0 liegt ein (striktes) lokales Extremum der Funktion f genau dann, wenn in x_0 ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum vorliegt.*

◊

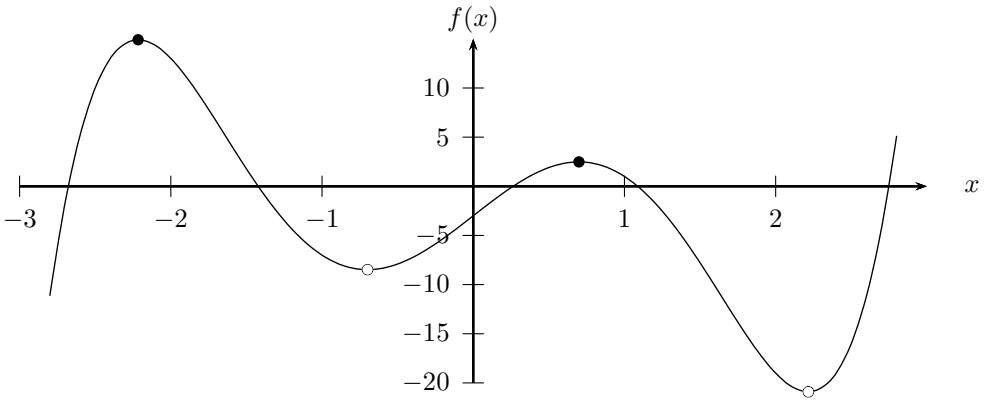


Abbildung 7.4.5: Funktion $f(x) = x^5 - 9x^3 + 12x - 3$. • lokale Maxima, ◦ lokale Minima

Um die Berechnung der lokalen Extrema anzugehen, stellen wir zuerst eine intuitive Überlegung an. Die Steigung einer Kurve kann in einem Intervall negativ sein und in einem anderen Intervall positiv sein. Im folgenden Beispiel ist die Steigung der Kurve etwa in -5 positiv, in -2 ist sie dagegen negativ (s. Abbildung 7.4.6).

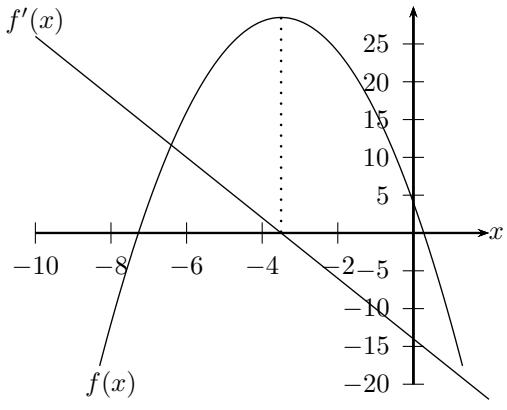


Abbildung 7.4.6: Ein Polynom zweiten Grades und seine Ableitung ($f(x) = -2x^2 - 14x + 4$; $f'(x) = -4x - 14$); die x-Koordinate des Maximums ist mit der Nullstelle der ersten Ableitung identisch

Ist nun die Ableitung stetig, so muss es zwischen der negativen und der positiven Steigung eine Nullstelle haben. An dieser ist die Steigung der Kurve 0. Offenbar müssen genau an solchen

Stellen Extrema vorkommen, da dort die Kurve von monoton steigend zu monoton sinkend (oder umgekehrt) übergeht.

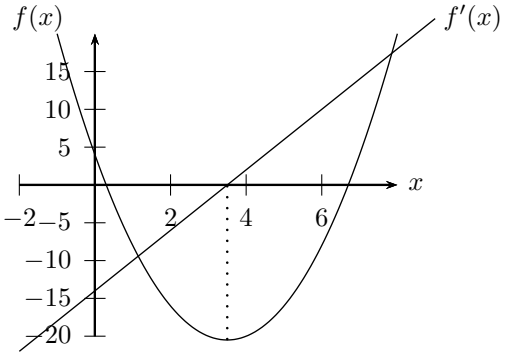


Abbildung 7.4.7: Ein Polynom zweiten Grades und seine Ableitung ($f(x) = 2x^2 - 14x + 4$, $f'(x) = 4x - 14$); die x-Koordinate des Minimums ist mit der Nullstelle der ersten Ableitung identisch

Entsprechend können wir die Ableitung verwenden, um die lokalen Extrema einer ableitbaren Funktion zu bestimmen. Allerdings muss beachtet werden, dass zwar an allen Extremstellen die Ableitung 0 ist. Umgekehrt kann man jedoch nicht aus $f'(x) = 0$ schliessen, dass eine Nullstelle vorliegt (z.B. $f(x) = x^3$ mit $f'(x) = 3x^2$ hat in $x = 0$ eine Nullstelle, aber kein Maximum). Um eine hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Extremums zu erlangen, können wir wiederum die Differentialrechnung verwenden, wie wir nun zeigen werden. Dabei können wir gleich noch ein weiteres Problem lösen: die Klassifizierung von Extrema in Minima und Maxima. Doch vorerst noch ein Satz:

Satz 7.4.2. *Eine Sekante g durch zwei Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ einer Funktion f ist gegeben durch:*

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Beweis. Die Sekante ist eine Gerade und hat damit die Form:

$$g(x) = mx + c$$

Für die Steigung m gilt:

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Zudem gilt mit Einsetzen des Punktes $(a, f(a))$ und von m in die Geradengleichung:

$$f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}a + c$$

und damit

$$c = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}a.$$

Man erhält also durch Einsetzen von m und c in $g(x) = mx + c$:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}a \\ &= f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \end{aligned}$$

□

7.5 Konvexität und Konkavität

Wie im Kapitel „weitere reelle Funktionen“ gesehen können sich Funktionen in Intervallen nach unten oder nach oben öffnen (s. Abbildungen 7.5.8 und 7.5.9). Funktionen, die in einem Intervall

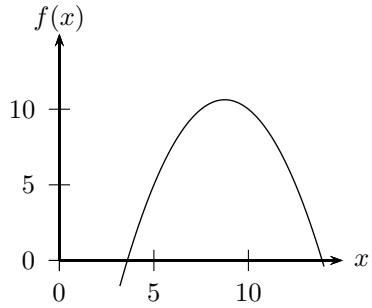


Abbildung 7.5.8: nach unten offene Kurve

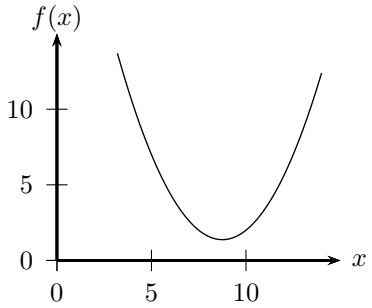


Abbildung 7.5.9: nach oben offene Kurve

nach unten offen sind, nannten wir „konkav“, noch oben offene Funktionen nannten wir „konvex“ (s. S. 130, Definition 4.2.33). Weist die Funktion in den entsprechenden Intervallen keine geraden Teilstück auf, so nennen wir sie „strikt konkav“ oder „strikt konvex“. Wie im Kapitel „weitere reelle Funktionen“ vermerkt, sind die Definitionen schwierig anzuwenden. Auch hier bietet die Differentialrechnung einen einfacheren Ausweg. In der folgenden Graphik 7.5.10 mit einer konkaven Kurve gilt für $x > x'$: die Steigung von f in x ist kleiner als die Steigung in x', d.h. $f'(x) < f'(x')$. Mit anderen Worten: f' ist strikt monoton sinkend. Analog gilt bei einer in einem Intervall konvexen Kurve für $x > x'$: die Steigung der Funktion in x ist grösser als die Steigung der Funktion in x', d.h. $f'(x) > f'(x')$. Damit ist die Ableitung dort strikt monoton steigend. (s. Abbildung 7.5.11).

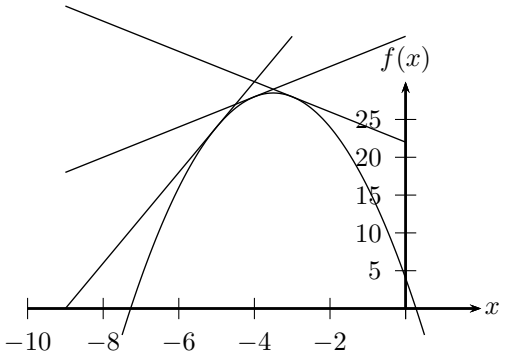


Abbildung 7.5.10: konkave Kurve: für steigendes x sinkt die Steigung der Tangenten in x: die erste Ableitung ist strikt monoton sinkend

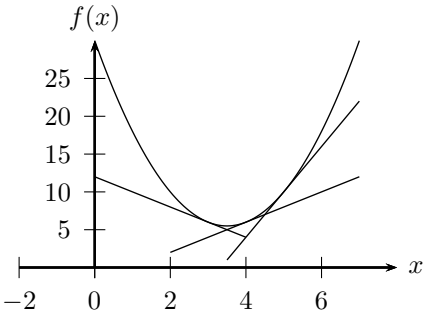


Abbildung 7.5.11: konvexe Kuve: mit steigendem x steigt die Steigung der Tangenten. Die erste Ableitung ist strikt monoton steigend

Diese Überlegung führen zum folgenden Satz:

Satz 7.5.1. *Sei f im offenen Intervall I zweimal differenzierbar.*

- *Eine Funktion f ist im offenen Intervall I strikt konkav genau dann, wenn $f'(x)$ strikt monoton sinkend in I ist.*
- *Eine Funktion f ist im offenen Intervall I strikt konvex genau dann, wenn $f'(x)$ strikt monoton steigend in I ist.*

Beweis. Wir führen den Beweis für die Konkavität.
(i) Sei f ist im Intervall I strikt konkav. Damit gilt laut Definition der strikten Konkavität und mit Satz 7.4.2 für $x \in]a,b[$ und $a,b \in I$:

$$f(x) > f(a) + \frac{f(a)-f(b)}{b-a}(x-a)$$

und damit

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Wegen der Differenzierbarkeit von f gilt durch Grenzwertbildung:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) > \lim_{x\to a}\frac{f(a)-f(b)}{b-a} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Für $x \in]a,b[$ gilt zudem wiederum mit Satz 7.4.2:

$$f(x) > f(b) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b)$$

und da $x-b<0$

$$\frac{f(x)-f(b)}{x-b} < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

durch Grenzwertbildung $\lim\limits_{x\to b}$:

$$f'(b) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Damit gilt für $b > a$

$$f'(b) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < f'(a)$$

und damit

$$f'(b) < f'(a)$$

Laut der Definition der strikt sinkenden Monotonie ist f' strikt monoton sinkend.
(ii) Der Beweis der Umkehrung, d.h. von „Wenn $f'(x)$ in I strikt monoton sinkend ist, dann ist f in I strikt konkav“ erfordert Mittel, die wir nicht eingeführt haben. Er unterbleibt deshalb. □

Es gilt nun offenbar: das lokale Extremum einer in $]a,b[$ konkaven Funktion ist ein Maximum. Entsprechend gilt somit für die Nullstelle $x_0 \in]a,b[$ der Ableitung: in ihr liegt ein Maximum vor, wenn f' in einer Umgebung U von x_0 strikt monoton sinkend ist, d.h. wenn für die Ableitung f'' von f' gilt: $f''(x) < 0$ für $x \in U$. Ist f'' stetig und gilt $f''(x_0) < 0$, gibt es gemäss Satz 6.2.4 eine Umgebung von U von x_0, so dass $f''(x) < 0$ für $x \in U$. In diesem Falle genügt es also, das Vorzeichen von $f''(x_0)$ zu überprüfen.

Definition 7.5.2. *Wir nennen künftig die Ableitung der Funktion f „erste Ableitung“, die Ableitung der ersten Ableitung „zweite Ableitung“, u.s.w. Wir kürzen die zweite Ableitung durch f'' ab, die dritte durch f'''. Üblich sind auch die Abkürzungen $f^{(2)}, f^{(3)}, f^{(n)}$.* ◊

Damit haben wir folgende Bedingungen für ein **Maximum**:

Satz 7.5.3. *Sei f zweimal differenzierbar und U eine Umgebung von x_0. Gilt*

$f'(x_0) = 0$
$f''(x) < 0$ *für* $x \in U$,

dann liegt in x_0 ein (lokales) Maximum vor. Ist f'' in U stetig, genügt es das Vorzeichen von $f''(x_0)$ zu überprüfen.

Beweis. Da $f''(x) < 0$ in U, ist f' strikt monoton sinkend in U. Somit gilt für $x \in U$ und $x < x_0 : f'(x) > 0$. Zudem gilt für $x \in U$ und $x > x_0 : f'(x) < 0$. Damit ist f links von x_0 strikt monoton steigend und rechts von x_0 strikt monoton sinkend. d.h. links von x_0 gilt $f(x_0) > f(x)$ und rechts von x_0 gilt: $f(x_0) > f(x)$. Damit ist $f(x_0) > f(x)$ für alle $x \in U \backslash \{x_0\}$. □

In Bezug auf die lokalen Minima können wir analoge Überlegungen anstellen. Beim Vorliegen eines Extremums in einem Intervall, in dem die Funktion konvex ist, ist dieses Extremum ein Minimum. Da die Kurve dort konvex (d.h. $f''(x) > 0$) ist, ist f' dort strikt monoton steigend. Damit erhalten wir folgende Bedingungen für ein **Minimum**:

Satz 7.5.4. *Sei f zweimal differenzierbar und sei U eine Umgebung von x_0. Gilt*

$f'(x_0) = 0$
$f''(x) > 0$ *für* $x \in U$,

dann liegt in x_0 ein (lokales) Minimum vor. Ist f'' in U stetig, genügt es das Vorzeichen von $f''(x_0)$ zu überprüfen.

Der Beweis verläuft analog zum fürs Maximum geführten Beweis. Wir können damit feststellen. Ist $f'(x) = 0$, so liegt in x genau dann ein Extremum vor, wenn $f''(x) > 0$ oder $f''(x) < 0$. Für das obige Beispiel $f(x) = x^3$ erhalten wir als zweite Ableitung: $\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(x^3)\right) = \frac{d}{dx}\left(3x^2\right) = 6x$. In 0 ergibt dies: $f''(0) = 0$. Damit liegt dort kein Extremum vor.

Beispiel 7.5.5. *Es sei folgende Gewinnfunktion gegeben: $G(x) = -2x^2 + 12x + 3$. Man berechne das Gewinnmaximum. Wir leiten die Funktion ab und suchen die Nullstellen der Ableitung: $G'(x) = -4x + 12 = 0 \Longrightarrow x = 3$. Die Funktion nimmt ihr Extremum in $x = 3$ an, sofern die zweite Ableitung dort von 0 verschieden ist. Wir berechnen die zweite Ableitung: $\frac{d}{dx}(-4x + 12) = -4 < 0$ für alle x. Da die zweite Ableitung überall negativ ist, ist sie es auch in 3. Damit weist die Gewinnfunktion in $x = 3$ ein Maximum auf. Der maximale Gewinn beläuft sich auf $G(3) = -2 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 + 3 = 21$.* ◊

Beispiel 7.5.6. *Sei G eine Gewinnfunktion, gegeben durch $G(x) = -3x^3 + 11x + 4$ im Intervall $[0, 4]$. Es geht darum, den maximalen Gewinn zu bestimmen. Wir berechnen die erste Ableitung: $G'(x) = -9x^2 + 11$ und suchen die Nullstellen: $0 = -9x^2 + 11 \Longrightarrow x_1 = \frac{1}{3}\sqrt{11}, x_2 = -\frac{1}{3}\sqrt{11}$. Da wir uns nur fürs Intervall $[0, 4]$ interessieren, betrifft uns nur die Nullstelle in $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{11} = 1.1055$. Um zu überprüfen, ob sich in 1.1055 ein Maximum oder ein Minimum befindet, berechnen wir die zweite Ableitung: $G''(x) = -18x$. In 1.1055 ist G'' negativ, denn $G''(1.1055) = -18 \cdot 1.1055 < 0$ ist eine negative Zahl. Deshalb ist das lokale Extremum in 1.1055 ein lokales Maximum.* ◊

Beispiel 7.5.7. *Sei die folgende Stückkostenfunktion gegeben. $k(x) = 4x^3 - 11x + 10$*
Gesucht ist die Produktionsmenge, bei der minimale Stückkosten anfallen.
$\frac{d}{dx}(k(x)) = \frac{d}{dx}\left(4x^3 - 11x + 10\right) = 12x^2 - 11 = 0 \Longrightarrow x_1 = \frac{1}{6}\sqrt{33}, x_2 = -\frac{1}{6}\sqrt{33}$
Wir interessieren uns nur für die positive Nullstelle: $\frac{1}{6} \cdot \sqrt{33} = 0.95743$
Um zu entscheiden, ob hier ein Minimum oder ein Maximum vorliegt, berechnen wir die zweite Ableitung: $\frac{d}{dx}(\frac{d}{dx}k(x)) = \frac{d}{dx}\left(12x^2 - 11\right) = 24x$
$k''(0.95743) = 24 \cdot \frac{1}{6} \cdot \sqrt{33} = 22.978 > 0$
Damit liegt in $\frac{1}{6}\sqrt{33}$ *ein Minimum vor.* ◊

Beispiel 7.5.8. *Für quadratische Funktionen, wird das Extremum oft mit der folgenden Formel bestimmt: $-\frac{b}{2a}$. Diese Formel können wir nun einfach beweisen: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Wir berechnen die erste Ableitung: $f'(x) = 2ax + b$ und berechnen die Nullstelle: $2ax + b = 0 \Longrightarrow x = -\frac{b}{2a}$. Nun berechnen wir die 2. Ableitung: $\frac{d}{dx}(2ax + b) = 2a$. Es gilt: $2a < 0$ genau dann, wenn $a < 0$. Damit liegt bei einer quadratischen Funktion bei negativem a an der Nullstelle der ersten Ableitung ein*

Maximum vor, bei positivem a jedoch ein Minimum. ◊

Beispiel 7.5.9. *Für* $f(x) = x^3$ *erhält man* $\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2$. *Die Nullstelle der ersten Ableitung ist* 0. *Die zweite Ableitung ist* $\frac{d}{dx}3x^2 = 6x$. *Setzt man die Nullstelle der ersten Ableitung in die zweite Ableitung ein, erhält man* 0. *Die Funktion* f *ist in* 0 *weder konvex noch konkav, es gibt kein Extremum in diesem Punkt.* ◊

7.6 Wendepunkte

Eine Kurve kann Intervalle aufweisen, wo sie konkav ist und Intervalle, wo sie konvex ist. In den konvexen Intervallen ist dabei - wie eben gesehen - die Steigung der ersten Ableitung positiv und in den konkaven Intervallen ist die Steigung der ersten Ableitung negativ. Im Übergang von einem konvexen zu einem konkaven Intervall (oder umgekehrt) nimmt deshalb die erste Ableitung ihr lokales Extremum an. Um die Extrema der ersten Ableitung zu finden, bestimmen wir die Nullstellen der zweiten Ableitung und berechnen die dritte Ableitung, um auszumachen, ob ein Extremum ein Minimum oder ein Maximum ist. Wir nennen die Extrema der ersten Ableitung (= Nullstellen der zweiten Ableitung) „Wendepunkte von f“. Ein konkav-konvex Wendepunkt liegt vor, wenn bei der Nullstelle der zweiten Ableitung die dritte Ableitung positiv ist (die Steigung von f erreicht dort in einer Umgebung des Wendepunktes ihr Minimum). Ein konvex-konkav Wendepunkt liegt vor, wenn bei der Nullstelle der zweiten Ableitung die dritte Ableitung negativ ist (die Steigung von f erreicht dort in einer Umgebung des Wendepunktes ihr Maximum; s. Abbildung 7.6.12).

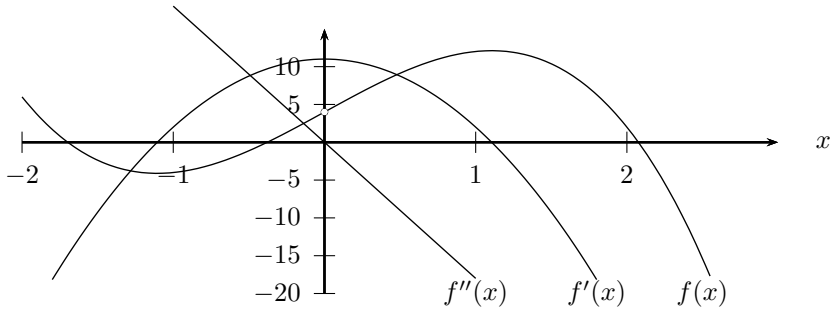


Abbildung 7.6.12: Funktion $f(x) = -3x^3 + 11x + 4$ - für $x < 0$ ist f konvex, für $x > 0$ ist f konkav. Wendepunkt in $(0, 4)$

Im Beispiel ist die Funktion vor dem Wendepunkt konvex, nach dem Wendepunkt konkav (für steigende x). Der Wendepunkt liegt in $x = 0$. Denn $f''(x) = -18x = 0 \Longrightarrow x = 0$. $f'''(x) = -18$. Da die dritte Ableitung überall negativ ist, ist sie es auch in 0. Der Wendepunkt ist $(0, f(0)) = (0, 4)$ - und zwar handelt es sich um einen konvex-konkav-Wendepunkt.

Beispiel 7.6.1. *Für* $f(x) = 3x^3 - 11x + 4$ *geht die vorgängig konkave Funktion in einen konvexen Abschnitt über (für steigende* x*):*
$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(3x^3 - 11x + 4\right) = 9x^2 - 11$
$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(9x^2 - 11\right) = 18x$
$f''(x) = 18x = 0 \Longrightarrow x = 0$
$f'''(x) = 18 > 0$
Der konkav-konvex Wendepunkt ist: $(0, f(x)) = (0, 4)$ *(s. Abbildung 7.6.13)*

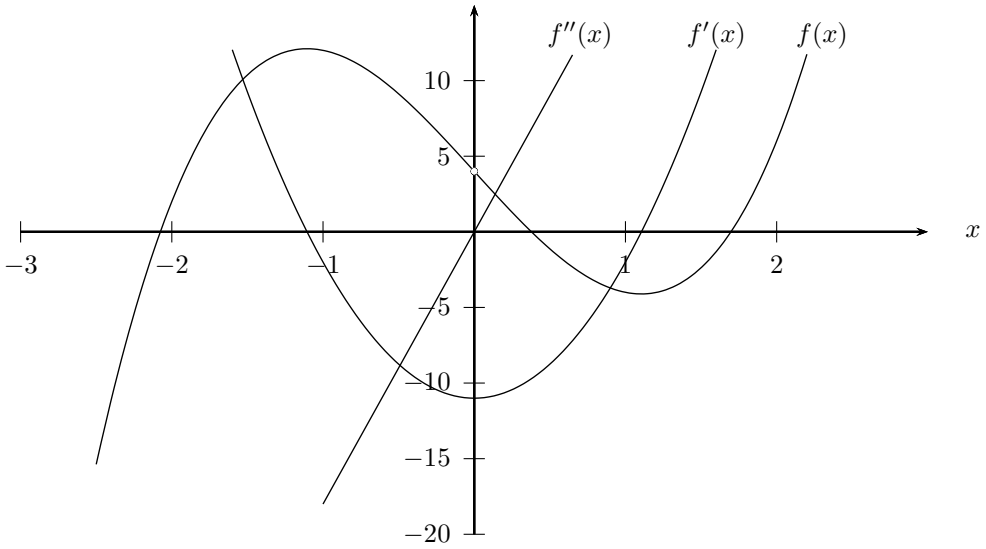


Abbildung 7.6.13: Funktion $f(x) = 3x^3 - 11x + 4$ - für $x > 0$ ist f konvex, für $x < 0$ ist f konkav. Wendepunkt $(0, 4)$

$\Diamond$

Beispiel 7.6.2. $f(x) = x^5 - 9x^3 + 12x - 3$
$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^5 - 9x^3 + 12x - 3\right) = 5x^4 - 27x^2 + 12$
$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(5x^4 - 27x^2 + 12\right) = 20x^3 - 54x$
Wir berechnen die Nullstellen von $f''(x) = 0 = x(20x^2 - 54) \Longrightarrow$
$x_1 = 0$*;*
$20x^2 - 54 = 0 \Longrightarrow x_2 = \frac{3}{10}\sqrt{30} \approx 1.643\,2, x_3 = -\frac{3}{10}\sqrt{30} \approx -1.643\,2$
Die Wendepunkte befinden sich in x_1, x_2 *und* x_3
Die Wendepunkte sind somit:
$(x_1, f(x_1)) = (0, -3)$*;*
$(x_2, f(x_2)) = (1.643\,2, -11.\,232)$*;*
$(x_3, f(x_3)) = (-1.6432, 5.\,232\,3)$*(s. Abbildung 7.6.14)*

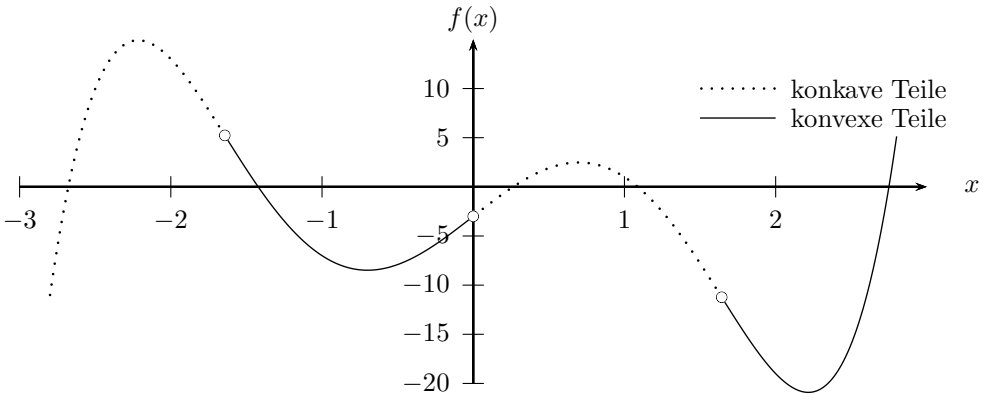


Abbildung 7.6.14: Funktion $f(x) = x^5 - 9x^3 + 12x - 3$ mit Wendepunkten $(0, -3), (1.6432, -11.232)$ und $(-1.6432, 5.2323)$; konkav bis $(-1.6432, 5.2323)$, dann konvex bis $(0, -3)$, dann konkav bis $(1.6432, -11.232)$, dann konvex bis ∞

$\Diamond$

Es werden noch ein paar Sätze festgehalten, die bei den Beweisen des nächsten Kapitels eine Rolle spielen:

Satz 7.6.3. *Sei f in a ableitbar und sei g die Tangente durch den Punkt $(a, f(a))$. Dann gilt: $g(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$*

Beweis. Die Tangente ist eine Gerade und hat damit die Form:

$$g(x) = mx + b \tag{7.6.2}$$

Es gilt $m = f'(a)$. Zudem können wir den Punkt $(a, f(a))$ in die Gleichung (7.6.2) einsetzen und wir erhalten:

$$f(a) = f'(a)a + b$$

und damit

$$b = f(a) - f'(a)a.$$

Setzen wir m und b in die Gleichung (7.6.2) ein, erhält man:

$$\begin{aligned} g(x) &= f'(a)x + f(a) - f'(a)a \\ &= f(a) + f'(a)(x - a) \end{aligned}$$

$\square$

Man sieht, dass die Formeln für die Sekante und die Tangente nahe verwandt sind: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ wird durch $\lim\limits_{b \to a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(a)$ ersetzt. In der Tat erhält man die zweite Formel aus der ersten auch durch Grenzwertbildung:

$$\lim_{b \to a} \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Beispiel 7.6.4. *für die Berechnung einer Tangente durch einen Punkt einer Funktion. Sei die Funktion*

$$f(x) = 0.05x^3 - 0.4x^2 + 0.002x + 6$$

gegeben. Zu berechnen ist die Tangente in $x = 3$.

$$f(3) = 0.05 \cdot 3^3 - 0.4 \cdot 3^2 + 0.002 \cdot 3 + 6 = 3.756$$

$$\frac{d}{dx}\left(0.05x^3 - 0.4x^2 + 0.002x + 6\right) = 0.15x^2 - 0.8x + 0.002$$

$$f'(3) = 0.15 \cdot 3^2 - 0.8 \cdot 3 + 0.002 = -1.048$$

Die Tangente g ist damit gegeben durch:

$$\begin{aligned} g(x) &= 3.756 - 1.048(x - 3) \\ &= 6.9 - 1.048x \end{aligned}$$

Berechnung ohne Verwendung der Formel von Satz 7.6.3: Mit $f'(3) = -1.048$ *hat man die Steigung der Tangente. Zudem hat man einen Punkt, nämlich* $(3, f(3)) = (3,\ 3.756)$. *Mit diesen Angaben kann man die Gerade - s. Kapitel über affine Polynome - berechnen mit* $3.756 = -1.048 \cdot 3 + b \Longrightarrow b = 6.9$ *(s. Abbildung 7.6.15)*

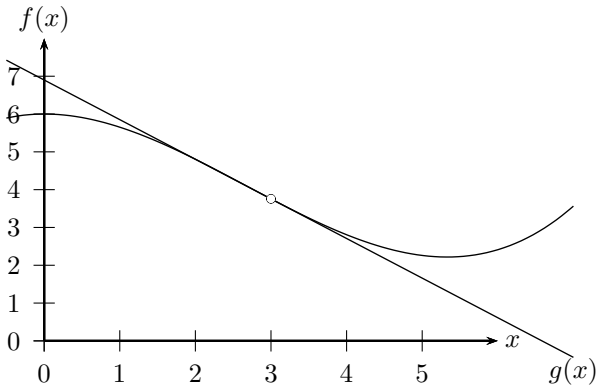


Abbildung 7.6.15: Graphische Darstellung der Funktion $f(x) = 0.05x^3 - 0.4x^2 + 0.002x + 6$ und der Tangente g an die Funktion in $x = 3$

◊

Satz 7.6.5. *Sei* f *in einer Umgebung* U *von* a *stetig und* f' *sei in* a *definiert. Dann gibt es (1) eine Funktion* $r : U \to \mathbb{R}$ *mit:*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + r(x).$$

und
(2) gilt für die derart definierte Funktion r :

$$\lim_{x \to a} r\,(x) = 0$$

Beweis. (1) $r(x)$ ist die Differenz zwischen $f(x)$ und $f(a) + f'(a)(x - a)$, d.h. der Funktion und der Tangente in $(a, f(a))$. Da $f(x)$ und die Tangente existieren, existiert diese Differenz.
(2) Es gilt

$$r\,(x) = f\,(x) - f\,(a) - f'\,(a)\,(x - a)$$

Damit gilt (f ist stetig)

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} r\,(x) &= \lim_{x \to a} \left(f\,(x) - f\,(a) - f'\,(a)\,(x - a)\right) \\ &= \lim_{x \to a} f\,(x) - \lim_{x \to a} f\,(a) - f'\,(a) \lim_{x \to a} (x - a) \\ &= f\,(a) - f\,(a) - f'\,(a) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

□

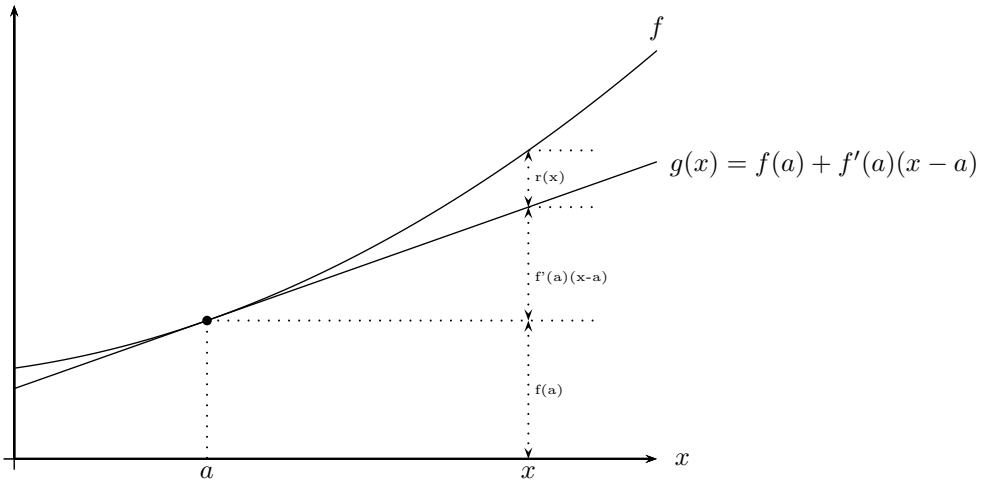


Abbildung 7.6.16: Abbildung zum Satz 7.6.5. $g(x) = f(a)+f'(a)(x-a)$ ist die Tangente in $(a, f(a)$ an f.

Satz 7.6.6. *Sei $f(x) = f(a) + \beta(x-a) + r(x)$. Es gilt $\beta = f'(a)$ genau dann, wenn $\lim\limits_{x\to a} \frac{r(x)}{x-a} = 0$.*

Beweis. (a) Sei $\beta = f'(a)$. Dann ist

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \beta(x-a) + r(x) \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + r(x) \end{aligned}$$

Wir lösen nach $r(x)$ auf:

$$r(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$$

und multiplizieren mit $\frac{1}{(x-a)}$:

$$\begin{aligned} \frac{r(x)}{x-a} &= \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \frac{f'(a)(x-a)}{x-a} \\ &= \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} \frac{r(x)}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \lim_{x\to a} f'(a) \\ &= f'(a) - f'(a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(b) Sei $\lim\limits_{x\to a} \frac{r(x)}{x-a} = 0$. Damit gilt, da $r(x) = f(x) - f(a) - \beta(x-a)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{r(x)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\frac{\beta(x-a)}{x-a}\right)\\ &= \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\beta\right)\\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\lim_{x\to a}\beta\\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\beta\\ &= 0\end{aligned}$$

(da laut Voraussetzung $\lim_{x\to a}\frac{r(x)}{x-a}=0$)
Aus $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\beta=0$ folgt:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\beta$$

□

Interpretation von $\lim_{x\to a}\frac{r(x)}{x-a}=0$: $\frac{1}{x-a}$ geht gegen Unendlich für $x\to a$. Damit $\frac{r(x)}{x-a}$ gegen 0 gehen kann, muss $r(x)$ viel schneller gegen 0 gehen als $\frac{1}{x-a}$ gegen Unendlich. Entsprechend stellt $g(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$ eine gute Näherung an die Funktion f in kleinen Umgebungen von a dar, da der Rest $r(x)$ zwischen der Tangente und f sehr schnell gegen 0 geht für $x\to a$.

7.6.1 Übungen

1. Leiten Sie die folgenden Funktionen ab und bestimmen Sie die Steigung in $x=5$:
   (a) $f(x)=1.4x^3-3.5x^2+x$
   (b) $f(x)=3x^2+4x$
   (c) $f(x)=-3x^2-4x$
   (d) $f(x)=x^3+5x^2$
   (e) $f(x)=2x-\frac{x^3}{6}$
   (f) $f(x)=15x^{17}-4x^9+14x^4+11x^2+4$
   (g) $s(a)=a^2-\frac{3}{4}at$
   (h) $s(t)=a^2-\frac{3}{4}at$
   (i) $f(x)=5(x^2-3x+4)$
2. Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Tangente in $(5,f(5))$ der Funktion $f(x)=5x^3-17x^2+2x-1$.
3. Finden Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen und bestimmen Sie die Steigung in $x=-4$
   (a) $f(x)=\frac{1}{x}$
   (b) $f(x)=\frac{1}{x^2}$
   (c) $f(x)=\frac{1}{x+1}$
   (d) $f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$

4. Berechnen Sie die Extrema der Funktionen der Übung 1. Geben Sie an, ob es sich um Maxima oder Minima handelt.

5. Gegeben ist die folgende Kostenfunkton $K(x) = 0.002x^3 - 0.04x^2 + 0.8x + 4$

   (a) Bestimmen Sie den ökonomischen Bereich

   (b) Bestimmen Sie die Fixkosten.

   (c) Ein Monopolist sieht sich der folgenden Preis-Nachfrage-Funktion gegenüber: $P_N(x) = 2.5 - 0.1x$. Berechnen Sie die Erlösfunktion, die Gewinnfunktion und den maximalen Gewinn. Zeichnen Sie die Situation.

6. Eine Kostenfunktion werde durch die folgende Gleichung beschrieben:
   $K(x) = -3 \cdot 10^{-10}x^4 + 3 \cdot 10^{-7}x^3 + 7 \cdot 10^{-4}x^2 + 300$

   (a) Bestimmen Sie das vom ökonomischen Standpunkt vernünftige Intervall

   (b) Bestimmen Sie die Fixkosten

   (c) Ein Monopolist sieht sich der folgenden Nachfragefunktion gegenüber: $P(x) = 19 - 0.1x$. Berechnen Sie die Erlösfunktion, die Gewinnfunktion und den maximalen Gewinn. Erstellen Sie eine Graphik.

7. Über eine Kostenfunktion sei Folgendes bekannt.
   Die Produktion von: 0 Einheiten kostet 10
   4 Einheiten kosten 296.4
   30 Einheiten kosten 910
   40 Einheiten kosten 2010.
   Über die Preisnachfragefunktion sei Folgendes bekannt: Bei einem Preis von 50 GE werden 30 ME nachgefragt, bei einem Preis von 70 GE 20 ME.

   (a) Berechnen Sie die Kostenfunktion!

   (b) Überprüfen Sie, ob die berechnete Funktion als Kostenfunktion geeignet ist.

   (c) Berechnen Sie die Preisnachfragefunktion

   (d) Berechnen Sie die Erlösfunktion (wir setzen ein Monopol voraus) und

   (e) die Gewinnfunktion.

   (f) Bestimmen Sie den maximalen Gewinn.

   (g) Zeichnen Sie die Kostenfunktion, die Erlösfunktion und die Gewinnfunktion in ein Koordinatennetz.

8. Haben die folgenden Gewinnfunktionen in den folgenden Intervallen eine positive oder eine negative Steigung?

   (a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 5 \quad I =]5, 6[$

   (b) $g(x) = 5x^4 - 2x^3 + 3x - 20 \quad I =]1, 2[$

   (c) $h(x) = 4x^2 - 100x + 20 \quad I =]2, 20[$

9. In welchen Intervallen sind die folgenden Funktionen konvex, in welchen konkav? Bestimmen Sie allfällige Wendepunkte.

   (a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 5$

   (b) $g(x) = 5x^4 - 2x^3 + 3x - 20$

   (c) $h(x) = 4x^2 - 100x + 20$

   (d) $k(x) = x^3 - 16x^2 + 6x - 4$

(e) $x(r) = r^4 - 12r^2 + 1$

(f) $g(u) = u^4 - 4u^3 + 6u^2 - 3u + 1$

10. Berechnen Sie mit Hilfe der Formel die Tangente der folgenden Funktion: $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 2x - 5$ im Punkte $(3, f(3))$

11. Gegeben sei die folgende Kostenfunktion: $K(x) = 0.1x^3 - 5x^2 + 100x + 5$. Ein Monopolist sieht sich der folgenden Preisnachfragefunktion gegenüber: $P_N(x) = -3x + 150$. Berechnen Sie die Erlösfunktion, die Gewinnfunktion und den maximalen Gewinn.

12. Gegeben sei die folgende Kostenfunktion: $K(x) = 0.2x^3 - 6x^2 + 90x + 5$. Ein Monopolist kennt von seiner Preisnachfragefunktion zwei Punkte: Bei einem Preis von 55 GE kann er 10 ME verkaufen, bei einem Preis von 35 GE kann er 20 ME verkaufen. Berechnen Sie eine Preisnachfragefunktion, die Erlösfunktion, die Gewinnfunktion und den maximalen Gewinn.

13. Es gelte $g(x) = ax + b$ und $(1, 2) \in g$. Zudem sei die Kurve $f(x) = -4x^2 + x - 1$ gegeben. Drehen Sie g so, dass es als Tangente auf f zu liegen kommt - dabei gibt es zwei Varianten!. Geben Sie die Geradengleichungen von g an, sowie die Schnittpunkte mit f.

14. Ein Investor kann das Risiko seines Portfolios reduzieren, indem er Werte kauft, die schwach oder nicht positiv korrelieren, indem er also seine Anlagen diversifiziert. Dies erlaubt es, einen spezifischen erwarteten Ertrag zu haben und die Volatilität des Portfolios zu reduzieren (Volatilität = Risiko, z.B. gemessen mit Hilfe der Varianz der Zufallsvariable, die mögliche Erträge des Portfolios als Werte annimmt). Die Portfolios können graphisch dargestellt werden: auf der x-Achse kann man das Risiko und auf der y-Achse den erwarteten Ertrag jedes Portfolios abtragen. Für jedes Risiko gibt es ein Portfolio, das für dieses Risiko den erwarteten Ertrag maximiert. Die Menge dieser Portfolios $e_r(x)$ für die Risiken x wird „Effizienzlinie“ genannt. Die Effizienzlinie eines Investitionsmarktes mit risikobehafteten Werten sei auf dem Intervall $]0.1, 7]$ durch die folgende Funktion gegeben:

$$e_r : [0.1, 7] \to \mathbb{R}$$
$$e_r(x) = -0.001x^2 + 0.06x$$

Die Punkte oberhalb der Effizienzlinie sind mittels risikobehafteter Wertpapiere nicht erreichbar - der Markt offeriert für so kleine Risiken keine höheren erwarteten Erträge. Die Punkte unter der Effizienzlinie sind suboptimal und werden einen Investor nicht interessieren (zu wenig Ertrag für das Risiko).

(a) Berechnen Sie die Tangente an die Effizienzlinie e_r, die durch den Punkt $(0, 0.015)$ verläuft (die Tangente wird „Kapitalmarktlinie“ genannt (auf Englisch: capital market line), der Schnittpunkt der Tangente mit der Effizienzlinie heisst „Marktportfolio“, 0.015 ist der risikolose Zinssatz, z.B. einer Obligation mit kurzer Laufzeit eines stabilen Staates; die Tangente repräsentiert den erwarteten Ertrag von Portfolios, die man aus risikolosen Papieren zum Zinssatz 0.01 und dem Marktportfolio zusammensetzt.

(b) Berechnen Sie den erwarteten Ertrag und das Risiko des Marktportfolios .

(c) Will man zu einem bestimmte Risiko x investieren, so ist im Intervall $[0, x_m]$ auf der Kapitalmarktlinie $g(x)$ das Portfolio mit dem jeweils höchsten Erwartungswert gegeben, das aus risikolosen Investitionen und dem Marktportfolio x_m zusammengesetzt ist. Berechnen Sie diesen Erwartungswert für $x = 2$.

(d) Wie muss das Portfolio in $x = 2$ zusammengesetzt sein? (Hinweis: die Strecke zwischen dem Punkt $(0, 0.015)$ und $(x_m, g(x_m))$ kann mit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := (a, b)$ auch ausgedrückt

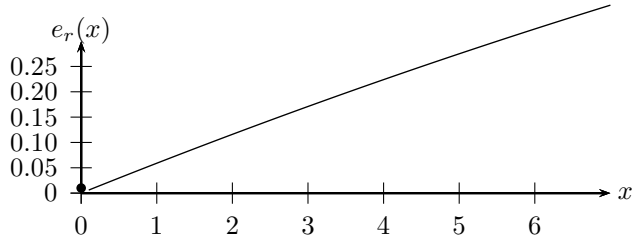


Abbildung 7.6.17: Effizienzlinie und der Punkt $(0, 0.015)$

werden durch

$$c\begin{pmatrix} 0 \\ 0.015 \end{pmatrix} + (1-c)\begin{pmatrix} x_m \\ g(x_m) \end{pmatrix}$$

für $c \in [0,1]$, wobei $c\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx_1 \\ cy_1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$ für $x_1 < x_2, x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$.
c drückt damit den Anteil mit der sicheren Investition und $(1-c)$ den Anteil mit Marktportfolio aus).

Beweis: Seien zwei Punkte $(x_1, y_2), (x_2, y_2) \in g = ax + b$ gegeben. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + cx_2 - cx_1 \\ y_1 + cy_2 - cy_1 \end{pmatrix} \in g$$

denn mit

$$\begin{aligned} g(x_1) &= ax_1 + b = y_1 \\ g(x_2) &= ax_2 + b = y_2 \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} y_1 + cy_2 - cy_1 &= ax_1 + b + c(ax_2 + b) - c(ax_1 + b) \\ &= b + ax_1 - acx_1 + acx_2 \\ &= a(x_1 + cx_2 - cx_2) + b \\ &= g(x_1 + cx_2 - cx_1) \end{aligned}$$

Damit gilt dann für $c \in [0,1]$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - c\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ &= (1-c)\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in g, \end{aligned}$$

wobei $x_1 + c(x_2 - x_1)$ für $c \in [0,1]$ auf der x-Achse in $[x_1, x_2]$ liegt (z.B. für $c = 0.4$, $x_1 = 4$ und $x_2 = 7 : x_1 + c(x_2 - x_1) = 4 + 0.4(7-4) = 5.2 \in [4,7]$).

15. Die Möglichkeit, Tangenten zu berechnen, erlaubt es ein effizientes Verfahren für die Nullstellenberechnung einzuführen. Es wird Newton(-Raphson)-Verfahren genannt. Man wählt einen Punkt x nahe der Nullstelle - z.B. mit Hilfe einer Graphik -, berechnet die Tangente g im Punkt $(x, f(x))$ und dann den Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse. Dieser Schnittpunkt ist dann das neue x, und das Verfahren wird erneut angewendet, bis man die Nullstelle hat. Das Verfahren konvergiert viel schneller als die Regula Falsi (die Regel, die wir im 1. Semester eingeführt haben). Mit Excel geht man wie folgt vor, um das Verfahren durchzuführen. Man kann eine Formel für die Nullstelle der Tangente herleiten. Die Nullstelle ist das x, so dass

$$g(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = 0$$

(a ist der Startpunkt oder das x der letzten Runde). Man löst nach x auf:

$$\begin{aligned} f(a) + f'(a)\,x - f(a)\,a &= 0 \\ f'(a)\,x &= f'(a)\,a - f(a) \\ x &= \frac{f'(a)\,a - f(a)}{f'(a)} \\ x &= a - \frac{f(a)}{f'(a)} \end{aligned}$$

Das Verfahren setzt also voraus, dass jeweils $f'(a) \neq 0$. Wird es auf eine Nullstelle b angewendet, in der $f'(b) = 0$ - dies ist etwa der Fall wenn die x-Achse nur berührt, aber nicht gequert wird - muss $f(a)$ schneller gegen 0 gehen als $f'(a)$. Man gibt in die erste und zweite Zeile ein:

a	$f(a)$	$f'(a)$
$a - \frac{f(a)}{f'(a)}$		

zieht die letzten zwei Zellen der ersten Zeile herunter in die zweite Zeile und dann die zweite Zeile hinunter, bis $f(a)$ fast 0 oder 0 ist. Wenden Sie das Verfahren an für die reelle Nullstelle der Funktion $f(x) = 0.9x^3 - 2x^2 - 3x + 4$ und vergleichen Sie die Anzahl der Runden (Startpunkt 2) mit der Anzahl der Runden mit der Regula falsi (Start-Intervallgrenzen 2.5, 3).
Geht $f(a)$ schneller gegen 0 als $f'(a)$, so eignet sich das Verfahren auch, um Nullstellen von Funktionen zu finden, die die x-Achse nur berühren, ohne sie zu durchqueren. Überprüfen Sie das am Beispiel

$$f(x) = x^3 - 11x^2 + 40x - 48 = (x-4)^2(x-3)$$

mit R (Startpunkt 3.5).

16. Finden Sie die Intervalle, auf denen $f(x) = 5x^8 - 6x^4 + 3x^2$ strikt steigen (sinkend) ist. Finden Sie die Intervalle, auf denen f konkav (konvex) ist. Finden Sie die lokalen Maxima und Minima der Funktion.

17. Schauen Sie sich das Video http://www.mathe-online.at/clips/differenzieren/index.html an.

7.6.2 Lösungen

1. Man erhält:

   (a) $f'(x) = 4.2x^2 - 7x + 1$,
   $f'(5) = 71$.

   (b) $f(x) = 3x^2 + 4x$; $f'(x) = 6x + 4$,
   Steigung in $5 : 34$

   (c) $f(x) = -3x^2 - 4x$; $f'(x) = -6x - 4$;
   Steigung in 5: -34

   (d) $f(x) = x^3 + 5x^2$; $f'(x) = 3x^2 + 10x$;
   Steigung in 5: 125

   (e) $f(x) = 2x - \frac{x^3}{6}$; $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(2x - \frac{x^3}{6}\right) = 2 - \frac{3x^2}{6} = 2 - \frac{x^2}{2}$
   Steigung in 5: $2 - \frac{5^2}{2} = -\frac{21}{2} = -10.5$

   (f) $f(x) = 15x^{17} - 4x^9 + 14x^4 + 11x^2 + 4$; $f'(x) = 255x^{16} - 36x^8 + 56x^3 + 22x$
   Steigung in $x = 5$: 38'909'898'053'985

   (g) $s(a) = a^2 - \frac{3}{4}at$; $s'(a) = 2a - \frac{3}{4}t$;

(h) $s(t) = a^2 - \frac{3}{4}at$; $s'(t) = -\frac{3}{4}a$

(i) $f(x) = 5(x^2 - 3x + 4)$; $f'(x) = 10x - 15$; In 5 beträgt die Steigung 35.

2. $f(x) = 5x^3 - 17x^2 + 2x - 1$.
$\frac{d}{dx}\left(5x^3 - 17x^2 + 2x - 1\right) = 15x^2 - 34x + 2$
$f'(5) = 207$
$f(5) = 209$
Wir haben einen Punkt und die Steigung der Geraden:
$209 = 207 \cdot 5 + b \Longrightarrow b = -826$
Die Gleichung der Tangente g in x_0: $g(x) = 207x - 826$

3. Man erhält:

(a) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{x_0 - x}{xx_0}}{x - x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{x_0 - x}{-xx_0}}{-(x - x_0)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{x_0 - x}{-xx_0}}{x_0 - x} =$
$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{-xx_0} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} 1}{\lim\limits_{x\to x_0}(-xx_0)} = \frac{1}{-\lim\limits_{x\to x_0}(xx_0)} = \frac{1}{-\lim\limits_{x\to x_0} x \lim\limits_{x\to x_0} x_0} = \frac{1}{-x_0x_0} = -\frac{1}{x_0^2}$
Steigung in -4: $-\frac{1}{16}$

(b) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x_0^2}}{x - x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{x_0^2 - x^2}{x^2x_0^2}}{x - x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{(x_0 - x)(x_0 + x)}{x^2x_0^2}}{x - x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{(x_0 - x)(x_0 + x)}{-x^2x_0^2}}{x_0 - x} =$
$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{x_0 + x}{-x^2x_0^2} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0}(x_0 + x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\left(-x^2x_0^2\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} x_0 + \lim\limits_{x\to x_0} x}{-\lim\limits_{x\to x_0} x^2 \lim\limits_{x\to x_0} x_0^2} = \frac{x_0 + x_0}{-x_0^2x_0^2} = -\frac{2x_0}{x_0^4} = -\frac{2}{x_0^3}$
Steigung in -4 : 0.03125.
Die Übungen a) und b) lassen vermuten, dass die Theoreme „Wenn $f(x) = a^n$, dann $f'(x) = na^{n-1}$“ nicht nur für natürliche Zahlen n gültig ist.

(c) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x_0}}{x - x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{1 + x_0 - (1 + x)}{(1+x)(1+x_0)}}{x - x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{x_0 - x}{(1+x)(1+x_0)}}{x - x_0} =$
$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{-1}{(1+x)(1+x_0)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0}(-1)}{\lim\limits_{x\to x_0}(1+x)\lim\limits_{x\to x_0}(1+x_0)} =$
$\frac{-1}{(\lim\limits_{x\to x_0} 1 + \lim\limits_{x\to x_0} x)(\lim\limits_{x\to x_0} 1 + \lim\limits_{x\to x_0} x_0)} = \frac{-1}{(1+x_0)(1+x_0)} = \frac{-1}{x_0^2 + 2x_0 + 1}$
Steigung in -4 : -0.11111

(d) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x_0+1)^2}}{x - x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{(x_0+1)^2 - (x+1)^2}{(x+1)^2(x_0+1)^2}}{x - x_0}$
$(x_0 + 1)^2 - (x + 1)^2 = x_0^2 + 2x_0 + 1 - x^2 - 2x - 1 = x_0^2 - x^2 + 2(x_0 - x) =$
$(x_0 - x)(x_0 + x) + 2(x_0 - x) = (x_0 - x)(x_0 + x + 2)$
$\Longrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{(x_0+1)^2 - (x+1)^2}{(x+1)^2(x_0+1)^2}}{x - x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{(x_0 - x)(x_0 + x + 2)}{(x+1)^2(x_0+1)^2}}{x - x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{(x_0 - x)(x_0 + x + 2)}{-(x+1)^2(x_0+1)^2}}{-x + x_0} =$
$\lim\limits_{x\to x_0} -\frac{(x_0 + x + 2)}{(x+1)^2(x_0+1)^2} = -\frac{(x_0 + x_0 + 2)}{(x_0+1)^2(x_0+1)^2} = -\frac{2(x_0+1)}{(x_0+1)^4} = -\frac{2}{(x_0+1)^3}$
Die Steigung in -4: 0.074. Man kann feststellen, dass die Ableitung recht einfacher Funktionen schnell kompliziert wird. Deshalb werden wir in Kürze weitere Theoreme beweisen, um Probleme dieser Art zu lösen.

4. Man erhält:

(a) Maxima oder Minima in: $4.2x^2 - 7x + 1 = 0$; $x_1 = 0.157797$, $x_2 = 1.5088$.
$f''(x) = 8.4x - 7$; $f''(x_1) = -5.6745$. Es gibt in x_1 ein Maximum.
$f''(x_2) = 5.6745 \Longrightarrow$ Es gibt in x_2 ein Minimum der Funktion.

(b) Maximum oder Minimum in: $0 = 6x + 4 \Longrightarrow x = -\frac{2}{3}$;
$f''(x) = 6$; $\Longrightarrow$ in $x = -\frac{2}{3}$ hat es ein Minimum.

(c) Maximum oder Minimum in $0 = -6x - 4 \Longrightarrow x = -\frac{2}{3}$.
$f''(x) = -6$; $\Longrightarrow$ in $x = -\frac{2}{3}$ hat es ein Maximum.

(d) $0 = 3x^2 + 10x$, $x_1 = 0$, $x_2 = -3.333$;
$f''(x) = 6x + 10.$; $f''(0) = 10$. In 0 gibt es ein Minimum. In -3.333 $f''(-3.333) = -10$. Es gibt dort ein Maximum.

(e) $2 - \frac{x^2}{2} = 0$; $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$;
$f''(x) = -\frac{2x}{2} = -x$
In -2 ist f'' positiv, deshalb hat es dort ein Minimum. In 2 ist f'' negativ. Es hat dort ein Maximum.

(f) $255x^{16} - 36x^8 + 56x^3 + 22x = 0$; zwei reelle Lösungen: 0, -0.9353244 (R-Befehl: polyroot(c(0,22,0,56,0,0,0,0,-36,0,0,0,0,0,0,0,255))
$f''(x) = 4080x^{15} - 288x^7 + 168x^2 + 22$; $f''(0) = 22$. Es hat deshalb dort ein Minimum.
$f"(-0.9) = -544.2063$. Es gibt dort ein Maximum.

(g) die Nullstelle von $s'(a) : 2a - \frac{3}{4}t = 0 \Longrightarrow$.
$2a - \frac{3}{4}t \Longrightarrow a = \frac{3}{8}t$
$s''(a) = 2$. Es gibt in $a = \frac{3}{8}t$ ein Minimum.

(h) Es handelt sich um eine konstante Funktion, die vom Parameter a abhängt. $s(t)$ ist eine Gerade ohne Maximum. $s"(t) = 0$.

(i) Die Nullstelle von $f'(x)$: $10x - 15 = 0 \Longrightarrow x = 1.5$; $f''(x) = 10$. In $x = 1.5$ hat es ein Minimum.

5. Man erhält für $K(x) = 0.002x^3 - 0.04x^2 + 0.8x + 4$

(a) ökonomischer Bereich: $0.002x^3 - 0.04x^2 + 0.8x + 4 = 0$, NS:$-4.0263$. $K(0) = 4 > 0$. Da K stetig ist (Polynom) und es keine reelle NS rechts von -4.0263 gibt, ist K im ersten Quadranten positiv.

(b) Fixkosten: 4

(c) Erlösfunktion $E(x) = x(2.5 - 0.1x) = 2.5x - 0.1x^2$.
Gewinnfunktion: $G(x) = E(x) - K(x) = 2.5x - 0.1x^2 - \left(0.002x^3 - 0.04x^2 + 0.8x + 4\right) = -0.002x^3 - 0.06x^2 + 1.7x - 4$
$\frac{d}{dx}\left(-0.002x^3 - 0.06x^2 + 1.7x - 4\right) = -0.006x^2 - 0.12x + 1.7$
$-0.006x^2 - 0.12x + 1.7 = 0$, NS: $9.5789, -29.579$
$\frac{d}{dx}\left(-0.006x^2 - 0.12x + 1.7\right) = -0.012x - 0.12$
$G''(9.5789) = -0.012 \cdot 9.5789 - 0.12 = -0.23495 < 0$ (also Maximum in 9.5789)
Maximaler Gewinn: $P(9.5789) = -0.002 \cdot 9.5789^3 - 0.06 \cdot 9.5789^2 + 1.7 \cdot 9.5789 - 4 = 5.0210$
Die Situation mit R zeichen:
K=function(x)0.002*xˆ3-0.04*xˆ2+0.8*x+4
plot(K,xlim=c(0,20),ylim=c(0,20))
E=function(x) x*(2.5-0.1*x)
curve(E, add=T,col="green")
G=function(x) -0.002*xˆ3-0.06*xˆ2+1.7*x-4
curve(G,add=T,col="red")

6. Man erhält: $K(x) = -3 \cdot 10^{-10}x^4 + 3 \cdot 10^{-7}x^3 + 7 \cdot 10^{-4}x^2 + 300$

(a) ökonomisch vernünftiges Intervall: die Funktion sollte im ersten Quadranten positive Funktionswerte aufweisen.

$$-3 \cdot 10^{-10}x^4 + 3 \cdot 10^{-7}x^3 + 7 \cdot 10^{-4}x^2 + 300 = 0$$

Mit polyroot(c(300,0,7*10ˆ(-4), 3*10ˆ(-7),-3*10ˆ(-10))) erhält man zwei reelle Nullstellen: -1285.6026, 2171.9215
Es gilt K(0) = 300 und $K(2200) = -145.28$. Da K als Polynom stetig ist, ist die Funktion positiv zwischen 0 und 2171.9215. Entsprechend ist die Funktion höchstens

definiert auf [0, 2171.9215[.
Die Kostenfunktion sollte steigend sein.
$K'(x) = \frac{d}{dx}\left(-3 \cdot 10^{-10}x^4 + 3 \cdot 10^{-7}x^3 + 7 \cdot 10^{-4}x^2 + 300\right) = -12{\cdot}10^{-10}x^3 + 9{\cdot}10^{-7}x^2 + 14 \cdot 10^{-4}x$. Mit polyroot(c(0, 14*10^(-4),9*10^(-7),-12*10^(-10))) erhält man drei reelle Nullstellen: -768.3686, 0, und 1518.3686. Da $K'(1) = 0.147\,8 > 0$ und da K' stetig ist, hat K' zwischen 0 und 1518.2686 überall das selbe positive Vorzeichen. Entsprechend ist K auf]0, 1518.3686[strikt monoton steigend. Der maximale Definitionsbereich ist die Schnittmenge der beiden Intervalle:]0, 1518.3686[(die 0 kann man durchaus im Intervall drin lassen. Die Steigung in 0 ist nicht relevant).

(b) Fixkosten: 300

(c) Erlösfunkton $E(x) = x(19 - 0.1x) = 19x - 0.1x^2$.
Gewinnfunktion $G(x) = E(x) - K(x) =$
$19x - 0.1x^2 - \left(-3 \cdot 10^{-10}x^4 + 3 \cdot 10^{-7}x^3 + 7 \cdot 10^{-4}x^2 + 300\right) =$
$3 \cdot 10^{-10}x^4 - 3 \cdot 10^{-7}x^3 - 0.100\,7x^2 + 19x - 300$
$\frac{d}{dx}\left(3 \cdot 10^{-10}x^4 - 3 \cdot 10^{-7}x^3 - 0.100\,7x^2 + 19x - 300\right) = 1.2 \cdot 10^{-9}x^3 - 9 \cdot 10^{-7}x^2 - 0.201\,4x + 19$
$1.2 \cdot 10^{-9}x^3 - 9 \cdot 10^{-7}x^2 - 0.201\,4x + 19 = 0$
Lösungen: 13289, 94.305, −12634 ; Eingabe mit R:
polyroot(c(19,-0.2014,-9*10 ^(-7),1.2*10 ^(-9))); Resultat: 94.30488-0i -12633.73616+0i 13289.43128-0i
$\frac{d}{dx}\left(1.2 \cdot 10^{-9}x^3 - 9 \cdot 10^{-7}x^2 - 0.201\,4x + 19\right) = 3.6 \cdot 10^{-9}x^2 - 1.8 \cdot 10^{-6}x - 0.201\,4$
$G''(94.305) = 3.6 \cdot 10^{-9} \cdot 94.305^2 - 1.8 \cdot 10^{-6} \cdot 94.305 - 0.201\,4 = -0.201\,54$ (also Maximum in 94.305)
$G''(13289) = 3.6 \cdot 10^{-9} \cdot 13289^2 - 1.8 \cdot 10^{-6} \cdot 13289 - 0.201\,4 = 0.410\,43 > 0$ (also Minimum in 13289)
Maximaler Gewinn: $G(94.305) = 3{\cdot}10^{-10}{\cdot}94.305^4 - 3{\cdot}10^{-7}{\cdot}94.305^3 - 0.100\,7{\cdot}94.305^2 + 19 \cdot 94.305 - 300 = 596.00$
Zeichnung mit R:
K=function(x)-3*10^(-10)*x^4+3*10^(-7)*x^3+7*10^(-4)*x^2+300
plot(K,xlim=c(0,300),ylim=c(0,1000))
E=function(x) x*(19-0.1*x)
curve(E, add=T,col="green")
G=function(x) 3*10^(-10)*x^4-3*10^(-7)*x^3-0.1007*x^2+19*x-300
curve(G,add=T,col="red")

7. Man erhält:

(a) Wir versuchen eine Polynomfunktion an die Daten anzupassen (4 Daten bestimmen vermutlich eine Polynomfunktion 3. Grades. Diese hat die Form $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Da die Funktion durch die bekannten Punkte laufen muss, gilt:

$$\begin{aligned} 10 &= d \\ 296.4 &= 4^3a + 4^2b + 4c + d \\ 910 &= 30^3a + 30^2b + 30c + d \\ 2010 &= 40^3a + 40^2b + 40c + d \end{aligned}$$

Wir lösen dieses Gleichungssystem auf und erhalten:
$a = 0.1$
$b = -5$
$c = 90$
$d = 10$
Dies ergibt die folgende Kostenfunktion: $K(x) = 0.1x^3 - 5x^2 + 90x + 10$

(10 sind die Fixkosten).
Mit R: X=matrix(c(0,0,0,1,4^3,4^2,4,1,30^3,30^2,30,1,40^3,40^2,40,1),
ncol=4,byrow=T)
y=c(10,296.4,910,2010)
solve(X,y)
oder:
x=c(0,4,30,40)
X=cbind(x^3,x^2,x,x^0)
solve(X,y) #y wie vorher

(b) Eine Kostenfunktion muss im ersten Quadranten oder im sinnvollen Bereich des ersten Quadranten monoton steigend sein. Wir berechnen die erste Ableitung: $K'(x) = \frac{d}{dx}\left(0.1x^3 - 5x^2 + 90x + 10\right) = 0.3x^2 - 10x + 90$. Wir berechnen die Nullstellen dieser Funktion, um zu sehen, wo die 1. Ableitung positiv ist. $0.3x^2 - 10x + 90 = 0$. Es hat keine reelle Lösung. $K'(0) = 90$. Somit gilt $K'(x) > 0$ für alle x, da K' stetig ist und K ist überall monoton steigend. Wir können somit die Funktion sinnvoll als Kostenfunktion verwenden.

(c) Wir wählen als Modell wiederum eine Polynomfunktion. Durch zwei Punkte ist eine Gerade bestimmt (Polynom 1. Grades). Da die Funktion durch beide bekannten Punkte verlaufen soll, erhalten wir das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 50 &= 30a + b \\ 70 &= 20a + b \end{aligned}$$

Lösung: $a = -2, b = 110 \Longrightarrow P_N(x) = -2x + 110$

(d) Der Erlös besteht aus der abgesetzten Menge mal dem Preis:
$E(x) = \ xP_N(x) = x\left(-2x + 110\right) = -2x^2 + 110x$

(e) Für die Gewinnfunktion gilt:
$G(x) = E(x) - K(x) = \left(-2x^2 + 110x\right) - \left(0.1x^3 - 5x^2 + 90x + 10\right) = -0.1x^3 + 3x^2 + 20x - 10$

(f) Wir berechnen die erste und die zweite Ableitung der Gewinnfunktion:
$\frac{d}{dx}\left(-0.1x^3 + 3x^2 + 20x - 10\right) = -0.3x^2 + 6x + 20$
$\frac{d}{dx}\left(-0.3x^2 + 6x + 20\right) = -0.6x + 6$
Nullstellen der ersten Ableitung: $-0.3x^2 + 6x + 20 = 0 \Longrightarrow x_1 - 2.909\,9, x_2 = 22.910$
Wir betrachten nur den ersten Quadranten (fürs Beispiel ökonomisch sinnvoller Bereich) und überprüfen, ob in 22.910 ein Maximum oder ein Minimum vorliegt:
$G''(22.910) = -0.6 \cdot 22.910 + 6 = -7.746 < 0$
Damit liegt in 22.910 ein Maximum der Gewinnfunktion vor.
Der maximale Gewinn beträgt: $G(22.910) = -0.1 \cdot 22.910^3 + 3 \cdot 22.910^2 + 20 \cdot 22.910 - 10 = 820.33$.

(g) Abbildung 7.6.18:

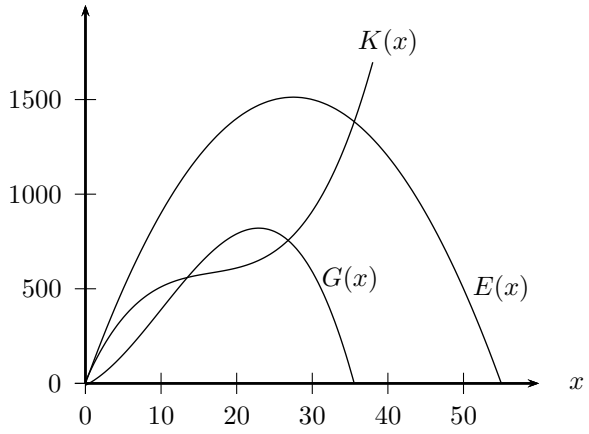


Abbildung 7.6.18: Kostenfunktion, Erlösfunktion und Gewinnfunktion der Übung

Beachten Sie in der Zeichnung, dass die Gewinnfunktion genau dort ihre Nullstellen hat, wo die Kostenfunktion die Erlösfunktion schneidet!

8. Man erhält:

   (a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 5 \qquad \frac{d}{dx}(2x^3 - 3x^2 + 2x - 5) = 6x^2 - 6x + 2$
   Wir berechnen die Nullstellen der ersten Ableitung: $6x^2 - 6x + 2 = 0$ Es gibt keine reelle Nullstellen. Damit gilt wegen der Stetigkeit von f' : $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Somit weist $f(x)$ überall eine positive Steigung auf. Folglich auch im Intervall $]5, 6[$

   (b) $g(x) = 5x^4 - 2x^3 + 3x - 20$
   $\frac{d}{dx}(5x^4 - 2x^3 + 3x - 20) = 20x^3 - 6x^2 + 3$
   Wir berechnen die Nullstellen der ersten Ableitung: $20x^3 - 6x^2 + 3 = 0 \Longrightarrow x = -0.447\,85$. Es hat nur eine reelle Nullstelle. Wir berechnen $g'(0) = 3$. Damit gilt für alle $x > -0.44785$: $g'(x) > 0$ (wegen der Stetigkeit von g'). Damit ist in $I = \ ]1, 2[$ die Steigung überall positiv.

   (c) $h(x) = 4x^2 - 100x + 20$
   $\frac{d}{dx}(4x^2 - 100x + 20) = 8x - 100$
   Wir berechnen die Nullstellen von $h'(x)$: $8x - 100 \Longrightarrow x = \frac{25}{2} = 12.5$
   Da $h'(0) = -100$, gilt wegen der Stetigkeit für $x < 12.5$: $h'(x) < 0$ und für $x > 12.5$: $h'(x) > 0$.
   Damit ist im Intervall $]2, 12.5[$ die Steigung der Funktion h sinkend, im Intervall $]12.5, 20[$ ist sie steigend.

9. Man erhält:

   (a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 5$
   1. Ableitung: $\frac{d}{dx}\left(2x^3 - 3x^2 + 2x - 5\right) = 6x^2 - 6x + 2$;
   2. Ableitung: $\frac{d}{dx}\left(6x^2 - 6x + 2\right) = 12x - 6$
   $12x - 6 = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}$ (Wendepunkt in 0.5)
   3. Ableitung: $\frac{d}{dx}\left(12x - 6\right) = 12 > 0$
   Damit liegt in 0.5 ein konkav-konvex-Wendepunkt vor.

   (b) $g(x) = 5x^4 - 2x^3 + 3x - 20$
   1. Ableitung: $\frac{d}{dx}\left(5x^4 - 2x^3 + 3x - 20\right) = 20x^3 - 6x^2 + 3$
   2. Ableitung: $\frac{d}{dx}\left(20x^3 - 6x^2 + 3\right) = 60x^2 - 12x = x(60x - 12)$
   Nullstellen: $x = 0$ und $60x - 12 = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{5}$
   3. Ableitung: $\frac{d}{dx}\left(60x^2 - 12x\right) = 120x - 12$
   Wir haben damit einen Wendepunkt in 0 und einen in 0.2.

In $x = 0$ ist $g^{(3)}(0) = -12 < 0$. Damit liegt dort ein konvex-konkav Wendepunkt vor.
In $x = 0.2$ ist $g^{(3)}(0.2) = 120 \cdot 0.2 - 12 = 12 > 0$, wobei $g^{(3)}$ für die dritte Ableitung verwendet wird. Damit liegt dort ein konkav-konvex Wendepunkt vor.

(c) $h(x) = 4x^2 - 100x + 20$
1. Ableitung: $\frac{d}{dx}\left(4x^2 - 100x + 20\right) = 8x - 100$
2. Ableitung: $\frac{d}{dx}\left(8x - 100\right) = 8 > 0$ für alle x. Damit ist die Kurve überall konvex. Kein Wendepunkt.

(d) $k(x) = x^3 - 16x^2 + 6x - 4$
1. Ableitung: $\frac{d}{dx}\left(x^3 - 16x^2 + 6x - 4\right) = 3x^2 - 32x + 6$
2. Ableitung: $\frac{d}{dx}\left(3x^2 - 32x + 6\right) = 6x - 32$
3. Ableitung: $\frac{d}{dx}\left(6x - 32\right) = 6 > 0$
$6x - 32 = 0 \Longrightarrow x = \frac{16}{3} = 5.333\,3$ (= Wendepunkt)
Damit liegt ein konkav-konvex-Wendepunkt vor.

(e) $x(r) = r^4 - 12r^2 + 1$
1. Ableitung: $\frac{d}{dr}\left(r^4 - 12r^2 + 1\right) = 4r^3 - 24r$
2. Ableitung: $\frac{d}{dr}\left(4r^3 - 24r\right) = 12r^2 - 24$
3. Ableitung: $\frac{d}{dr}\left(12r^2 - 24\right) = 24r$
$12r^2 - 24 \Longrightarrow r = \pm\sqrt{2}$ (2 Wendpunkte)
In $-\sqrt{2}$ gilt: $r^{(3)}(-\sqrt{2}) = 24 \cdot -\sqrt{2} < 0$. Damit liegt dort konvex-konkav Wendepunkt.
In $\sqrt{2}$ gilt: $r^{(3)}(\sqrt{2}) = 24 \cdot \sqrt{2} > 0$. Damit liegt dort ein konkav-konvex Wendepunkt.

(f) $g(u) = u^4 - 4u^3 + 6u^2 - 3u + 1$
1. Ableitung: $\frac{d}{du}\left(u^4 - 4u^3 + 6u^2 - 3u + 1\right) = 4u^3 - 12u^2 + 12u - 3$
2. Ableitung: $\frac{d}{du}\left(4u^3 - 12u^2 + 12u - 3\right) = 12u^2 - 24u + 12$
3. Ableitung: $\frac{d}{du}\left(12u^2 - 24u + 12\right) = 24u - 24$
$12u^2 - 24u + 12 = 0 \Longrightarrow u = 1$ (dort Wendepunkt).
In gilt: $g^{(3)}(1) = 24 - 24 = 0$. Damit wird durch die dritte Ableitung die Frage nicht entschieden. Das liegt daran, dass die zweite Ableitung in 1 zwar eine Nullstelle hat, die x-Achse aber nicht quert. Entsprechend ist die 2. Ableitung bis auf die Stelle 1, wo sie 0 ist, überall positiv. g ist also bis auf $x = 1$ überall konvex. Man kann sich das so vorstellen, dass die Wendepunkte zu einem Wendepunkt zusammengerückt sind, wodurch an dieser Stelle keine „Wende“ erfolgt (s. Abbildung 7.6.19).

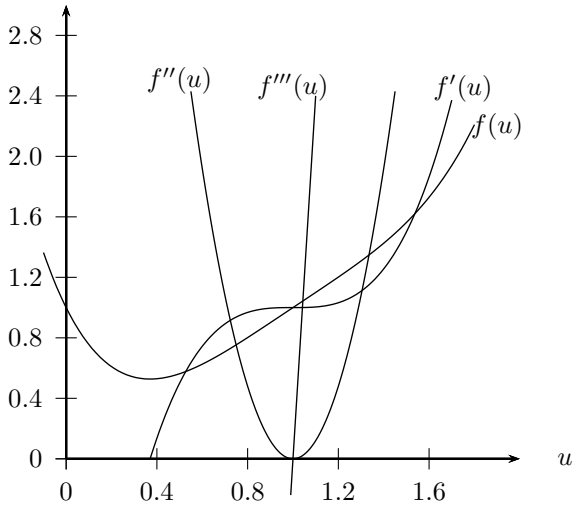


Abbildung 7.6.19: Die zweite Ableitung hat eine Nullstelle, ohne dass ein Wendepunkt vorliegt

10. Wir berechnen $f(3) = 3 \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 5 = 64$
Wir berechnen $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(3x^3 - 2x^2 + 2x - 5\right) = 9x^2 - 4x + 2$
und $f'(3) = 9 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 + 2 = 71$
Wir erhalten in $(3, 64)$ die Tangentengleichung : $g(x) = 64 + 71(x - 3) = 71x - 149$.

11. $K(x) = 0.1x^3 - 5x^2 + 100x + 5$
$E(x) = xP_N(x) = x(-3x + 150) = -3x^2 + 150x$
$G(x) = E(x) - K(x) = \left(-3x^2 + 150x\right) - \left(0.1x^3 - 5x^2 + 100x + 5\right)$
$= -0.1x^3 + 2x^2 + 50x - 5$
$G'(x) = \frac{d}{dx}\left(-0.1x^3 + 2x^2 + 50x - 5\right) = -0.3x^2 + 4x + 50$
Nullstellen: $-0.3x^2 + 4x + 50 = 0 \Longrightarrow x_1 - 7.863\,0; x_2 = 21.196$
Wir interessieren uns nur für die positive Nullstelle.
$G''(x) = \frac{d}{dx}\left(-0.3x^2 + 4x + 50\right) = -0.6x + 4$
$G''(21.196) = -0.6 \cdot 21.196 + 4 = -8.717\,6 < 0$
Somit liegt in 21.196 ein Maximum vor.
Maximaler Gewinn: $G(21.196) = -0.1 \cdot (21.196)^3 + 2 \cdot (21.196)^2 + 50 \cdot 21.196 - 5 = 1001.1$

12. Wir berechnen zuerst die Preisnachfragefunktion der Form $P_N(x) = ax + b$, da wir nur zwei Punkte kennen. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} 55 &= 10a + b \\ 35 &= 20a + b \end{aligned} \tag{7.6.3}$$

$b = 75, a = -2. \Longrightarrow P_N(x) = -2x + 75$
Die Erlösfunktion ist dann: $xP_N(x) = x\left(-2x + 75\right) = -2x^2 + 75x$
Die Gewinnfunktion: $G(x) = E(x) - K(x) = \left(-2x^2 + 75x\right) - \left(0.2x^3 - 6x^2 + 90x + 5\right) =$
$-0.2x^3 + 4x^2 - 15x - 5$
$G'(x) = \frac{d}{dx}\left(-0.2x^3 + 4x^2 - 15x - 5\right) = -0.6x^2 + 8x - 15$
Nullstellen: $-0.6x^2 + 8x - 15 = 0 \Longrightarrow x_1 = 2.257\,1, x_2 = 11.076$
$G''(x) = \frac{d}{dx}\left(-0.6x^2 + 8x - 15\right) = -1.2x + 8$
$G''(11.076) = -1.2 \cdot 11.076 + 8 = -5.291\,2 < 0$
Somit liegt in 11.076 ein Maximum
Maximaler Gewinn: $G(11.076) = -0.2 \cdot (11.076)^3 + 4 \cdot (11.076)^2 - 15 \cdot 11.076 - 5 = 47.815$

13. $\frac{d}{dx}\left(-4x^2 + x - 1\right) = 1 - 8x$
Damit erhält man folgende Gleichungen:
(1) die Steigung a der Tangente ist in x mit der ersten Ableitung identisch
(2) Wir können den Punkt $(1, 2)$ in die Gleichung $g(x) = ax + b$ einsetzen
(3) Die Tangente hat einen Schnittpunkt mit der Funktion f :

$$\begin{aligned} 1 - 8x &= a \\ 2 &= a + b \\ -4x^2 + x - 1 &= ax + b \end{aligned}$$

Es handelt sich um ein Gleichungssystem von drei Gleichungen mit drei Unbekannten, das man auflösen muss. Man erhält:
$a = 4\sqrt{6} - 7 = 2.798\,0$
$b = 9 - 4\sqrt{6} = -0.797\,96$
$x = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{6} = -0.224\,74$
Geradengleichung: $g(x) = 2.798x - 0.79796$
Berechnung Schnittpunkt: $g(-0.22474) = 2.798 \cdot -0.224\,74 - 0.79796 = -1.426\,8$
Der Schnittpunkt ist also $(-0.22474, -1.426\,8)$
beziehungsweise:
$a' = -4\sqrt{6} - 7 = -16.798$

$b' = 4\sqrt{6} + 9 = 18.798$
$x = \frac{1}{2}\sqrt{6} + 1 = 2.224\,7$
Geradengleichung: $g'(x) = -16.798x + 18.798$
Berechnung Schnittpunkt: $g'(2.22447) = -16.798 \cdot 2.224\,7 + 18.798 = -18.573$
Der Schnittpunkt ist also $(2.2247, -18.573)$ (s. Abbildung 7.6.20)

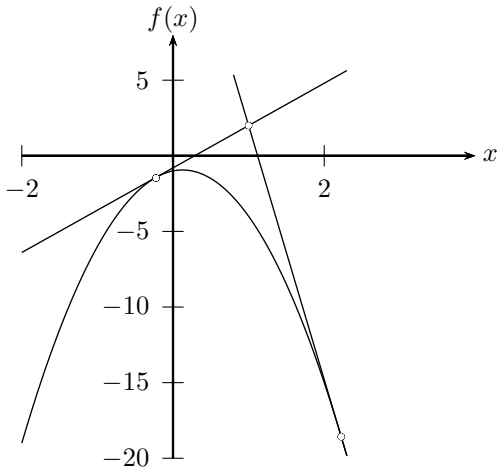


Abbildung 7.6.20: Graphik zur Aufgabe

14. Es ergibt sich:

(a) Mit $g(x) = ax + 0.01$
$\frac{d}{dx}\left(-0.001x^2 + 0.06x\right) = 0.06 - 0.002\,x = a$
ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} a &= 0.06 - 0.002\,x \\ ax + 0.01 &= -0.001x^2 + 0.06x, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} (0.06 - 0.002\,x)\,x + 0.01 &= -0.001x^2 + 0.06x \\ -0.002\,x^2 + 0.06x + 0.01 &= -0.001x^2 + 0.06x \\ 0.01 - 0.001\,x^2 &= 0 \end{aligned}$$

Man erhält: $0.01 - 0.001\,x^2 = 0$, Lösung: $\sqrt{\frac{0.01}{0.001}} = 3.162\,3$ für $x > 0$.
$a = 0.06 - 0.002\sqrt{\frac{0.01}{0.001}} = 5.367\,5 \times 10^{-2} = 0.053675$
Kapitalmarktlinie:

$$g(x) = 0.053675x + 0.01$$

(b) Risiko des Marktportfolios:

$$3.162\,3$$

erwarteter Ertrag:

$$g(3.1623) = 0.053675 \cdot 3.162\,3 + 0.01 = 0.179\,74$$

(c) $g(2) = 0.053675 \cdot 2 + 0.01 = 0.117\,35$

(d) Es gilt

$$c\begin{pmatrix} 0 \\ 0.01 \end{pmatrix} + (1-c)\begin{pmatrix} 3.1625 \\ 0.17974 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.117\,35 \end{pmatrix}$$

Dies ergibt zwei Gleichungen mit je einer Unbekannten. Man kann eine oder die andere auflösen (bis auf Rundungsfehler ergibt sich dasselbe Resultat).

$$c \cdot 0 + (1-c) \cdot 3.1625 = 2$$

Lösung: 0.367 59
Man sollte also 36.759% sichere Anlage wählen und den Rest vom Marktportfolio.

15.

$$\frac{d}{dx}\left(0.9x^3 - 2x^2 - 3x + 4\right) = 2.7x^2 - 4x - 3$$

Gibt man 2.5 in die Zelle A1 schreibt man:

	A	B	C
1	2.5	=0.9∗A1^3 − 2∗A1^2 − 3∗A1 + 4	=2.7∗A1^2 − 4∗A1 − 3
2	=A1-B1/C1		

Man zieht die Zellen B1 und C1 auf B2 und C2 und dann die Zellen A2,B2 und C2 nach unten. Die Nullstelle ist 2.844 8. Man braucht mit der Newton-Methode 5 Runden, mit der Regula falsi 48. Das Newton-Verfahren konvergiert also viel schneller (s. Exceltabelle Nullstellen_Newton_Regula_Falsi.xlsx auf math.logik.ch).

Mit R:
f=function(x) $0.9 * x\hat{}3 - 2 * x\hat{}2 - 3 * x + 4$
df=function(x) $2.7 * x\hat{}2 - 4 * x - 3$
a=2.5
while(abs(f(a))>0.00000001) {a=a-f(a)/df(a)}
a

Möchte man wissen, wieviel Runden R benötigt, kann man einen Zähler anfügen:
a=2.5
n=0
while(abs(f(a))>0.00000001) {a=a-f(a)/df(a);n=n+1}
list(c(Nullstelle=a,Anzahl_Runden=n))

Nullstelle bei Berührung statt Durchquerung:
f=function(x) $x\hat{}3 - 11 * x\hat{}2 + 40 * x - 48$
df=function(x) $3 * x\hat{}2 - 22 * x + 40$
a=3.5
while(abs(f(a))>0.000000000000001) {a=a-f(a)/df(a)}
a

16. Da ein Polynom vorliegt, ist dieses stetig und alle Ableitungen sind ebenfalls stetig.
$\frac{d}{dx}\left(5x^8 - 6x^4 + 3x^2\right) = 40x^7 - 24x^3 + 6x$ (erste Ableitung)
Nullstellen mit R:
> polyroot(c(0,6,0,-24,0,0,0,40))
[1] 0.0000000+0.0000000i 0.5395572+0.0000000i -0.5395572-0.0000000i
[4] 0.0000000-0.9370053i 0.7660659-0.0000000i 0.0000000+0.9370053i
[7] -0.7660659-0.0000000i
reelle Nullstellen: -0.7660659, -0.5395572, 0, 0.5395572, 0.7660659
Man kann aus dem Lösungsvektor die komplexen Zahlen und den Imaginärteil wie folgt entfernen:

a=polyroot(c(0,6,0,-24,0,0,0,40)); areel=Re(a[c(1,2,3,5,7)])
> df=function(x) 40*x^7-24*x^3+6*x
> df(1) ergibt: [1] 22;
> df(0.6) ergibt: [1] -0.464256; > df(0.5): [1] 0.3125; > df(0): [1] 0; > df(-0.5): [1] -0.3125; > df(-0.6): [1] 0.464256; > df(-1): [1] -22
Damit gilt:
f ist strikt sinkend auf $]-\infty, -0.7660659[$
f ist strikt wachsend auf $]-0.7660659, -0.5395572[$
f ist strikt sinkend auf $]-0.5395572, 0[$
f ist strikt wachsend auf $]0, 0.5395572[$
f ist strikt sinkend auf $]0.5395572, 0.7660659[$
f ist strikt wachsend auf $]0.7660659, \infty[$.

Intervalle auf denen die Funktion konkav oder konvex ist.
$\frac{d}{dx}\left(40x^7 - 24x^3 + 6x\right) = 280x^6 - 72x^2 + 6$ (zweite Ableitung)
Nullstellen: > polyroot(c(6,0,-72,0,0,0,280))
[1] 0.2928971+0.0000000i -0.2928971-0.0000000i 0.0000000-0.7379125i
[4] 0.6772932-0.0000000i 0.0000000+0.7379125i -0.6772932+0.0000000i
Relle Nullstellen: -0.6772932, -0.2928971, 0.2928971, 0.6772932
ddf=function(x) 6-72*x^2+280*x^6
> ddf(-1): [1] 214; > ddf(-0.5): [1] -7.625; > ddf(0): [1] 6; > ddf(0.5): [1] -7.625; > ddf(1): [1] 214
Die zweite Ableitung ist positiv auf $]-\infty, -0.6772932[$ (f ist dort konvex)
Die zweite Ableitung ist negativ auf $]-0.6772932, -0.2928971[$ (f ist dort konkav)
Die zweite Ableitung ist positiv auf $]-0.2928971, 0.2928971[$ (f ist dort konvex)
Die zweite Ableitung ist negativ auf $]0.2928971, 0.6772932[$ (f ist dort konkav)
Die zweite Ableitung ist positiv auf $]0.6772932, \infty[$ (f ist dort konvex).

Maxima und Minima
Bei der Nullstelle (NS) der ersten Ableitung findet sich ein lokales Maximum von f, wenn f dort konkav ist; ein lokales Minimum, wenn f dort konvex ist:
erste NS: -0.7660659 (f ist dort konvexe : Minimum: $f(-0.7660659) = 0.2872249$)
zweite NS: -0.5395572 (f ist dort konkav: Maximum:$f(-0.5395572) = 0.4007684$)
dritte NS: 0 (f ist dort konvex: Maximum: $f(0) = 0$)
vierte NS: 0.5395572 (f ist dort konkav: Maximum: $f(0.5395572)) = 0.4007684$
fünfte NS: 0.7660659 (f ist dort konvex : Minimum: $f(0.7660659) = 0.4007684$)
mit R:
> f=function(x) 5*x^8-6*x^4+3*x^2
> f(-0.7660659); [1] 0.2872249; > f(-0.5395572); [1] 0.4007684; > f(0); [1] 0; > f(0.5395572); [1] 0.4007684; > f(0.7660659); [1] 0.4007684

Überprüfen Sie die Resultate mit Hilfe der Graphik!
Graphik für f: plot(f,xlim=c(-1,1))
Um die Ableitungen zur Graphik hinzuzufügen:
curve(df,add=T)
curve(ddf,add=T)
Wenn man die Ableitungen ganz auf dem betrachteten Intervall sehen will,
muss man z.B. die folgenden Befehle ausführen lassen:
plot(f,xlim=c(-1,1), ylim=c(-10,10))
curve(df,add=T)
curve(ddf,add=T)

7.7 Lernziele

- Die Definition der Steigung einer stetigen Funktion in x_0 hinschreiben können.
- Die Definition der Tangente und der Sekante einer Funktion in x_0 hinschreiben können.
- Die Sätze 7.2.1, 7.2.2 und 7.2.3 beweisen können.
- Polynomfunktionen ableiten können
- Wissen, dass Differenzierbarkeit Stetigkeit impliziert, dass die Umkehrung aber nicht gilt.
- Die Definitionen von „strikt monoton steigend“ und „strikt monoton sinkend“ kennen.
- Die Aussage kennen, dass eine positive erste Ableitung die strikt steigende Monotonie impliziert und dass eine negative erste Ableitung die strikt sinkende Monotonie impliziert (dass jedoch die Umkehrung nicht gilt, dazu ein Beispiel angeben können).
- Die Definition eines lokalen Maximums und Minimums sowie eines Extremums angeben können.
- Die Definition einer in einem Intervall konkaven (konvexen) Kurve angeben können.
- Den Zusammenhang von Maximum und Konkavität (Minimum und Konvexität) angeben können.
- Die Bedingungen eines lokalen Maximums (Minimums) angeben und anwenden können. Lokale Maxima und Minima berechnen können.
- Die Definition des Wendepunktes und seine Bedeutung kennen. Wendepunkte berechnen können. Konvex-konkav-Wendepunkte von Konkav-konvex-Wendepunkte rechnerisch unterscheiden können.
- Aufgaben von der Art der Übungen lösen können.

Kapitel 8

Weitere Ableitungsregeln

Wir haben bemerkt, dass die Berechnung der Ableitung von Funktionen des Typs $\frac{f(x)}{g(x)}$ (wobei $f(x)$ und $g(x)$ Polynomfunktionen sind) mit Hilfe der Ableitungsdefinition recht schwierig werden. Für die weiteren reellen Funktionstypen, die wir eingeführt haben, würde sich das Problem vermutlich verschärfen. Es wäre also nützlich, praktischere Verfahren zu haben. Solche werden wir nun einführen. Wir setzen dabei jeweils voraus, dass f und g im Intervall I, in dem sie definiert sind, stetig ableitbar sind, d.h. dass deren Ableitungen stetig sind.

8.1 Einige Regeln mit Beweisen

Satz 8.1.1.

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

Beweis. Laut Satz 7.6.5 gilt für auf I ableitbare Funktionen und $a, x \in I$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + r_f(x) \\ g(x) &= g(a) + g'(a)(x-a) + r_g(x) \end{aligned}$$

Damit ist dann

$$f(x)\cdot g(x) = [f(a) + f'(a)(x-a) + r_f(x)]\cdot[g(a) + g'(a)(x-a) + r_g(x)]$$

Der rechte Term ist - durch Ausmultiplikation - identisch mit:

$$\begin{aligned} &f(a)g(a) + f(a)g'(a)(x-a) + f(a)r_g(x) + \\ &f'(a)(x-a)g(a) + f'(a)(x-a)g'(a)(x-a) + f'(a)(x-a)r_g(x) + \\ &r_f(x)g(a) + r_f(x)g'(a)(x-a) + r_f(x)r_g(x) \end{aligned}$$

Durch Umstellen und einmaliges Ausklammern erhält man:

$$\begin{aligned} &f(a)g(a) + \left[f(a)g'(a) + f'(a)g(a)\right](x-a) + \\ &+ f'(a)g'(a)(x-a)^2 + f'(a)(x-a)r_g(x) + f(a)r_g(x) + \\ &r_f(x)g(a) + r_f(x)g'(a)(x-a) + r_f(x)r_g(x) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist von der Form

$$f(a)g(a) + \left[f(a)g'(a) + f'(a)g(a)\right](x-a) + r(x)$$

wenn wir

$$r(x) = f'(a)g'(a)(x-a)^2 + f'(a)r_g(x)(x-a) + f(a)r_g(x) + \\ r_f(x)g(a) + r_f(x)g'(a)(x-a) + r_f(x)r_g(x) \tag{8.1.1}$$

setzen. Laut Satz 7.6.6 gilt

$$\frac{d}{da}\left(f(a)g(a)\right) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a),$$

wenn

$$\lim_{x\to a}\frac{r(x)}{x-a} = 0.$$

Da f und g ableitbare Funktionen sind, gilt

$$\lim_{x\to a}\frac{r_f(x)}{x-a} = 0 = \lim_{x\to a}\frac{r_g(x)}{x-a}$$
$$\lim_{x\to a} r_f(x) = 0 = \lim_{x\to a} r_g(x)$$

Zudem gilt

$$\lim_{x\to a}(x-a) = 0$$

Durch Berechnung der Grenzwerte der Summanden von $\frac{r}{x-a}$:

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(a)r_g(x)(x-a)^2}{x-a} = \lim_{x\to a} f'(a)r_g(x)(x-a) = f'(a)\lim_{x\to a} r_g(x)\lim_{x\to a}(x-a) = 0$$
$$\lim_{x\to a}\frac{f'(a)r_g(x)(x-a)}{x-a} = \lim_{x\to a} f'(a)r_g(x) = f'(a)\lim_{x\to a} r_g(x) = 0$$
$$\lim_{x\to a}\frac{f(a)r_g(x)}{x-a} = f(a)\lim_{x\to a}\frac{r_g(x)}{x-a} = 0$$
$$\lim_{x\to a}\frac{r_f(x)g(a)}{x-a} = g(a)\lim_{x\to a}\frac{r_f(x)}{x-a} = 0$$
$$\lim_{x\to a}\frac{r_f(x)g'(a)(x-a)}{x-a} = \lim_{x\to a} r_f(x)g'(a) = g'(a)\lim_{x\to a} r_f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to a}\frac{r_f(x)r_g(x)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{r_f(x)}{x-a}\lim_{x\to a} r_g(x) = 0$$

erhält man:

$$\lim_{x\to a}\frac{r(x)}{x-a} = 0.$$

□

Satz 8.1.2.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2} \text{ (sofern } g(x) \neq 0)$$

Beweis. Sei $h(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$. Damit gilt:

$$h(x)g(x) = f(x)$$

und

$$f'(x) = h'(x)g(x) + h(x)g'(x)$$
$$= h'(x)g(x) + \frac{f(x)}{g(x)}g'(x)$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} h'(x)g(x) &= f'(x) - \frac{f(x)}{g(x)}g'(x) \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)g(x)} \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \end{aligned}$$

□

Beispiel 8.1.3.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{5x^2}{(13-2x)}\right) = \frac{10x(13-2x) - 5x^2(-2)}{(13-2x)^2} = \frac{130x - 10x^2}{(13-2x)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{5x-4}{6x+5}\right) = \frac{5(6x+5) - (5x-4)6}{(6x+5)^2} = \frac{49}{(6x+5)^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{7x^2+2x}{18x^3-x^2+5}\right) &= \frac{(14x+2)(18x^3-x^2+5) - (7x^2+2x)(54x^2-2x)}{(18x^3-x^2+5)^2} \\ &= \frac{-126x^4 - 72x^3 + 2x^2 + 70x + 10}{(18x^3-x^2+5)^2} \end{aligned}$$

◊

Satz 8.1.4. *(Kettenregel)*

$$\frac{d}{dx}g(f(x)) = g'(f(x))f'(x)$$

(mit $g : J \to R$, $f(I) \subset J$, $g(y)$ ist in $b := f(a)$ und $y := f(x)$ ist in a differenzierbar).

Beweis. Es gilt laut Voraussetzung und Satz 7.6.6

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + r_f(x)$$

mit

$$\lim_{x\to a}\frac{r_f(x)}{x-a} = 0$$

Zudem gilt analog

$$g(y) = g(b) + g'(b)(y-b) + r_g(y)$$

mit

$$\lim_{y\to b}\frac{r_g(y)}{y-b} = 0$$

Durch Ersetzen der Vorkommen von y durch $f(x)$ und b durch $f(a)$ erhalten wir:

$$g(f(x)) = g(f(a)) + g'(f(a))(f(x) - f(a)) + r_g(f(x))$$

Durch Ersetzen von $f(x)$ durch $f(a) + f'(a)(x-a) + r_f(x)$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(a)) + g'(f(a))\left[(f(a) + f'(a)(x-a) + r_f(x) - f(a)\right] + r_g(f(x)) \\ &= g(f(a)) + g'(f(a))\left[f'(a)(x-a) + r_f(x)\right] + r_g(f(x)) \\ &= g(f(a)) + g'(f(a))f'(a)(x-a) + g'(f(a))r_f(x) + r_g(f(x)). \end{aligned}$$

Mit $\beta := g'(f(a))f'(a)$ und $r(x) := g'(f(a))r_f(x) + r_g(f(x))$ gilt

$$g(f(x)) = g(f(a)) + \beta(x-a) + r(x)$$

Laut Satz 7.6.6 gilt $\beta = \frac{d}{dx}g(f(a))$ genau dann, wenn $\lim\limits_{x\to a}\frac{r(x)}{x-a} = 0$
Wir müssen also noch zeigen dass $\lim\limits_{x\to a}\frac{r(x)}{x-a} = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a}\frac{r(x)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\left(\frac{g'(f(a))r_f(x) + r_g(y)}{x-a}\right) \\ &= \lim_{x\to a}\frac{g'(f(a))r_f(x)}{x-a} + \lim_{x\to a}\frac{r_g(f(x))}{x-a} \\ &= g'(f(a))\lim_{x\to a}\frac{r_f(x)}{x-a} + 0 \\ &= g'(f(a))0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to a}\frac{r_g(f(x))}{x-a} = 0$ gilt, weil für $x \to a$ der Funktionswert $f(x) = y$ gegen b geht (f ist stetig). Da für $y \to b$ der Ausdruck $\frac{r_g(y)}{y-b}$ gegen 0 geht, gilt die Aussage.

Damit gilt $\beta = \frac{d}{da}g(f(a))$ und da $\beta = g'(f(a))f'(a)$

$$\frac{d}{da}g(f(a)) = g'(f(a))f'(a).$$

□

Die Kettenregel kann man sich mit dem folgenden Satz merken: Äussere Ableitung mal innere Ableitung.

Beispiel 8.1.5.

$$\frac{d}{dx}(5x^2-2)^2 = 2(5x^2-2)10x = 100x^3 - 40x$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(5x^2-2x)^3 &= 3(5x^2-2x)^2(10x-2) \\ &= 750x^5 - 750x^4 + 240x^3 - 24x^2 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}(x^2+2)^{100} = 100(x^2+2)^{99}2x$$

$\Diamond$

Satz 8.1.6.

$$\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x$$

Beweis. Wir definieren zuerst:

$$e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

für $n \in \mathbb{N}$ und $n! := n\,(n-1)\,(n-2)\cdot ...\cdot 1$. (Für $x = 1$ wird $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ - siehe Definition von e. Damit ist die Definition von e^x mit der Definition von e verträglich). e^x ist damit für jedes x eine unendliche Summe. Wir leiten die einzelnen Summanden von

$$\frac{x^0}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}....$$

nach x ab und erhalten (da $x^0 = 1$, $0! = 1$ und $\frac{1}{1!} = \frac{x^0}{0!}$):

$$\begin{aligned}
&0 + \frac{1}{1!} + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + .. + \frac{nx^{n-1}}{n!} + ..\\
&= 0 + \frac{1}{1!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + .. + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + ..\\
&= \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}....\\
&= e^x
\end{aligned}$$

$\square$

Satz 8.1.7.

$$\frac{d}{dx}\left(a^x\right) = a^x \ln a \quad \textit{(für } a > 0\textit{)}$$

Beweis. Zuerst zeigen wir: $a^x = e^{x \ln a}$. Denn

$$\ln a^x = x \ln a$$

und

$$\ln e^{x \ln a} = x \ln a \ln e = x \ln a$$

$\Longrightarrow$

$$a^x = e^{x \ln a}$$

Somit gilt mit Satz 8.1.6: $\frac{d}{dx}\left(a^x\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{x \ln a}\right) = \ln a \cdot e^{x \ln a} = a^x \ln a$ $\square$

Satz 8.1.8. *Sei f^{-1} die Umkehrfunktion von f und $f(x) = y$, dann gilt für $\frac{d}{dx} f(x) \neq 0$*

$$\frac{d}{dy} f^{-1}(y) = \frac{1}{\frac{d}{dx} f(x)}$$

Beweis. Wir stellen zuerst fest: $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle f mit Umkehrfunktion (s. Satz 4.2.22, Seite 4.2.22)
Durch Ableitung von $f^{-1}(f(x)) = x$, gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(f^{-1}(f(x))\right) &= \frac{d}{dx}x \\ &= 1\end{aligned}$$

und mit der Kettenregel

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(f^{-1}(f(x))\right) &= \frac{d}{df(x)}f^{-1}\left(f(x)\right)\cdot\frac{d}{dx}f(x) \\ &= \frac{d}{dy}f^{-1}(y)\cdot\frac{d}{dx}f(x)\end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\frac{d}{dy}f^{-1}(y)\cdot\frac{d}{dx}f(x) = 1$$

und

$$\frac{d}{dy}f^{-1}(y) = \frac{1}{\frac{d}{dx}f(x)}$$

□

Beispiel 8.1.9. *Sei $f(x) = ax + b$; dann ist*

$$\frac{d}{dy}f^{-1}(y) = \frac{1}{\frac{d}{dx}f\left(x\right)} = \frac{1}{a}$$

Wobei

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(ax+b) = a$$

◊

Weitere Beispiele liefern die Beweise der folgenden Sätze:

Satz 8.1.10.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\sqrt[n]{x}\right) &= \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{n}}\right) \\ &= \frac{1}{n}x^{\left(\frac{1}{n}-1\right)} \\ &= \frac{1}{n}\sqrt[n]{x^{1-n}} (\textit{für } y > 0)\end{aligned}$$

Beweis. $\sqrt[n]{y} = x$ ist die Umkehrfunktion von $y = x^n$ (für $y \geq 0$)
Wir erhalten:

$$\frac{d}{dy}f^{-1}(y) = \frac{1}{\frac{d}{dx}x^n} = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{y}^{n-1}\right)} = \frac{1}{n}\sqrt[n]{y}^{1-n} = \frac{1}{n}y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1}$$

(für $x > 0$). Den Satz erhalten wir durch Ersetzen von y durch x. □

Beispiel 8.1.11.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\sqrt[5]{20x}\right) &= \frac{d}{dx}\left(20^{\frac{1}{5}}\cdot x^{\frac{1}{5}}\right)\\ &= 20^{\frac{1}{5}}\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{5}}\right) = 20^{\frac{1}{5}}\frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1}\\ &= 20^{\frac{1}{5}}\frac{1}{5}x^{-1}x^{\frac{1}{5}} = 20^{\frac{1}{5}}\frac{1}{5x}x^{\frac{1}{5}}\\ &= \frac{\sqrt[5]{20x}}{5x}\end{aligned}$$

(In solchen Beispielen ist keine spezielle Antwort erforderlich: $20^{\frac{1}{5}}\frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1}$ *ist auch schon korrekt).* ◊

Beispiel 8.1.12.

$$\frac{d}{dx}(\sqrt[4]{x}) = \frac{d}{dx}x^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4}x^{-1}x^{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt[4]{x}}{4x}$$

◊

Satz 8.1.13.

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{m}{n}}\right) = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1} \text{ (für } x>0)$$

Beweis. $x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$. Mit der Kettenregel erhalten wir:

$$\frac{d}{dx}\left(\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m\right) = m\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1}\cdot\left(\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}\right) = \frac{m}{n}x^{\frac{1}{n}(m-1)+\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$$

□

Beispiel 8.1.14.

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt[4]{x^5}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{5}{4}}\right) = \frac{5}{4}x^{\frac{5}{4}-1} = \frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}} = \frac{5}{4}\sqrt[4]{x}$$

◊

Beispiel 8.1.15.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{6}\sqrt[5]{x}\right) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{6}x^{\frac{1}{5}}\right) = \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1}\\ &= \frac{1}{10}x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{10\sqrt[5]{x^4}} = \frac{1}{10\left(\sqrt[5]{x}\right)^4}\end{aligned}$$

◊

Satz 8.1.16.

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}(\text{für } x>0).$$

Beweis. $\ln y$ ist die Umkehrfunktion von $e^x = \exp x = y$. Somit gilt:

$$\frac{d}{dy}\ln y = \frac{1}{\frac{d}{dx}e^x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$

□

Satz 8.1.17.

$$\frac{d}{dx}\left(\log_a x\right) = \frac{1}{x \ln a} \text{ (für } a > 0, a \neq 1, x > 0)$$

Beweis. $x = \log_a y$ ist die Umkehrfunktion von $y = a^x$. Somit gilt:

$$\frac{d}{dy}\log_a y = \frac{1}{\frac{d}{dx}\left(a^x\right)} = \frac{1}{a^x \cdot \ln a} = \frac{1}{y \ln a}$$

□

Satz 8.1.18. *Für $z \in \mathbb{R}$ und $x > 0$*

$$\frac{d}{dx}x^z = zx^{z-1}$$

Beweis. Es gilt $x^z = e^{\ln x^z} = e^{z \ln x}$. Mit der Kettenregel gilt dann:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}e^{z \ln x} &= e^{z \ln x}\left(\frac{z}{x}\right)\\ &= x^z\left(\frac{z}{x}\right)\\ &= x^z x^{-1} z\\ &= zx^{z-1}\end{aligned}$$

□

Satz 8.1.19.

$$\frac{d}{dx}\left(g(x)^{h(x)}\right) = g(x)^{h(x)}\left[h'(x) \cdot \ln g(x) + h(x) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)}\right] \text{ (für } g(x) > 0)$$

Beweis. Zuerst zeigen wir: $g(x)^{h(x)} = e^{h(x) \ln g(x)}$
Denn:

$$\ln\left(g(x)^{h(x)}\right) = h(x) \ln g(x)$$

und:

$$\ln\left(e^{h(x) \ln g(x)}\right) = h(x) \ln g(x) \ln e = h(x) \ln g(x)$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(g(x)^{h(x)}\right) &= \frac{d}{dx}\left(e^{h(x) \ln g(x)}\right) =\\ &= e^{h(x) \ln g(x)} \cdot \left(h'(x) \ln g(x) + h(x)\frac{g'(x)}{g(x) \ln e}\right)\\ &= g(x)^{h(x)} \cdot \left(h'(x) \ln g(x) + h(x)\frac{g'(x)}{g(x)}\right).\end{aligned}$$

□

Beispiel 8.1.20.

$$\frac{d}{dx}\left(2x^{4x}\right) = 2x^{4x}\left[4 \cdot \ln(2x) + 4x \cdot \frac{2}{2x}\right] = 2x^{4x}\left[4 \cdot \ln(2x) + 4\right]$$

◊

Beispiel 8.1.21.

$$\frac{d}{dx}\left((2x^2-3)^{4x+5}\right) = (2x^2-3)^{4x+5}\left[4\cdot\ln(2x^2-3) + (4x+5)\cdot\frac{4x}{2x^2-3}\right]$$

◊

8.2 Anwendungsbeispiele

Beispiel 8.2.1. *Regel für Logarithmen und Kettenregel:*

$$\frac{d}{dx}\log_{10}(17x^2+14x-8) = \underbrace{\frac{1}{(17x^2+14x-8)\ln 10}}_{\text{äussere Ableitung}}\underbrace{(34x+14)}_{\text{innere Abl.}}$$

◊

Beispiel 8.2.2. *Regel für Logarithmen und Kettenregel:*

$$\frac{d}{dx}\ln(17x^2+14x-8) = \frac{1}{(17x^2+14x-8)}(34x+14)$$

◊

Beispiel 8.2.3. *Regel für Exponentialfunktion (Basis e) und Kettenregel:*

$$\frac{d}{dx}e^{2x^2+3x+10} = \underbrace{e^{2x^2+3x+10}}_{\text{äussere Abl.}}\underbrace{(4x+3)}_{\text{innere Abl.}}$$

◊

Beispiel 8.2.4. *Regel für Exponentialfunktion (Basis e) und Kettenregel (Ableitung der Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung):*

$$\frac{d}{dx}(1-e^{-\lambda x}) = -e^{-\lambda x}(-\lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ (für } \lambda > 0).$$

◊

Beispiel 8.2.5. *Regel für Exponentialfunktion (Basis a) und Kettenregel*

$$\frac{d}{dx}\left(3^{5x^2+2x}\right) = \underbrace{3^{5x^2+2x}\ln 3}_{\text{äussere Abl.}}\underbrace{(10x+2)}_{\text{innere Abl.}}$$

◊

Beispiel 8.2.6. *Regel für Exponentialfunktion (Basis a) und Kettenregel*

$$\frac{d}{dx}5^{3x^5-2x^2+2} = 5^{3x^5-2x^2+2}\ln 5\left(15x^4-4x\right)$$

◊

Beispiel 8.2.7. *Regel für Wurzelfunktion und Kettenregel*

$$\frac{d}{dx}\sqrt[5]{16x^3+14x^2+8x+3} = \underbrace{\frac{1}{5}\left(16x^3+14x^2+8x+3\right)^{-\frac{4}{5}}}_{\text{äussere Abl.}}\underbrace{\left(48x^2+28x+8\right)}_{\text{innere Abl.}}$$

◊

Beispiel 8.2.8. *Regel für Wurzelfunktion und Kettenregel*

$$\frac{d}{dx}\sqrt[7]{6x^4+4x^3+8x^2+3x} = \frac{1}{7}\left(6x^4+4x^3+8x^2+3x\right)^{-\frac{6}{7}}\left(24x^3+12x^2+16x+3\right)$$

◊

Beispiel 8.2.9. *Zweifache Anwendung der Kettenregel*

$$\frac{d}{dx}\log_3\sqrt[4]{4x^2+5x} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt[4]{4x^2+5x}\ln 3}}_{\text{äussere Abl.}}\underbrace{\underbrace{\frac{1}{4}\left(4x^2+5x\right)^{-\frac{3}{4}}}_{\text{äussere Abl.}}\underbrace{(8x+5)}_{\text{innere Abl.}}}_{\text{innere Abl.}}$$

◊

Beispiel 8.2.10.

$$\frac{d}{dx}\log_4\sqrt[5]{x^2+5x^3} = \frac{1}{\sqrt[5]{x^2+5x^3}\ln 4}\frac{1}{5}\left(x^2+5x^3\right)^{-\frac{4}{5}}\left(2x+15x^2\right)$$

◊

Beispiel 8.2.11.

$$\frac{d}{dx}\sqrt[3]{\ln\left(7x^2+4x\right)} = \underbrace{\frac{1}{3}\left(\ln\left(7x^2+4x\right)\right)^{\frac{-2}{3}}}_{\text{äussere Abl.}}\underbrace{\underbrace{\frac{1}{7x^2+4x}}_{\text{äussere Abl.}}\underbrace{(14x+4)}_{\text{innere Abl.}}}_{\text{innere Abl.}}$$

◊

Beispiel 8.2.12. $\exp x := e^x$; $\exp_a x = a^x$

$$\frac{d}{dx}\exp_5\left(\log_4\left(5x^2+2x\right)\right) = \underbrace{\exp_5\left(\log_4\left(5x^2+2x\right)\right)\ln 5}_{\text{äussere Abl.}}\underbrace{\underbrace{\frac{1}{(5x^2+2x)\ln 4}}_{\text{äussere Abl.}}\underbrace{(10x+2)}_{\text{innere Abl.}}}_{\text{innere Abl.}}$$

◊

Beispiel 8.2.13.

$$\frac{d}{dx}\ln\left(\exp_3\sqrt[4]{7x^2+4x}\right) = \frac{1}{\exp_3\sqrt[4]{7x^2+4x}}\exp_3\sqrt[4]{7x^2+4x}\ln 3\cdot\frac{1}{4}\left(7x^2+4x\right)^{-\frac{3}{4}}(14x+4)$$

◊

Beispiel 8.2.14.

$$\frac{d}{dx}\frac{\sqrt[3]{\ln\left(5x^2\right)}}{\exp_4\left(x^2\right)}=\frac{\frac{1}{3}\left(\ln\left(5x^2\right)\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{1}{5x^2}10x\cdot\exp_4\left(x^2\right)-\sqrt[3]{\ln\left(5x^2\right)}\cdot\exp_4\left(x^2\right)\ln 4\cdot 2x}{\left(\exp_4\left(x^2\right)\right)^2}$$

$\Diamond$

Beispiel 8.2.15.

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{\ln\left(5x^2\right)}\cdot\exp_4\left(x^2\right)\right)=\frac{1}{3}\left(\ln\left(5x^2\right)\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{1}{5x^2}10x\cdot\exp_4\left(x^2\right)+\sqrt[3]{\ln\left(5x^2\right)}\cdot\exp_4\left(x^2\right)\ln 4\cdot 2x$$

$\Diamond$

8.3 Zusammenfassung

g und h sind differenzierbare, reelle Funktionen, $a\in\mathbb{R}$.

		$f(x)$	$f'(x)$
1	Polynome	x^n	$nx^{n-1};\quad n\in\mathbb{N}^*$
2	Konstante	a	0
3	Produkt Konstante - Funktion	$ag(x)$	$ag'(x)$
4	Summe von Funktionen	$g(x)+h(x)$	$g'(x)+h'(x)$
5	Produkt zweier Funktionen	$g(x)\cdot h(x)$	$(g'(x)\cdot h(x))+(g(x)\cdot h'(x))$
6	Quotient zweier Funktionen	$\frac{g(x)}{h(x)}$	$\frac{\left(g'(x)\cdot h(x)\right)-\left(g(x)\cdot h'(x)\right)}{[h(x)]^2}\quad(h(x)\neq 0)$
7	Kettenregel	$g(h(x))$	$g'(h(x))\cdot h'(x)$
8	Exponentialfunktion (Basis e)	e^x	e^x
9	Exponentialfunktion (Basis a)	a^x	$a^x\ln a\ (a>0)$
10	Logarithmusfunktion (Basis e)	$\ln x$	$\frac{1}{x}\qquad(x>0)$
11	Logarithmusfunktion (Basis a)	$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}\qquad(x>0,\ a>0)$
12	Exponentialfunktion	$g(x)^{h(x)}\ (g(x)>0)$	$g(x)^{h(x)}\cdot\left[h'(x)\cdot\ln g(x)+h(x)\cdot\frac{g'(x)}{g(x)}\right]$
13	Wurzelfunktionen	$\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}\ (x\geq 0)$	$\frac{m}{n}x^{\left(\frac{m}{n}-1\right)}=\frac{m}{n}x^{\left(\frac{m-n}{n}\right)},\ m\in\mathbb{N}^*;n\in\mathbb{N}^*,x>0$
14	reeller Exponent z in x^z	x^z	$zx^{z-1}\ \ (x>0)$

8.3.1 Übungen

Leiten Sie die folgenden Funktionen in ihrem Definitionsbereich ab

1. $f(x) = \frac{1}{x^2}$
2. $f(x) = 1$
3. $f(x) = \sqrt{x} (x > 0)$
4. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{x^5}}$
5. $f(x) = x^{\ln 2}$
6. $f(x) = 5x^{20}$
7. $f(x) = -7e^3$
8. $f(x) = 0.5 \ln x$
9. $f(x) = \frac{7}{\sqrt[3]{9x^3}}$
10. $f(x) = 4x^7 - x + 2$
11. $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + c$
12. $f(x) = \sqrt{8} + 2x^{\sqrt{3}} - \ln 2$
13. $f(t) = (\ln t)^2$
14. $f(x) = \frac{4x^2+1}{z^4-1}$
15. $f(z) = \frac{e^z}{z^4+1}$
16. $f(x) = \left(5x^2 - 3x^3\right) 5x$
17. $f(x) = \frac{3x^2-4x}{(5x^2-4)^7}$
18. $f(x) = \sqrt[7]{(x - 2x^2 + 4)^4}$
19. $f(t) = \frac{t^2}{\ln t}$
20. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{3}+\ln 2}$
21. $f(x) = \frac{\ln 4+\sqrt{5}}{2x^7}$
22. $f(z) = \frac{29}{\sqrt[7]{z^{15}}}$
23. $f(t) = 4(2t^3 - 1)\sqrt{t^5}$
24. $f(x) = 4x^3 y \sqrt{y}$
25. $h(p) = \frac{4p^2+1}{(p^2-1)(2p^4+p)}$
26. $k(x) = k_3 x^3 + k_2 x^2 + k_1 x + \frac{k_0}{x}$
27. $u(x) = x^2 \cdot \frac{2v-x}{5v+x}$
28. $p(u) = \frac{u^2 \cdot \ln u}{e^u}$
29. $b(x) = e^x - \frac{1}{e^x}$
30. $c(t) = \frac{e^t+1}{e^t-1}$
31. $t(b) = \frac{2 \ln b}{2b^2+e^b}$
32. $f(x) = (x^2 + e^x)^{100}$
33. $f(x) = \sqrt{3x^2 + x}$
34. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$
35. $f(x) = \ln(x^2 + 4)$
36. $f(x) = 0.5(4x^7 - 3x^5)^{64}$
37. $g(y) = \sqrt[7]{y^2 - y^7}$
38. $p(u) = e^{-2u}$
39. $k(t) = 5 \ln(\ln(t)) \sqrt[3]{\ln 7}$
40. $N(y) = 20e^{\frac{-17}{y}}$
41. $C(I) = \sqrt[3]{21} e^{-1^2}$
42. $k(x) = x^n e^{-n}$
43. $P(W) = \left(\ln \frac{W^2+1}{e^3}\right)^{20}$
44. $f(x) = x^3 3^x$
45. $h(z) = 2^{\ln z} (\ln z)^{10}$
46. $f(x) = \frac{r^{\sqrt{x}} + \left(\sqrt{2}\right)^{1-x}}{\sqrt{x}}$
47. $k(t) = t^{\sqrt{t}}$
48. $p(v) = v^{\ln v}$
49. $C(y) = (\ln y)^{\ln y}$
50. $f(x) = \log_7 \frac{x^2+4}{x^4+2}$
51. $f(x) = \ln\left(\frac{4x^2+5x}{6x^5-7x^2}\right)$
52. $f(x) = \sqrt[3]{\log_5 (3x^3 + 2x^7)}$
53. $f(x) = \log_3 \left(5^{9x^2+8x^3}\right)$
54. $f(x) = 5^{\sqrt[3]{5x^2+17x}}$
55. $f(x) = 3^{\log_4\left(5x^4 \ln x\right)}$
56. $f(x) = \sqrt[5]{7x^3 + 4x^5 - 4}$
57. $g(x) = \log_7 \left(18x^4 + 6x^2\right)$
58. $h(x) = e^{14x^2+18x}$
59. $k(x) = 4x^2 \cdot 5^{2x+4}$
60. $l(x) = \frac{x^5+4x+\ln x}{4x^4}$
61. $m(x) = \ln\left(\sqrt{4x^{18} + 14x^7}\right)$

8.3.2 Lösungen

1. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{-2}\right) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$
2. $\frac{d}{dx} 1 = 0$ (1 ist eine Konstante)
3. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
4. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt[7]{x^5}}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{-\frac{5}{7}}\right) = -\frac{5}{7} x^{-\frac{12}{7}} = -\frac{5}{7\sqrt[7]{(x^{12})}} = -\frac{5}{7x\sqrt[7]{(x^5)}}$
5. $\frac{d}{dx}\left(x^{\ln 2}\right) = x^{\ln 2}\left(0 \cdot \ln x + \ln 2 \cdot \frac{1}{x}\right) = x^{\ln 2} \cdot x^{-1} \ln 2 = x^{\ln 2 - 1} \ln 2$
(ln 2 ist eine Konstante; deshalb gilt $\frac{d}{dx}(\ln 2) = 0$. Oder einfacher: $\frac{d}{dx}\left(x^{\ln 2}\right) = \ln 2 x^{\ln 2 - 1}$ (durch die Regel $\frac{d}{dx}(x^y) = y x^{y-1}$)
6. $\frac{d}{dx}\left(5x^{20}\right) = 100x^{19}$

7. $\frac{d}{dx}\left(-7e^3\right)=0 \qquad (-7e^3=-140.60$ ist eine Konstante).

8. $\frac{d}{dx}\left(0.5\ln x\right)=0.5\frac{d}{dx}\left(\ln x\right)=0.5\cdot\frac{1}{x}=\frac{0.5}{x}$

9. $\frac{d}{dx}\left(\frac{7}{\sqrt[8]{9x^3}}\right)=\frac{d}{dx}\left(7\cdot\left(9x^3\right)^{-\frac{1}{8}}\right)=\frac{d}{dx}\left(7\cdot 9^{-\frac{1}{8}}x^{-\frac{3}{8}}\right)=7\cdot 3^{-\frac{2}{8}}\cdot-\frac{3}{8}x^{-\frac{11}{8}}=$
$-7\cdot 3^{-\frac{1}{4}}\frac{3}{8}x^{-\frac{11}{8}}=-3^{-\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{4}{4}}\frac{7}{8}x^{-\frac{11}{8}}=-3^{\frac{3}{4}}\frac{7}{8}x^{-\frac{11}{8}}$

10. $\frac{d}{dx}\left(4x^7-x+2\right)=28x^6-1$

11. $nax^{n-1}+(n-1)\,bx^{(n-1)-1}=ax^{n-1}n+bx^{n-2}n-bx^{n-2}$

12. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{8}+2x^{\sqrt{3}}-\ln 2\right)=\frac{d}{dx}\left(2x^{\sqrt{3}}\right)$ ($\sqrt{8}$ und $\ln 2$ sind Konstanten)
$\frac{d}{dx}\left(2x^{\sqrt{3}}\right)=2\sqrt{3}\cdot x^{\sqrt{3}-1}$

13. $\frac{d}{dt}(\ln t)^2=2\ln t\cdot\frac{d}{dt}(\ln t)=2\ln t\cdot\frac{1}{t}=2\frac{\ln t}{t}$

14. $\frac{d}{dx}\left(\frac{4x^2+1}{z^4-1}\right)=\frac{1}{z^4-1}\cdot\frac{d}{dx}\left(4x^2+1\right)=\frac{1}{z^4-1}\cdot 8x=\frac{8x}{z^4-1}$

15. $\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{z^4+1}\right)=\frac{e^z\left(z^4+1\right)-\left(e^z 4z^3\right)}{\left(z^4+1\right)^2}=e^z\frac{z^4+1-4z^3}{\left(z^4+1\right)^2}$

16. $\frac{d}{dx}\left(\left(5x^2-3x^3\right)5x\right)=\left(10x-9x^2\right)5x+\left(5x^2-3x^3\right)5=75x^2-60x^3$

17. $\frac{d}{dx}\frac{3x^2-4x}{\left(5x^2-4\right)^7}=\frac{(6x-4)\left(5x^2-4\right)^7-\left(3x^2-4x\right)7\left(5x^2-4\right)^6 10x}{\left(5x^2-4\right)^{14}}$

18. $\frac{d}{dx}\sqrt[7]{\left(x-2x^2+4\right)^4}=\frac{d}{dx}\left(x-2x^2+4\right)^{\frac{4}{7}}=\frac{4}{7}\left(x-2x^2+4\right)^{\frac{4}{7}-1}(1-4x)=$
$\frac{4}{7}\left(x-2x^2+4\right)^{-\frac{3}{7}}(1-4x)$

19. $\frac{d}{dt}\left(\frac{t^2}{\ln t}\right)=\frac{2t\ln t-t^2\frac{1}{t}}{(\ln t)^2}=t\frac{2\ln t-1}{\ln^2 t} \qquad \left[\ln^2 t:=(\ln t)^2\right]$

20. $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{\sqrt{3}+\ln 2}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}+\ln 2}\frac{d}{dx}\left(x^2\right)=\frac{1}{\sqrt{3}+\ln 2}\cdot 2x=\frac{2x}{\sqrt{3}+\ln 2}$

21. $\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln 4+\sqrt{5}}{2x^7}\right)=\frac{\ln 4+\sqrt{5}}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^7}\right)=\frac{\ln 4+\sqrt{5}}{2}\frac{d}{dx}\left(x^{-7}\right)=$
$\frac{\ln 4+\sqrt{5}}{2}\cdot-7x^{-8}=-\frac{7(\ln 4+\sqrt{5})}{2x^8}$
Alternative Herleitung:
$\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln 4+\sqrt{5}}{2x^7}\right)=\frac{0\cdot 2x^7-(\ln 4+\sqrt{5})\cdot 14x^6}{4x^{14}}=-\frac{\left(\ln 4+\sqrt{5}\right)14x^6}{4x^{14}}=$
$-\frac{\left(\ln 4+\sqrt{5}\right)\cdot 7}{2x^8}$

22. $\frac{d}{dz}\left(\frac{29}{\sqrt[7]{z^{15}}}\right)=29\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\sqrt[7]{z^{15}}}\right)=29\frac{d}{dz}\left(z^{-\frac{15}{7}}\right)=-29\frac{15}{7}\left(z^{-\frac{22}{7}}\right)=-\frac{62.14}{\left(\sqrt[7]{z}\right)^{22}}$

23. $\frac{d}{dt}\left(4(2t^3-1)\sqrt{t^5}\right)=\frac{d}{dt}\left(8t^3\sqrt{t^5}-4\sqrt{t^5}\right)=\frac{d}{dt}\left(8t^3t^{\frac{5}{2}}-4t^{\frac{5}{2}}\right)=$
$\frac{d}{dt}\left(8t^{\frac{11}{2}}-4t^{\frac{5}{2}}\right)=\frac{11}{2}8t^{\frac{9}{2}}-\frac{5}{2}4t^{\frac{3}{2}}=11\cdot 4t^{\frac{9}{2}}-5\cdot 2t^{\frac{3}{2}}=$
$2t^{\frac{3}{2}}\left(22t^{\frac{6}{2}}-5\right)=2t^{\frac{3}{2}}\left(22t^3-5\right)=2t\sqrt{t}\left(22t^3-5\right)$

24. $\frac{d}{dx}\left(4x^3y\sqrt{y}\right)=12x^2\left(\sqrt{y}\right)^3$ (die Variable ist x).
Nach y abgeleitet: $\frac{d}{dy}\left(4x^3y\sqrt{y}\right)=\frac{d}{dy}\left(4x^3y^{\frac{3}{2}}\right)=4x^3\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}=6x^3\sqrt{y}$

25. $\frac{d}{dp}\left(\frac{4p^2+1}{(p^2-1)(2p^4+p)}\right) =$
$\frac{\left[8p\left((p^2-1)(2p^4+p)\right)\right]-\left[\left(4p^2+1\right)\left(2p(2p^4+p)+(p^2-1)(8p^3+1)\right)\right]}{\left((p^2-1)(2p^4+p)\right)^2}$
Eine in diesem Zusammenhang überflüssige Vereinfachung würde ergeben:
$-\frac{32p^7+4p^4-4p^5+7p^2-8p^3-1}{(p^2-1)^2p^2(2p^3+1)^2}$

26. $\frac{d}{dx}\left(k_3x^3+k_2x^2+k_1x+\frac{k_0}{x}\right) = 3k_3x^2+2k_2x+k_1+\frac{0x-k_0\cdot 1}{x^2}$
$3k_3x^2+2k_2x+k_1+\frac{-k_0}{x^2} = \frac{3k_3x^4+2k_2x^3+k_1x^2-k_0}{x^2}$
(der letzte Schritt wird nicht unbedingt verlangt).

27. $\frac{d}{dx}\left(x^2\cdot\frac{2v-x}{5v+x}\right) = 2x\cdot\frac{2v-x}{5v+x}+x^2\frac{(-1)(5v+x)-(2v-x)\cdot 1}{(5v+x)^2} =$
$2x\cdot\frac{2v-x}{5v+x}+x^2\frac{-(5v+x)-(2v-x)}{(5v+x)^2} = 2x\cdot\frac{2v-x}{5v+x}+x^2\frac{-5v-x-2v+x}{(5v+x)^2} =$
$2x\cdot\frac{2v-x}{5v+x}+x^2\frac{-7v}{(5v+x)^2} = -x\frac{-20v^2+13vx+2x^2}{(5v+x)^2}$
(der letzte Schritt ist nicht unabdingbar)

28. $\frac{d}{du}\left(\frac{u^2\cdot\ln u}{e^u}\right) = \frac{\frac{d}{du}\left(u^2\cdot\ln u\right)\cdot e^u-\left(u^2\cdot\ln u\right)e^u}{e^{2u}} = \frac{\frac{d}{du}\left(u^2\cdot\ln u\right)-\left(u^2\cdot\ln u\right)}{e^u}$
$= \frac{\left(2u\cdot\ln u+u^2\frac{1}{u}\right)-\left(u^2\cdot\ln u\right)}{e^u} = \frac{\left(2u\cdot\ln u+u^2\frac{1}{u}\right)-\left(u^2\cdot\ln u\right)}{e^u} = \frac{2u\ln u+u-u^2\ln u}{e^u} =$
$2u\left(\ln u\right)e^{-u}+ue^{-u}-u^2\left(\ln u\right)e^{-u}$

29. $\frac{d}{dx}\left(e^x-\frac{1}{e^x}\right) = e^x-\frac{d}{dx}\left(e^{-x}\right) = e^x-\left[e^{-x}\cdot(-1\cdot\ln e+-x\frac{0}{e})\right] =$
$e^x-e^{-x}\cdot(-1\cdot 1) = e^x+e^{-x}$

30. $\frac{d}{dt}\left(\frac{e^t+1}{e^t-1}\right) = \frac{e^t(e^t-1)-(e^t(e^t+1)}{(e^t-1)^2} = -2\frac{e^t}{(e^t-1)^2}$

31. $\frac{d}{db}\left(\frac{2\ln b}{2b^2+e^b}\right) = \frac{2\frac{1}{b}(2b^2+e^b)-2(\ln b)(4b+e^b)}{(2b^2+e^b)^2} =$
$-2\frac{-2b^2-e^b+4(\ln b)b^2+(\ln b)be^b}{b(2b^2+e^b)^2}$ (der letzte Schritt ist nicht unabdingbar)

32. $\frac{d}{dx}(x^2+e^x)^{100} = 100(x^2+e^x)^{99}\cdot(2x+e^x)$

33. $\frac{d}{dx}\sqrt{3x^2+x} = \frac{d}{dx}\left(3x^2+x\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(3x^2+x\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(6x+1) = \frac{(6x+1)}{2\sqrt{(x(3x+1))}}$

34. $\frac{d}{dx}e^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}}\left[\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)\cdot\ln e+\sqrt{x}\cdot\frac{0}{e}\right]$
$= e^{\sqrt{x}}\left[\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\cdot 1+0\right] = e^{\sqrt{x}}\left[\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$

35. $\frac{d}{dx}\ln(x^2+4) = \frac{2x}{(x^2+4)\ln e} = \frac{2x}{x^2+4}$

36. $\frac{d}{dx}\left(0.5(4x^7-3x^5)^{64}\right) = 32(4x^7-3x^5)^{63}\cdot(28x^6-15x^4) =$
$32x^{5\cdot 63}(4x^2-3)^{63}\cdot x^4(28x^2-15) = 32x^{319}(4x^2-3)^{63}(28x^2-15)$

37. $\frac{d}{dy}\sqrt[7]{y^2-y^7} = \frac{d}{dy}\left(y^2-y^7\right)^{\frac{1}{7}} = \frac{1}{7}\left(y^2-y^7\right)^{-\frac{6}{7}}\cdot\left(2y-7y^6\right) =$
$\frac{y(2-7y^5)}{7\left(\sqrt[7]{(y^2-y^7)}\right)^6}$

38. $\frac{d}{du}e^{-2u} = e^{-2u}\left[-2\cdot\ln e+-2u\frac{0}{e}\right] = e^{-2u}\left[-2\cdot 1\right] = -2e^{-2u}$

39. $\frac{d}{dt}\left(5\ln(\ln t)\right) = 5\frac{\frac{d}{dt}(\ln t)}{(\ln t)\ln e} = 5\frac{1}{t\ln t} = \frac{5}{t\ln t}$
$\frac{d}{dt}\sqrt[3]{\ln 7} = 0$ (ist eine Konstante). Damit gilt $\frac{d}{dt}\left(5\ln(\ln t)\sqrt[3]{\ln 7}\right) = \frac{5\sqrt[3]{\ln 7}}{t\ln t}$

40. $\frac{d}{dy}\left(20e^{\frac{-17}{y}}\right) = 20\frac{d}{dy}\left(e^{\frac{-17}{y}}\right)$
$\frac{d}{dy}\left(e^{\frac{-17}{y}}\right) = e^{\frac{-17}{y}}\left[\frac{17}{y^2}\cdot\ln e+\frac{-17}{y}\frac{0}{e}\right] = \frac{17}{y^2}e^{\frac{-17}{y}} \Longrightarrow$
$20\left(\frac{17}{y^2}e^{\frac{-17}{y}}\right) = \frac{340}{y^2}e^{-\frac{17}{y}}$

41. $\frac{d}{dI}\left(\sqrt[3]{21}e^{-1^2}\right)=0$ (Konstante)

42. $\frac{d}{dx}\left(x^n e^{-n}\right)=x^{n-1}ne^{-n}$
e^{-n} ist in diesem Zusammenhang eine Konstante).

43. $\frac{d}{dW}\left(\ln\frac{W^2+1}{e^3}\right)^{20}=20\left(\ln\left(\frac{W^2+1}{e^3}\right)\right)^{19}\cdot\frac{2We^3}{\frac{W^2+1}{e^3}}=40\left(-3+\ln\left(W^2+1\right)\right)^{19}\frac{W}{W^2+1}$
(denn: $\ln\frac{W^2+1}{e^3}=\ln(W^2+1)-\ln e^3$ et $\ln e^3=3$)

44. $\frac{d}{dx}\left(x^3\cdot 3^x\right)=3^x\frac{d}{dx}x^3+x^3\frac{d}{dx}3^x=3x^2 3^x+x^3 3^x\ln 3$

45. $\frac{d}{dz}\left(2^{\ln z}(\ln z)^{10}\right)=\frac{d}{dz}\left(2^{\ln z}\right)\cdot(\ln z)^{10}+2^{\ln z}\frac{d}{dz}\left((\ln z)^{10}\right)$
$\frac{d}{dz}\left(2^{\ln z}\right)\cdot(\ln z)^{10}=2^{\ln z}\left[\frac{1}{z}\ln 2+\ln z\cdot\frac{0}{2}\right]\cdot(\ln z)^{10}=2^{\ln z}\frac{1}{z}\ln 2(\ln z)^{10}$
$2^{\ln z}\frac{d}{dz}\left((\ln z)^{10}\right)=2^{\ln z}10(\ln z)^9\frac{1}{z}\Longrightarrow$
$\frac{d}{dz}\left(2^{\ln z}(\ln z)^{10}\right)=\ 2^{\ln z}\cdot\frac{1}{z}\ln 2\cdot(\ln z)^{10}+2^{\ln z}\cdot 10\,(\ln z)^9\cdot\frac{1}{z}$

46. $\frac{d}{dx}\frac{r^{\sqrt{x}}+\left(\sqrt{2}\right)^{1-x}}{\sqrt{x}}=-\frac{1}{2}\frac{-\sqrt{x}r^{\sqrt{x}}\ln r+2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x}(\ln 2)x+r^{\sqrt{x}}+2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x}}{\left(\sqrt{x}\right)^3}$

47. $\frac{d}{dt}t^{\sqrt{t}}=t^{\sqrt{t}}\left[\frac{1}{2\sqrt{t}}\ln t+\sqrt{t}\frac{1}{t}\right]=t^{\sqrt{t}}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\ln t+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)=$
$\frac{t^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\left(\ln t+2\right)=\frac{1}{2}t^{\sqrt{t}-\frac{1}{2}}\left(\ln t+2\right)$

48. $\frac{d}{dv}v^{\ln v}=v^{\ln v}\left[\frac{1}{v}\ln v+\ln v\frac{1}{v}\right]=2v^{\ln v}\frac{\ln v}{v}$

49. $\frac{d}{dy}(\ln y)^{\ln y}=(\ln y)^{\ln y}(\frac{1}{y}\ln(\ln y)+\ln y\frac{\frac{1}{y}}{\ln y})=\frac{1}{y}\ln y^{\ln y}(\ln(\ln y)+1)$

50. $\frac{d}{dx}\log_7\frac{x^2+4}{x^4+2}=\frac{\frac{2x(x^4+2)-(x^2+4)4x^3}{\left(x^4+2\right)^2}}{\frac{x^2+4}{x^4+2}\ln 7}=\frac{2x\left(x^4+2\right)-4\left(x^2+4\right)x^3}{(x^4+2)(x^2+4)\ln 7}=$
$-2x\frac{x^4-2+8x^2}{(x^4+2)(x^2+4)\ln 7}$

51. $\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{4x^2+5x}{6x^5-7x^2}\right)=\frac{1}{\frac{4x^2+5x}{6x^5-7x^2}}\frac{(8x+5)\left(6x^5-7x^2\right)-\left(4x^2+5x\right)\left(30x^4-14x\right)}{(6x^5-7x^2)^2}$

52. $\frac{d}{dx}\sqrt[3]{\log_5\left(3x^3+2x^7\right)}=\frac{1}{3}\left(\log_5\left(3x^3+2x^7\right)\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{1}{(3x^3+2x^7)\ln 5}\left(9x^2+14x^6\right)$

53. $\frac{d}{dx}\log_3\left(5^{9x^2+8x^3}\right)=\frac{1}{5^{9x^2+8x^3}\ln 3}\left(5^{9x^2+8x^3}\ln 5\right)\left(18x+24x^2\right)$

54. $\frac{d}{dx}5^{\sqrt[3]{5x^2+17x}}=5^{\sqrt[3]{5x^2+17x}}\ln 5\cdot\frac{1}{3}\left(5x^2+17x\right)^{-\frac{2}{3}}(10x+17)$

55. $\frac{d}{dx}3^{\log_4\left(5x^4\ln x\right)}=3^{\log_4\left(5x^4\ln x\right)}\ln 3\cdot\frac{1}{5x^4\ln x\ln 4}\left(20x^3\ln x+5x^4\frac{1}{x}\right)$

56. $\frac{d}{dx}\sqrt[5]{7x^3+4x^5-4}=\frac{1}{5}\left(7x^3+4x^5-4\right)^{-\frac{4}{5}}\left(21x^2+20x^4\right)$

57. $\frac{d}{dx}\log_7\left(18x^4+6x^2\right)=\frac{1}{(18x^4+6x^2)\ln 7}\left(72x^3+12x\right)$

58. $\frac{d}{dx}e^{14x^2+18x}=e^{14x^2+18x}\left(28x+18\right)$

59. $\frac{d}{dx}4x^2\cdot 5^{2x+4}=8x5^{2x+4}+4x^2 5^{2x+4}\left(\ln 5\right)2$

60. $\frac{d}{dx}\frac{x^5+4x+\ln x}{4x^4}=\frac{\left(5x^4+4+\frac{1}{x}\right)4x^4-\left(x^5+4x+\ln x\right)16x^3}{(4x^4)^2}$

61. $\frac{d}{dx}\ln\left(\sqrt{4x^{18}+14x^7}\right)=\frac{1}{\sqrt{4x^{18}+14x^7}}\frac{1}{2}\left(4x^{18}+14x^7\right)^{-\frac{1}{2}}\left(72x^{17}+98x^6\right)$

8.4 Lernziele

- Die eingeführten Ableitungsregeln anwenden können
- Aufgaben von der Art der Übungen lösen können.

Kapitel 9

Extrema - Spezialfälle

9.1 Extrema an den Rändern von Intervallen

Funktionen können auf Intervallen I mit reellen Intervallgrenzen beschränkt oder unbeschränkt sein: beschränkt sind sie, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $|f(x)| < c$ für $x \in I$. Unbeschränkt sind sie, wenn sie in einem Punkte von I gegen Unendlich oder Minus Unendlich streben. In einer Umgebung U des Randes r von Intervallen I können stetige Funktionen auf $U(r) \cap I$ strikt monoton steigend, strikt monoton sinkend oder konstant sein. Ist dies der Fall, haben die entsprechenden Funktionen diese Eigenschaften auch in allen Umgebungen von r, die in $U(r)$ enthalten sind. Für beschränkte, stetige Funktionen auf geschlossenen Intervallen $I = [a, b]$ mit reellen Intervallgrenzen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

- Ist f auf $U(a) \cap I$ strikt monoton steigend, ist $f(a)$ ein Minimum der Funktion auf $U(a) \cap I$.
- Ist f auf $U(b) \cap I$ strikt monoton steigend, ist $f(b)$ ein Maximum der Funktion auf $U(b) \cap I$.
- Ist f auf $U(a) \cap I$ strikt monoton sinkend, ist $f(a)$ ein Maximum der Funktion auf $U(a) \cap I$.
- Ist f auf $U(b) \cap I$ strikt monoton sinkend, ist $f(b)$ ein Minimum der Funktion auf $U(b) \cap I$.

Über den geschlossenen Intervallgrenzen liegen bei - in einer Umgebung der Grenzen - strikt monotonen, stetigen Funktionen also Maxima oder Minima vor. Liegen aber Intervallgrenzen vor, die nicht im Intervall enthalten sind, gibt es dort keine Minima oder Maxima. Dies liegt daran, dass für linksoffene Intervalle $\min(I)$ und für rechtsoffene Intervalle $\max(I)$ nicht definiert sind. Wir betrachten beispielhaft den Fall einer strikt steigenden Funktion auf einer Umgebung $U(b)$ der oberen Intervallgrenze b von I und $b \notin I$. Dann gibt es für jedes $f(x)$ mit $x \in I \cap U(b)$ ein $x' \in I \cap U(b)$ mit $f(x') > f(x)$ (z.B. für ein beliebiges $x < b$ gibt es $x' = \frac{x+b}{2}$ mit $x < x' < b$ und $f(x) < f(x')$). Die Argumentation für die Inexistenz eines Minimums an der oberen Intervallgrenze bei einer strikt monoton sinkenden Funktion verläuft analog. Analog kann man für die untere Intervallgrenze eines linksoffenen Intervalls argumentieren.

9.2 Absolute und lokale Extrema

Gibt es für ein x_0 eine Umgebung $U(x_o) \cap D$ ($D \subset \mathbb{R}$ ist der Definitionsbereich der reellen Funktion $f : D \to \mathbb{R}$), so dass $f(x_0) > f(x)$ für alle $x \in (U(x_o) \cap D) \setminus \{x_0\}$, so sprechen wir von einen *lokalen Maximum* der Funktion in x_0. Gibt es für ein x_0 eine Umgebung $U(x_o) \cap D$, so dass $f(x_0) < f(x)$ für alle $x \in (U(x_o) \cap D) \setminus \{x_0\}$, so sprechen wir von einem *lokalen Minimum* der Funktion in x_0. Eine Funktion kann mehrere lokale Minima und Maxima besitzen. Gibt es ein lokales Maximum $f(x_0)$, so dass für $x \in D$ gilt: $f(x_0) > f(x)$, so sprechen wir von einem *absoluten Maximum* der Funktion f in x_0. Gibt es ein lokales Minimum $f(x_0)$, so dass für $x \in D$ gilt: $f(x_0) < f(x)$, so sprechen wir von einem *absoluten Minimum* der Funktion f in x_0.

Polynome $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ungeraden Grades weisen keine absoluten Maxima oder Minima auf, da es für eventuelle lokale Maxima (Minima) immer Funktionswerte hat, die grösser (kleiner) sind - der Grenzwerte von Polynomen für $x \to \pm\infty$ sind nicht reell und streben im Falle von Polynomen ungeraden Grades einmal gegen $-\infty$ und einmal gegen ∞. Im Falle von Polynomen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ geraden Grades kann entweder ein absolutes Maximum oder ein absolutes Minimum vorliegen - aber nicht beides. Ist der Koeffizient a_n des Polynoms geraden n-ten Grades positiv, liegt ein absolutes Minimum vor, wenn es nur ein einziges minimales lokales Minimum hat. Ist der Koeffizient a_n des Polynoms geraden n-ten Grades negativ, liegt ein absolutes Maximum vor, wenn es nur ein einziges maximales lokales Maximum hat.

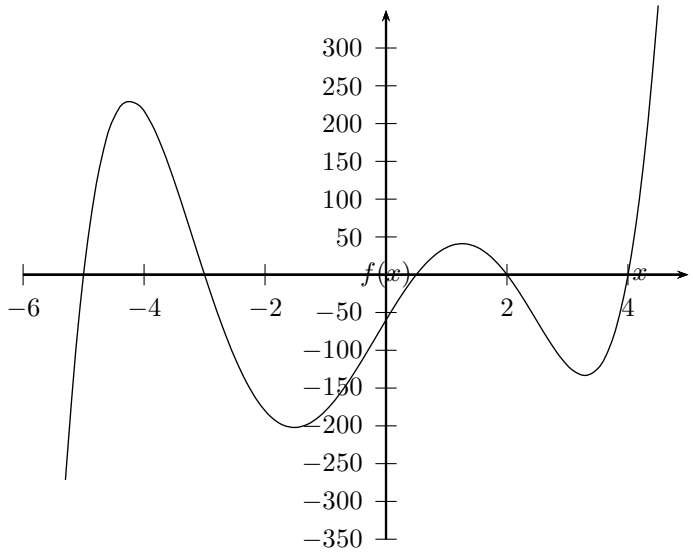


Abbildung 9.2.1: Polynom 5. Grades. Zwei lokale Minima und zwei lokale Maxima, kein absolutes Maximum und kein absolutes Minimum

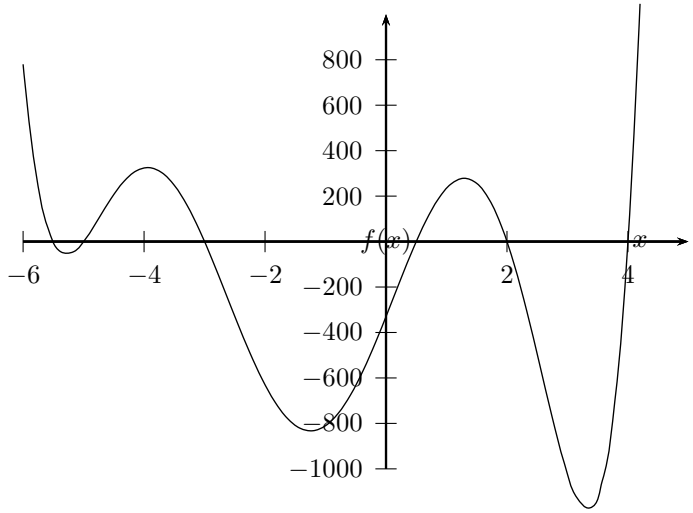


Abbildung 9.2.2: Polynom 6. Grades. Drei lokale Minima und zwei lokale Maxima, kein absolutes Maximum und ein absolutes Minimum (= lokales Minimum ganz rechts)

Beim Betrachten der Funktionsgraphen der anderen behandelten Funktionstypen kann man feststellen: das Verhalten der rationalen Funktionen hängt von den beteiligten Polynomen ab. Wurzelfunktionen $\sqrt{} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ weisen ein absolutes Minimum in 0 auf (= einziges lokales Minimum). Sie weisen kein lokales und kein absolutes Maximum auf. Exponentialfunktionen $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ weisen weder lokale noch absolute Extrema auf. Logarithmusfunktionen $\log_a : \mathbb{R}^+ \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ weisen

weder lokale noch absolute Extrema auf. Die Analyse von verketteten Funktionen muss fallweise erfolgen.

9.3 Absolute Extrema in geschlossenen Intervallen

Satz 9.3.1. *Sei f auf das geschlossenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definiert, beschränkt und stetig,*

- *so gibt es in I mindestens ein x_0, so dass $f(x_0) \geq f(x)$ für $x \in I \backslash \{x_0\}$ (gibt es nur ein solches x_0, ist $f(x_0)$ das absolute Maximum im Intervall) und es gibt mindestens ein x_0, so dass $f(x_0) \leq f(x)$ für $x \in I \backslash \{x_0\}$ (gibt es nur ein solches x_0, ist $f(x_0)$ das absolute Minimum im Intervall) .*
- *Ist die Funktion f im Intervall I strikt monoton steigend, so nimmt die Funktion f an der rechten Intervallgrenze ihr absolutes Maximum an und an der linken Intervallgrenze ihr absolutes Minimum.*
- *Ist die Funktion f in I strikt monoton sinkend, so nimmt die Funktion an der rechten Intervallgrenze ihr absolutes Minimum an und an der linken Intervallgrenze ihr absolutes Maximum.*

Beispiel 9.3.2. *Wir suchen die lokalen und absoluten Extrema der folgenden Funktion: $f(x) = -x^2 + 2x + 8$ für $x \in [-1.8, 0.5] = I$ (s. Abbildung 9.3.3).*

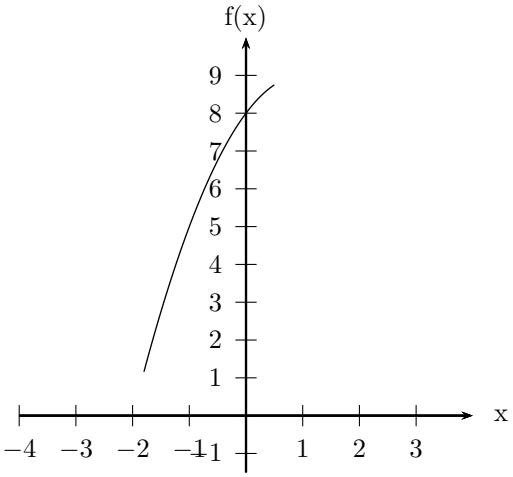


Abbildung 9.3.3: Graphische Darstellung des Beispiels 9.3.2

f ist auf I stetig - in -1.8 rechtsstetig und in 0.5 linksstetig. Wir berechnen die Nullstellen der ersten Ableitung: $\frac{d}{dx}\left(-x^2 + 2x + 8\right) = -2x + 2 = 0 \Longleftrightarrow x = 1$
Die Nullstelle liegt ausserhalb von I. Somit liegt im Inneren des Intervalls kein Extremum vor. Die Funktion ist in I strikt monoton steigend, da gilt: $\frac{d}{dx}\left(-x^2 + 2x + 8\right) = -2x + 2 > 0 \Longleftrightarrow x < 1$.
Damit befindet sich das absolute Maximum in $f(0.5)$ und das absolute Minimum in $f(-1.8)$. ◊

Beispiel 9.3.3. *Sei f eine Gewinnfunktion mit $f(x) = -x^2 + 13x + 12$ für $x \in [8, 13]$ (s. Abbildung 9.3.4). Wir suchen die lokalen und absoluten Extrema der Funktion:*

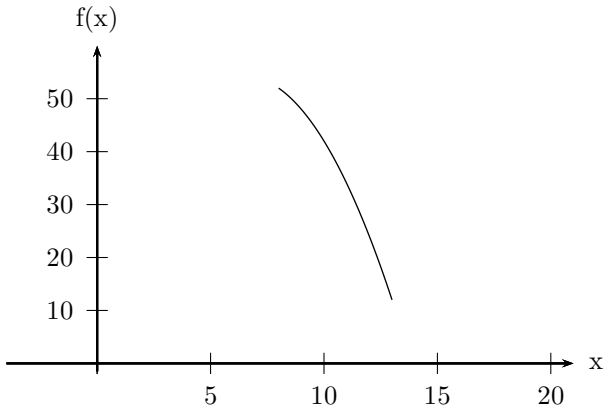


Abbildung 9.3.4: Graphische Darstellung des Beispiels 9.3.3

f ist auf I stetig - an den Rändern links- beziehungsweise rechtsstetig. $\frac{d}{dx}\left(-x^2+13x+12\right) = -2x+13=0$ *genau dann, wenn* $x=\frac{13}{2}=6.5$
$6.5 \notin [8,13]$. *Somit nimmt die Funktion im Inneren des Intervalls kein Maximum oder Minimum an. Wir stellen fest, dass gilt:* $-2x+13>0$ *genau dann, wenn* $x<\frac{13}{2}=6.5$. *Damit ist im betrachteten Intervall die Kurve strikt monoton sinkend. Entsprechend nimmt sie am rechten Rand ihr absolutes Minimum und am linken Rand ihr absolutes Maximum an, d.h.*
$f(8) = -8^2+13\cdot 8+12 = 52$ *(absolutes Maximum im Intervall)*
$f(13) = -13^2+13\cdot 13+12 = 12$ *(absolutes Minimum im Intervall).* ◊

Ist die Funktion in einem geschlossenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definiert und gibt es Teilintervalle von I, wo f strikt monoton steigt und strikt monoton sinkt, so nimmt die Funktion dort mehr als ein lokales Minimum (Maximum) an. Welches die absoluten Extrema sind, können wir durch Vergleich der vorliegenden lokalen Extrema bestimmen. Es ist auch möglich, dass es keine eindeutigen absoluten Extrema gibt, da z.B. zwei lokale Extrema den selben y-Wert haben können.

Beispiel 9.3.4. *Wir suchen die lokalen und absoluten Extrema der folgenden Funktion:* $f(x) = x^5-9x^3+12x+8$ *für* $x \in [-1.8, 2.5]$ *(s. Abbildung 9.3.5).*

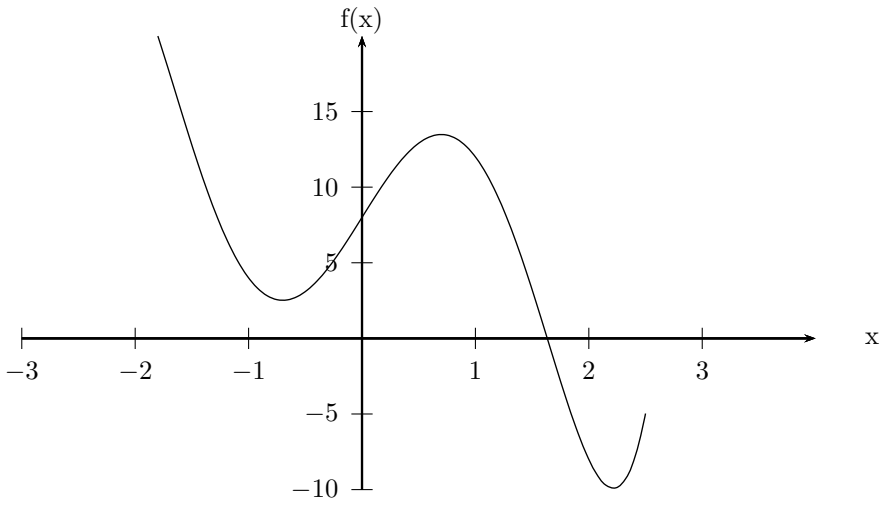


Abbildung 9.3.5: Graphische Darstellung des Beispiels 9.3.4

Wir berechnen die erste Ableitung: $\frac{d}{dx}\left(x^5 - 9x^3 + 12x + 8\right) = 5x^4 - 27x^2 + 12$
Wir berechnen die Nullstellen: $5x^4 - 27x^2 + 12 = 0 \Longrightarrow$
$x_1 = 2.\,216\,2$
$x_2 = -2.\,216\,2$
$x_3 = 0.699\,05$
$x_4 = -0.699\,05$
$x_1, x_3, x_4 \in [-1.8, 2.5]$
Wir berechnen die zweite Ableitung: $\frac{d}{dx}\left(5x^4 - 27x^2 + 12\right) = 20x^3 - 54x$
$f''(x_1) = f(2.2162) = 20\,(2.2162)^3 - 54 \cdot 2.2162 = 98.\,024 > 0$ *(ein Minimum)*
$f''(x_3) = f(0.69905) = 20\,(0.69905)^3 - 54 \cdot 0.69905 = -30.\,917 < 0$ *(ein Maximum)*
$f''(x_4) = f(-0.69905) = 20\,(-0.69905)^3 - 54 \cdot (-0.69905) = 30.\,917 > 0$ *(ein Minimum).*
Um zu wissen, welches der grösste und der kleinste Punkt im gesamten Intervall ist, berechnen wir nun:
für die untere Intervallgrenze: $f(-1.8) = -1.8^5 - 9\,(-1.8)^3 + 12 \cdot (-1.8) + 8 = 19.\,992$
für die obere Intervallgrenze: $f(2.5) = 2.5^5 - 9\,(2.5)^3 + 12 \cdot (2.5) + 8 = -4.\,968\,8$
für die übrigen lokalen Extrema: $f(x_1) = 2.2162^5 - 9\,(2.2162)^3 + 12 \cdot (2.2162) + 8 = -9.\,908\,3$
$f(x_3) = 0.69905^5 - 9\,(0.69905)^3 + 12 \cdot (0.69905) + 8 = 13.\,481$
$f(x_4) = -0.69905^5 - 9\,(-0.69905)^3 + 12 \cdot (-0.69905) + 8 = 2.\,518\,9$
Somit liegt das absolute Maximum des Intervalls in -1.8 *und das absolute Minimum in* $x_1 = 2.2162$. ◊

9.4 Absolute Extrema in offenen Intervallen

An offenen Intervallgrenzen nehmen in einer Umgebung der Intervallgrenzen monotone, beschränkte und stetige Funktionen weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum an (s. oben). Dies führt zum folgenden Satz:

Satz 9.4.1. *Für beschränkte und stetige Funktionen auf Intervallen mit reellen Intervallgrenzen gilt:*

- *Gibt es Funktionswerte in einer Umgebung einer offenen Intervallgrenze, die grösser sind*

als alle lokalen Maxima der Funktion, so hat die Funktion kein absolutes Maximum. Gibt es keine solchen Funktionswerte und gibt es einen eindeutiges Maximum aller lokalen Maxima, so gibt es ein absolutes Maximum.

- *Gibt es Funktionswerte in einer Umgebung einer offenen Intervallgrenze, die kleiner sind als alle lokalen Minima der Funktion, so hat die Funktion kein absolutes Minimum. Gibt es keine solchen Funktionswerte und gibt es ein eindeutiges Minimum aller lokalen Minima, so gibt es ein absolutes Minimum.*
- *Ist eine stetige Funktion auf einem rechtsoffenen Intervall strikt monoton steigend, so weist sie kein absolutes Maximum auf.*
- *Ist eine stetige Funktion auf einem rechtsoffenen Intervall strikt monoton sinkend, so weist sie kein absolutes Minimum auf.*
- *Ist eine stetige Funktion auf einem linksoffenen Intervall strikt monoton sinkend, so weist sie kein absolutes Maximum auf.*
- *Ist eine stetige Funktion auf einem linksoffenen Intervall strikt monoton steigend, so weist sie kein absolutes Minimum auf.*

In offenen Intervallen nimmt eine Funktion also nur dann Extrema an, wenn es im Intervall Nullstellen der ersten Ableitung gibt und dort die Kurven konkav oder konvex sind.

Beispiel 9.4.2. *Wir suchen die lokalen und absoluten Extrema der folgenden Funktion:* $f(x) = -x^2 + 2x + 8 \quad$ *für* $x \in]-1.8, 0.5[= I$
(s. Abbildung 9.4.6).

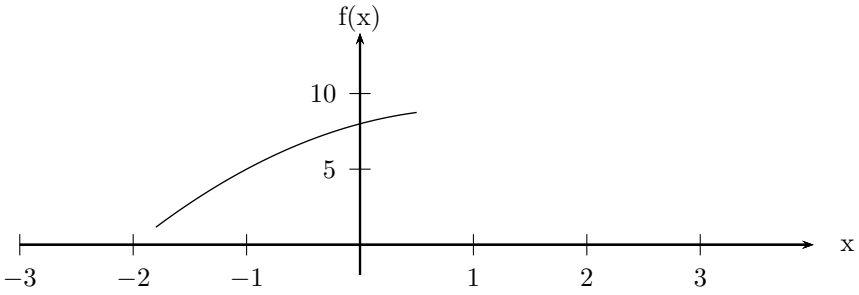


Abbildung 9.4.6: -1.8,0.5[

Wir berechnen Nullstellen der erste Ableitung: $\frac{d}{dx}\left(-x^2 + 2x + 8\right) = -2x + 2 = 0 \Longrightarrow x = 1$
$1 \notin I$. *Somit gibt es kein lokales Extremum innerhalb des Intervalls.* ◊

Beispiel 9.4.3. *Wir suchen die lokalen und absoluten Extrema der folgenden Funktion:* $f(x) = x^5 - 9x^3 + 12x + 8 \quad$ *für* $x \in \ ]-1.8, 2.5[$ *(s. Abbildung 9.3.5). Man kann - mit den Resultaten des Beispiels 9.3.5 - schliessen: es hat kein absolutes Maximum der Funktion auf dem Intervall, da in der Nähe von* -1.8 *die Funktionswerte das lokale Maximum in* 0.69905 *übersteigen, es aber kein Maximum in* -1.8 *hat, da das Intervall links offen ist. Es hat demgegenüber ein absolutes Minimum in* 2.2162. *In* 2.5 *hat es kein lokales Maximum, da das Intervall rechts offen ist. Es hat ein weiteres lokales Minimum in* $-0.699\,05$. ◊

Bemerkung 9.4.4. *Für halboffene Intervalle kann man analoge Überlegungen anstellen.*
1) $f(x) = x^5 - 9x^3 + 12x + 8 \quad$ *für* $x \in \ [-1.8, 2.5[$ *(s. Abbildung 9.3.5). Es gibt ein absolutes Maximum in* -1.8*, da das Intervall links geschlossen ist und da der Funktionswert dort alle lokalen Maxima übersteigt. Es gibt kein lokales Maximum in* 2.5*, da das Intervall rechtsoffen ist. Es gibt ein absolutes Minimum in* $2.216\,2$.

2) $f(x) = x^5 - 9x^3 + 12x + 8$ *für* $x \in \,]-1.8, 2.5]$ *(s. Abbildung 9.3.5). Es gibt kein absolutes Maximum, da in der Nähe von* -1.8 *die Funktionswerte das lokale Maximum in* 0.69905 *übersteigen und da das Intervall linksoffen ist. Es gibt ein lokales Maximum in* 2.5*, da das Intervall rechtsgeschlossen ist. Es hat ein absolutes Minimum in* $2.216\,2$*.* ◊

9.5 Extrema bei konstanten Teilstücken einer stetigen Funktion

Schliesslich kann eine stetige Funktion in einem Intervall I konstante Teilstücke aufweisen. Solche liegen vor, wenn es Intervalle $I' \subset I$ gibt mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in I'$. In diese Teilintervallen gilt $f(x) = c \in \mathbb{R}$ für $x \in I'$ (c ist eine Konstante). Es gibt dabei sehr viele Möglichkeiten, wie sich der Rest der Funktion verhält. Exemplarisch betrachten wir den folgenden Fall:

Beispiel 9.5.1.

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{für } 0 < x < 15 \\ \ln 15 & \text{für } 15 \le x \le 20 \\ -3x + \ln 15 + 60 & \text{für } 20 < x \le 25 \end{cases}$$

(s. Abbildung 9.5.7).

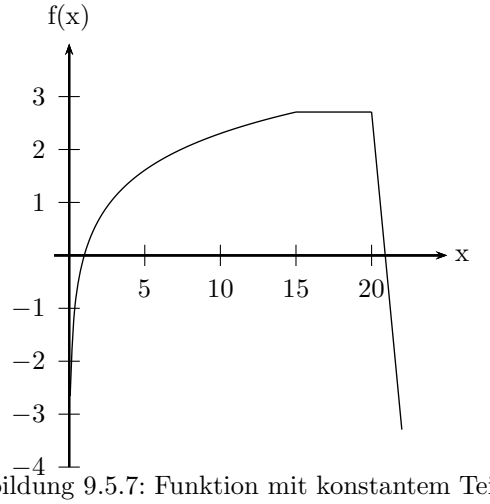


Abbildung 9.5.7: Funktion mit konstantem Teilstück

Links des konstanten Teilstückes ist die Funktion strikt monoton steigend (denn $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} > 0$ *für* $x > 0$*). Zudem gilt* $\lim_{x \to 15^-} \ln x = \ln 15$*, stimmt also mit dem Funktionswert und dem rechtsseitigen Grenzwert der konstanten Funktion in* 15 *überein. Die Funktion ist also in* 15 *stetig. Rechts des konstanten Teilstückes ist die Funktion strikt monoton sinkend (denn* $\frac{d}{dx}(-3x + \ln 15 + 60) = -3 < 0$*). Zudem gilt* $\lim_{x \to 20^+}(-3x + \ln 15 + 60) = \ln 15$*. Der rechtsseitige Grenzwert in 20 stimmt also mit dem Funktionswert der konstanten Funktion und deren linksseitigen Grenzwert in 20 überein. Die Funktion ist also überall stetig im Intervall. Alle Funktionswerte* $x \in [15, 20]$ *des konstanten Teilstücks sind also grösser als alle anderen Funktionswerte des Intervalls. Welches* $x \in [15, 20]$ *wir hier wählen, spielt wenn wir z.B. einen maximal möglichen Gewinn realisieren möchten keine Rolle. Das obige Definitionsintervall ist links und rechts offen. Es gibt also keine lokale Minima und kein absolutes Minimum.* ◊

Aufgabe: Analysieren Sie den Fall, dass die Funktion links und rechts des konstanten Teilstücks strikt monoton wachsend ist (finden Sie eine Funktion als Beispiel). Analysieren Sie den Fall, dass die Funktion links und rechts des konstanten Teilstücks strikt monoton sinkend ist (finden Sie eine Funktion als Beispiel). Analysieren Sie den Fall, dass die Funktion links strikt monoton sinkend und rechts strikt monoton wachsend ist (finden Sie eine Funktion als Beispiel).

9.6 Extrema bei stetigen Funktionen mit nicht-stetiger Ableitung

Die Ableitung einer stetigen Funktion braucht nicht stetig zu sein. Dies zeigt das folgende Beispiel: Sei f eine Gewinnfunktion mit:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{für } x \leq 3 \\ -x + 8 & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

f ist stetig in 3, da $\lim\limits_{x \to 3^+} (-x + 8) = \lim\limits_{x \to 3^-} (\lim_{x \to 3^+})$. Dies ergibt die Abbildung 9.6.8:

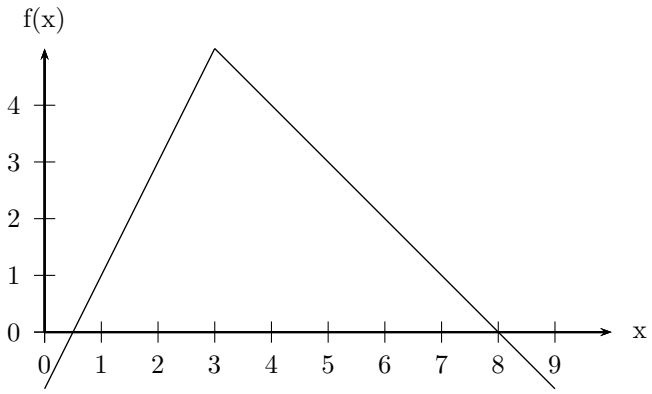


Abbildung 9.6.8: Beispiel einer stetigen Funktion, deren Ableitung nicht stetig ist

Die Ableitung ergibt:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } x < 3 \\ -1 & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

In $x_0 = 3$ ist die Ableitung nicht definiert, da der links- und der rechtsseitige Grenzwert der Funktion $f^*(x) = \frac{f(x)-f(3)}{x-3}$ für $x \to 3$ dort nicht zusammenfallen (s. Abbildung 9.6.9). Es ist nämlich

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3^+} -1 = -1$$

und

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3^-} 2 = 2.$$

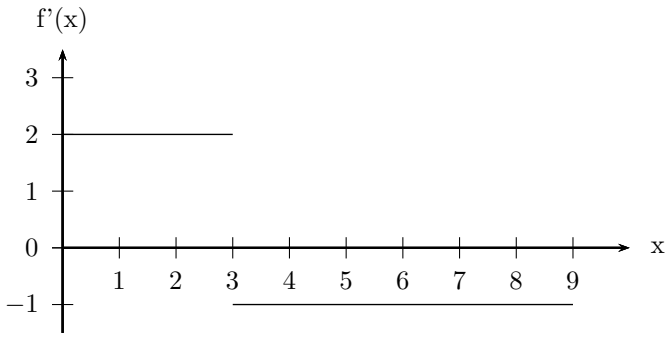


Abbildung 9.6.9: Graphische Darstellung der Ableitung der Funktion der Abbildung 9.6.8

Wir sehen, dass die erste Ableitung in $x_0 = 3$ nicht stetig ist, während die ursprüngliche Funktion dort stetig ist. Die Funktion weist in 3 nicht einen „gleitenden", sondern einen abrupten Richtungswechsel auf.

Bei solchen Funktionen müssen wir zur Bestimmung von Extrema kontrollieren, ob ein allfälliges Extremum in x_0 liegt, wo die intervallweise definierten Funktionen „zusammenstossen". In diesem Falle sind sie dort stetig. Dann liegt dort ein Maximum (Minimum) genau dann vor, wenn die Funktion links von x_0 strikt monoton steigend (sinkend) ist, und rechts davon strikt monoton sinkend (steigend).

Für den Fall, dass die beiden Teil-Funktionen in x_0 nicht zusammentreffen und damit die Funktion in x_0 nicht stetig ist, gibt es verschiedene Möglichkeiten. Exemplarisch betrachten wir den folgenden Fall. Die Teilfunktion links von x_0 sei strikt monoton steigend und rechts von x_0 strikt monoton sinkend. Ist die Funktion links von x_0 auf einem rechtsgeschlossenen Intervall und rechts von x_0 auf einem linksoffenen Intervall definiert, so gibt es ein Maximum in x_0, wenn $f(x_0) > \lim_{x \to x_0^+}$ ist, sonst gibt es kein Maximum. Ist die Funktion links von x_0 auf einem rechtsoffen und links von x_0 rechtsgeschlossenen Intervall definiert, so gibt es ein Maximum in x_0, wenn $f(x_0) > \lim_{x \to x_0^-}$ ist, sonst gibt es kein Maximum (s. Abbildungen 11.0.1 und 11.0.2, links hat es ein Maximum, rechts nicht).

$$g(x) = \begin{cases} 0.2x + 1 & \text{für } x \in \,]0, 4[\\ -0.4x + 5 & \text{für } x \in \,[4, 13[\end{cases}$$

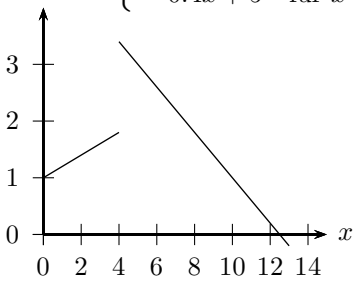


Abbildung 9.6.10: Funktion g mit Maximum im Intervall

$$f(x) = \begin{cases} 0.2x + 1 & \text{für } x \in \,]0, 4] \\ -0.4x + 5 & \text{für } x \in \,]4, 13[\end{cases}$$

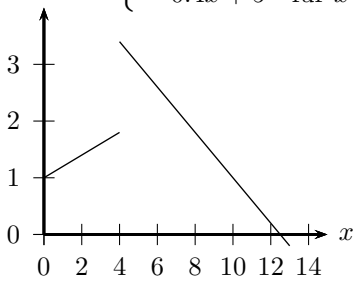


Abbildung 9.6.11: Funktion f ohne Maximum im Intervall

9.7 Lineare Optimierung bei nicht-affinem Restriktionssystem

Lineare Optimierung besteht darin, das Maximum oder das Minimum einer linearen Zielfunktion Z (z.B. Gewinn- oder Kostenfunktion) zu finden, unter der Bedingung dass nur gewisse Argumente der Zielfunktion zulässig sind. Die Menge der zulässigen Punkte nennen wir „Restriktionsmenge“, das Ungleichungssystem, das diese beschreibt „Restriktionssystem“. Oft liegt als Zielfunktion eine lineare Abbildung $Z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vor. Die zulässigen Punkte (x_1, x_2) sind dann Elemente des $\mathbb{R}^2$. Eine übliche Lösungsmethode besteht darin, $Z(x_1, x_2) = a$ konstant zu setzen und diese Gleichung nach x_2 aufzulösen. Man erhält eine Gerade im $\mathbb{R}^2$. Diese Gerade wird dann möglichst weit parallel nach links oder nach rechts verschoben, so dass diese aber mindestens noch einen Punkt mit der Restriktionsmenge gemeinsam hat. Dieser Punkt ist dann der Ort, wie die Zielfunktion ein Maximum oder ein Minimum erreicht unter Berücksichtigung der Restriktionsmenge.

Bemerkung 9.7.1. *Geometrisch besteht die Konstantsetzung von $Z(x_1, x_2) = a$ in der Festlegung einer Schnittmenge einer zum $\mathbb{R}^2$ parallelen Ebene A (der Abstand vom $\mathbb{R}^2$ ist a) und dem Bild von Z. Diese Schnittmenge ist eine Gerade im $\mathbb{R}^3$. Durch die Auflösung nach x_2 wird diese Schnittmenge senkrecht auf $\mathbb{R}^2$ projiziert. Es liegt eine Gerade im $\mathbb{R}^2$ vor, welche Punkte (x_1, x_2) als Elemente umfasst, so dass $Z(x_1, x_2) = a$. Die Verschiebung der Geraden im $\mathbb{R}^2$ nach rechts oder nach links entspricht einer Verschiebung der Parallelebene A hinauf oder hinunter - samt der entsprechenden Verschiebung des Schnittes mit dem Bild von Z.* ◊

Die Differenzialrechnung können wir bei der linearen Optimierung zur Bestimmung von Minima und Maxima der Zielfunktion verwenden, wenn ein Restriktionssystem nicht affine Ungleichungsrelationen enthält. Wir betrachten ein Beispiel:

Beispiel 9.7.2. *(1) Zielfunktion: $Z(x_1, x_2) = \frac{1}{3}x_2 + x_1$. Es handelt sich um eine Funktion im dreidimensionalen Raum. Sie geht durch den 0-Punkt und steigt in x_1 sowie in x_2 Richtung an (denn $\frac{1}{3}x_2$ ist eine strikt monoton steigende lineare Funktion, ebenso x_1). Gesucht ist das Maximum. Wir setzten konstant. $= a \Longrightarrow x_2(x_1) = -3x_1 + 3a$. Das Maximum der Zielfunktion findet man also, indem man die Gerade $x_2(x_1) = -3x_1 + 3a$ möglichst weit nach rechts verschiebt - man lässt das a steigen. Folgendes Restriktionssystem muss dabei gemäss Aufgabenstellung erfüllt sein:*
(1) $x_2 \leq 13x_1 + 3$
(2) $x_2 \leq -x_1^2 + 13x_1 + 12$
(3) $x_1 \leq 13$
(4) $x_1, x_2 \geq 0$
(s. Abbildung 9.7.12).

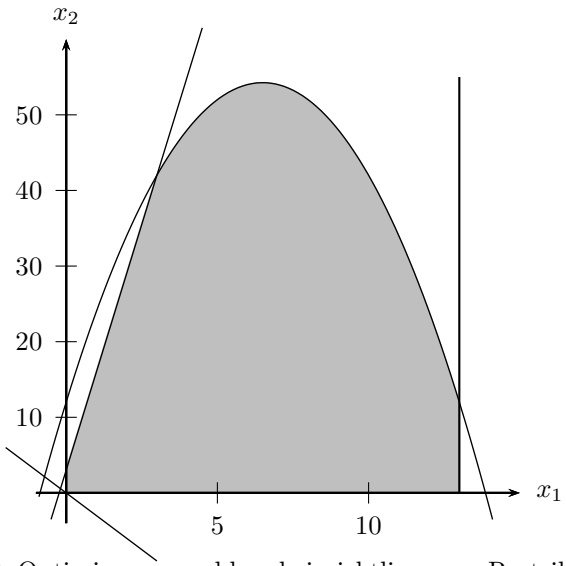


Abbildung 9.7.12: Optimierungsproblem bei nichtlinearem Restriktionssystem

Wir stellen graphisch fest, dass die Gerade $x_2(x_1) = -3x_1 + 3a$ *dann am weitesten nach rechts verschoben werden kann, wenn Sie zur Tangente auf* $f(x_1) = -x_1^2 + 13x_1 + 12$ *wird.*
Wir kennen die Steigung der Geraden $x_2 = -3x_1 + 3a$ *(nämlich* -3*). Diese muss mit der Steigung der Kurve* f *am gesuchten Punkt übereinstimmen. Wir berechnen die erste Ableitung von* f*:* $\frac{d}{dx_1}\left(-x_1^2 + 13x_1 + 12\right) = -2x_1 + 13$*. Damit gilt dann:* $-2x_1 + 13 = -3 \Longrightarrow x_1 = 8$
Die Zielfunktion wird damit maximal im Punkt $(8, f(8)) = (8, 52)$
Der maximale Wert der Zielfunktion ist $Z(8, 52) = \frac{1}{3}x_2 + x_1 = \frac{1}{3} \cdot 52 + 8 = 25.333$ ◊

9.7.1 Übungen

1. Sei die folgende Gewinnfunktion gegeben:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 4 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ -5x + 12 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

   Bestimmen Sie das Gewinnmaximum.

2. Sei die folgende Gewinnfunktion gegeben: $f(x) = 2x - 3$ für $x \in [\frac{3}{2}, 20]$
   Bestimmen Sie das Gewinnmaximum.

3. Sei die folgende Gewinnfunktion gegeben: $f(x) = 2x - 3$ für $x \in [\frac{3}{2}, 20[$
   Bestimmen Sie das Gewinnmaximum.

4. Sei die folgende Ertragsfunktion gegeben: $f(x) = 0.3x^5 - 9x^3 + 20x^2 - 5$ für $x \in [0, 4]$
   Berechne Sie den maximalen Ertrag.

5. Sei die folgende Zielfunktion gegeben: $Z(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{6}x_2$
   Sei das folgende Restriktionssystem gegeben:
   $x_1, x_2 \geq 0$
   $x_2 \leq 9x_1 + 3$
   $x_2 \leq -x_1^3 + 15x_1$
   $x_2 \geq -x_1 + 16$
   $x_2 \geq 2x_1^2 + 3x_1 - 5$
   Berechnen Sie die Punkte, so dass (a) Z maximal wird, (b) Z minimal wird. Berechnen Sie die Funktionswerte von Z in diesen Punkten.

6. Zu maximierende Funktion $Z(x_1, x_2) = 100x_1 + 2x_2$.
   Restriktionssystem:
   $x_2(x_1) \geq 5x_1 + 3$
   $x_2(x_1) \leq -4x_1^2 + 3x_1 + 10$
   $x_2(x_1) \leq 10x_1 + 7.5$
   $x_2(x_1) \leq 200x_1 + 1$
   Geben Sie in der folgenden Graphik die Restriktionsmenge an:

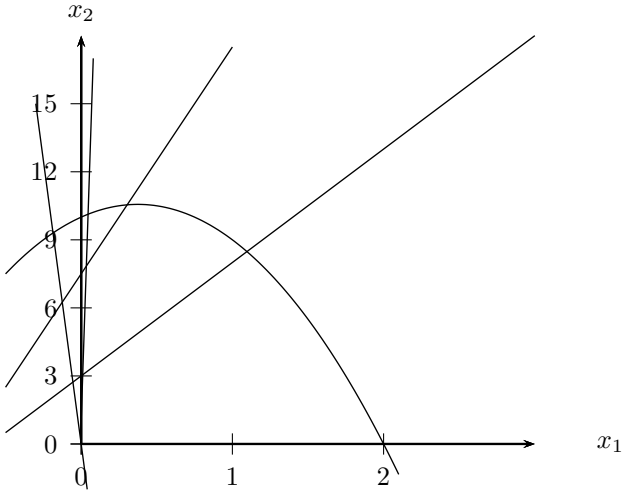


Abbildung 9.7.13: Graphik der Übung

   Finden Sie das geordnete Paar (x_1, x_2), wo Z sein Maximum annimmt. Berechnen Sie $Z(x_1, x_2)$ für dieses Paar.

7. Zu minimierende Funktion: $Z(x_1, x_2) = 80x_1 + 4x_2$
   Restriktionssystem: $x_2(x_1) \geq 5x^2 - 28x + 40$
   $x_2(x_1) \geq 5x^2 - 5x + 3$
   $x_2(x_1) \leq 2x + 30$
   $x_2(x_1) \leq -3x + 40$
   Geben Sie die Restriktionsmenge in der folgenden Graphik an:

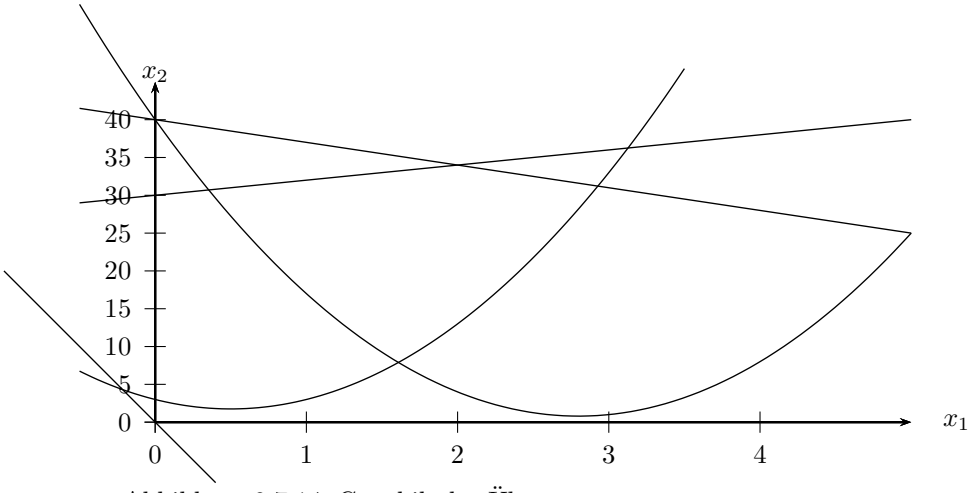


Abbildung 9.7.14: Graphik der Übung

   Finden Sie das geordnete Paar (x_1, x_2), in dem Z minimal ist. Berechnen Sie $Z(x_1, x_2)$ für dieses Paar.

8. Das folgende Restriktionssystem, das die zulässigen Paare (x_1, x_2) angibt, sei gegeben:

$$\begin{aligned} x_2\,(x_1) &\leq -2x_1^2 - 0.4x_1 + 15 \\ x_2\,(x_1) &\leq 13x_1 + 7 \\ x_2\,(x_1) &\geq 5x_1^2 \\ x_2\,(x_1) &\geq 5 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Die Funktion $g\,(x_1, x_2) = 4x_1 + x_2$ soll auf der Restriktionsmenge maximiert werden.
1) Geben Sie auf der folgenden Graphik die Restriktionsmenge (z. B. mit Hilfe einer Farbe) an.
2) Geben Sie die Geraden an, welche das Restriktionssystem bilden (erste Ungleichung = a); etc.)

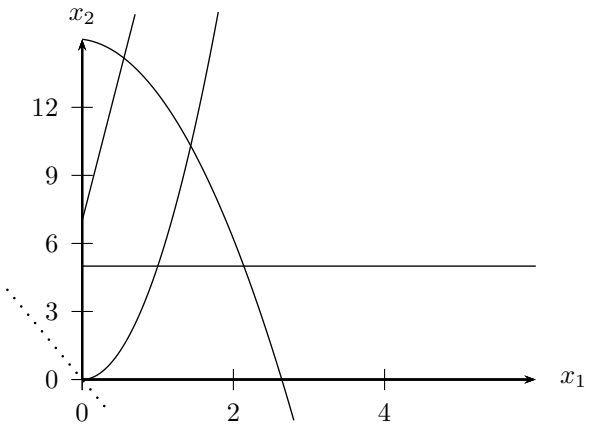


Abbildung 9.7.15: Graphische Darstellung der Restriktionsmenge

c) Geben Sie das Paar (x_1, x_2) der Restriktionsmenge, wo $g\,(x_1, x_2)$ maximal ist
d) Geben Sie den Funktionswert von g für den Punkt (x_1, x_2) von c) an.

9.7.2 Lösungen

1. Es gilt $\lim_{x^- \to 1}(3x + 4) = 7$
$\lim_{x^+ \to 1}(-5x + 12) = 7$. Damit ist die Funktion in 1 stetig. Da sie links steigt und rechts sinkt, liegt in 1 ein Maximum vor (s. Abbildung 9.7.16).

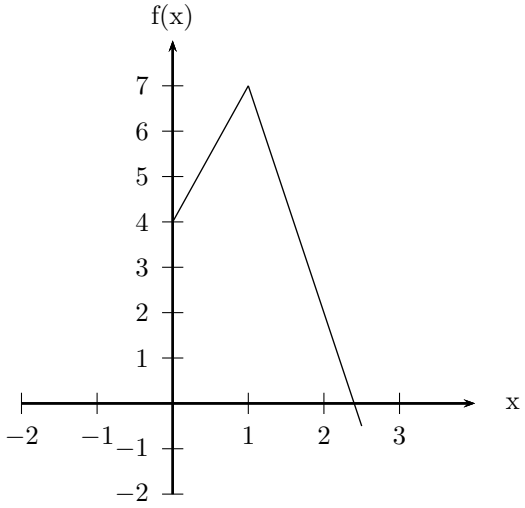


Abbildung 9.7.16: Optimierungsproblem bei nichtstetiger Ableitung

Gewinnmaximum: $f(1) = 7$

2. $f(x) = 2x - 3$ für $x \in [\frac{3}{2}, 20]$
Wir berechnen die erste Ableitung: $\frac{d}{dx}(2x - 3) = 2 > 0$. Somit ist die Funktion überall strikt monoton steigend. Entsprechend befindet sich das Maximum in $x = 20 : f(20) = 37$

3. $f(x) = 2x - 3$ für $x \in [\frac{3}{2}, 20[$
Es gibt kein lokales Extremum im Inneren des Intervalls, da die erste Ableitung keine Nullstelle aufweist. Da das Intervall rechts offen ist, gibt es kein Maximum. Wir kommen jedoch beliebig nahe an den Punkt 37, da $\lim_{x \to 20^-} (2x - 3) = 40 - 3 = 37$.

4. $\frac{d}{dx}\left(0.3x^5 - 9x^3 + 20x^2 - 5\right) = 1.5x^4 - 27x^2 + 40x = 0$ genau dann wenn:
$x_1 = 0$ oder $x_2 = -4.8478$ oder $x_3 = 1.812$ oder $x_4 = 3.0358$
Wir berechnen die zweite Ableitung: $\frac{d}{dx}\left(1.5x^4 - 27x^2 + 40x\right) = 6x^3 - 54x + 40$
in x_1 liegt ein Minimum vor.
x_2 liegt ausserhalb des untersuchten Intervalls.
In x_3 liegt ein Maximum vor, da $f''(1.812) = 6\,(1.812)^3 - 54 \cdot 1.812 + 40 = -22.151 < 0$
In x_4 liegt ein Minimum vor, da $f''(3.0358) = 6\,(3.0358)^3 - 54 \cdot 3.0358 + 40 = 43.936 > 0$.
Zuletzt müssen wir die Intervallgrenzen überprüfen: Da in 0 ein Minimum vorliegt, ist dieser Fall bereits erledigt.
$f(4) = 0.3\,(4)^5 - 9\,(4)^3 + 20\,(4)^2 - 5 = 46.2$
$f(1.812) = 0.3\,(1.812)^5 - 9\,(1.812)^3 + 20\,(1.812)^2 - 5 = 12.982$
Somit liegt das Maximum in $f(4)$. Der maximale Ertrag ist 46.2 (s. Abbildung 9.7.17).

5. Wir zeichnen das Restriktionssystem und die Gerade $Z(x_1, x_2) = 0$ nach x_2 aufgelöst (s. Abbildung 9.7.18):
$a = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{6}x_2 \Longrightarrow x_2(x_1) = -3x_1 + 6a$
Das Maximum wird angenommen, wenn $x_2(x_1) = -3x_1 + 6a$ zur Tangente an der Kurve dritten Grades wird. Wir müssen den Punkt suchen, wo die Tangente an diese Kurve eine Steigung von -3 hat. Wir berechnen die erste Ableitung von $x_2(x_1) = -x_1^3 + 15x_1$:
$\frac{d}{dx_1}\left(-x_1^3 + 15x_1\right) = -3x_1^2 + 15$ und identifizieren diese mit -3:$-3x_1^2 + 15 = -3 \Longrightarrow x_1 = \sqrt{6}$
$x_2 = -\sqrt{6}$. Wir interessieren uns nur für den positiven Bereich, also für $\sqrt{6}$.
Wir haben damit den Punkt: $(\sqrt{6}, f(\sqrt{6})) = (\sqrt{6}, 9\sqrt{6})$
Dies ergibt das folgende Maximum (in die Zielfunktion eingesetzt): $Z\left(\sqrt{6}, 9\sqrt{6}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{6} + \frac{1}{6}9\sqrt{6} = 4.8990$

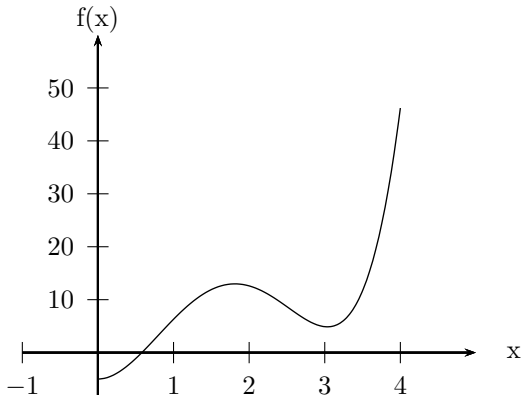


Abbildung 9.7.17: Graphische Darstellung der Funktion der Übung 4

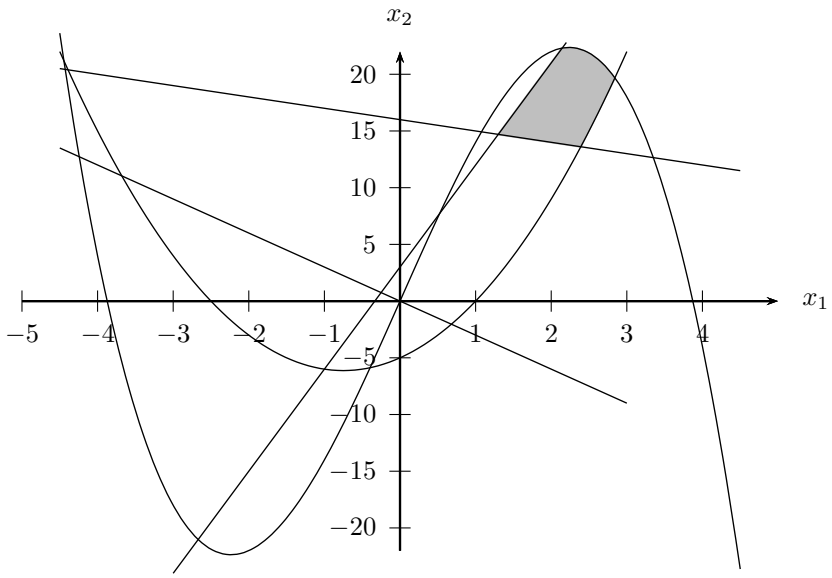


Abbildung 9.7.18: Darstellung des Restriktionssystems der Übung 5

Das Minimum liegt dort, wo sich $x_2 = 9x_1 + 3$ und $x_2 = -x_1 + 16$ schneiden.

$$x_2 = 9x_1 + 3$$
$$x_2 = -x_1 + 16$$

$\Longrightarrow x_1 = \frac{13}{10}, x_2 = \frac{147}{10}$
Wir setzen in die Zielfunktion ein: $Z\left(\frac{13}{10}, \frac{147}{10}\right) = \frac{1}{2}\frac{13}{10} + \frac{1}{6}\frac{147}{10} = \frac{31}{10} = 3.1$

6. Graphik:

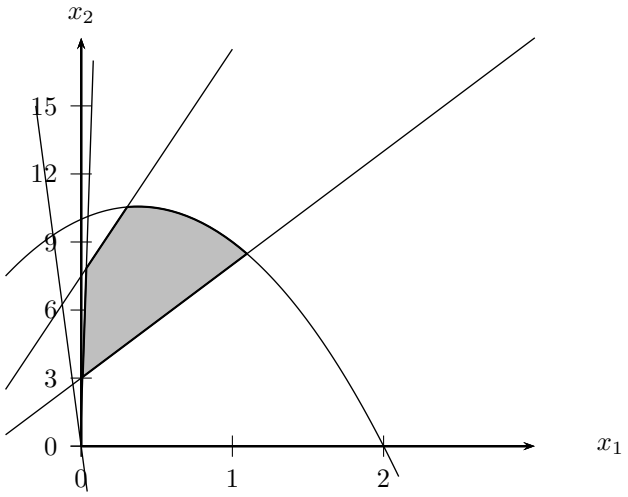


Abbildung 9.7.19: Graphik der Übung

$$5x_1 + 3 = -4x_1^2 + 3x_1 + 10$$

Durch Verschieben der Geraden durch $(0, 0)$ nach rechts findet man den Ort, wo die Zielfunktion maximal wird. Es ist der Schnittpunkt von $x_1(x_2) = 5x_1 + 3$ und $x_2(x_1) = -4x_1^2 + 3x_1 + 10$:

$$5x_1 + 3 = -4x_1^2 + 3x_1 + 10$$

Positive Lösung: $\frac{1}{4}\sqrt{29} - \frac{1}{4} = 1.0963 = x_1$ des Punktes wo sich das Maximum befindet.
$5 \cdot \left(\frac{1}{4}\sqrt{29} - \frac{1}{4}\right) + 3 = \frac{5}{4}\sqrt{29} + \frac{7}{4} = 8.4815 = x_2$ des Punktes, wo sich das Maximum befindet.
$Z(1.0963, 8.4815) = 100 \cdot 1.0963 + 2 \cdot 8.4815 = 126.59$ (Maximum)

7. Graphik:

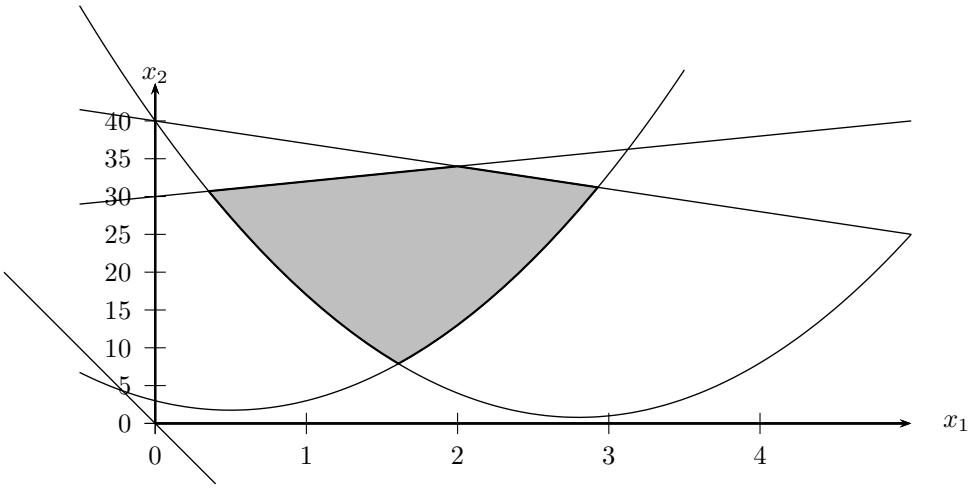


Abbildung 9.7.20: Graphik der Übung

Es scheint, als liege das Minimum auf der Kurve $x_2(x_1) = 5x_1^2 - 28x_1 + 40$. Wenn man nicht sicher ist, kann man den Punkt auf der Kurve bestimmen, wo diese dieselbe Steigung wie $x_2(x_1) = -20x_1$ aufweist und kontrollieren, ob dieser Punkt Element der Restriktionsmenge ist. Wenn das nicht der Fall ist, ist der Punkt mit dem Minimum der Schnittpunkt von $x_2(x_1) = 5x_1^2 - 28x_1 + 40$ und $x_2(x_1) = 5x_1^2 - 5x_1 + 3$ oder der von $x_2(x_1) = 5x_1^2 - 28x_1 + 40$

und $x_2(x_1) = 2x_1 + 30$.

$$\frac{d}{dx_1}\left(5x_1^2 - 28x_1 + 40\right) = 10x_1 - 28 = -20$$

Lösung: $\frac{4}{5} = 0.8$
Da sich 0.8 zwischen den x_1-Dimensionen der Schnittpunkte von $x_2(x_1) = 5x_1^2 - 28x_1 + 40$ und $x_2(x_1) = 5x_1^2 - 5x_1 + 3$ einerseits und denen von $x_2(x_1) = 5x_1^2 - 28x_1 + 40$ und $x_2(x_1) = 2x_1 + 30$ andererseits befindet, liegt der Punkt mit dem Minimum in $x_1 = 0.8$
$5 \cdot 0.8^2 - 28 \cdot 0.8 + 40 = 20.8 = x_2$
$Z(0.8, 20.8) = 80 \cdot 0.8 + 4 \cdot 20.8 = 147.2$ (Minimum)

8. Man erhält:

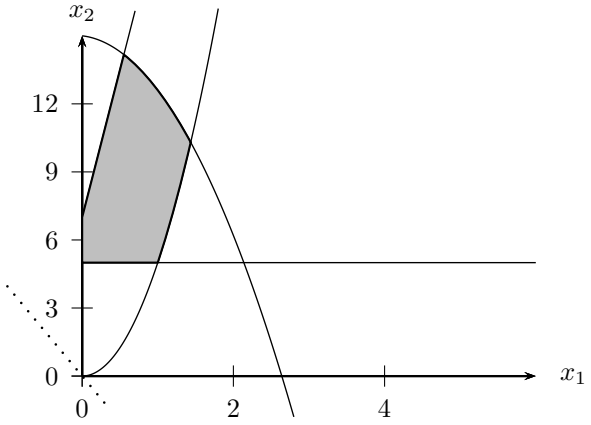


Abbildung 9.7.21: Graphische Darstellung der Restriktionsmenge.

Steigung der Schnittmenge von $g(x_1, x_2) = 4x_1 + x_2$ mit der Fläche $(x_1, x_2) : g(x_1, x_2) = 0$ und damit $x_2(x_1) = -4x_1$.
Wir vermuten, dass die Gerade $x_2(x_1) = -4x_1$ an die Kurve $x_2(x_1) = -2x_1^2 - 0.4x_1 + 15$ zu liegen kommt, wenn wir sie möglichst weit nach rechts schieben.
$\frac{d}{dx_1}\left(-2x_1^2 - 0.4x_1 + 15\right) = -4x_1 - 0.4$
Man setzt gleich: $-4x_1 - 0.4 = -4$, Lösung: 0.9
Wir überprüfen, ob $(0.9, -2 \cdot 0.9^2 - 0.4 \cdot 0.9 + 15)$ sich auf dem Funktionsabschnitt von $x_2(x_1) = -2x_1^2 - 0.4x_1 + 15$ befindet, der Teil der Abgrenzung der Restriktionsmenge ist.
In der Tat gilt für den Schnitt von $x_2(x_1) - 2x_1^2 - 0.4x_1 + 15$ und von $x_2(x_1) = 13x_1 + 7$:
(0.5516,14.17083488) und für den Schnitt von $x_2(x_1) = -2x_1^2 - 0.4x_1 + 15$ und von $x_2(x_1) = 5x_1^2$:
(1.4356,10.30386528). Da $0.9 \in]0.5516, 1.4356[$, liegt das Maximum von g über
$(x_1, x_2) = \left(0.9, -2 \cdot 0.9^2 - 0.4 \cdot 0.9 + 15\right) = (0.9, 13.02)$
$g(0.9, 13.02) = 4 \cdot 0.9 + 13.02 = 16.62$

9.8 Lernziele

- Lokale und absolute Maxima und Minima in Bezug auf intervallweise (geschlossene und offene, halboffene) Funktionen berechnen können.
- Maxima und Minima in Bezug auf stetige Funktionen berechnen können, die nicht überall stetig ableitbar sind.
- Optimale Funktionswerte in Bezug auf stetige Funktionen berechnen können, die konstante Teilstücke aufweisen.

- Optimierungsprobleme bei nicht-linearen Restriktionen lösen können.
- Aufgaben von der Art der Übungen lösen können.

Kapitel 10

Ableitungen und ökonomische Grenzfunktionen

Ableitungen erlauben es, ökonomische Grenzfunktionen auf eine Art zu definieren, die eine wirksame Analyse dieser Funktionen erlaubt. Im ersten Unterkapitel analysieren wir die Einheiten von Ableitungen ökonomischer Funktionen. Im zweiten Unterkapitel wird die Definition von Grenzfunktionen durch Ableitungen motiviert. Im dritten Unterkapitel werden die entsprechenden Funktionen dann definiert.

10.1 Ableitungen und Masseinheiten

Im ökonomischen Zusammenhang sind die Werte des Definitions- wie des Wertebereichs von Funktionen jeweils mit Masseinheiten versehen (z.B. Fr. kg, Liter, Tonnen, etc.). Es stellt sich die Frage, welche Masseinheiten die Ableitungen ökonomischer Funktionen aufweisen. Wir betrachten die Kostenfunktion: $K(x) = x^3 - 2x + 5$. Sie drückt die Kosten (Geldeinheiten, z.B. Franken) als Funktion der produzierten Menge aus (Mengeneinheiten, z.B. Kilogramme, Tonnen). Beim Ableiten bilden wir den Grenzwert der Funktion

$$h(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

für $x \to x_0$, im Falle eine Kostenfunktion der Funktion

$$h(x) = \frac{K(x) - K(x_0)}{x - x_0}.$$

Da die Kosten in Geld gemessen werden und die produzierte Menge in Mengeneinheiten, erhalten wir als Masseinheit der Ableitung: $\frac{GE}{ME}$, z.B. $\frac{Fr.}{Tonne}$.

Für die zweite Ableitung erhalten wir:

$$K''(x) : \frac{\frac{GE}{ME}}{ME} = \frac{GE}{ME^2},$$

für

$$K'''(x) : \frac{\frac{GE}{ME^2}}{ME} = \frac{GE}{ME^3},$$

etc.

Man kann feststellen, dass die Einheiten der ersten Ableitung einer Kostenfunktion mit den Einheiten der Stückkostenfunktion übereinstimmen. Im Beispiel:

$$k(x) = \frac{K(x)}{x} : \frac{GE}{ME}.$$

Entsprechend macht es Sinn, die Stückkostenfunktion und die erste Ableitung der Kostenfunktion ins selbe Koordinatennetz abzutragen. Es ist jedoch nicht sinnvoll, die Kostenfunktion und die erste Ableitung ins selbe Koordinatennetz einzuzeichnen. Solange wir jedoch Funktionen ohne interpretierte Einheiten betrachten, können wir die Funktionen und Ihre Ableitungen durchaus in dasselbe Koordinatennetz zeichnen.

10.1.1 Übungen

1. Die Kostenfunktion $K(x) = 5x^4 - 2x^2 + 5$ drücke Kosten in Schweizer Franken aus (die produzierte Menge wird in Kg gemessen. Welches sind die Einheiten von $K'(x)$ und von $K''(x)$.
2. Die Produktionsfunktion $x(r) = -\frac{1}{15}r^3 + 0.5r^2 + 4r$ drücke die produzierte Menge $x(r)$ in Tonnen Brot und die verwendete Menge Mehl r in Tonnen aus. Welches sind die Einheiten von $x'(r)$ und von $x''(r)$?
3. Die Kostenfunktion $K(x) = 5x^4 - 2x^2 + 5$ drücke die Kosten in Schweizerfranken und die produzierten Mengen in Kilogramm aus. Welches sind die Einheiten von $k(x)$ und von $k'(x)$?

10.1.2 Lösungen

1. Die Einheiten von $K'(x) : \frac{sFr}{kg}$; die Einheiten von $K''(x) : \frac{sFr}{(kg)^2}$
2. Die Einheiten von $x'(r) : \frac{t}{t} = 1$; Die Einheiten von $x''(r) : \frac{t}{t^2} = \frac{1}{t}$
3. Die Einheiten von $k(x) : \frac{sFr}{kg}$; die Einheiten von $k'(x) = \frac{sFr}{(kg)^2}$.
   $k'(x)$ hat also die selben Einheiten wie $K''(x)$.

10.2 Ökonomische Grenzfunktionen und Ableitungen

Ökonomische Grenzfunktionen drücken im diskreten Fall aus, um wieviel der Funktionswert wächst oder sinkt, wenn auf der x-Achse eine Einheit hinzukommt. Bei einer Nutzenfunktion drückt damit die Grenznutzenfunktion aus, um wieviel der Nutzen anwächst, wenn eine Mengeneinheit zusätzlich konsumiert wird. Im Falle einer Kostenfunktion drückt die Grenzkostenfunktion aus, um wieviel die Kosten wachsen, wenn eine Einheit mehr produziert wird. Im diskreten Fall ist damit die Grenzkostenfunktion definiert als

$$K_g(x) := K(x+1) - K(x)$$

Grenzfunktionen dieser Art sind nicht einfach zu analysieren. Um die Mittel der Differentialrechnung nutzbar zu machen und den Grenzfunktionsbegriff auf den stetigen Fall zu verallgemeinern, werden ökonomische Grenzfunktionen mit Hilfe der Differentialrechnung definiert. Den Übergang von diskreten zu stetigen Grenzfunktionen können die folgenden Gedanken plausible machen.

Die Steigung der Tangente g in x_0 ist $f'(x_0)$. Die Tangente g ist eine Gerade. Deshalb ist ihre Steigung $\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ für beliebige x, also z.B. auch für $x = x_0 + 1$. Damit erhalten wir:

$$f'(x_0) = \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(x_0+1) - g(x_0)}{x_0 + 1 - x_0} = g(x_0+1) - g(x_0).$$

An der Graphik 10.2.1 sieht man, dass

$$f(x_0+1) - f(x_0) \approx g(x_0+1) - g(x_0) = f'(x_0)$$

sofern die Kurve ihre Richtung in $[x_0, x_0+1]$ nicht zu schnell ändert.

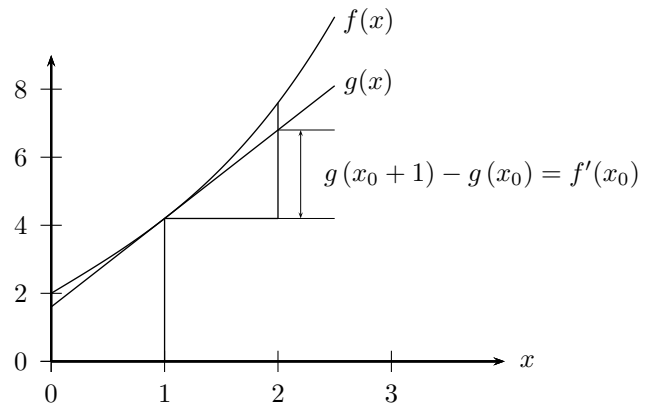


Abbildung 10.2.1: Graphik für die Fastgleichung $f(x_0+1)-f(x_0) \approx g(x_0+1)-g(x_0)=f'(x_0)$

Der Rest $r(x)=f(x)-g(x)$ geht zudem sehr schnell gegen 0 für $x \to x_0$ (s. Satz 7.6.6 und darauffolgende Bemerkung S. 7.6.6). Es macht also Sinn, die Grenzkosten mittels der ersten Ableitung auszudrücken, sofern die Kurve ihre Richtung nicht zu schnell ändert. Um die flexiblen Möglichkeiten der Differentialrechnung zu nutzen, empfiehlt es sich auf diesem Hintergrund, die Grenzkosten mittels der Ableitung zu definieren, selbst in Fällen wo f in $[x_0, x_0+1]$ stark die Richtung ändert. Entsprechend werden wir in der Folge unter „Grenzkostenfunktion“, „Grenzgewinnfunktion“, „Grenzertragsfunktion“, etc. jeweils die 1. Ableitung der entsprechenden ökonomischen Funktionen (Kostenfunktion, Gewinnfunktion, Ertragsfunktion, etc) verstehen.

10.2.1 Definitionen einiger ökonomischer Grenzfunktionen

- Kostenfunktion: $K = K_v + K_f$, K drückt Kosten als Funktion der produzierten Menge aus; K_v Funktion der variablen Kosten, K_f Funktion der fixen Kosten;
  Grenzkostenfunktion: $K'(x) = \frac{d}{dx}K(x)$
  Stückkostenfunktion: $k(x) = \frac{K(x)}{x}$
  Man beachte: $K'(x) = K_v'(x)$
  Grenzstückkosten: $k'(x) = \frac{d}{dx}k(x)$
- Preisnachfragefunktion: $p(x)$
- Erlösfunktion: $E(x) = x \cdot p(x)$, drückt Erlös als Funktion der abgesetzten Menge aus;
  Grenzerlös für die Erlösfunktion: $E'(x) = \frac{d}{dx}E(x)$
  Bei konstantem Preis gilt: $E'(x) = p$
- Produktionsfunktion: $x(r)$, drückt produzierte Menge als Funktion des Inputs aus;
  Grenzproduktivität (= Grenzoutput = Grenzertrag): $x'(r) = \frac{d}{dr}x(r)$
  Durchschnittsoutput, Durchschnittsertrag oder durchschnittliche Produktivität: $\bar{x}(r) = \frac{x(r)}{r}$
  Grenz-Durchschnittsoutput: $\bar{x}'(r) = \frac{d}{dr}\frac{x(r)}{r}$
- Gewinnfunktion: G, drückt Gewinn als Funktion der abgesetzten Menge aus;
  Grenzgewinn: $G'(x) = \frac{d}{dx}G(x)$.
  Stückgewinnfunktion: $g(x) = \frac{G(x)}{x}$
  Grenzstückgewinn: $g'(x) = \frac{d}{dx}\frac{G(x)}{x}$
- Deckungsbeitragsfunktion: $G_D(x) = E(x) - K_v(x)$
  Grenzdeckungsbeitrag: $G_D'(x) = \frac{d}{dx}(E(x) - K_v(x)) = E'(x) - K_v'(x) = E'(x) - K'(x)$
  Stückdeckungsbeitragsfunktion: $g_D(x) = \frac{G_D(x)}{x}$
  Grenzstückdeckungsbeitrag: $g_D'(x) = \frac{d}{dx}\frac{G_D(x)}{x}$

- Konsumfuktion: C, drückt den Konsum in Geldeinheiten als Funktion des Einkommens Y aus.
  Marginale Konsumquote (= Grenzhang, Grenzneigung zum Konsum): $C'(Y) = \frac{dC(Y)}{dY} > 0$ - wenn man mehr verdient gibt man mehr für Konsum aus;
  Sparfunktion: S, welche die gesparte Summe als Funktion des Einkommens Y ausdrückt.
  Marginale Sparquote (Grenzhang, Grenzneigung zum Sparen): $S'(Y) = \frac{dS(Y)}{dY} > 0$ - wenn man mehr verdient spart man mehr)
  Es gilt: $Y = C(Y) + S(Y)$. Damit gilt: $\frac{d}{dY}Y = 1 = \frac{d}{dY}C + \frac{d}{dY}S > 0$
  Damit ist dann $C'(Y) \leq 1$ und $S'(Y) \leq 1$

10.2.2 Übungen

1. Folgende ökonomische Funktionen seien vorgegeben (aus: Tietze, Jürgen, Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik, S. 6-16).
   Gesamtkostenfunktion $K(x) = 0.06x^3 - x^2 + 50x + 400$
   Produktionsfunktion: $x(r) = -\frac{1}{60}r^3 + \frac{5}{4}r^2 + 3r$
   Preis-Absatzfunktion: $p(x) = 150 - 0.4x$
   Konsumfunktion: $C(Y) = 1000 + 0.2Y$
   Nutzenfunktion: $U(x) = 10\sqrt{x}$

   Man ermittle:

   (a) die Grenzkosten bei einem Output von 70 ME (man vergleiche das Resultat mit dem der Definition $K_m(x) := K(x+1) - K(x)$)

   (b) die durchschnittlichen variablen Kosten für eine Produktmenge von 70 ME

   (c) die Grenzstückkosten für den Output 100 ME ,

   (d) den durchschnittliche Ertrag für den Faktorinput 40 ME_r

   (e) die Grenzproduktivität für eine Faktoreinsatzmenge von 40 ME_r

   (f) den Anstieg der Grenzproduktivitätsfunktion bei einem Input von 40 ME_r

   (g) den Gesamtdeckungsbeitrag sowie den Stückdeckungsbeitrag für den Output 30 ME

   (h) den Grenzdeckungsbeitrag sowie den Grenzstückdeckungsbeitrag für den Output 30 ME

   (i) den Grenzerlös bzgl. der Menge bei einer Absatzmenge von 150 ME

   (j) den Grenzerlös bzgl. des Preises bei einem Marktpreis von 120 GE/ME ,

   (k) den Grenzgewinn bzgl. der Menge bei einem Marktpreis von 100 GE/ME

   (l) die marginale Sparquote bei einem Haushaltseinkommen von 1000 GE ,

   (m) die durchschnittliche Konsumquote für das Einkommen 1000 GE

   (n) den Grenzstückgewinn für den Output 40 ME ,

   (o) den Grenznutzen bei einer konsumierten Gütermenge von 4 ME ,

   (p) das durchschnittliche Nutzenniveau für eine Konsummenge von 4 ME

   (q) denjenigen Output, bei dem
   i) die durchschnittlichen variablen Kosten minimal sind
   ii) die durchschnittlichen Gesamtkosten den Anstieg Null haben
   iii) die Grenzkosten gleich den (gesamten) Stückkosten sind

   (r) das Haushaltseinkommen, bei dem
   i) von jeder eingenommenen GE
   ii) von jeder zusätzlich eingenommenen GE 60% gespart werden

(s) denjenigen Faktorinput, für den
i) der Anstieg des Gesamtoutputs Null wird
ii) die Grenzproduktivität Null wird
iii) die durchschnittliche Produktivität Null wird
iv) Grenzproduktivität und Durchschnittsoutput übereinstimmen

(t) denjenigen Marktpreis, für den der Grenzgewinn bzgl. der Menge Null wird

(u) denjenigen Output, für den Grenzkosten und Grenzerlös übereinstimmen,

(v) diejenige produzierte Menge, für die die Grenzkostenfunktion eine horizontale Tangente besitzt,

(w) diejenige Faktoreinsatzmenge, bei der ein zusätzlicher Input von 2 ME_r die Produktionsmenge um (ca.) 0.1 ME_x steigert,

(x) denjenigen Output, bei dem die Stückkosten um (ca.) 0.4 GE/ME sinken, wenn der Output um eine ME gesteigert wird,

(y) diejenige Faktoreinsatzmenge, bei der die durchschnittliche Produktivität um (ca.) 0.5 ME_x/ME_r zunimmt, wenn eine Inputeinheit weniger eingesetzt wird,

(z) denjenigen Marktpreis, bei dem eine Preiserhöhung von 0.1 GE/ME zu einer Erlösminderung von (ca.) 0.5 GE führt,

2. Man ermittle für die Funktionen der Übung :

(a) denjenigen Output, bei dem der Stückgewinn um (ca.) 2 GE/ME abnimmt, wenn die Produktion um 10 ME gesteigert wird,

(b) diejenige konsumierte Gütermenge, bei der
i) der Grenznutzen
ii) das durchschnittliche Nutzenniveau den Wert a) 0.5 b) 0 annimmt,

(c) denjenigen Output, bei dem der Gesamtdeckungsbeitrag um (ca.) 80 GE zunimmt, wenn die Produktion um 4 ME gedrosselt wird.

3. Für die folgenden ökonomischen Funktionen beantworte man die Fragen der Übungen 1 und 2:
Gesamtkostenfunktion: $K(x) = e^{0.001x+10} + 10'000 \quad (0 \leq x \leq 15'000 ME)$
Produktionsfunktion: $x(r) = \sqrt{4r - 100} \quad (r \geq 25 \text{ ME})$
Nachfragefunktion: $x(p) = -100 \ln(0.0005p) \quad (0 < p \leq 2'000 GE/ME)$
Konsumfunktion: $C(Y) = \frac{200Y+10000}{Y+80} \quad (Y \geq 0)$
Nutzenfunktion: $U(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 1.5x^2 + 2x$

4. Außerdem ermittle man für die Funktionen der Übung 3:

(a) die Faktorverbrauchsfunktion $r(x)$,

(b) den Grenzverbrauch des Produktionsfaktors bei einem Output von 20 ME_x

(c) den Sättigungswert des Konsums sowie der durchschnittlichen Konsumquote für unbegrenzt wachsendes Einkommen

(d) die Sättigungswerte von marginaler Konsumquote und marginaler Sparquote für unbeschränkt wachsendes Einkommen

10.2.3 Lösungen

1. Man erhält:

(a) $K'(x) = \frac{d}{dx}\left(0.06x^3 - x^2 + 50x + 400\right) = 0.18x^2 - 2x + 50$
$K'(70) = 792 \; GE/ME$ (Vergleich: $K(70+1) - K(70) = 0.06 \cdot 71^3 - 71^2 + 50 \cdot 71 + 400 - \left(0.06 \cdot 70^3 - 70^2 + 50 \cdot 70 + 400\right) = 803.66$).

(b) $k_v(x) = \frac{0.06x^3 - x^2 + 50x}{x} = 0.06x^2 - x + 50$
$k_v(70) = 274\ GE/ME$

(c) $k(x) = \frac{0.06x^3 - x^2 + 50x + 400}{x} = 0.06x^2 - x + 50 + \frac{400}{x}$
$k'(x) = \frac{d}{dx}\left(0.06x^2 - x + 50 + \frac{400}{x}\right) = 0.12x - \frac{400}{x^2} - 1$
$k'(100) = 10.96\ GE/ME^2$

(d) $\bar{x}(r) = \frac{x(r)}{r} = \frac{-\frac{1}{60}r^3 + \frac{5}{4}r^2 + 3r}{r} = -\frac{1}{60}r^2 + \frac{5}{4}r + 3$
$\bar{x}(40) = 26.33\ ME_x/ME_r$

(e) $x'(r) = \frac{d}{dr}\left(-\frac{1}{60}r^3 + \frac{5}{4}r^2 + 3r\right) = \frac{5}{2}r - \frac{1}{20}r^2 + 3$
$x'(40) = 23\ ME_x/ME_r$

(f) $x''(r) = \frac{d}{dr}\left(\frac{5}{2}r - \frac{1}{20}r^2 + 3\right) = \frac{5}{2} - \frac{1}{10}r$
$x''(40) = -1.5\ ME_x/ME_r^2$

(g) $K_v(x) = 0.06x^3 - x^2 + 50x$
$E(x) = xp(x) = 150x - 0.4x^2$
$G_D(x) = E(x) - K_v(x) = 150x - 0.4x^2 - \left(0.06x^3 - x^2 + 50x\right) = 100x + 0.6x^2 - 0.06x^3$
$G_D(30) = 1920\ GE;$
$g_D(x) = \frac{100x + 0.6x^2 - 0.06x^3}{x} = 100 + 0.6x - 0.06x^2$
$g_D(30) = 64\ GE/ME$

(h) $G'_D(x) = \frac{d}{dx}\left(100x + 0.6x^2 - 0.06x^3\right) = 1.2x - 0.18x^2 + 100$
$G'_D(30) = -26GE/ME;$
$g'_D(x) = \frac{d}{dx}\left(100 + 0.6x - 0.06x^2\right) = 0.6 - 0.12x$
$g'_D(30) = -3GE/ME^2$

(i) $E(x) = xp(x) = x\left(150 - 0.4x\right) = 150x - 0.4x^2$
$E'(x) = \frac{d}{dx}\left(150x - 0.4x^2\right) = 150 - 0.8x$
$E'(150) = 30\ GE/ME$

(j) Erlösfunktion als Funktion des Preises: $p(x) = 150 - 0.4x$ nach x aufgelöst ergibt:
$x(p) = 375 - 2.5p$
$E(p) = px(p) = 375p - 2.5p^2$
$\frac{d}{dp}\left(375p - 2.5p^2\right) = 375 - 5p$
$E'(120) = -225\ GE/GE = -225$

(k) $x(100) = 375 - 2.5 \cdot 100 = 125$
$G(x) = E(x) - K(x) = x(150 - 0.4x) - \left(0.06x^3 - x^2 + 50x + 400\right) = 100x + 0.6x^2 - 0.06x^3 - 400$
$G'(x) = \frac{d}{dx}\left(100x + 0.6x^2 - 0.06x^3 - 400\right) = 1.2x - 0.18x^2 + 100$
$G'(125) = 1.2 \cdot 125 - 0.18 \cdot 125^2 + 100 = -2562.5\ GE/ME$

(l) $S(Y) = Y - C(Y) = Y - (1000 + 0.2Y) = 0.8Y - 1000$
$S'(Y) = \frac{d}{dY}\left(0.8Y - 1000\right) = 0.8$
$S'(1000) = 0.8\ GE/GE = 0.8$

(m) $\bar{C}(Y) = \frac{1000 + 0.2Y}{Y} = 0.2 + \frac{1000}{Y}$
$\bar{C}(1000) = 1.2GE/GE = 1.2$

(n) $g(x) = \frac{G(x)}{x} = \frac{100x + 0.6x^2 - 0.06x^3 - 400}{x} = 100 + 0.6x - 0.06x^2 - \frac{400}{x}$
$g'(x) = \frac{d}{dx}\left(100 + 0.6x - 0.06x^2 - \frac{400}{x}\right) = \frac{400}{x^2} - 0.12x + 0.6$
$g'(40) = -3.95GE/ME^2$

(o) $\frac{d}{dx}U(x) = \frac{d}{dx}\left(10\sqrt{x}\right) = \frac{5}{\sqrt{x}}$
$U'(4) = 2.5NE/ME$ (NE für Nutzeneinheit)

(p) $\bar{U}(x) = \frac{10\sqrt{x}}{x} = \frac{10}{\sqrt{x}}$
$\bar{U}(4) = 5NE/ME$

(q) i) $k_v(x) = \frac{0.06x^3 - x^2 + 50x}{x} = 0.06x^2 - x + 50$
$k_v'(x) = \frac{d}{dx}\left(0.06x^2 - x + 50\right) = 0.12x - 1$
$0.12x - 1 = 0$ genau dann, wenn $x = 8.333\,3$
$k_v''(x) = \frac{d}{dx}(0.12x - 1) = 0.12 > 0$ (somit dort Minumum)
ii) $k(x) = \frac{0.06x^3 - x^2 + 50x + 400}{x} = \frac{400}{x} - x + 0.06x^2 + 50$
$k'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{400}{x} - x + 0.06x^2 + 50\right) = 0.12x - \frac{400}{x^2} - 1$
$0.12x - \frac{400}{x^2} - 1 = 0$, wenn $x = 18.294$
iii) $\frac{d}{dx}\left(0.06x^3 - x^2 + 50x + 400\right) = 0.18x^2 - 2x + 50$
$0.18x^2 - 2x + 50 = \frac{0.06x^3 - x^2 + 50x + 400}{x}$ wenn $x = 18.294$

(r) i) $\bar{S}(Y) = \frac{Y - C^o(Y)}{Y} = 1 - \frac{C^o(Y)}{Y} = 1 - \frac{1000 + 0.2Y}{Y} = 0.8 - \frac{1000}{Y}$
$\bar{S}(Y) = 0.6 \Longrightarrow Y = 5000\ GE$
ii) Es gibt kein Einkommen mit einer marginalen Sparquote von 0.6, da $S'(Y) = 0.8$ (s. oben)

(s) i) $\frac{d}{r}x(r) = \frac{d}{dr}\left(-\frac{1}{60}r^3 + \frac{5}{4}r^2 + 3r\right) = \frac{5}{2}r - \frac{1}{20}r^2 + 3$
$\frac{5}{2}r - \frac{1}{20}r^2 + 3 = 0$ genau denn, wenn $x = 25 - \sqrt{685} = -1.\,172\,5$ (da negativ, nicht im ökonomisch sinnvollen Bereich) oder $x = \sqrt{685} + 25 = 51.1725$
ii) Laut Definition von Grenzproduktivität mit i) identisch
iii) $\bar{x}(r) = \frac{-\frac{1}{60}r^3 + \frac{5}{4}r^2 + 3r}{r} = \frac{5}{4}r - \frac{1}{60}r^2 + 3$
$\frac{5}{4}r - \frac{1}{60}r^2 + 3 = 0$ genau dann, wenn $r = \frac{75}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{705} = -2.\,327\,8$ (nicht im ökonomisch sinnvollen Bereich) oder $r = \frac{3}{2}\sqrt{705} + \frac{75}{2} = 77.\,328$
iv) $\frac{5}{2}r - \frac{1}{20}r^2 + 3 = \frac{5}{4}r - \frac{1}{60}r^2 + 3$ genau dann, wenn $r = 0$ oder $r = \frac{75}{2} = 37.\,5$

(t) $G'(x) = 0 \Longrightarrow x = 27.14\ ME$,
$p(27.14) = 139.14\ GE/ME$

(u) $K'(x) = E'(x) \Longrightarrow$ gleiche Lösung wie 1t, da $G'(x) = E'(x) - K'(x)$.

(v) $\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(0.06x^3 - x^2 + 50x + 400\right)\right) = 0.36x - 2$
$0.36x - 2 = 0$ genau dann, wenn $x = 5.555\,6\ ME$

(w) Für 2 zusätzliche ME steigt die Produktionsmenge um 0.1. Man kann eine Sekante durch die Punkte $(r, x(r))$ und $(r+2, x(r+2))$ legen, so dass $x(r+2) - x(r) = 0.1$. Die Sekante hat die Steigung $\frac{0.1}{2} = 0.05$. Die Tangente durch den Punkt $((r, x(r)))$ hat eine ähnliche Steigung wie die Sekante und kann deshalb zur Bestimmung von r als Näherung verwendet werden.

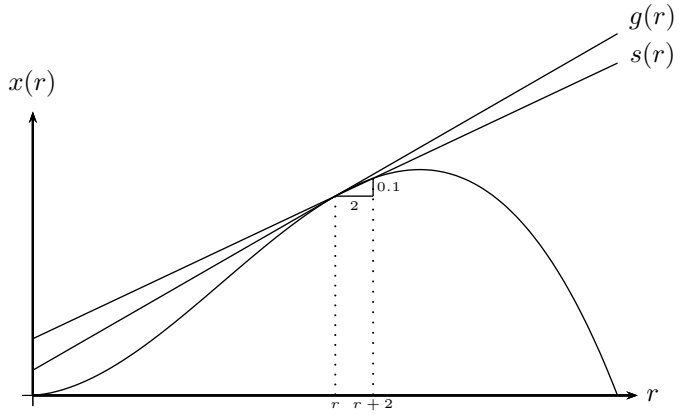


Abbildung 10.2.2: Kurve mit Punkten $(r, x(r))$ und $(r+2, x(r+2)$, Sekante s(r) durch diese Punkte sowie Tangente g(r) in $(r, x(r))$

Approximative Lösung (mittels Ableitung): $x'(r) = \frac{5}{2}r - \frac{1}{20}r^2 + 3 : x'(r) = \frac{0.1}{2} \Longrightarrow r = 51.15\ ME_r$

Exakte Lösung:
$x(r+2)-x(r)=-\frac{1}{60}(r+2)^3+\frac{5}{4}(r+2)^2+3(r+2)-\left(-\frac{1}{60}r^3+\frac{5}{4}r^2+3r\right)=-\frac{1}{10}r^2+\frac{24}{5}r+\frac{163}{15}=0.1$
Lösung: $r=50.147$ $(-2.147$ ist nicht im ökonomischen Bereich)

Um die algebraischen Vereinfachen mit ihrer Fehleranfälligkeit zu vermeiden (um dann die Nullstellen mit polyroot zu berechnen), kann man in R auch den folgenden Befehl eingeben:
f=function(x) -1/60*(x+2)^3 +5/4*(x+2)^2+3*(x+2)-(-1/60*x^3+5/4*x^2+3*x)-0.1
plot(f,xlim=c(0,60))
abline(0,0)
uniroot(f,c(50,60))

(x) Approximative Lösung (mittels Ableitung): $k'(x)=0.12x-\frac{400}{x^2}-1 : k'(x)=-0.4 \Longrightarrow x=16.80\ ME$
Exakte Lösung: $k(x+1)-k(x)=$
$=0.06(x+1)^2-(x+1)+50+\frac{400}{x+1}-\left(0.06x^2-x+50+\frac{400}{x}\right)=0.12x+\frac{400}{x+1}-\frac{400}{x}-0.94=-0.4$
Lösung: 16.309 (mit R: s. Übung w))

(y) Approximative Lösung (mittels Ableitung): $\frac{d}{dr}\bar{x}(r)=\frac{d}{dr}\left(-\frac{1}{60}r^2+\frac{5}{4}r+3\right)=\frac{5}{4}-\frac{1}{30}r$
$\bar{x}'(r)=-0.5 \Longrightarrow r=52.5\ ME_r$
Exakte Lösung:
$-\frac{1}{60}(r-1)^2+\frac{5}{4}(r-1)+3-\left(-\frac{1}{60}r^2+\frac{5}{4}r+3\right)=\frac{1}{30}r-\frac{19}{15}=0.5$
$\frac{1}{30}r-\frac{19}{15}=0.5$, Lösung: 53 (mit R: s. Übung w))

(z) Approximative Lösung (mittels Ableitung):
$p_N(x)=150-0.4x \Longrightarrow x(p)=\frac{p-150}{-0.4}=375-2.5p$
$E'(p)=375-5p : E'(p)=\frac{-0.5}{0.1}=-5 \Longrightarrow p=76\ GE/ME$
(man setzt $E'(p)=\frac{-0.5}{0.1}$, da der Erlös um 0.5 sinkt, wenn der Preis um 0.1 steigt. Damit ist die näherungsweise Steigung $\frac{-0.5}{0.1}$)
Exakte Lösung:
$E(p)=375p-2.5p^2$
Mit $E(p+0.1)-E(p_1)=375(p+0.1)-2.5(p+0.1)^2-\left(375p-2.5p^2\right)=$
$37.475-0.5p=-0.5$, $p=75.95$ (mit R: s. Übung w))

2. Man erhält

(a) Approximative Lösung: $g'(x)=\frac{400}{x^2}-0.12x+0.6=\frac{-2}{10}=-0.2 \Longrightarrow x=17.52ME$
Exakte Lösung: $g(x+10)-g(x)=$
$100+0.6(x+10)-0.06(x+10)^2-\frac{400}{x+10}-\left(100+0.6x-0.06x^2-\frac{400}{x}\right)=\frac{400}{x}-\frac{400}{x+10}-1.$
$2x=-2$, Lösung: 12.921 (das Resultat liegt recht weit weg von der approximativen Lösung, da auf der x-Achse eine Änderung von immerhin 10 Einheiten erfolgt). (mit R: s. Übung 1. w))

(b) i) a) Mit $U'(x)=\frac{d}{dx}10\sqrt{x}=\frac{5}{\sqrt{x}} : U'(x)=0.5=\frac{5}{\sqrt{x}} \Longrightarrow x=100\ ME$
b) $U'(x)\neq 0$ für alle $x\in\mathbb{R}^+\backslash\{0\}$
ii) a) Mit $\bar{U}(x)=\frac{10\sqrt{x}}{x}=\frac{10}{\sqrt{x}} : \bar{U}(x)=0.5 \Longrightarrow x=400\ ME$
b) $\bar{U}(x)\neq 0$ für alle $x\in\mathbb{R}^+\backslash\{0\}$

(c) Approximative Lösung: $G'_D(x)=1.2x-0.18x^2+100 : G'_D(x)=-20 \Longrightarrow x=29.37\ ME$
Exakte Lösung: $G_D(x-4)=$
$100(x-4)+0.6(x-4)^2-0.06(x-4)^3-\left(100x+0.6x^2-0.06x^3\right)=80$, Lösung: 31.342 (mit R: s. Übung 1.w))

3. Man erhält:

(a) $K'(70) = 23.62\ GE/ME$

(b) $k_v(70) = \frac{e^{0.001 \cdot 70+10}}{70} = 337.48\ GE/MEK$

(c) $k'(100) = -3.19\ GE/ME^2$

(d) $\bar{x}(40) = 0.19\ ME_x/ME_r$

(e) $x'(40) = 0.26\ ME_x/ME_r$

(f) $x''(40) = -0.0086\ ME_x/ME_r^2$

(g) Die Fixkosten sind:
$K_F(0) = e^{0.001 \cdot 0+10} + 10000 = 32026.$
$K_v(x) = K(x) - K_F(x) = e^{0.001 \cdot x+10} + 10000 - 32026 = \exp(0.001\,x + 10) - 22026$
$G_V(x) = E(x) - K_v(x)$
$x(p) = -100 \ln(0.0005p) \Longrightarrow p(x) = \frac{\exp\left(\frac{x}{-100}\right)}{0.0005} = 2000 \exp\left(-\frac{x}{100}\right)$
$E(x) = xp(x) = 2000x \exp\left(-\frac{x}{100}\right)$
$G_V(x) = 2000x \exp\left(-\frac{x}{100}\right) - (\exp(0.001\,x + 10) - 22026) =$
$2000x \exp\left(-\frac{x}{100}\right) - \exp(0.001\,x) \exp 10) + 22026$
$G_V(30) = 30 \cdot 2000 \cdot \exp\left(-\frac{30}{100}\right) - \exp(0.001 \cdot 30) \exp(10) + 22026 = 43778.29.$
$g_V(x) = \frac{P_V(x)}{x} = \frac{2000x \exp\left(-\frac{x}{100}\right) - (\exp(0.001\,x+10) - 22026)}{x} = 2000e^{-\frac{1}{100}x} + \frac{22\,026}{x} - \frac{1}{x}e^{0.001\,x}e^{10}$

$g_V(30) = 2000e^{-\frac{1}{100}30} + \frac{22\,026}{30} - \frac{1}{30}e^{0.001 \cdot 30}e^{10} = 1459.28$

(h) $G'_D(30) = 1014.45\ GE/ME$; $g'_D(30) = -14.83\ GE/ME^2$

(i) $E(x) = xp(x) =$
$E'(150) = -223.13\ GE/ME$

(j) $E(p) = px(p) = p(-100 \ln(0.0005p)) = -100p \ln(0.0005p)$
$\frac{d}{dp}(-100p \ln(0.0005p)) = -100 \ln(0.0005p) - 100p0.0005\frac{1}{p} = 760.04 - 100 \ln p$
$E'(120) = 760.04 - 100 \ln(120) = 281.2910717\ UQ/UM$

(k) $x_0 = x(100) = 299.57ME \Longrightarrow G'(x_0) = -229.30\ GE/ME$

(l) $S'(1000) = 0.9949\ GE/GE$

(m) $\bar{C}(1000) = 0.1944\ GE/GE$

(n) $g'(40) = 6.60\ GE/ME^2$

(o) $U'(4) = -2\ NE/ME$

(p) $U(4) = 2.67\ NE/ME$

(q) i) keine Lösung ($0 \notin$Definitionsbereich von k)
ii) $x = 1.144.54\ ME$
iii) siehe ii)

(r) i) $Y = 472.87\ GE$ ii) $Y = 42.47\ GE$

(s) 19) i) $x'(r) \neq 0$ für aller $x \in \mathbb{R} \Longrightarrow$ Es gibt keinen solchen Faktorinput.
ii) siehe i)
iii) $r = 25\ ME_r$
iv) $r = 50\ ME_r$

(t) $x = 96.81\ ME$; $p = 759.61\ GE/ME$

(u) siehe 3t

(v) $K''(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, somit hat die Grenzkostenfunktion nirgends eine horizontale Tangente.

(w) Approximative Lösung (mittels Ableitung): $\frac{d}{dr}\sqrt{4r - 100} = \frac{1}{\sqrt{r-25}}$
$\frac{1}{\sqrt{r-25}} = \frac{0.1}{2} \Longrightarrow r = 425ME_r$
Exakte Lösung:
$x(r+2) - x(r) = \sqrt{4(r+2) - 100} - \sqrt{4r - 100} = 0.1 \Longrightarrow r = 424$

(x) Approximative Lösung (mittels Ableitung): $k(x) = \frac{e^{0.001x+10}+10000}{x}$
$\frac{d}{dx}\frac{e^{0.001x+10}+10000}{x} = \frac{e^{0.001x+10}(0.001)x-\left(e^{0.001x+10}+10000\right)}{x^2} = \frac{0.001xe^{0.001x+10}-e^{0.001x+10}-10000}{x^2}$
$\frac{0.001xe^{0.001x+10}-e^{0.001x+10}-10000}{x^2} = -0.4$
$0.001xe^{0.001x+10} - e^{0.001x+10} - 10000 + 0.4x^2 = 0$ (mit uniroot von R:
f=function (x) 0.001*x*exp(0.001*x+10)-exp(0.001*x+10)-10000+0.4*x^2
plot(f,xlim=c(270,290))
uniroot(f,c(270,290)))
$x = 278.37\ ME$
Exakte Lösung:
$k(x+1) - k(x) = \frac{e^{0.001(x+1)+10}+10000}{x+1} - \left(\frac{e^{0.001x+10}+10000}{x}\right) = -0.4$
Mit uniroot von R:
f=function(x) (exp(0.001*(x+1)+10)+10000)/(x+1)-(exp(0.001*x+10)+10000)/x+0.4
plot(f,xlim=c(270,300))
277.8743

(y) Approximative Lösung (mittels Ableitung): $\frac{d}{dr}\bar{x}(r) = \frac{d}{dr}\left(\frac{\sqrt{4r-100}}{r}\right) = \frac{\frac{1}{2}(4r-100)^{-\frac{1}{2}}4r-\sqrt{4r-100}}{r^2}$
mit $\sqrt{4r-100} = \sqrt{4(r-25)} = 2\sqrt{r-25}$:
$\frac{d}{dr}\bar{x}(r) = \frac{\frac{4r}{2\cdot 2\sqrt{r-25}}-2\sqrt{r-25}}{r^2} = \frac{\frac{r}{\sqrt{r-25}}-2\sqrt{r-25}}{r^2} = \frac{\frac{r-2\sqrt{r-25}\sqrt{r-25}}{\sqrt{r-25}}}{r^2} = \frac{\frac{r-2(r-25)}{\sqrt{r-25}}}{r^2} =$
$\frac{r-2r+50}{r^2\sqrt{r-25}} = \frac{-r+50}{r^2\sqrt{r-25}} = -\frac{r-50}{r^2\sqrt{r-25}}$

$-\frac{r-50}{r^2\sqrt{r-25}} = -0.5,$
$-r + 50 = -0.5r^2\sqrt{r-25}$
$(-r+50)^2 = r^2 - 100r + 2500 = 0.5^2r^4(r-25) = 6.25r^4 - 0.25r^5$
$0.25r^5 - 6.25r^4 + r^2 - 100r + 2500 = 0.$
mit polyroot(c(2500,-100,1,0,-6.25,0.25))
ergeben sich zwei reelle Nussstellen im positiven Bereich: 4.483048, 24.993590
Diese gehören aber nicht zum Definitionsbereich von $\sqrt{4r-100}$, da $4 \cdot NS - 100 < 0$ für beide Nullstellen NS. Also keine Lösung.
Exakt: $\bar{x}(r-1) - \bar{x}(r) = \frac{\sqrt{4(r-1)-100}}{r-1} - \frac{\sqrt{4r-100}}{r} = \frac{\sqrt{4(r-1)-100}}{(r-1)} - \left(\frac{\sqrt{4r-100}}{r}\right) = 0.5$
$\sqrt{4r-104}r - \sqrt{4r-100}(r-1) = 0.5r^2 - 0.5r$
Definitionsbereich: $4r - 104 \geq 0 : [26, \infty[$
Es genügt nicht, graphisch zu zeigen zu wollen, dass es keine Nussstelle von $f(x) = \sqrt{4r-104}r - \sqrt{4r-100}(r-1) - 0.5r^2 + 0.5r$ in [26,∞[hat. Ein solcher Nachweise ist nicht möglich. Entsprechend kann man auch nicht mit uniroot von R arbeiten, da man keinen Hinweis auf die Lage der Nullstelle hat. Man könnte versuchen nachzuweisen, dass die (stetige) erste Ableitung für $x > 26$ negativ ist und dass $\sqrt{4r-104}r - \sqrt{4r-100}(r-1) - 0.5r^2 + 0.5r < 0$ ist für ein $x > 26$ (algebraisch schwierig!).

(z) Approximative Lösung (mittels Ableitung):
$x(p) = -100\ln(0.0005p)$
$E(p) = px(p) = -p100\ln(0.0005p)$
$E'(p) = -100\ln(0.0005p) - p100\frac{1}{0.0005p}0.0005 = -100\ln(0.0005p) - 100 =$
$660.09 - 100\ln p$ (denn $100\ln(0.0005p) = 100\ln p - 760.09$)
$E'(p) = \frac{-0.5}{0.1} = -5$, d.h.
$660.09 - 100\ln p = -5$
$\ln p = \frac{-5-660.09}{-100} = 6.6509$
$\exp\ln p = \exp 6.6509 = 773.48 GE/ME$

Exakte Lösung:
$E(p) = -p100\ln(0.0005p)$
Mit $E(p+0.1) - E(p) =$

$-(p+0.1)\,100\ln(0.0005\,(p+0.1)) + p100\ln(0.0005p) = -0.5$
mit uniroot von R:f=function(x)
-x*100*log(0.0005*(x+0.1))-0.1*100*log(0.0005*(x+0.1))+x*100*log(0.0005*x)+0.5
plot(f,xlim=c(770,780))
uniroot(f,c(770,780))
Ergebnis: 773.432

4. Man erhält:

   (a) $r(x) = 0.25x^2 + 25$

   (b) $r'(20) = 10\ ME_r/ME_x$

   (c) $\lim_{Y\to\infty} C(Y) = 200\ GE$; $\lim_{Y\to\infty} \bar{C}(Y) = 0\ GE/GE$

   (d) $\lim_{Y\to\infty} C'(Y) = 0\ GE/GE$; $\lim_{Y\to\infty} S'(Y) = 1\ GE/GE$

10.3 Lernziele

- Begründen können, wieso der diskrete, ökonomische Grenzfunktionsbegriff durch einen, der auf Ableitungen fusst, ersetzt wird.
- Die Definitionen der oben eingeführten ökonomischen Grenz- und Durchschnittsfunktionen kennen.
- Aufgaben von der Art der angeführten machen können.

Kapitel 11

Wachstumsarten und die Konstruktion ökonomischer Funktionen

Das Wachstumsverhalten von Funktionen spielt in der Ökonomie eine bedeutende Rolle. So kann eine Ökonomie wachsen oder schrumpfen. Zudem kann sie auf verschiedene Arten wachsen oder schrumpfen. Das Wachstum kann zunehmend oder abnehmend sein, ebenso das Schrumpfen. Die Kosten können immer mehr zunehmen, oder immer weniger zunehmen. Die Differentialrechnung bietet effiziente Mittel bereit, um das entsprechende Verhalten von Funktionen zu beschreiben.

Eine wachsende Kurve kann konvex oder konkav sein (s. Abbildungen 11.0.1 und 11.0.2).

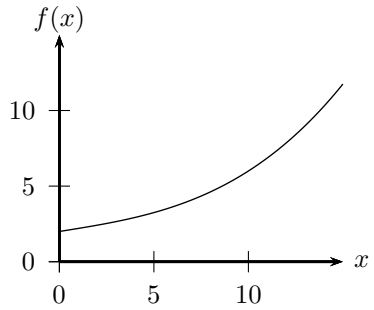


Abbildung 11.0.1: konvexes Wachstum

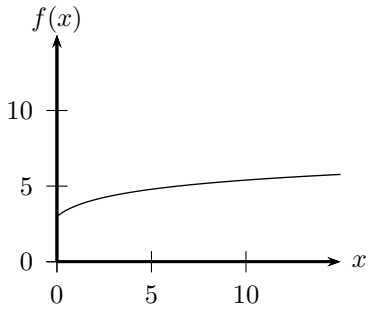


Abbildung 11.0.2: konkaves Wachstum

Die erste Ableitung ist für beide Funktionen positiv. Die zweite Ableitung hingegen ist für konvexe Funktionen positiv und für konkave Funktionen negativ.

Ebenso können zwei Arten von sinkenden Kurven unterschieden werden. Eine sinkende Kurve kann immer mehr sinken (d.h. sie ist konkav) oder sie kann immer weniger sinken (sie ist konvex; s. Abbildungen 11.0.3 und 11.0.4).

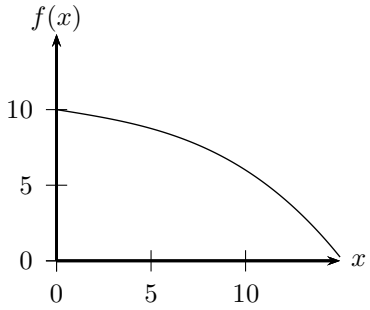


Abbildung 11.0.3: konkaves Sinken

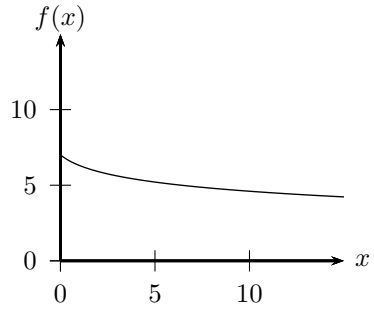


Abbildung 11.0.4: konvexes Sinken

Die erste Ableitung ist für beide Arten von sinkenden Funktionen negativ. Die zweite Ableitung ist im konvexen Fall positiv und im konkaven Fall negativ.

Eine Kurve kann wachsend sein und dabei zuerst ein konkaves und dann ein konvexes Intervall aufweisen (s. Abbildung 11.0.5).

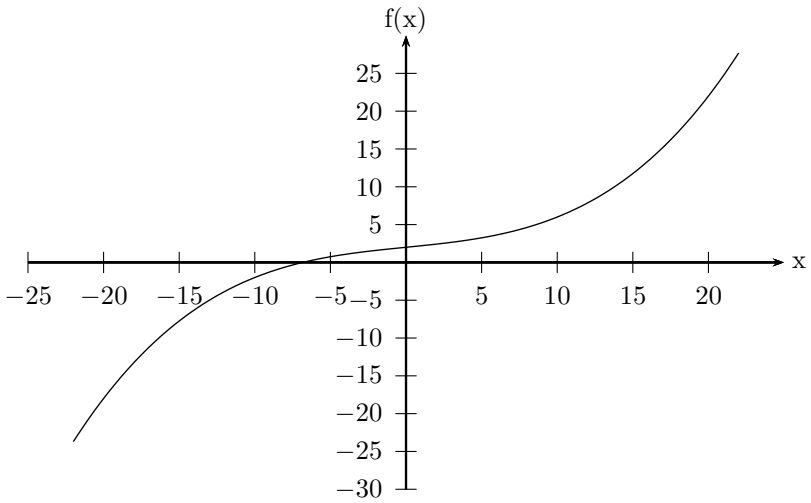


Abbildung 11.0.5: Kurve mit zuerst konkavem, dann konvexem Wachstum; das Wachstum ist im Wendepunkt minimal

Im Wendepunkt ist bei einem Konkav-Konvex-Übergang die Steigung lokal minimal. Entsprechend nimmt dort die 1. Ableitung ein Minimum an. Somit liegt dort eine Nullstelle der zweiten Ableitung vor und ein positiver Wert der 3. Ableitung.

Eine Kurve kann wachsend sein und dabei zuerst ein konvexes und dann ein konkaves Intervall aufweisen (s. Abbildung 11.0.6).

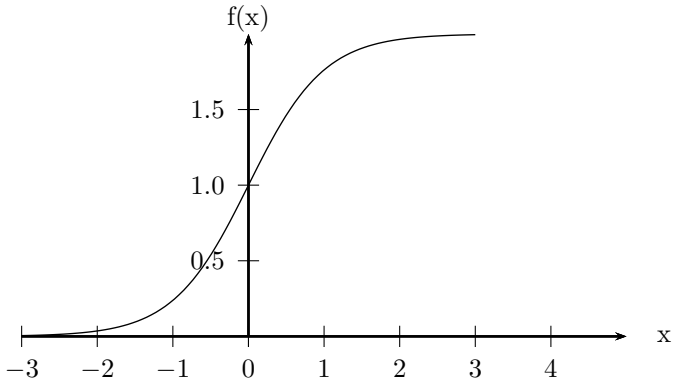


Abbildung 11.0.6: Kurve mit zuerst konvexem, dann konkavem Wachstum; das Wachstum ist im Wendepunkt maximal

Die erste Ableitung erreicht bei einem Konvex-Konkav-Wendepunkt Fall ein Maximum. Entsprechend ist dort die zweite Ableitung mit Null identisch. Die dritte Ableitung ist dort negativ.

Bisher konnten wir ökonomische Funktionen bilden, indem wir Funktionen durch bekannte Punkte legten. Mit Hilfe der obigen Ergebnisse der Differentialrechnung können wir nun Funktionen an Punkte anpassen, die z.B. theoretischen Ansprüchen an spezifische ökonomische Funktionen bezüglich Wachstumsverhalten erfüllen. Wir werden in der Folge entsprechende Beispiele anführen.

11.1 Die neoklassische Nutzenfunktion

Laut der Theorie der neoklassischen Nutzenfunktion, welche den Nutzen als Funktion der konsumierten Menge eines Gutes ausdrückt, gilt für diese:

1. Der Grenznutzen ist positiv.
2. Der Nutzenzuwachs nimmt mit steigendem x ab (1. Gossensches Gesetz).
3. Die Funktion verläuft durch $(0, 0)$, da bei 0 Konsum kein Nutzen entsteht.

Diskutieren Sie den Realismus dieser Anforderungen, z.B. am Beispiel von Schokolade. Auf Grund der obigen Überlegungen gilt damit:

$$U'(x) > 0$$

$$U''(x) < 0$$

Wir können nun Nutzenfunktionen wählen, die diesen beiden Ansprüchen genügen. z.B.

$$U(x) = \sqrt{x}$$

für $x \geq 0$.
Denn es gilt:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$$

für $x > 0$ und

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = -\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} < 0$$

für $x > 0$. (s. Abbildung 11.1.7).

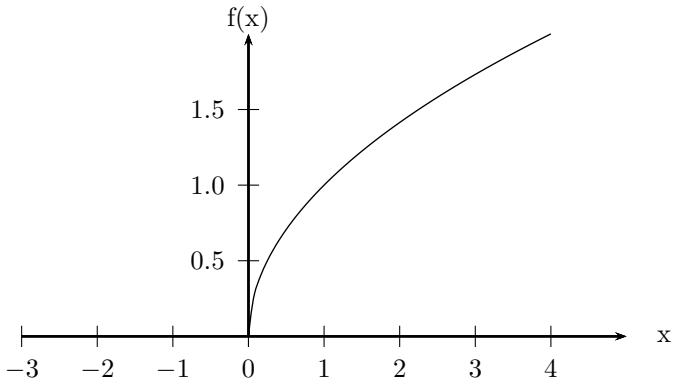


Abbildung 11.1.7: Beispiel einer Funktion, welche die Eigenschaften einer neoklassischen Nutzenfunktion aufweist

Auch eine leicht nach links verschobene Logarithmusfunktion würde den obigen Bedingungen Rechnung tragen: z.B.

$$U(x) = ln(x+1)$$

für $x \geq 0$. Es gilt nämlich

$$\frac{d}{dx} \ln(x+1) = \frac{1}{x+1} > 0$$

für $x \geq 0$.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x+1}\right) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ Damit erfüllt die Funktion die gewünschten Eigenschaften (s. Abbildung 11.1.8).

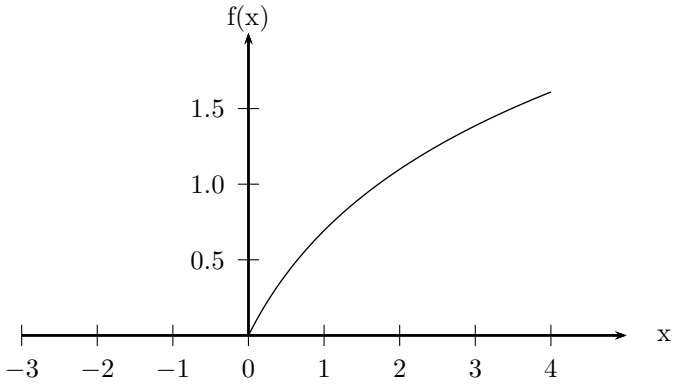


Abbildung 11.1.8: Weiteres Beispiel einer Funktion, welche die Eigenschaften einer neoklassischen Nutzenfunktion aufweist

11.2 Die ertragsgesetzliche Produktionsfunktion

Laut Definition gilt für eine ertragsgesetzliche Produktionsfunktion:

1. Im ersten Intervall erfolgen positive, zunehmende Grenzerträge
2. Im zweiten, darauffolgenden Intervall erfolgen positive, abnehmende Grenzerträge
3. Im dritten, drauffolgenden Intervall erfolgen negative, abnehmende Grenzerträge.
4. Die Kurve geht durch den 0-Punkt.

(s. Abbildung 11.2.9).

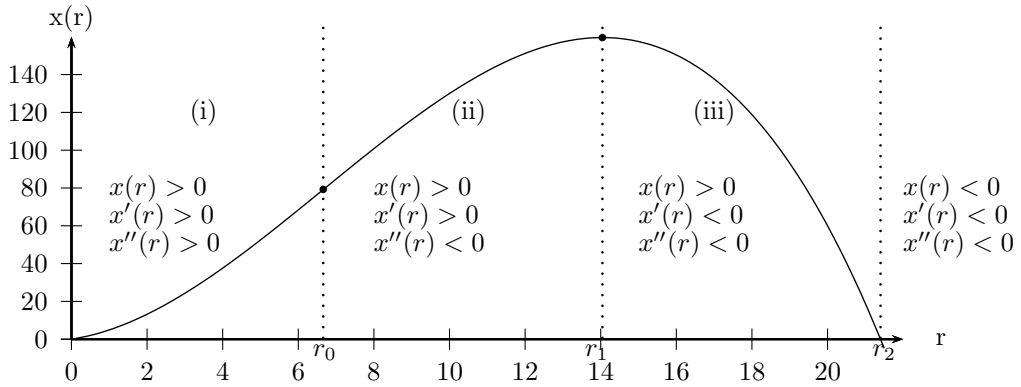


Abbildung 11.2.9: Typische Form einer ertragsgesetzlichen Produktionsfunktion

Der Übergang von (i) zu (ii) heisst „Schwelle des Ertragsgesetzes“ (es liegt ein Wendepunkt vor). Der Übergang von (ii) zu (iii) heisst „Sättigungspunkt“. Ein Einsatz des Inputfaktors über den Sättigungspunkt hinaus wäre unsinnig, da dann eine Ertragsminderung erfolgt.
Wir müssen eine Kurve $x(r)$ finden mit:

1. $x'(r) > 0$ im Intervall $]0, r_1[$, $x'(r) < 0$ in $]r_1, r_2[$. Im Sättigungspunkt r_1 gilt: $x'(r_1) = 0$
2. $x''(r) > 0$ im Intervall $]0, r_0[$ (konvex), und $x''(r) < 0$ im Intervall $]r_0, r_2]$ (konkav). Reelle Nullstelle von $x''(r_0) = 0$ (Schwelle des Ertragsgesetzes). Es liegt ein konvex/konkav-Wendpunkte vor: $x'''(r_0) < 0$
3. $x(0) = 0$

Wir nehmen zudem an, eine Polynomfunktion 3. Grades sei eine günstige Funktion. Wir können nun folgende Berechnungen für unsere Funktion $x(r) = ar^3 + br^2 + cr$ durchführen:

1. 1. Ableitung: $\frac{d}{dr}\left(ar^3 + br^2 + cr\right) = 3ar^2 + 2br + c$
2. 2. Ableitung: $\frac{d}{dr}\left(3ar^2 + 2br + c\right) = 6ar + 2b$
3. 3. Ableitung: $\frac{d}{dr}(6ar + 2b) = 6a$
   Da ein konvex-konkav-Wendepunkte vorliegt, muss dort gelten: $x'''(r_0) = 6a < 0$
   Damit muss a negativ sein.
4. Der Wendepunkt (Schwelle) liegt bei: $r_0 = \frac{-b}{3a}$ (2. Ableitung ist mit 0 identisch: $6ar_0 + 2b = 0$)
   r_0 muss dort positiv sein. Da a negativ ist, muss damit b positiv sein: $b > 0$
5. In $]0, r_1[$ (r_1 sei die Stelle, wo die Funktion x das Maximum annimmt) ist die Funktion gemäss ökonomisch-theoretischen Anforderungen strikt monoton steigend. Deshalb ist die Ableitung $x'(r)$ auf $]0, r_1[$ positiv. Deshalb gilt für stetige Ableitungen $\lim_{x \to 0^+} x'(r) \geq 0$. Die Ableitungen von Polynomen sind stetig. Im Allgemeinen wird $c > 0$ sein (sonst liegt in 0 ein Minimum der Funktion vor).

Wir erhalten somit folgende Bedingungen für eine ertragsgesetzliche Ertragsfunktion:

$$\boxed{a < 0, b > 0, c \geq 0, d = 0}$$

und es zeigt sich, dass die obigen Bedingungen an eine ertragsgesetzliche Produktionsfunktion erfüllt sind (zuerst strikt monoton steigend, dann strikt monoton sinkend, konvex-konkav-Wendepunkt im strikt monoton steigenden Bereich; verläuft durch den Nullpunkt).

Beispiel 11.2.1. $x(r) = -0.1r^3 + 2r^2 + 3r$
Die Schwelle des Ertragsgesetzes liegt in: $x = \frac{-b}{3a} = \frac{-2}{3(-0.1)} = 6.666\,7$
Der Sättigungspunkt liegt in: $\frac{d}{dr}\left(-0.1r^3 + 2r^2 + 3r\right) = -0.3r^2 + 4r + 3 = 0 \Longrightarrow r = 14.045$
$\frac{d}{dr}(-0.3r^2 + 4r + 3)$ *:* $-0.6r + 4 < 0$ *in* $r = 14.045$*(s. Abbildung 11.2.10).*

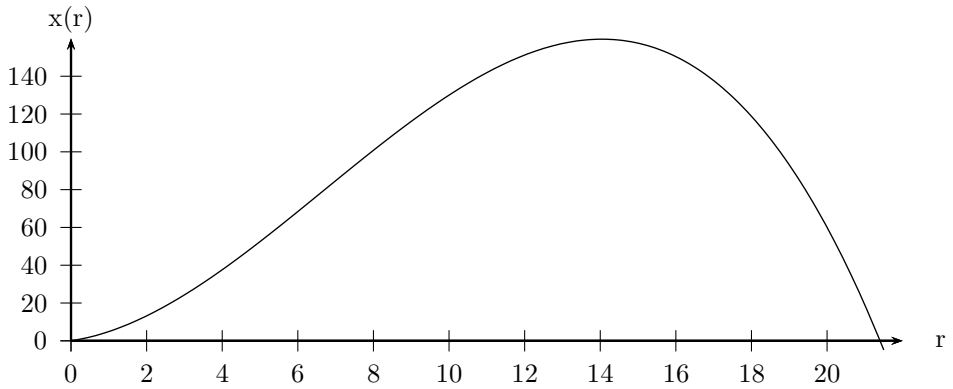


Abbildung 11.2.10: Produktionsfunktion des Beispiels - die Bedingungen einer ertragsgesetzlichen Produktionsfunktion sind erfüllt

◊

11.3 Die ertragsgesetzliche Kostenfunktion

Laut Definition hat eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion folgende Eigenschaften:

1. Für die Fixkosten d gilt: $d \geq 0$
2. Die Grenzkosten sind überall positiv (die erste Ableitung ist überall positiv und es gibt kein Extremum, d.h. die erste Ableitung hat im Intervall $]0, \infty[$ keine reelle Nullstelle)
3. Die Grenzkosten sinken zuerst und steigen dann an (es liegt damit ein konkav-konvex-Wendepunkt vor).

(s. Abbildung 11.3.11).

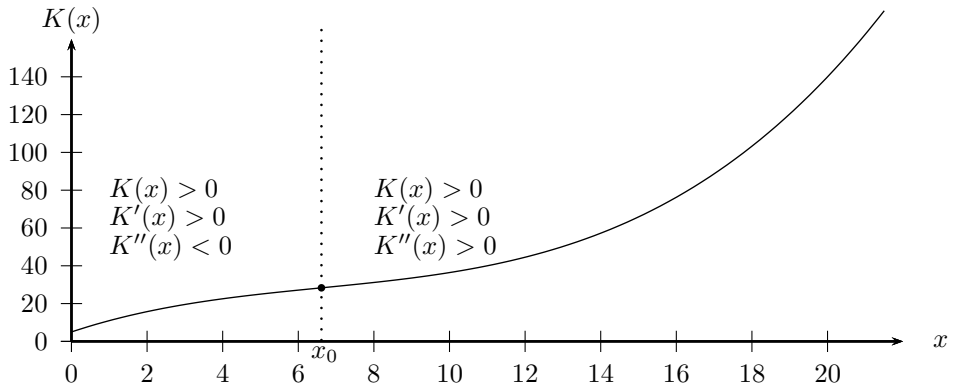


Abbildung 11.3.11: Typische Form einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion

Wir wählen oft Polynome dritten Grades $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, um ertragsgesetzliche Kostenfunktionen darzustellen, da diese in die gewünschte Form gebracht werden können, wie wir nun zeigen:

1. $\frac{d}{dx}\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) = 3ax^2 + 2bx + c$
2. $\frac{d}{dx}\left(3ax^2 + 2bx + c\right) = 6ax + 2b$
3. $\frac{d}{dx}\left(6ax + 2b\right) = 6a$
4. Wir berechnen die Nullstellen der ersten Ableitung:
   $3ax^2 + 2bx + c = 0 \Longrightarrow x_1 = \frac{1}{6a}\left(-2b + 2\sqrt{(b^2 - 3ac)}\right), x_2 = \frac{1}{6a}\left(-2b - 2\sqrt{(b^2 - 3ac)}\right)$
   Damit gibt es keine reelle Nullstelle der ersten Ableitung, wenn $b^2 - 3ac < 0 \Longleftrightarrow b^2 < 3ac$
5. Die dritte Ableitung muss positiv sein, da ein konkav-konvex-Wendpunkt vorliegt: damit gilt: $a > 0$
6. Für die Nullstelle der zweiten Ableitung (Extrema der ersten Ableitung, d.h. Wendepunkte), gilt: $6ax_0 + 2b = 0 \Longleftrightarrow x_0 = -\frac{b}{3a}$. Da x_0 positiv ist und a ebenfalls, muss b negativ sein, damit die Gleichung wahr sein kann. Damit gilt: $b < 0$.
7. da $b^2 < 3ac, a > 0, b^2 > 0$ ist $c > 0$.

Damit haben wir die folgenden Bedingungen für eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion:

$$\boxed{a > 0, b < 0, c > 0, d \geq 0, b^2 < 3ac},$$

womit die an eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion gestellten Forderungen erfüllt sind: Ordinatenabschnitt grösser-gleich 0; strikt monoton steigend in $]0, \infty[$; konkav-konvex-Wendepunkt im positiven Bereich.

Beispiel 11.3.1. $K(x) = 0.2x^3 - 6x^2 + 80x + 100$
Die ersten vier Bedingungen sind offensichtlich erfüllt. Für die letzte gilt: $(-6)^2 = 36 < 3 \cdot 0.2 \cdot 80 = 48$
(s. Abbildung 11.3.12).

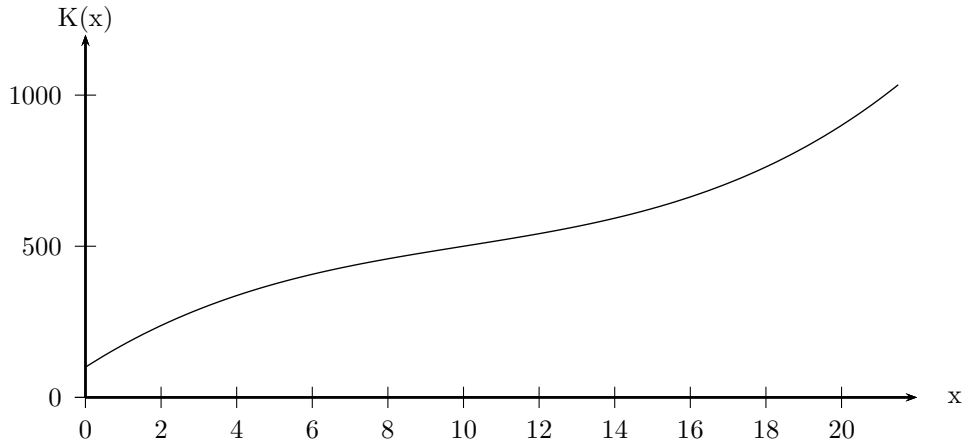


Abbildung 11.3.12: Graphische Darstellung des Beispiels mit typischer Form einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion

Der Wendepunkt (wo die Grenzkosten zu steigen beginnen) befindet sich in: $x = -\frac{b}{3a} = \frac{6}{3 \cdot 0.2} = 10$ ◊

11.4 Die Keynesianische Konsumfunktion

Nach Keynes wird das Konsumverhalten von Haushalten durch eine Konsumfunktion $C(Y)$ beschrieben, für die folgendes gilt:

1. Der Grenzhang zum Konsum =($C'(Y)$) ist bei jedem Haushaltseinkommen Y positiv, d.h. wer ein Zusatzeinkommen hat, gibt mehr für Konsum aus als ohne dieses Zusatzeinkommen. Formal: $C'(Y) > 0$

2. Der Grenzhang ist kleiner als 1. Für $C(Y) < Y$ (d.h. das Einkommen wird nicht vollständig für Konsum ausgegeben), folgt dies durch Differenzieren beider Seiten, denn dann ist $C'(Y) < 1$ (d.h. zusätzliches Einkommen wird nicht vollständig für Konsum ausgegeben). Da $Y = C(Y) + E(Y)$ mit der Ersparnisfunktion $E(Y)$, gilt $\frac{d}{dY}Y = 1 = C'(Y) + E'(Y)$. Da $C'(Y) < 1$ ist $E'(Y) > 0$. Der Grenzhang zu Sparen ist grösser als 0.

3. Der Grenzhang zum Konsum ist kleiner als die dem jeweiligen Haushaltseinkommen entsprechende durchschnittliche Konsumquote $c(Y) := \frac{C(Y)}{Y}$. Formal: $C'(Y) < c(Y) = \frac{C(Y)}{Y}$. Wird ein Franken zusätzlich verdient, so wird von diesem Franken weniger in Konsum investiert als man bisher pro Franken dafür ausgegeben hat. Damit sinkt der durchschnittliche Konsum mit steigenden Einkommen und es wird mit steigendem Einkommen mehr gespart. Formal:
   Wir leiten ab: $\frac{d}{dY}c(Y) = \frac{C'(Y) \cdot Y - C(Y) \cdot 1}{Y^2} = \frac{1}{Y}(C'(Y) - c(Y))$
   Da laut (3.) $C'(Y) < c(Y)$, gilt: $(C'(Y) - c(Y)) < 0$.
   Damit gilt: $\frac{d}{dY}c(Y) = \frac{1}{Y}(C'(Y) - c(Y)) < 0$
   Da $\frac{d}{dY}c(Y) < 0$, ist $c(Y)$ monoton fallend.

Daraus kann man aber nicht schliessen, dass $C'(Y)$ monoton fallend ist (d.h. dass C konkav ist), wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 11.4.1. *So gilt z.B. für* $C(Y) = 0.5Y + 1 + \frac{36}{Y+9}$*:*
$\frac{d}{dY}\left(0.5Y + 1 + \frac{36}{Y+9}\right) = 0.5 + \frac{-36}{(Y+9)^2} > 0$ *für* $Y > 0$.
$\frac{d}{dY}\left(0.5 + \frac{-36}{(Y+9)^2}\right) = \frac{-(-36) \cdot 2(Y+9)}{(Y+9)^4} = \frac{72}{(Y+9)^3} > 0$ *für* $Y > 0$ *(somit konvex)*

Andererseits gilt: $\frac{dC(Y)}{dY} = 0.5 + \frac{-36}{(Y+9)^2} < \frac{C(Y)}{Y} = \frac{0.5Y+1+\frac{36}{Y+9}}{Y} = 0.5 + \frac{1}{Y} + \frac{36}{Y(Y+9)}$
für $0 < Y$*, da damit* $\frac{-36}{(Y+9)^2} < \frac{1}{Y} + \frac{36}{Y(Y+9)}$*, der erste Term negativ ist und der zweite Term positiv.*
Zuletzt gilt: $\frac{dC(Y)}{dY} = 0.5 + \frac{-39}{(Y+9)^2} < 1$ *für* $Y > 0$.
$C(Y)$ *erfüllt damit alle Bedingungen und ist trotzdem konvex. Empirisches Datenmaterial legt einen konkaven Verlauf der Funktion* $C(Y)$ *nahe. (Bemerkung: Da* $\lim_{Y\to\infty} \frac{36}{Y+9} = 0$*, nähert sich* $C(Y)$ *für genügend grosse* Y *der Geraden* $0.5Y + 1$*).* ◊

11.5 Die Neoklassische Produktionsfunktion

Laut Definition weist eine neoklassische Produktionsfunktion $x(r)$ positive aber abnehmende Grenzerträge auf. D.h. $x'(r) > 0$ und $x''(r) < 0$. Zudem gilt für $r > 0 : x(r) \geq 0$. Zuletzt muss die Funktion durch $(0, 0)$ verlaufen (kein Input ergibt einen Output von 0). .

Geeignete Funktion sind damit z.B. $x(r) = 2r^{0.5}$

11.5.1 Übungen

1. Überprüfen Sie, ob die folgenden Produktionsfunktionen einen ertragsgesetzlichen Verlauf besitzen (mit und ohne Formel).

   (a) $x(r) = -r^3 + 12r^2 - 40r$

   (b) $x(r) = -r^3 + 10r^2 + r$

   (c) $x(r) = -2r^3 + 18r^2 - 60r$

   (d) $x(r) = 4r^3 + 24r^2 - 60r$

2. Wir gehen auf Grund ökonomischer Überlegungen von einer neoklassischen Nutzenfunktion $U(x) = a\sqrt{x}$ mit $a > 0$ aus.

   (a) Eine Funktion dieser Art ist durch ein einziges Datum bestimmt. Bestimmen Sie $a > 0$ für eine solche Funktion, die durch den Punkt $(5, 3)$ verläuft.

   (b) Wir haben mehrere zusätzliche Punkte zur Verfügung, die nicht auf der eben berechneten Kurve liegen. Wir denken, dass man durch die Punktwolke eine Kurve $U(x) = a\sqrt{x}$ berechnen kann, so dass die Funktion $S(a) = \sum_{i=1}^{n} \left(u_i - a\sqrt{x_i}\right)^2$ minimal wird (die Summe der quadrierten Abweichungen der Punkt von der Kurve soll minimal sein, siehe für eine analoge Idee die lineare Regression in der Statistik). Entwickeln Sie eine Formel, um a für Daten $(x_1, u_1), (x_2, u_2), ..., (x_n, u_n)$ mit $x_i, u_i \geq 0$ und mindestens einem (x_i, u_i), so dass $x_i > 0$ und $u_i > 0$, zu berechnen.

3. Ein vernünftiges Modell um die Beziehung zwischen konsumierte Menger und dem Nutzen werde durch $U(x) = \log_a(x + 1)$ geliefert. Bestimmen Sie a, wenn der Punkt $(5, 3)$ gegeben ist (für einen Konsum von 5 ME fällt ein Nutzen von 3 Einheiten an)

4. Konstruieren Sie eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion, die durch die Punkte (0,7), (20,30) (= Wendepunkt) und (70, 120) verläuft.

5. Man überprüfe, ob die Produktionsfunktion $x(r) = (0.8r + 2)^{0.5}$ eine neoklassische Produktionsfunktion ist.

6. Die Funktionsgleichung eines kubischen Polynoms $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ soll bestimmt werden (Kostenfunktion). Dazu ermittle man die Konstanten a, b, c, d jeweils derart, dass sie folgende Eigenschaften besitzt (drei Aufgaben!):

(a) f hat für $x_0 = 0$ eine Nullstelle, die gleichzeitig Wendepunkt ist. Ein lokales Extremum liegt in $x_1 = -2$. Die Kurventangente an der Stelle $x_2 = 4$ hat die Steigung 3.

(b) f hat in $(1;0)$ einen Wendepunkt mit der Steigung -9. f schneidet die Ordinatenachse im Punkt $(0;8)$.

(c) f hat im Punkt $(0;16)$ die Steigung 30 und besitzt einen Wendepunkt in $(3;52)$.

7. Man bestimme die Konstanten a, b, c, der rationalen Funktion $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+c}$ so dass f in $x_1 = 2$ eine Unendlichkeitsstelle und in $x_2 = 1$ ein relatives Extremum mit dem Funktionswert -0.25 besitzt.

8. Man ermittle die Gleichung einer ertragsgesetzlichen Gesamtkostenfunktion vom Typ eines kubischen Polynoms, die folgende Eigenschaften besitzt:
Fixkosten: 98 GE,
Minimum der Grenzkosten bei einem Output von 4 ME;
Minimum der variablen Kosten bei einem Output von 6 ME.
Grenzkosten für $3ME = 2\frac{GE}{ME}$.

11.5.2 Lösungen

1. Es muss gelten: $a < 0, b > 0, c \geq 0$.

(a) $x(r) = -r^3 + 12r^2 - 40r$ (dritte Bedingung ist nicht erfüllt)
Rechnerisch: $x'(r) = -3r^2 + 24r - 40 = 0$, NS: $\frac{2}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} + 4 = 5.6330$
$4 - \frac{2}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} = 2.367$. Die Funktion sollte gemäss Theorie auf $]0, 2.367[$ strikt monoton steigend sein. $x'(1) = -3+24-40 = -19 < 0$. Da stetig, ist die Ableitung auf $]0, 2.367[$ überall negativ und damit ist die Funktion dort strikt monoton sinkend.

(b) $x(r) = -r^3 + 10r^2 + r$ (alle Bedingungen erfüllt)
Rechnerisch: (i) die Funktion muss positiv sein für ein $r_3 > 0$ auf $]0, r_3[$: $-r^3+10r^2+r = 0$, NS: $\sqrt{26}+5 = 10.099$; $5 - \sqrt{26} = -0.099020$ und 0.
$x(1) = -1+10+1 = 10 > 0$. Also ist die stetige Funktion überall positiv auf $]0, 10.099[$
(ii) Es muss im Intervall $]0, 10.099[$ ein Maximum haben:
$\frac{d}{dr}\left(-r^3 + 10r^2 + r\right) = -3r^2+20r+1 = 0 \Longrightarrow NS : \frac{1}{3}\sqrt{103}+\frac{10}{3} = 6.7163$; $\frac{10}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{103} = -0.049631$.
$\frac{d}{dr}\left(-3r^2 + 20r + 1\right) = 20-6r$; $x''(6.7163) < 0$. Damit hat es ein Maximum in $r_2 = 6.7163$
(iii) Es muss einen Konvex-Konkav-Wendepunkt in $]0, 6.7163[$ haben:
$\frac{d}{dr}(20 - 6r) = -6 < 0$. Damit Maximum der ersten Ableitung in $20 - 6r = 0$, $\frac{10}{3} = 3.3333$. Also konvex-konkav Wendepunkt in $r_1 = 3.3333$.
(iv) Da es $]0, r_3[$ ein positives Maximum hat, r_3 die 0 benachbarte Nullstelle ist und die Funktion in $]0, r_3[$ positiv ist, ist sie links vom Maximum strikt monoton steigend und rechts strikt monoton sinkend.

(c) $x(r) = -2r^3 + 18r^2 - 60r$ (dritte Bedingung ist nicht erfüllt)
rechnerisch: $\frac{d}{dr}\left(-2r^3 + 18r^2 - 60r\right) = -6r^2+36r-60 = 0$, keine reelle NS. Da x stetig ist und $x(0) = -60$, ist die erste Ableitung überall strikt monoton sinkend. Damit ist die Bedingung, dass es rechts von 0 einen Intervall geben muss, auf dem die Funktion steigend ist, nicht erfüllt.

(d) $x(r) = 4r^3 + 24r^2 - 60r$ (erste und dritte Bedingung ist nicht erfüllt)
rechnerisch: $\frac{d}{dr}\left(4r^3 + 24r^2 - 60r\right) = 12r^2 + 48r - 60 = 0$, NS: $1, -5$
$x'(0) = -60$. Die stetige Funktion ist also in $]0, 1[$ strikt monoton sinkend und es gibt kein an 0 anschliessende Intervall, so dass die Funktion dort strikt monoton steigend ist.

2. Man erhält:

(a) $x(r) = a\sqrt{5}$; $x(5) = 3 = a\sqrt{5}; \Longrightarrow a = \frac{3}{\sqrt{5}} = 1.3416 \Longrightarrow x(r) = 1.3416\sqrt{x}$

(b) Mit $\frac{d}{da}a\sqrt{x_i} = \sqrt{x_i}$ erhält man als Lage des Extremums (Additionsregel und Kettenregel)

$$\begin{aligned}\frac{d}{da}\sum_{i=1}^{n}\left(u_i - a\sqrt{x_i}\right)^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left(2\left(u_i - a\sqrt{x_i}\right)\left(-\sqrt{x_i}\right)\right)\\ &= 2\sum_{i=1}^{n}\left(-u_i\sqrt{x_i} + ax_i\right)\\ &= 2\sum_{i=1}^{n} -u_i\sqrt{x_i} + 2a\sum_{i=1}^{n} x_i\\ &= 0\end{aligned}$$

genau dann, wenn

$$\begin{aligned}a\sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} u_i\sqrt{x_i}\\ a &= \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i\sqrt{x_i}}{\sum_{i=1}^{n} x_i}\end{aligned}$$

Um zu bestimmen, ob es sich um ein Minimum handelt:

$$\frac{d}{da}\left(2\sum_{i=1}^{n}\left(-u_i\sqrt{x_i} + ax_i\right)\right) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i > 0$$

für $x_i \geq 0$ und wenigstens ein $x_i > 0$.
Es hat also ein Minimum in

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i\sqrt{x_i}}{\sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

Bemerkung: in der Statistik müsste man noch zeigen, dass diese Schätzmethode keinen systematischen Fehler aufweist.
Mit R kann man das Beispiel simulieren durch (für $a = 5$ und $n = 50$, man kann a und n durch andere Werte ersetzen) mit den folgende Befehlen:

```
n=50
a=5
x=runif(n,0,20)
u=a*sqrt(x)
u=u+rnorm(n,0,1)
plot(x,u)
ae=sum(u*sqrt(x))/sum(x)
ae
f=function(y) ae*sqrt(y) #f = Funktion oder geschätztes Modell
curve(f,add=T)
```

3. $3 = \log_a(5+1) = \log_a 6$ genau dann, wenn $a = \sqrt[3]{6}$, denn $\sqrt[3]{6}^3 = 6^{\frac{3}{3}} = 6$.

4. $d = 7$
   $20^3a + 20^2b + 20c + 7 = 30$
   $70^3a + 70^2b + 70c + 7 = 120$

$\frac{d}{dx}(ax^3+bx^2+cx+d) = 3ax^2+2bx+c$
$\frac{d}{dx}\left(3ax^2+2bx+c\right) = 6ax+2b$. Wendepunkt in $x=20$, also $120a+2b=0$

$$\begin{aligned} 20^3a+20^2b+20c+7 &= 30\\ 70^3a+70^2b+70c+7 &= 120\\ 120a+2b &= 0 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow a=\frac{13}{42\,000}=3.095\,2\times10^{-4}; b=-\frac{13}{700}=-1.857\,1\times10^{-2}, c=\frac{587}{420}=1.397\,6$
Damit erhalten wir die Kostenfunktion:

$$\begin{aligned} K(x) &= \frac{13}{42\,000}x^3-\frac{13}{700}x^2+\frac{587}{420}x+7\\ &= 3.095\,2\times10^{-4}x^3-1.857\,1\times10^{-2}x^2+1.397\,6x+7. \end{aligned}$$

Mit R: Man verwendet die Darstellung

$$\begin{pmatrix} 20^3 & 20^2 & 20\\ 70^3 & 70^2 & 70\\ 120 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\\ b\\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 30-7\\ 120-7\\ 0 \end{pmatrix}$$

m=matrix(c(20^3,20^2,20,70^3,70^2,70,120,2,0),ncol=3,byrow=T)
y=c(30-7,120-7,0)
solve(m,y)
Man könnte auch mit der Darstellung

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 20^3 & 20^2 & 20 & 1\\ 70^3 & 70^2 & 70 & 1\\ 120 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7\\ 30\\ 120\\ 0 \end{pmatrix}$$

arbeiten: m=matrix(c(0,0,0,1,20^3,20^2,20,1,70^3,70^2,70,1,120,2,0,0),byrow=T,ncol=4)
y=c(7,30,120,0); solve(m,y)

Durch die Angaben ist eine Kostenfunktion bestimmt. Wir überprüfen, ob es sich um eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion handelt:
$b^2=\left(-\frac{13}{700}\right)^2=\frac{169}{490\,000}=0.0003449<3ac=3\cdot\frac{13}{42\,000}\cdot\frac{587}{420}=0.001297\,8$. Die übrigen Bedingungen sind offensichtlich erfüllt. Damit handelt es sich um eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion.
rechnerisch: (i) Die Funktion muss rechts von 0 positiv sein.
$\frac{13}{42\,000}x^3-\frac{13}{700}x^2+\frac{587}{420}x+7=0$; einzige reelle NS: -4.693
$K(0)=7>0$. Also rechts von 0 überall positiv (K ist stetig).
(ii) K muss in $]0,\infty[$ strikt monoton steigend sein: $\frac{d}{dx}\left(\frac{13}{42\,000}x^3-\frac{13}{700}x^2+\frac{587}{420}x+7\right)=\frac{13}{14\,000}x^2-\frac{13}{350}x+\frac{587}{420}=0$, Keine reelle NS: Da $K'(0)=\frac{587}{420}>0$ (K' ist stetig), ist also K überall strikt monoton steigend.
(iii) Es muss ein positives x_1 geben, so dass dort ein Konkav-Konvex-Wendepunkt vorliegt:
$\frac{d}{dx}\left(\frac{13}{14\,000}x^2-\frac{13}{350}x+\frac{587}{420}\right)=\frac{13}{7000}x-\frac{13}{350}=0$, NS: 20
$\frac{d}{dx}\left(\frac{13}{7000}x-\frac{13}{350}\right)=\frac{13}{7000}>0$ (also Minimum der ersten Ableitung, also Konkav-Konvex-Wendepunkt in 20).

5. $x(r)=(0.8r+2)^{0.5}$;
$x(0)=(0.8\cdot0+2)^{0.5}=1.414\,2$ Damit ist $r(0)=0$ nicht gegeben.
Es muss gelten: $x'(r)>0$ und $x''(r)<0$ (im ersten Quadranten)
$\frac{d}{dr}(0.8r+2)^{0.5}=\frac{0.4}{(0.8r+2)^{0.5}}>0$ für $r>0$
$\frac{d}{dr}\frac{0.4}{(0.8r+2)^{0.5}}=-\frac{0.16}{(0.8r+2)^{1.5}}<0$ für $r>0$
Damit sind die übrigen Bedingungen erfüllt. Keine neoklassische Produktionsfunktion. Man würde eine solche erhalten durch $x(r)=(0.8r+2)^{0.5}-\sqrt{2}$.

6. Wir erhalten:

   (a) f hat für $x_0 = 0$ eine Nullstelle $\Longrightarrow d = 0$.
   $\frac{d}{dx}\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) = 3ax^2 + 2bx + c$ (erste Ableitung)
   $\frac{d}{dx}\left(3ax^2 + 2bx + c\right) = 6ax + 2b$ (zweite Ableitung) $\Longrightarrow 6ax_0 + 2b = 0$ (da Wendepunkt);
   $x_0 = -\frac{b}{3a} = 0$ (da Wendepunkt in 0) $\Longrightarrow b = 0$
   $\frac{d}{dx}\left(6ax + 2b\right) = 6a$ (Dritte Ableitung; $6a \neq 0$ für $a \neq 0$ (da im Wendepunkt die dritte Ableitung von 0 verschieden ist)
   Ausnutzung der Eigenschaft „lokales Extremum“ in -2. Dort ist die erste Ableitung mit 0 identisch: $3a \cdot (-2)^2 + 2b\,(-2) + c = 0$
   Ausnutzung der Eigenschaft „Kurventangente an der Stelle $x_2 = 4$ hat Steigung 3“ ergibt, dass in 4 die erste Ableitung mit 3 identisch ist.
   $3a \cdot (4)^2 + 2b(4) + c = 3$
   Mit $b = 0$ erhalten wir damit das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 12a + c &= 0 \\ 48a + c &= 3 \end{aligned}$$

   $a = \frac{1}{12}, c = -1$
   Dies ergibt die Gleichung: $f(x) = \frac{1}{12}x^3 - x$
   Mit R auf Grund der Darstellung

$$\begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 48 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   X=matrix(c(12,1,48,1),ncol=2,byrow=T);y=c(0,3);solve(X,y)
   Alternative: Man kann auch das Gleichungssystem lösen, das durch

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 12 & -4 & 1 & 0 \\ 48 & 8 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   gegeben ist.

   (b) Es gilt $d = 8$ (schneidet die Ordinate im Punkt $(0, 8)$)
   $f(1) = a + b + c + d = 0$ (Nullstelle ist ja $(1; 0)$, $1^3 = 1^2 = 1$)
   $\frac{d}{dx}\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) = 3ax^2 + 2bx + c$ (erste Ableitung)
   $\frac{d}{dx}\left(3ax^2 + 2bx + c\right) = 6ax + 2b$ (zweite Ableitung)
   Wendepunkt in $(1, 0)) \Longrightarrow 6a + 2b = 0$
   $f'(1) = 3a + 2b + c = -9$ (Steigung im Wendepunkt -9, also erste Ableitung in 1 ist -9)
   Man erhält das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} d &= 8 \\ a + b + c + d &= 0 \\ 3a + b &= 0 \\ 3a + 2b + c &= -9 \end{aligned}$$

   $a = 1, b = -3, c = -6, d = 8$
   Damit gilt: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$.
   Mit R auf Grund der Darstellung

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$$

   X=matrix(c(0,0,0,1,1,1,1,1,3,1,0,0,3,2,1,0),ncol=4,byrow=T);y=c(8,0,0,-9);solve(X,y)

(c) $d = 16$ (geht durch $(0, 16)$)
$\frac{d}{dx}\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) = 3ax^2 + 2bx + c$; in $(0, 16)$ beträgt die Steigung $30 : 3a0^2 + 2b0 + c = 30 \Longrightarrow c = 30$
$\frac{d}{dx}\left(3ax^2 + 2bx + c\right) = 6ax + 2b$; Wendpunkt in 3: $\Longrightarrow 18a + 2b = 0$
$a3^3 + b3^2 + 3 \cdot 30 + 16 = 27a + 9b + 106 = 52$ (in 3 ist Funktionswert 52)
Man erhält also das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} d &= 16 \\ c &= 30 \\ 18a + 2b &= 0 \\ 27a + 9b + 3c + d &= 52 \end{aligned}$$

$a = 1, b = -9, c = 30, d = 16$
Wir erhalten die Funktionsgleichung: $f(x) = x^3 - 9x^2 + 30x + 16$
Mit R auf Grund der Darstellung

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 18 & 2 & 0 & 0 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 30 \\ 0 \\ 52 \end{pmatrix}$$

X=matrix(c(0,0,0,1,0,0,1,0,18,2,0,0,27,9,3,1),ncol=4,byrow=T);y=c(16,30,0,52);solve(X,y)

7. Da in $x_1 = 2$ eine Unendlichkeitsstelle vorliegt, gilt: $\lim\left(\frac{ax+b}{x^2+c}\right) = \infty$ oder $-\infty$. Dort ist die Funktion nicht definiert. Somit muss dort $2^2 + c = 0$ sein, d.h. $c = -4$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{ax+b}{x^2-4}\right) = -\frac{ax^2+4a+2bx}{(x^2-4)^2}$; $-\frac{ax^2+4a+2bx}{(x^2-4)^2} = 0 \Longleftrightarrow ax^2 + 4a + 2bx = 0$
Dies gilt in $x = 1 : a + 4a + 2b = 0 = 5a + 2b$
$f(1) = \frac{a+b}{1^2-4} = -0.25$ und mit $a + b = -0.25 \cdot (1 - 4) = 0.75$
Damit haben wir zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten:

$$\begin{aligned} a + b &= 0.75 \\ 5a + 2b &= 0 \end{aligned}$$

$b = 1.25, a = -0.5$
Wir erhalten die Gleichung: $f(x) = \frac{-0.5x+1.25}{x^2-4}$
Mit R mit Hilfe der Darstellung

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0 \end{pmatrix}$$

X=matrix(c(1,1,5,2),ncol=2,byrow=T);y=c(0.75,0);solve(X,y)

8. $d = 98$
$K'(x) = \frac{d}{dx}\left(ax^3 + bx^2 + cx + 98\right) = 3ax^2 + 2bx + c$. Die Grenzkostenfunktion nimmt ihre Extrema an Nullstellen der Ableitung von $K'(x)$ an: $\frac{d}{dx}\left(3ax^2 + 2bx + c\right) = 6ax + 2b$. Nullstelle $6ax + 2b = 0$. Das Extremum liegt in 4, also gilt $24a + 2b = 0$
Die variablen Kosten sind definiert als $K_V(x) = ax^3 + bx^2 + cx$
Um das Minimum zu bestimmen, leiten wir K_V ab und setzten mit 0 gleich: $\frac{d}{dx}\left(ax^3 + bx^2 + cx\right) = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ Das Minimum liegt in 6 vor: Man erhält also $3a6^2 + 2b6 + c = 108a + 12b + c = 0$
Grenzkosten für 3 ME sind 2, d.h. $3^3a + 6b + c = 2$

$$\begin{aligned} d &= 98 \\ 24a + 2b &= 0 \\ 108a + 12b + c &= 0 \\ 27a + 6b + c &= 2 \end{aligned}$$

$a = -\frac{2}{9}, b = \frac{8}{3}, c = -8, d = 98$ Kostenfunktion: $K(x) = -\frac{2}{9}x^3 + \frac{8}{3}x^2 - 8x + 98$. Mit R und mittels der Darstellung:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 24 & 2 & 0 & 0 \\ 108 & 12 & 1 & 0 \\ 27 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 98 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

X=matrix(c(0,0,0,1,24,2,0,0,108,12,1,0,27,6,1,0),ncol=4,byrow=T);y=c(98,0,0,2);solve(X,y)
Man sollte für K noch überprüfen: $a > 0, b < 0, c > 0, d \geq 0, b^2 < 3ac$.
$a < 0$. Es handelt sich also nicht um eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion.

11.6 Lernziele

- Das Wachstumsverhalten ökonomischer Funktionen rechnerisch bestimmen können (konvexe, konkave Stellen, konkav-konvex-Wendestellen, konvex-konkav-Wendestellen).
- Bei ökonomischen Funktionen überprüfen können, ob sie die charakteristischen Eigenschaften gewisser klassischer Modellfunktionen (ertragsgesetzliche Kostenfunktion, ertragsgesetzliche Produktionsfunktion, neoklassische Produktionsfunktion, etc.) aufweisen.
- Aufgaben von der Art der angegebenen machen können (ausser Übungen 7, 8 und 2b)

Kapitel 12

Weitere ökonomische Anwendungen der Differentialrechnung

12.1 Fahrstrahlanalyse - Zusammenhang von Stückkosten und Grenzkosten

Definition 12.1.1. *g ist ein Fahrstrahl der Funktion f genau dann, wenn g eine Gerade ist mit $(0,0) \in g$ und mit einem x, so dass $(x, f(x)) \in g$* ♢

Damit ist ein Fahrstrahl einer Funktion f jede Gerade, die durch den Nullpunkt des Koordinatennetzes geht und die Funktion f schneidet. Sei K eine Kostenfunktion. Dann drückt die *Steigung* eines Fahrstrahls von K mit $(x, K(x)) \in g$ die Stückkosten aus, da für die Steigung m des Fahrstrahles gilt: $m = \frac{K(x)}{x} = k\,(x)$ (= Stückkosten oder mittlere Kosten, siehe Abbildung 12.1.1).

Beispiel 12.1.2. *Wir betrachten eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion:*

$$K(x) = 4x^3 - 24x^2 + 60x + 50.$$

Wenn wir nun den Punkt, durch den die Gerade verläuft, auf der Kurve $K(x)$ verschieben, so können wir die Entwicklung der Stückkosten graphisch untersuchen. Bei einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion sinken die Stückkosten zuerst (die Steigung des Fahrstrahls wird immer kleiner), dann steigen sie wieder (die Steigung des Fahrstrahls wird grösser). Der Punkt, wo die Veränderungsrichtung sich umkehrt, befindet sich dort, wo der Fahrstrahl zur Tangente von K wird - mit anderen Worten, an der Stelle x, wo

$$K'(x) = k(x).$$

In diesem Punkt sind die Stückkosten minimal (s. Abbildung 12.1.1) und die entsprechende Menge wird „Betriebsoptimum“ genannt.

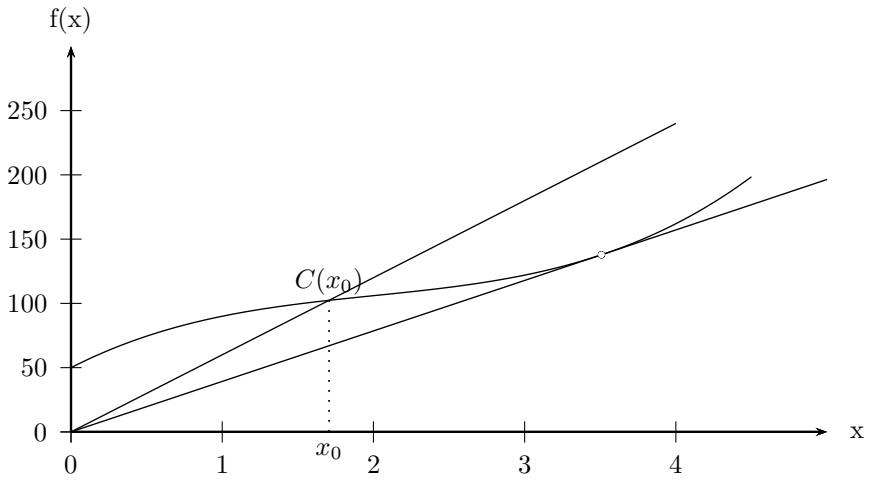


Abbildung 12.1.1: Steigung des Fahrstrahls gibt Stückkosten $k(x_0)$ für x_0 im Schnittpunkt von Kostenfunktion K und Fahrstrahl an; für $K'(x) = k(x)$ wird der Fahrstrahl zur Tangente an die ertragsgesetzliche Kostenfunktion

◊

Wenn der Preis eines Produktes tiefer als die minimalen Stückkosten ist, ist eine Produktion langfristig nicht rentabel. Entsprechend bilden die Stückkosten im Betriebsoptimum die „langfristige Preisuntergrenze“.

Dieselben Überlegungen kann man bezüglich der variablen Kosten anstellen. Den Fahrstrahl ziehen wir nun nicht mehr durch den Nullpunkt des Koordinatennetzes, sondern durch den Ordinatenabschnitt der Kostenfunktion. Man sieht graphisch, dass die variablen Stückkosten kleiner sind als die Gesamtstückkosten, sofern Fixkosten vorkommen (Vergleichen Sie die Fahrstrahlen, die durch denselben Punkt verlaufen; s. Abbildung 12.1.2).

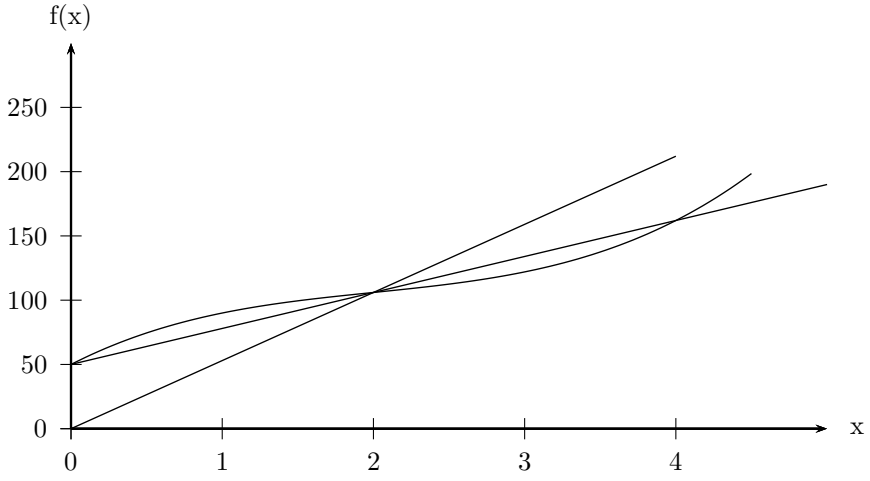


Abbildung 12.1.2: Die variablen Stückkosten sind kleiner als die Gesamtstückkosten - Steigung des Fahrstrahls für die variablen Kosten ist kleiner als die Steigung des Fahrstrahls für die Gesamtkosten

Die variablen Stückkosten sind minimal dort, wo der entsprechende Fahrstrahl zur Tangente an

die Kostenfunktion wird:

$$K_v'(x) = K'(x) = \frac{K_v(x)}{x}.$$

Beim Vorliegen von Fixkosten, wird der Punkt mit den minimalen variablen Stückkosten eher erreicht als der Punkt mit den minimalen Gesamtstückkosten und die minimalen variablen Stückkosten sind tiefer als die minimalen Gesamtstückkosten, sofern die Fixkosten grösser als 0 sind.

Ökonomische Interpretation: wenn der Preis mit den minimalen variablen Stückkosten übereinstimmt, kann man genau die variablen Kosten decken. Man kann aber die Fixkosten nicht decken. Da die Fixkosten sowieso anfallen, kann sich kurzfristig eine Produktion bei einem Preis, der die variablen Kosten deckt, lohnen. Langfristig ist aber auch diese Produktion unrentabel. Die Produktionsmenge bei minimalen variablen Stückkosten wird „Betriebsminimum“ genannt. Die entsprechenden variablen Stückkosten stellen die „kurzfristige Preisuntergrenze“ dar.

In Bezug auf unser Beispiel gilt:
$K'(x) = \frac{d}{dx}\left(4x^3 - 24x^2 + 60x + 50\right) = 12x^2 - 48x + 60$
$k(x) = \frac{4x^3-24x^2+60x+50}{x} = 4x^2 - 24x + 60 + \frac{50}{x}$
$k_v(x) = \frac{4x^3-24x^2+60x}{x} = 4x^2 - 24x + 60$
$K'(x) = k(x) \Longleftrightarrow 12x^2 - 48x + 60 = 4x^2 - 24x + 60 + \frac{50}{x} \Longleftrightarrow$
$12x^3 - 48x^2 + 60x = 4x^3 - 24x^2 + 60x + 50 \Longleftrightarrow$
$8x^3 - 24x^2 - 50 = 0$
Damit erhalten wir: $8x^3 - 24x^2 - 50 = 0 \Longrightarrow x = 3.5079$
Die minimalen Gesamtstückkosten werden damit in $x = 3.5079$ erreicht (= Betriebsoptimum).
$K'(x) = k_v(x) \Longleftrightarrow 12x^2 - 48x + 60 = 4x^2 - 24x + 60 \Longleftrightarrow$
$8x^2 - 24x = 0 \Longrightarrow x = 3$
Die minimalen variablen Stückkosten werden in 3 erreicht (= Betriebsminimum). (s. Abbildung 12.1.3).

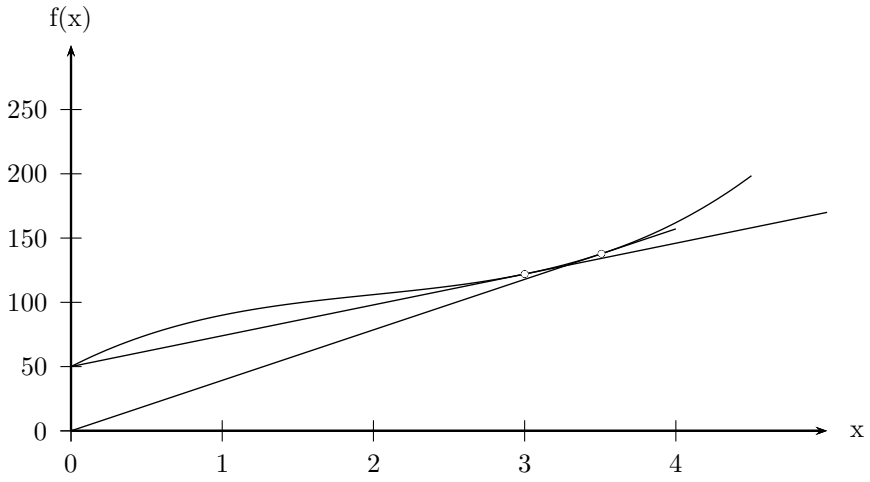


Abbildung 12.1.3: Die minimalen variablen Stückkosten sind kleiner als die minimalen Gesamtstückkosten

Bemerkung 12.1.3. *Statt $K'(x) = k(x)$ aufzulösen, kann man für die Berechnung des Betriebsoptimums auch die Tangente durch $(0, 0)$ an $K(x)$ berechnen: Es gilt für die Tangente ax mit der Steigung a, dass sie eine Schnittpunkt mit der K hat: Dort gilt: $ax = K(x) = 4x^3 - 24x^2 + 60x + 50 \Longrightarrow a = \frac{4x^3-24x^2+60x+50}{x} = k(x)$. Für die Steigung gilt $a = K'(x) = 12x^2 - 48x + 60$. Damit erhält man erneut: $12x^2 - 48x + 60 = \frac{4x^3-24x^2+60x+50}{x}$.* ◊

12.2 Maximaler Gewinn

12.2.1 Perfekte Konkurrenz bei ertragsgesetzlicher Kostenfunktion

Gewinnfunktion:

$$G(x) = E(x) - K(x).$$

Der Gewinn ist maximal in x_0 genau dann, wenn sich in x_0 die Nullstelle der ersten Ableitung befindet und in x_0 die zweite Ableitung negativ ist. Damit gilt:

(1) G ist extremal, wenn

$$G'(x) = E'(x) - K'(x) = 0.$$

Damit gilt im Extremum:

$$E'(x) = K'(x).$$

(Grenzerlös gleich Grenzkosten)

Im Falle der vollkommenen Konkurrenz, hat die Erlösfunktion die Form:

$$E(x) = xp.$$

(x = Menge, p = Preis), da die vom Produzenten verkaufte Menge den Preis nicht beeinflusst. Die Ableitung der Erlösfunktion ist

$$E'(x) = \frac{d}{dx}(xp) = p.$$

In einem Extremum ist somit der Preis gleich den Grenzkosten.

$$E'(x) = p = K'(x).$$

Dies macht intuitiv Sinn. Wenn $p > K'(x)$, d.h. der Preis ist grösser als die zusätzlichen Kosten bei zusätzlicher Produktion einer Einheit, dann steigt der Gewinn durch die zusätzliche Produktion. Wenn $p < K'(x)$, d.h. der Preis ist kleiner als die zusätzlichen Kosten bei zusätzlicher Produktion einer Einheit, dann sinkt der Gewinn durch die zusätzliche Produktion. Entsprechend liegt das Gewinnmaximum bei $p = K'(x)$.

(2) Ein Extremum ist ein Maximum, wenn

$$\begin{aligned} G''(x) < 0 &\Longrightarrow \\ E''(x) - K''(x) < 0 &\Longrightarrow \\ E''(x) < K''(x). & \end{aligned}$$

Da

$$E'(x) = p,$$

ist

$$\frac{d}{dx}E'(x) = E''(x) = 0.$$

Damit gilt:

$$0 < K''(x).$$

Ein Extremum in x_0 ist somit ein Maximum, wenn die zweite Ableitung der Kosten in x_0 positiv ist.

Damit gilt:

In x_0 liegt ein maximaler Gewinn vor genau dann, wenn $p = K'(x_0)$ und $K''(x_0) > 0$.

Wir können den maximalen Gewinn berechnen, indem wir $G(x_0)$ ausrechnen.

Bemerkung 12.2.1. *Die folgende Überlegung ist auch von einigem Interesse: Es gilt:*

$$\begin{aligned} G(x) &= E(x) - K(x) \\ &= xp - x\frac{K(x)}{x} \\ &= x\left(p - \frac{K(x)}{x}\right) \\ &= x(p - k(x)) \end{aligned}$$

Damit ist der Gewinn die verkaufte Menge mal die Differenz zwischen Preis und Stückkosten. Ist in x_0 der Gewinn maximal, können wir den Gewinn berechnen durch: $G(x_0) = [p - k(x_0)] \cdot x_0$ (Siehe auch die Abbildung 12.2.5 unten). ♢

Beispiel 12.2.2. *Mit den obigen Überlegungen kann man die Produktionsmenge mit dem maximalen Gewinn bei perfekter Konkurrenz, gegebenem Preis $p = 60$ und gegebener Kostenfunktion*

$$K(x) = x^3 - 12x^2 + 60x + 98$$

auch wie folgt berechnen:

$$K'(x) = 3x^2 - 24x + 60 = 60 = p$$

$3x^2 - 24x + 60 = 60$. *Lösungen:* 8 *und* 0. *Mit* $K''(x) = \frac{d}{dx}\left(3x^2 - 24x + 60\right) = 6x - 24$ *erhält man:*

$$K''(0) = -24 < 0$$

und

$$K''(8) = 6 \cdot 8 - 24 > 0$$

Es liegt also ein Gewinnmaximum in 8 vor.

Vergleichen Sie dieses Vorgehen mit dem bisherigen Vorgehen:

$$\begin{aligned} G(x) &= E(x) - K(x) \\ &= 60x - \left(x^3 - 12x^2 + 60x + 98\right) \\ &= -x^3 + 12x^2 - 98 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}G(x) = \frac{d}{dx}\left(-x^3 + 12x^2 - 98\right) = 24x - 3x^2$$

Extrema liegen in $24x - 3x^2 = 0 \Longrightarrow x_1 = 0, \qquad x_2 = 8$ *vor.*
$G''(x) = \frac{d}{dx}\left(24x - 3x^2\right) = 24 - 6x$
$G''(0) = 24 > 0$ *(Minimum der Gewinnfunktion in 0)*
$G''(8) = 24 - 6 \cdot 8 < 0$ *(Maximum der Gewinnfunktion in 8)*
Der maximale Gewinn ist: $G(8) = -8^3 + 12 \cdot 8^2 - 98 = 158$
Will man bei der ersten Methode nicht nur die Menge, sondern auch den maximalen Gewinn berechnen, muss man die Gewinnfunktion berechnen und in diese einsetzen, oder man rechnet mit der Bemerkung 12.2.1:

$$(p - k(8)) \cdot 8 = (60 - k(8)) \cdot 8$$

mit

$$k(x) = \frac{x^3 - 12x^2 + 60x + 98}{x} = x^2 - 12x + 60 + \frac{98}{x}$$

ist

$$k(8) = \frac{8^3 - 12 \cdot 8^2 + 60 \cdot 8 + 98}{8} = 40.25$$

und man erhält: $G(8) = 8(60 - 40.25) = 158$ *(s. Abbildungen 12.2.4 und 12.2.5).*

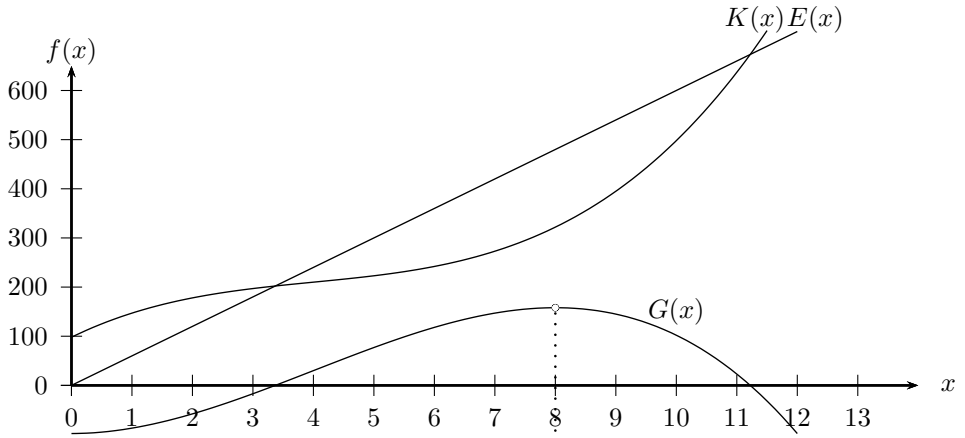


Abbildung 12.2.4: Kostenfunktion K, Erlösfunktion E und Gewinnfunktion G bei perfekter Konkurrenz

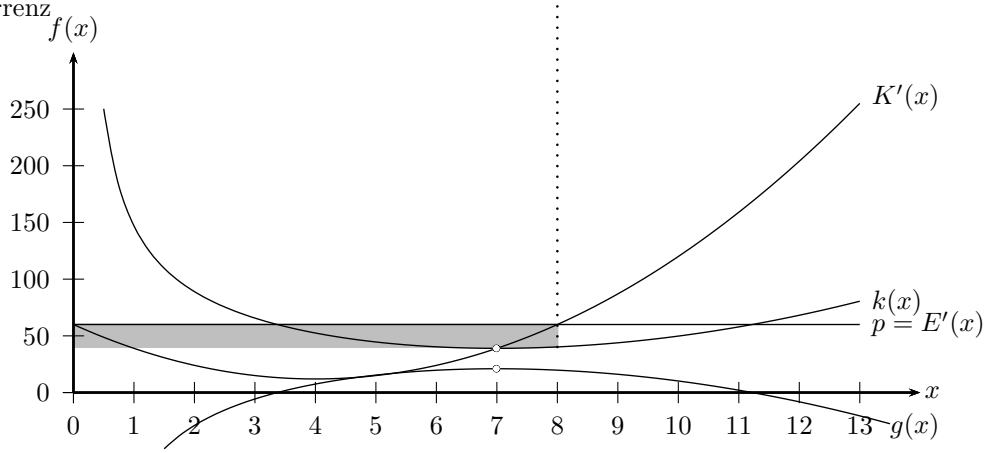


Abbildung 12.2.5: Die graue Fläche $x_0(p-k(x_0)) = 8(60-k(8))$ entspricht dem maximalen Gewinn mit $x_0 = 8$; Die Stückgewinnfunktion $g(x) := \frac{G(x)}{x}$ ist maximal genau dort, wo $k(x)$ minimal ist. Der maximale Gewinn entspricht dem Rechteck $[p - k(x_0)] \cdot x_0$ für $x_0 = 8$.

$\Diamond$

Bemerkung 12.2.3. *In Bezug auf den Stückgewinn kann man eine ähnliche Analyse machen.*

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{G(x)}{x} \\ &= \frac{E(x) - K(x)}{x} \\ &= \frac{E(x)}{x} - \frac{K(x)}{x} \\ &= e(x) - k(x) \end{aligned}$$

($g(x)$ = Stückgewinnfunktion)

$$\begin{aligned} e(x) &= \frac{E(x)}{x} \\ &= \frac{xp}{x} \\ &= p; \end{aligned}$$

Der Stückgewinn ist identisch mit der Differenz „Preis minus Stückkosten“.
Wenn $g(x)$ maximal ist gilt, $g'(x) = 0 \Longrightarrow e'(x_0) = k'(x_0)$
Nun gilt aber: $\frac{d}{dx}(e(x)) = \frac{d}{dx}(p) = 0$.
Daraus kann man schliessen: (a) Wenn $g(x)$ maximal ist, gilt $k'(x_0) = 0$.
Zudem wissen wir: (b) im Maximum gilt: $g''(x_0) < 0 \Longrightarrow e''(x_0) - k''(x_0) < 0$.
nun gilt: $e''(x_0) = 0$
Daraus kann man schliessen: $k''(x_0) > 0$.
Wenn $k''(x_0) > 0$ und $k'(x_0) = 0$, hat die Funktion k in x_0 ein Minimum. Insgesamt gilt also

Der Stückgewinn ist maximal in x_0 genau dann, wenn die Stückkosten k in x_0 minimal sind.

◊

Bemerkung 12.2.4. *Vergleichen Sie x_1 wo $k(x_1) = K'(x_1)$ und x_0 wo $K'(x_0) = p$ (maximaler Gewinn). Man sieht, dass die Menge, bei der ein maximaler Gewinn erfolgt, nicht identisch ist mit der Menge, für welche die Stückkosten minimal sind. Das Betriebsoptimum (minimale Gesamtstückkosten) fällt nicht mit dem Gewinnmaximum zusammen.* ◊

12.2.2 Monopol bei ertragsgesetzlicher Kostenfunktion

Wie im Falle der vollkommenen Konkurrenz gilt: G hat ein Extremum in $G'(x) = E'(x) - K'(x) = 0$. Damit gilt dort: $E'(x) = K'(x)$.

Die erste Ableitung der Erlösfunktion ist jedoch keine Konstante (Preis). Die zweite Ableitung ist entsprechend nicht 0. Aus der Bedingung für ein Maximum $G''(NS_{G'}) < 0$ wird $E''(NS_{G'}) - K''(NS_{G'}) < 0$, d.h. $E''(NS_{G'}) < K''(NS_{G'})$. Wir betrachten ein konkretes Beispiel:

Beispiel 12.2.5. *Wir nehmen das obige Beispiel 12.2.2 auf, obwohl zu beachten ist, dass man sich im Monopolfall in einem anderen Mengenbereich bezüglich eines spezifischen Produktes bewegen wird als im Fall der perfekten Konkurrenz, bei der die angebotene Menge einer Unternehmung auf den Marktpreis keinen Einfluss ausübt. Im ersten Fall produziert die Unternehmung die gesamte Menge, die auf dem Markt ist, im zweiten Fall nur einen Bruchteil davon. Entsprechend können die Ergebnisse (maximaler Gewinn) nicht direkt verglichen werden. Obwohl wir die gleiche Kostenfunktion verwenden, muss es sich hier also um ein anderes Gut und entsprechend um einen anderen Markt handeln!*
$K(x) = x^3 - 12x^2 + 60x + 98; \Longrightarrow K'(x) = 3x^2 - 24x + 60 \Longrightarrow K''(x) = 6x - 24$
$p(x) = -10x + 120$ *(p = Preisfunktion). Die Erlösfunktion ist somit:*
$E(x) = xp(x) = -10x^2 + 120x$.
$E'(x) = -20x + 120$.
Extremum in: $E'(x) = K'(x) \Longleftrightarrow$
$3x^2 - 24x + 60 = -20x + 120 \Longrightarrow x_0 = \frac{2}{3}\sqrt{46} + \frac{2}{3} = 5.188\,2$
Maximum oder Minimum: $E''(x) = -20$; $K''(5.1882) = 6 \cdot 5.188\,2 - 24 = 7.129\,2 > -20$. *Also Maximum.*
Wir berechnen den maximalen Gewinn:
$G(5.1882) = E(5.1882) - K(5.1882) =$
$-10 \cdot 5.1882^2 + 120 \cdot 5.1882 - 5.1882^3 + 12 \cdot 5.1882^2 - 60 \cdot 5.1882 - 98 = 127.47 > 0.$ ◊

Bemerkung 12.2.6. *Der Gewinn kann wiederum mit dem folgenden Produkt ausgedrückt werden (s. Bemerkung 12.2.1):*

$$G(x) = E(x) - K(x) = xp(x) - x\frac{K(x)}{x} = [p(x) - k(x)] \cdot x.$$

Für das x_0, wo der Gewinn maximal ist: $[p(x_0) - k(x_0)] \cdot x_0$.

Wir erhalten den maximalen Gewinn:

$$\left[-10x_0 + 120 - \frac{x_0^3 - 12x_0^2 + 60x_0 + 98}{x_0}\right] \cdot x_0$$

und eingesetzt:

$$\left(-10 \cdot 5.1882 + 120 - \frac{5.1882^3 - 12 \cdot 5.1882^2 + 60 \cdot 5.1882 + 98}{5.1882}\right) 5.1882 = 127.47$$

(s. Abbildungen 12.2.6 und 12.2.7).

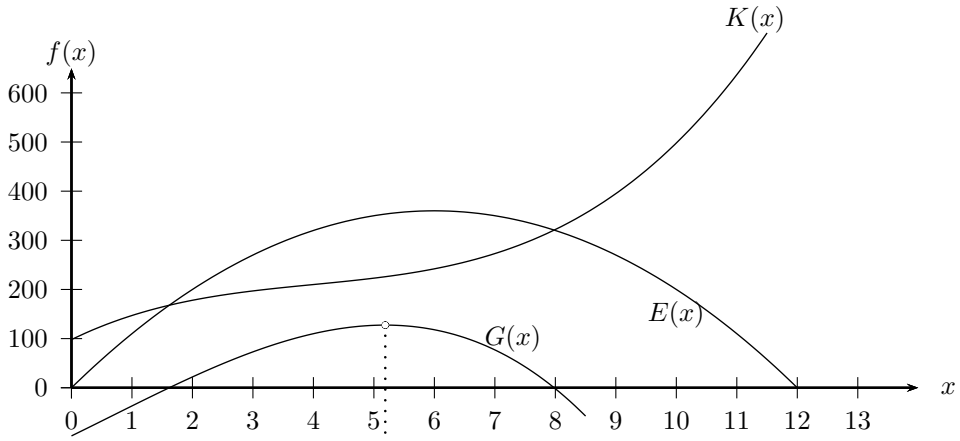


Abbildung 12.2.6: Kostenfunktion K, Erlösfunktion E und Gewinnfunktion G bei Monopol

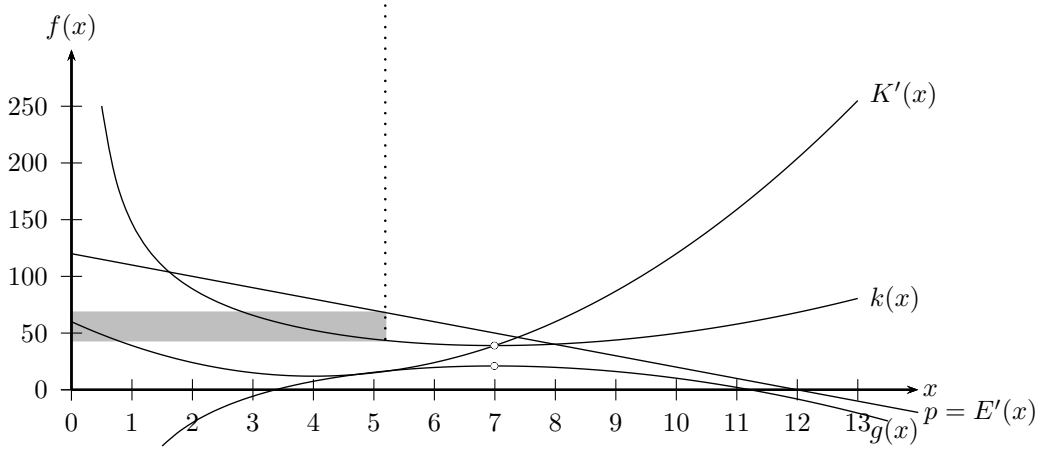


Abbildung 12.2.7: Die graue Fläche $x_0(p(x_0) - k(x_0)) = 5.1882(60 - k(5.1882)$ entspricht dem maximalen Gewinn; Ferner gilt $g(x)$ ist maximal genau dann, wenn $k(x)$ minimal ist

12.3 Elastizität ökonomischer Funktionen

Die Steigung einer ökonomischen Funktion in x_0 hängt von den Einheiten ab, in denen die Mengen gemessen werden (Güter, Geld). Dies können wir an einem Beispiel zeigen. Sei eine Kostenfunktion durch die folgenden Punkte gegeben: $(5, 437.5), (10, 600), (15, 662.5), (30, 1000)$ - jeweils in Tonnen und Franken gemessen. Wir erhalten die folgende Kostenfunktion, wenn es vernünftig erscheint, durch die Punkte ein Polynom zu berechnen:

$$K(x) = 0.1x^3 - 5x^2 + 90x + 100$$

Die Grenzkosten in $x = 17$ sind:

$$K'(x) = \frac{d}{dx}\left(0.1x^3 - 5x^2 + 90x + 100\right) = 0.3x^2 - 10x + 90$$
$$K'(17) = 0.3 \cdot 17^2 - 10{\cdot}17 + 90 = 6.7$$

Misst man die Mengen jedoch in Kilogramm und Franken, erhält man die folgende Kostenfunktion und Grenzkosten in 17000.:

$$K(x) = 10^{-10}x^3 - 5{\cdot}10^{-6}x^2 + 0.09x + 100$$
$$K'(x) = 3{\cdot}10^{-10}x^2 - 0.0000\,1x + 0.0\,9$$
$$K'(17000) = 3{\cdot}10^{-10}{\cdot}17000^2 - 0.00001{\cdot}17000 + 0.09 = 0.0067$$

Es wäre nützlich, ein Mass für die Änderung einer Funktion zu haben, das von den Einheiten unabhängig wäre. Einen solchen von Einheiten unabhängiges Mass für Änderungen erhalten wir, wenn wir die Änderungsrate von $f(x)$ an der Änderungsrate von x messen - bei Kapital ist die Änderungsrate $\frac{C_1 - C_0}{C_0}$, d.h. der Anteil der Änderung $C_1 - C_0$ am Ausgangskapital C_0.

Bemerkung 12.3.1. *Die Änderungsrate ist bei Kapital mit dem Zinssatz identisch, denn*

$$\frac{C_1 - C_0}{C_0} = \frac{C_0\,(1+i) - C_0}{C_0} = \frac{C_0\,(1+i-1)}{C_0} = i.$$

◊

Definition 12.3.2. *Die Elastizität $E_f(x_0)$ von f in x_0 ist identisch mit* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{f(x_0)}}{\frac{x-x_0}{x_0}}$ ◊

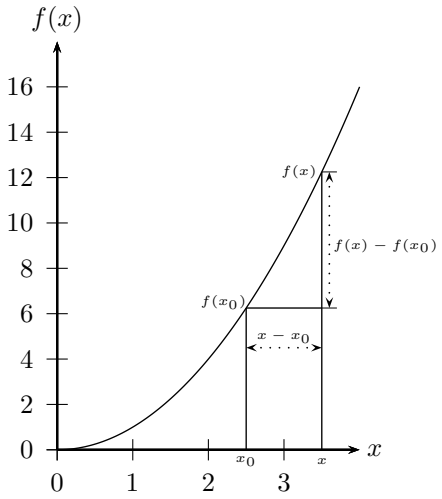


Abbildung 12.3.8: Graphische Darstellung zur Elastizitätsdefinition, $\frac{f(x)-f(x_0)}{f(x_0)}$ ist der Anteil von $f(x) - f(x_0)$ an $f(x_0)$ und $\frac{x-x_0}{x_0}$ ist der Anteil von $x - x_0$ an x_0. Man misst den ersten Anteil am zweiten Anteil.

Indem wir den Ausdruck $\left(\frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{f(x_0)}}{\frac{x-x_0}{x_0}}\right)$ umformen, erhalten wir:

$$\frac{(f(x) - f(x_0)) \cdot x_0}{f\,(x_0) \cdot (x - x_0)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} \cdot \frac{x_0}{f\,(x_0)}$$

und durch Grenzwertbildung

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)}\cdot\frac{x_0}{f(x_0)}\right)=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)}\right)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{x_0}{f(x_0)}$$
$$=f'(x_0)\cdot\frac{x_0}{f(x_0)}$$

(Dies entspricht bei einer Kostenfunktion dem Verhältnis der Grenzkosten zu den Stückkosten, denn $C'(x)\frac{x}{C(x)}=\frac{C'(x)}{\frac{C(x)}{x}}=\frac{C'(x)}{c(x)}$). Die Herleitung gilt für beliebige x_0. Man kann also behaupten:

Satz 12.3.3. $E_f(x)=\frac{f'(x)\cdot x}{f(x)}$

Bemerkung 12.3.4. *Man kann in der Definition die Änderungsraten auch als Änderungsraten in Prozent lesen (Erweitern durch 100).* ♢

Beispiel 12.3.5. *Wir berechnen die Elastizität der obigen Kostenfunktionen in* 17 *und* 17000*:* ♢

A) $K(x)=0.1x^3-5x^2+90x+100$

$$K'(x)=\frac{d}{dx}\left(0.1x^3-5x^2+90x+100\right)=0.3x^2-10x+90$$

$$E_{f,x}=f'(x)\cdot\frac{x}{f(x)}=\frac{0.3x^2-10x+90}{0.1x^3-5x^2+90x+100}\cdot x=\frac{0.3x^3-10x^2+90x}{0.1x^3-5x^2+90x+100}.$$

$$E_{f,17}=\frac{0.3\cdot 17^3-10\cdot 17^2+90\cdot 17}{0.1\cdot 17^3-5\cdot 17^2+90\cdot 17+100}=0.16842$$

B) $K(x)=10^{-10}x^3-5\cdot 10^{-6}x^2+0.09x+100$

$$K'(x)=\frac{d}{dx}\left(10^{-10}x^3-5\cdot 10^{-6}x^2+0.09x+100\right)=3.0\times 10^{-10}x^2-0.0000\,1x+0.0\,9$$

$$E_{f,x}=\frac{3.0\times 10^{-10}x^2-0.0000\,1x+0.0\,9}{10^{-10}x^3-5\cdot 10^{-6}x^2+0.09x+100}\cdot x$$

$$E_{f,17000}=\frac{3.0\times 10^{-10}\cdot 17000^2-0.0000\,1\cdot 17000+0.0\,9}{10^{-10}\cdot 17000^3-5\cdot 10^{-6}\cdot 17000^2+0.09\cdot 17000+100}\cdot 17000=0.16842$$

Die Elastizität der beiden Funktionen in 17 und 17′000 ist dieselbe.

E_f ist eine Funktion, die uns die Elastizität von f für jedes x angibt. Die Elastizität ist eine dimensionslose Grösse, da sich die Einheiten wegkürzen. In der obigen ersten Beispielkostenfunktion (Mengen in Tonnen gemessen, Geld in Franken gemessen) kürzen sich die Geldeinheiten im Zähler der Definition und die Mengeneinheiten im Nenner der Definition weg.

Bemerkung 12.3.6. *Die Elastizität einer Funktion f in x drückt näherungsweise aus, um wieviel Prozent f zunimmt (abnimmt), wenn x um ein Prozent zunimmt. Begründung: Da Änderungsraten mit 100 multipliziert die Änderung in Prozent ausdrückt, ist der Quotient zweier Änderungsraten mit dem Quotienten zweier mit 100 multiplizierter Änderungsraten identisch (erweitern oder kürzen), d.h.*

$$\frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{f(x_0)}}{\frac{x-x_0}{x_0}}=\frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{f(x_0)}\cdot 100}{\frac{x-x_0}{x_0}\cdot 100}.$$

◊

Definition 12.3.7.
- *f ist in x_0 elastisch genau dann, wenn $|E_f(x_0)| > 1$ (näherungsweise führt eine Änderung von einem Prozent in x zu einer Änderung von mehr als einem Prozent in f).*
- *f ist nicht elastisch in x_0 genau dann, wenn $|E_f(x_0)| < 1$ (näherungsweise führt eine Änderung von einem Prozent in x zu einer Änderung von weniger als einem Prozent in f).*
- *f ist proportional elastisch in x_0 genau dann, wenn $|E_f(x_0)| = 1$*
- *f ist absolut elastisch in x_0 genau dann, wenn $|E_f(x)| = +\infty$. (x_0 gehört dann nicht zum Definitionsbereich von $E_f(x)$)*
- *f ist völlig inelastisch in x_0 genau dann, wenn $|E_f(x_0)| = 0$.*

◊

12.3.1 Übungen

1. Ein Monopolist produziert mit der folgenden Kostenfunktion: $K(x) = 3x^3 - 11x^2 + 65x + 108$.
   Die Preis-Nachfrage-Funktion ist: $p(x) = -8x + 130$.
   (a) Überprüfen Sie, ob die Kostenfunktion eine ertragsgesetzliche ist
   (b) Berechnen Sie den maximalen Erlös und den maximalen Gewinn
   (c) Berechnen Sie den maximalen Gewinn mit der Gleichung $K'(x) = E'(x)$ und
   (d) durch den Ausdruck: $[p(x_0) - k(x_0)] \cdot x_0$

2. Eine Unternehmung (vollkommene Konkurrenz) produziert mit folgender Kostenfunktion: $K(x) = 3x^3 - 11x^2 + 65x + 108$.
   Der Markpreis ist $p = 45$.
   Berechnen Sie den maximalen Gewinn mit folgenden Methoden:
   (a) erste Ableitung von $G(x)$
   (b) Gleichung $p = K'(x)$
   (c) Ausdruck $[p - k(x_0)] \cdot x_0$

3. Eine Unternehmung (vollkommene Konkurrenz) produziert mit der folgenden Kostenfunktion: $K(x) = 3x^3 - 11x^2 + 65x + 108$.
   Welches ist der minimale Preis, so dass die Produktion profitabel ist.

4. Eine Unternehmung (vollkommene Konkurrenz) produziert mit der folgenden Kostenfunktion: $K(x) = 65x + 180$.
   Marktpreis $p = 70$.
   Berechnen Sie den maximalen Gewinn.

5. Ein Monopolist hat die folgende Kostenfunktion und Preis-Nachfragefunktion.
   $K(x) = 65x + 108$.
   $p(x) = -8x + 130$
   Berechnen Sie den maximalen Gewinn.

6. Sei $K(x) = 0.1x^3 - 2.4x^2 + 30x + 640$ eine Kostenfunktion.
   (a) Überprüfen Sie, ob es sich um eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion handelt.

(b) Berechnen Sie den Wendepunkt. Interpretieren Sie den Wendepunkt aus ökonomischer Sicht.

(c) Finden Sie die Menge mit den tiefsten Stückkosten.

(d) Wie hoch muss der Preis minimal sein, damit sich die Produktion lohnt? (auch kurzfristig)

7. Sei $x(r) = -0.4r^3 + 18r^2 + 24r$ eine Produktionsfunktion $[0 < r < 25]$

   (a) Für welches r ist die Grenzproduktivität optimal? (Grenzproduktivität $= x'(r)$).

   (b) Berechnen Sie den maximalen Output im betrachteten Intervall

   (c) Für welchen Input ist der durchschnittliche Output am grössten.

   (d) Für welchen Input ist die Grenzproduktivität und der durchschnittliche Output identisch.

8. Finden Sie die Elastizitätsfunktion für die folgenden Funktionen:
   $f(x) = 10x^7$
   $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - x + 1$
   $f(x) = \frac{3x-4}{8x+2}$
   $f(x) = ax^n (a, n \neq 0)$
   $f(x) = x^{0.2}$

9. Sei $x(p) = 18 - 2p$.

   (a) Berechnen Sie die Elastizitätsfunktion.

   (b) Berechnen Sie die Elastizität in $p = 5$ und $p = 10$.

10. Sei $P_D(x) = 18 - 2x$ eine Preisnachfragefunktion. Berechnen Sie die Elastizitätsfunktion

    (a) bezüglich der Menge und

    (b) bezüglich des Preises.

    (c) Berechnen Sie die Elastizitäten für $p = 5$ und $p = 10$.

11. Die folgende Gleichung beschreibe eine Konsumfunktion (Konsum in Abhängigkeit von Einkommen). $C(Y) = \frac{2-Y}{2+Y}$. Berechnen Sie die Elastizitätsfunktion und die Elastizitäten in $Y = 15$, $Y = 100$

12. Sei $x(p) = 18 - 2p$ eine Mengenpreisnachfragefunktion.

    (a) Berechnen Sie das p_0, wo $x(p)$ proportional elastisch ist.

    (b) Berechnen Sie das Intervall, wo $x(p)$ inelastisch ist.

    (c) Berechnen Sie das Intervall, wo $x(p)$ elastisch ist.

    (d) Berechnen Sie das p_0, wo $x(p)$ absolut elastisch ist.

    (e) Brerechnen Sie das p_0, wo $x(p)$ völlig unelastisch ist.

13. Die Lungenkapazität einer Person sei eine Funktion des Alters t und gegeben durch die Funktion

$$K(t) = \frac{110(\ln(t) - 2)}{t} \text{ für } t \geq e^2$$

    (a) Man berechne die Kapazitäten für $t = 10, 20, 30, 50$, und 70.

    (b) Man berechne das Alter, für das die Kapazität maximal ist.

12.3.2 Lösungen

1. Man erhält:

   (a) $a > 0; b < 0; c > 0, d > 0; b^2 = 121 < 3ac = 585$. Es handelt sich um eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion.

   (b) $E(x) = xp(x) = x(-8x + 130) = -8x^2 + 130x$.
   $E'(x) = \frac{d}{dx}\left(-8x^2 + 130x\right) = -16x + 130$ Nullstelle in: $x = \frac{65}{8} = 8.125$
   $E''(x)\frac{d}{dx}(-16x + 130) = -16 \Longrightarrow$ ein Maximum.
   $E(8.125) = -8 \cdot 8.125^2 + 130 \cdot 8.125 = 528.13$ (= maximaler Erlös)
   $G(x) = E(x) - K(x) = -8x^2 + 130x - \left(3x^3 - 11x^2 + 65x + 108\right) =$
   $-3x^3 + 3x^2 + 65x - 108$
   $G'(x) = \frac{d}{dx}\left(-3x^3 + 3x^2 + 65x - 108\right) = -9x^2 + 6x + 65$,
   Nullstelle in : 3.0413 und -2.3747
   $G''(x) = \frac{d}{dx}\left(-9x^2 + 6x + 65\right) = -18x + 6$
   in: $x = 3.0413$ $-18 \cdot 3.0413 + 6 = -48.743 \Longrightarrow$ in $x = 3.0413$ ein Maximum.
   $G(3.0413) = -3 \cdot 3.0413^3 + 3 \cdot 3.0413^2 + 65 \cdot 3.0413 - 108 = 33.041$ (= maximaler Gewinn)

   (c) $K'(x) = \frac{d}{dx}\left(3x^3 - 11x^2 + 65x + 108\right) = 9x^2 - 22x + 65$
   $9x^2 - 22x + 65 = -16x + 130,$ $x_1 = 3.0413;$ $x_2 = -2.3747$
   $K''(x) = \frac{d}{dx}\left(9x^2 - 22x + 65\right) = 18x - 22$
   in $x = 3.0413$: $K''(3.0413) = 18 \cdot 3.0413 - 22 = 32.743 \Longrightarrow$
   in $x = 3.0413$ hat es ein Maximum von G.
   $G(3.0413) = -3 \cdot 3.0413^3 + 3 \cdot 3.0413^2 + 65 \cdot 3.0413 - 108 = 33.041$

   (d) durch den Ausdruck: $[p(x_0) - k(x_0)] \cdot x_0$
   Gemäss (b) oder (c) bestimmen wir $x_0 = 3.0413$.
   $p(3.0413) = -8 \cdot 3.0413 + 130 = 105.67$
   $k(x) = \frac{3x^3 - 11x^2 + 65x + 108}{x} \Longrightarrow$
   $k(3.0413) = \frac{3 \cdot 3.0413^3 - 11 \cdot 3.0413^2 + 65 \cdot 3.0413 + 108}{3.0413} = 94.805 \Longrightarrow$
   $G_{\max} = (105.67 - 94.805) \cdot 3.0413 = 33.044$

2. Man erhält:

   (a) $E(x) = px$
   $G(x) = E(x) - K(x) = 45x - \left(3x^3 - 11x^2 + 65x + 108\right) =$
   $-3x^3 + 11x^2 - 20x - 108$
   $G'(x) = \frac{d}{dx}\left(-3x^3 + 11x^2 - 20x - 108\right) = -9x^2 + 22x - 20$
   Nullstelle: keine reellen Lösungen

   (b) $\frac{d}{dx}\left(3x^3 - 11x^2 + 65x + 108\right) = 9x^2 - 22x + 65$
   $9x^2 - 22x + 65 = 45$
   Keine reelle Nullstellen.

   (c) mit dem Ausdruck $[p - k(x_0)] \cdot x_0$
   Da es keine reelle Nullstellen hat, können wir x_0 nicht bestimmen.

3. $9x^2 - 22x + 65 = \frac{3x^3 - 11x^2 + 65x + 180}{x}$ (Grenzkosten = Stückkosten): Lösung: 3.8536
   $C'(3.8536) = 9 \cdot 3.8536^2 - 22 \cdot 3.8536 + 65 = 113.87$

4. $G(x) = E(x) - K(x) = 70x - 65x - 180 = 5x - 180$
   $G'(x) = \frac{d}{dx}(5x - 180) = 5$
   $G''(x) = \frac{d}{dx}(5) = 0$ $(0 \not< 0)$. Es gibt kein Maximum. Man muss überprüfen, ob es überhaupt einen positiven Gewinn gibt.
   $E(x) - K(x) > 0;$ $5x - 180 > 0,$ $x > 36$
   Von $x = 36$ weg ist der Gewinn positiv. Die Gewinnfunktion geht dann gegen Unendlich.
   $\lim\limits_{x \to \infty}(5x - 180) = \infty$

Man kann entsprechend den maximalen Gewinn nur bestimmen, wenn ein ökonomisch sinnvolles Intervall festgelegt wird. z.B.$[0, 50]$
Dort wäre der maximale Gewinn: $5 \cdot 50 - 180 = 70$

5. $K(x) = 65x + 108$
   $p(x) = -8x + 130$
   $G(x) = E(x) - K(x) = x\,(-8x + 130) - (65x + 108) = -8x^2 + 65x - 108$
   $G'(x) = \frac{d}{dx}\left(-8x^2 + 65x - 108\right) = \ -16x + 65$ Nullstelle in : $x = 4.062\,5$
   $G''(x) = \frac{d}{dx}\,(-16x + 65) = -16 \Longrightarrow$ Es hat in $x = 4.0625$ ein Maximum.
   $G(4.0625) = -8 \cdot 4.0625^2 + 65 \cdot 4.0625 - 108 = 24.031$
   Gemäss $E'(x) = K'(x)$:
   $E'(x) = \frac{d}{dx}\left(-8x^2 + 130x\right) = -16x + 130$
   $K'(x) = \frac{d}{dx}\,(65x + 108) = 65$
   $-16x + 130 = 65, \ \Longrightarrow x = 4.062\,5$
   $G(4.0625) = 24.031$

6. Man erhält:

   (a) $0.1 > 0$; $b < 0$; $c > 0$; $d > 0$; $b^2 = (-2.4)^2 = 5.76 < 3 \cdot 0.1 \cdot 30 = 9$
   Alle Bedingungen sind erfüllt.

   (b) Wendepunkt $K''(x) = 0$;
   $\frac{d}{dx}\left(0.1x^3 - 2.4x^2 + 30x + 640\right) = 0.3x^2 - 4.8x + 30$
   $\frac{d}{dx}\left(0.3x^2 - 4.8x + 30\right) = 0.6x - 4.8$
   $0.6x - 4.8 = 0, \quad x = 8$
   Ökonomische Interpretation: bis zu diesem Punkt sinken die Grenzkosten, dann steigen sie an.

   (c) Die Produktion ist optimal, wenn die Stückkosten mit den Grenzkosten identisch sind.
   $\frac{0.1x^3 - 2.4x^2 + 30x + 640}{x} = 0.3x^2 - 4.8x + 30 \Longrightarrow$
   $0.1x^3 - 2.4x^2 + 30x + 640 = 0.3x^3 - 4.8x^2 + 30x \Longrightarrow$
   $-0.2x^3 + 2.4x^2 + 640 = 0 \Longrightarrow x = 20$
   In $x = 20$, ist die Produktion optimal.

   (d) Wenn der Preis tiefer als die minimalen variablen Stückkosten sind, ist eine Produktion nicht ökonomisch.
   Die variablen Stückgrenzkosten sind minimal in: $k_v(x) = K'(x)$.
   $k_v(x) = \frac{0.1x^3 - 2.4x^2 + 30x}{x} = 0.1x^2 - 2.4x + 30$
   $0.3x^2 - 4.8x + 30 = 0.1x^2 - 2.4x + 30 \Longrightarrow$
   $0.2x^2 - 2.4x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 12$
   $k_v(12) = 0.1 \cdot 12^2 - 2.4 \cdot 12 + 30 = 15.6$
   Wenn der Preis tiefer als 15.6 ist, sollte die Produktion gestoppt werden.

7. Man erhält:

   (a) Die Grenzproduktivität
   $\frac{d}{dr}\left(-0.4r^3 + 18r^2 + 24r\right) = -1.2r^2 + 36r + 24$
   Maximum oder Minimum in: $\frac{d}{dr}\left(-1.2r^2 + 36r + 24\right) =$
   $-2.4r + 36 = 0 \Longrightarrow \quad$ in: $r = 15$
   $\frac{d}{dr}\,(-2.4r + 36) = -2.4$
   In $r = 15$ befindet sich ein Maximum.

   (b) $\frac{d}{dr}\left(-0.4r^3 + 18r^2 + 24r\right) = -1.2r^2 + 36r + 24 = 0$
   Nullstellen: $30.652, -0.652\,48 \notin [0 < r < 25]$
   Da die betrachtete Ableitung stetig ist und in $[0, 25]$ keine Nullstelle vorkommt, ist die die Ableitung in diesem Intervall überall positiv oder über negativ. Da $x(0) = 24 > 0$, ist

die erste Ableitung überall positiv. Entsprechend ist die Funktion x im Intervall überall strikt monoton steigend und nimmt damit ihr Maximum in 25 an. Das Maximum ist $x(25) = -0.4 \cdot 25^3 + 18 \cdot 25^2 + 24 \cdot 25 = 5600$.

(c) $\frac{-0.4r^3+18r^2+24r}{r} = -0.\,4r^2 + 18r + 24$
$\frac{d}{dr}\left(-0.\,4r^2 + 18r + 24\right) = -0.\,8r + 18 = 0$
Maximal oder Minimal in $r = 22.5$
$\frac{d}{dr}\left(-0.\,8r + 18\right) = -0.\,8$
Es hat somit ein Maximum in 22.5.

(d) Für welchen Input ist die Grenzproduktivität und der durchschnittliche Output identisch?
$-1.\,2r^2 + 36r + 24 = -0.\,4r^2 + 18r + 24, \qquad r = 22.\,5$
Wer erhalten somit ein ähnliches Resultat wie für die Gleichheit von Grenzkosten und Stückkosten. Das Optimum befindet sich in r, so dass $x'(r) = \frac{x(r)}{r}$.
Das Optimum $x'(x) = \frac{x(r)}{r}$ ist optimal bezüglich Ressourcenverbrauch. Mit einem spezifischen Ressourceneinsatz erreichen wir bezüglich dieses Einsatzes am meisten Output.
Damit haben wir drei Arten von Optimum behandelt:
(a) Optimum bezüglich Ressourcenverbrauch,
(b) Optimum bezüglich Kosten (Stückkosten minimal)
(c) Optimum bezüglich Gewinn (Gewinn maximal).
Diese drei Optima fallen im Allgemeinen nicht zusammen.

8. Man erhält:

(a) $E_f(x) = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)} = \frac{d}{dx}\left(10x^7\right) \cdot \frac{x}{10x^7} = 70x^6 \cdot \frac{x}{10x^7} = 7$

(b) $E_f(x) = \frac{d}{dx}\left(4x^3 + 2x^2 - x + 1\right) \cdot \frac{x}{4x^3+2x^2-x+1} = \frac{4x^2+12x^3-x}{4x^3+2x^2-x+1}$, da $x \cdot \frac{d}{dx}\left(4x^3 + 2x^2 - x + 1\right) = x\left(12x^2 + 4x - 1\right) = 12x^3 + 4x^2 - x$.

(c) $E_f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{3x-4}{8x+2}\right) \cdot \frac{x}{\frac{3x-4}{8x+2}} = \frac{19}{2(4x+1)^2} \cdot \frac{x}{\frac{3x-4}{8x+2}} = \frac{19x(8x+2)}{2(4x+1)^2(3x-4)}$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{3x-4}{8x+2}\right) = \frac{3\cdot(8x+2)-(3x-4)\cdot 8}{(8x+2)^2} = \frac{24x+6-24x+32}{4(4x+1)^2} = \frac{19}{2(4x+1)^2}$

(d) $E_f(x) = \frac{d}{dx}(ax^n) \cdot \frac{x}{ax^n} = nax^{n-1} \cdot \frac{x}{ax^n} = n\frac{x^n}{x^n} = n$.
Wir erhalten eine Konstante. Für Polynome dieses Typs ist die Elastizität überall dieselbe. Dies ist auch gültig für Exponenten $0 < r < 1$:

(e) $E_f(x) = x^{0.2} = \frac{d}{dx}(x^{0.2}) \cdot \frac{x}{x^{0.2}} = 0.2x^{-0.8} \cdot \frac{x}{x^{0.2}} =$
$0.2 \cdot \frac{x}{x^{0.8} \cdot x^{0.2}} = 0.2 \cdot \frac{x}{x^{0.8+0.2}} = 0.2 \cdot \frac{x}{x} = 0.2$

9. Man erhält:

(a) $E_f(p) = \frac{d}{dp}(18 - 2p) \cdot \frac{p}{18-2p} = \frac{-2p}{18-2p}$

(b) $E_f(5) = \frac{-2\cdot 5}{18-2\cdot 5} = -\frac{5}{4}$

10. Man erhält:

(a) $E_{P_D}(x) = \frac{d}{dx}(18 - 2x) \cdot \frac{x}{18-2x} = \frac{-2x}{18-2x}$

(b) Um die Elastizität bezüglich des Preises zu berechnen, muss man die Umkehrfunktion berechnen:
$P_D(x) = 18 - 2x \Longrightarrow \frac{p-18}{-2} = x(p) = \frac{18-p}{2}$
$E_x(p) = \frac{d}{dp}\left(\frac{18-p}{2}\right) \cdot \frac{p}{\frac{18-p}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{p}{\frac{18-p}{2}} = -\frac{p\cdot 2}{2(18-p)} = -\frac{p}{18-p}$

(c) $E_x(5) = -\frac{5}{18-5} = -\frac{5}{13} = -0.\,384\,62$
$E_x(10) = -\frac{10}{18-10} = -\frac{5}{4} = -1.\,25$

11. $C'(Y) = \frac{d}{dY}\left(\frac{2-Y}{2+Y}\right) = \frac{-1(2+Y)-(2-Y)\cdot 1}{(2+Y)^2} = -\frac{4}{(2+Y)^2}$
$E_{C,Y} = \frac{d}{dY}\left(\frac{2-Y}{2+Y}\right)\cdot\frac{Y}{\frac{2-Y}{2+Y}} = -\frac{4}{(2+Y)^2}\cdot\frac{Y(2+Y)}{2-Y} =$
$-\frac{4}{2+Y}\frac{Y}{2-Y} = \frac{-4Y}{4-Y^2}$
$E_{C,15} = \frac{-4\cdot 15}{4-15^2} = \frac{60}{221} = 0.271\,49$
$E_{C,100} = \frac{-4\cdot 100}{4-100^2} = \frac{100}{2499} = 0.04\,001\,6$

12. Zuerst bestimmen wir den ökonomisch sinnvollen Bereich: p und $x(p) \geq 0$.
$x(p) = 18 - 2p > 0 \Longrightarrow -2p > -18 \Longrightarrow p \leq 9$
Das Intervall, das interessiert, ist also: $0 \leq p \leq 9$.

(a) ist proportional elastisch:
$\left|\frac{-2p}{18-2p}\right| = 1 \Longrightarrow$
i) $\frac{-2p}{18-2p} = 1$ oder ii) $\frac{-2p}{18-2p} = -1$
i) $\frac{-2p}{18-2p} = 1 \Longrightarrow -2p = 18 - 2p \Longrightarrow 0 = 18 \Longrightarrow$ unmöglich
ii) $\frac{-2p}{18-2p} = -1 \Longrightarrow -2p = -18 + 2p \Longrightarrow -4p = -18 \Longrightarrow p = \frac{18}{4} = 4.5$

(b) $\left|\frac{-2p}{18-2p}\right| < 1 \Longrightarrow$
$-1 < \frac{-2p}{18-2p} < 1 \Longrightarrow -1 < \frac{-2p}{18-2p}$ und $\frac{-2p}{18-2p} < 1$.
Wir analysieren diese zwei Bedingungen:
(i) $\frac{-2p}{18-2p} < 1$
Wenn man beides Seiten der Ungleichung mit Ausdrücken multipliziert, die Variablen enthalten, so muss man auf die möglichen Vorzeichen der Ausdrücke achten: $18-2p < 0$ oder $18 - 2p > 0$. Um eine Division durch 0 zu verhindern, muss man 9 aus dem Definitionsbereich entfernen. Da für den Definitionsbereich gilt $18-2p > 0$, können wir den Fall $18 - 2p < 0$ ausser Acht lassen und beide Seiten der Ungleichung mit $18 - 2p$ multiplizieren:
$-2p < 18 - 2p \Longrightarrow 0 < 18$
(ii) $-1 < \frac{-2p}{18-2p} \Longrightarrow -18 + 2p < -2p \Longrightarrow -18 < -4p \Longrightarrow \frac{-18}{-4} > p \Longrightarrow p < 4.5$
Damit gilt: $p < 4.5$

(c) $\left|\frac{-2p}{18-2p}\right| > 1 \Longrightarrow \frac{-2p}{18-2p} > 1$ oder $\frac{-2p}{18-2p} < -1$
Wir analysieren diese beiden Fälle:
(1) $\frac{-2p}{18-2p} > 1 \Longrightarrow -2p > 18 - 2p$ (Multiplikation durch $18 - 2p$ ohne Fallunterscheidungen möglich, da $18 - 2p > 0 \Longrightarrow 0 > 18$ (unmöglich).
(2) $\frac{-2p}{18-2p} < -1 \Longrightarrow -2p < -18 + 2p \Longrightarrow -4p < -18 \Longrightarrow p > \frac{-18}{-4} = 4.5$
Unter Berücksichtigung des ökonomischen Intervalls: $4.5 < p < 9$.

(d) Da $\lim\limits_{p\to 9^-} \frac{-2p}{18-2p} = -\infty$, ist $\lim\limits_{p\to 9^-} \left|\frac{-2p}{18-2p}\right| = \infty$. (Achtung: 9 gehört zwar nicht zum Definitionsbereich von $\frac{-2p}{18-2p}$, aber zum Definitionsbereich von $x\,(p)$)

(e) $\frac{-2p}{18-2p} = 0 \Longrightarrow p = 0$

13. Die Lungenkapazität einer Person sei eine Funktion des Alters t und gegeben durch die Funktion

$$K\,(t) = \frac{110\,(\ln\,(t) - 2)}{t} \text{ für } t \geq e^2$$

(a) Man berechne die Kapazitäten für $t = 10, 20, 30, 50$, und 70.

t	$K(t)$	
10	$\frac{110(\ln(10)-2)}{10}$	$= 3.328436023$
20	$\frac{110(\ln(20)-2)}{20}$	$= 5.476527505$
30	$\frac{110(\ln(30)-2)}{30}$	$= 5.137723733$
50	$\frac{110(\ln(50)-2)}{50}$	$= 4.206450612$
70	$\frac{110(\ln(70)-2)}{60}$	$= 3.533349666$

(b) Man berechne das Alter, für das die Kapazität maximal ist.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{110\left(\ln\left(t\right)-2\right)}{t} &= 110\frac{\frac{1}{t}t-\left(\ln t-2\right)\cdot 1}{t^2}\\ &= 110\frac{1-\ln t+2}{t^2}\\ &= 110\frac{3-\ln t}{t^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}110\frac{3-\ln t}{t^2} &= 0\\ \ln t &= 3\\ t &= \exp 3 = e^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}110\frac{3-\ln t}{t^2} &= 110\frac{-\frac{1}{t}t^2-\left(3-\ln t\right)2t}{t^4}\\ &= 110\frac{-1-\left(3-\ln t\right)2}{t^3}\\ &= 110\frac{-1-6+2\ln t}{t^3}\\ &= 110\frac{-7+2\ln t}{t^3}\end{aligned}$$

Nullstelle eingesetzt:

$$110\frac{-7+2\ln e^3}{\left(e^3\right)^3} = -0.013576 < 0.$$

Also liegt ein Maximum vor.

12.4 Lernziele

- Den Zusammenhang von Stückkosten und Grenzkosten mit Hilfe der Fahrstrahlanalyse erläutern können.
- Gewinnanalysen im Falle völliger Konkurrenz und der Monopolsituation vernehmen können (entsprechende Graphiken erstellen und interpretieren können).
- Die Definition der Elastizität kennen und intuitiv erklären können.
- Aufgaben von der Art der Übungen machen können.

Kapitel 13

Folgen und Reihen

Folgen und Reihen spielen in der Finanzmathematik eine wichtige Rolle (Rentenberechnungen, Abzahlungspläne, Investitionsrechnung, Kursberechnung). Es werden in diesem Kapitel die wichtigsten Grundbegriffe samt Anwendungen eingeführt, ohne jedoch in die Verästelungen rechtlicher und pragmatischer Art, die der Finanzmathematik eigen sind, einzudringen. Dazu wird am Ende des Kapitels auf Literatur verwiesen.

Definition 13.0.1. *Eine Folge ist eine Abbildung* $\mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$. *Eine endliche Folge ist eine Abbildung* $\mathbb{N}_n^* \to \mathbb{R}$. ◊

Manchmal werden Folgen auch auf $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}_n$ definiert. Bei Folgen ist es üblich, für den Funktionswert $f(n) = a$ der Folge f die Schreibweise a_n zu verwenden. Wir nennen a_n das $n-$te Glied der Folge f. Für die Folge f verwendet man oft die Schreibweise (a_n).

13.1 Vorbemerkungen zum Summenzeichen

Wir haben bisher das Summenzeichen verwendet, um die Summe der Komponenten von $n-$Tupeln zu bilden. Man kann das Summenzeichen analog verwenden, um die Summe von Folgengliedern zu bilden.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$$

wobei a_i die Glieder einer Folge sind. Zudem kann man das Summenzeichen verwenden, indem man den Index zur Berechnung der einzelnen Summanden verwendet. So ist z.B.

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + ... + n - 2 + n - 1 + n$$

oder

$$\sum_{i=1}^{10} 2i = 2 + 4 + 6 + ... + 18 + 20 = 110$$

oder

$$\sum_{i=1}^{4} 4i^2 = 4 + 16 + 36 + 64 = 120.$$

Wir führen nun spezielle Folgen ein.

13.2 Arithmetische Folgen

Folgen werden arithmetisch genannt, wenn der Abstand zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern konstant ist. Diese Idee wird in der folgenden Definition gefasst:

Definition 13.2.1. (a_n) *ist eine arithmetische Folge genau dann, wenn*

$$\begin{aligned} a_1 &\in \mathbb{R} \\ a_{n+1} &= a_n + b \end{aligned}$$

mit $b \in \mathbb{R}$ *und* $n \in \mathbb{N}^*$. ◊

Es handelt sich um eine sogenannte „rekursive Definition“. Es wird eine Definition fürs erste Glied geliefert, dann mit Hilfe des $n-$ten Gliedes eine Definition fürs $n+1-te$ Glied. Damit ist die Definition für alle Glieder gegeben. Denn für a_2 gilt durch Einsetzen in die Definition von a_{n+1}

$$a_2 = a_{1+1} = a_1 + b,$$

was bei gegebenem b und a_1 definiert ist. Für a_3 gilt wiederum mittels Einsetzen in die Definition $a_3 = a_2 + b$, was definiert ist, da a_2 bereits definiert ist etc.

Aus der Definition folgt unmittelbar, dass das folgende Glied jeweils die Summe der Konstanten b und des vorausgehenden Gliedes ist. Formal kann man für $n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$ zeigen:

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= (a_{n-1} + b) - a_{n-1} \\ &= b. \end{aligned}$$

Beispiel 13.2.2. *Sei* (a_n) *eine arithmetische Folge mit* $a_1 := 5; a_n := a_{n-1} + 2$. *Dann ist z.B.*

$$\begin{aligned} a_2 &= 5 + 2 = 7 \\ a_3 &= 7 + 2 = 9 \\ a_4 &= 9 + 2 = 11. \end{aligned}$$

Die in ein kartesisches Koordinatensystem eingetragenen Punkte des Graphen einer arithmetischen Folge liegen auf der Geraden, die durch die Funktionsgleichung

$$f(x) = bx + (a_1 - b)$$

gegeben ist. Fürs Beispiel ergibt sich die graphische Darstellung (s. Abbildung 13.2.1).

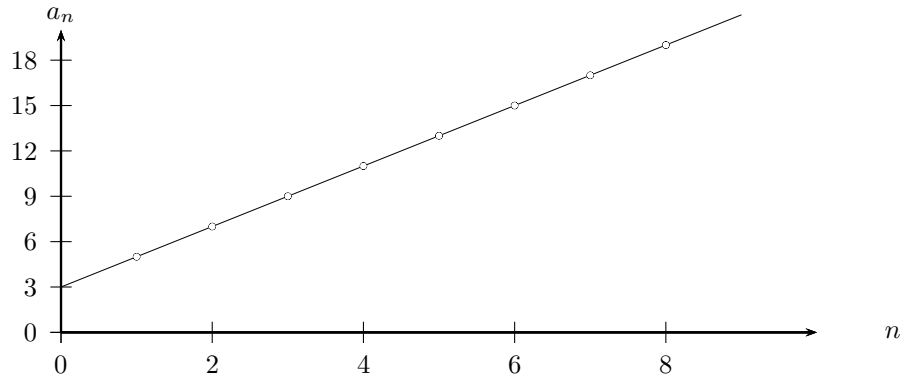


Abbildung 13.2.1: Graphische Darstellung der Punkte des Graphen einer arithmetischen Folge (a_n) mit entsprechender Gerade $f(x) = bx + a_1 - b$

Entsprechend kann man arithmetische Folgen auch „in geschlossener" (statt in rekursiver Form wie oben) angeben: $f(n) = bn + (a_1 - b)$ für $n \in \mathbb{N}^*$. Die geschlossene Form kann leicht in die rekursive Form überführt werden. a_1 ist berechenbar durch $n = 1 : f(1) = b + a_1 - b = a_1$. b ist berechenbar durch die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder der Folge: $f(n+1) - f(n) = b(n+1) + (a_1 - b) - (bn + (a_1 - b)) = b$. ◊

Es wäre nützlich, das $n-$te Glied einer arithmetischen Folge unmittelbar aus a_1 und b berechnen zu können, ohne auf die rekursive Definition zurückgreifen zu müssen. In der Tat gilt:

Satz 13.2.3. *Für arithmetische Folgen gilt:*

$$a_n = a_1 + (n-1)b \text{ für } n > 1.$$

Beweis. Wir beweisen mittels vollständiger Induktion, d.h. wir zeigen, dass der Satz für das zweite Glied der Folge gilt. Dann zeigen wir, dass er für das $n+1-te$ Glied gilt, unter der Voraussetzung, dass er für das $n - te$ Glied gilt. Daraus schliessen wir dann, dass er für alle Glieder a_n, $n > 1$, gilt.
(i) Gemäss Definition der arithmetischen Folge gilt

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + b \\ &= a_1 + 1 \cdot b \\ &= a_1 + (2-1) \cdot b \end{aligned}$$

Damit gilt der Satz für $n = 2$.
(ii) Wir nehmen an, der Satz gelte fürs $n-$te Glied. Damit gilt:

$$a_n = a_1 + (n-1)b.$$

Laut Definition der arithmetischen Folge gilt

$$a_{n+1} = a_n + b$$

Durch Einsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_1 + (n-1)b + b \\ &= a_1 + (n+1-1)b \end{aligned}$$

Damit gilt der Satz für $n + 1$, wenn er für n gilt.
(iii) Daraus kann man schliessen, dass der Satz für alle $n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$ gilt. □

In verschiedenen Zusammenhängen braucht man die Summe der ersten n Glieder einer arithmetischen Folge. Es wäre nützlich, eine Formel zu haben, um diese Summe zu berechnen. Man kann festhalten:

Satz 13.2.4. *Für eine arithmetische Folge mit $a_1, a_{n+1} = a_n + b$ gilt:*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i &= \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \\ &= \frac{n(2a_1 + (n-1)b)}{2}\end{aligned}$$

Beweis. Gemäss Satz 13.2.3 gilt:

$$\begin{aligned}a_{n-k} &= a_1 + (n-k-1)b \\ a_{k+1} &= a_1 + kb,\end{aligned}$$

womit man

$$\begin{aligned}a_{k+1} + a_{n-k} &= a_1 + (n-k-1)b + a_1 + kb \\ &= a_1 + a_1 + (n-k-1+k)b \\ &= a_1 + a_1 + (n-1)b \\ &= a_1 + a_n\end{aligned} \tag{13.2.1}$$

erhält. Zudem gilt offensichtlich auf Grund des Kommutativgesetzes der Addition

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i &= a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ \sum_{i=1}^{n} a_i &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_3 + a_2 + a_1\end{aligned}$$

Bildet man die Summe dieser beiden Gleichungen, erhält man:

$$2\sum_{i=1}^{n} a_i = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + ... + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

und mit (13.2.1)

$$\begin{aligned}2\sum_{i=1}^{n} a_i &= n(a_1 + a_n) \quad \Longrightarrow \\ \sum_{i=1}^{n} a_i &= \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \\ &= \frac{n(2a_1 + (n-1)b)}{2} \quad \text{(mit Einsetzen von } a_1 + (n-1)b \text{ für } a_n)\end{aligned}$$

□

Durch Einsetzen von $a_1 = 1$ und $b = 1$ in Satz 13.2.4 erhält man den oft gebrauchten Satz:

Satz 13.2.5. *Für die arithmetische Folge mit $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = a_n + 1$ gilt*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} i &= \frac{n(2+(n-1))}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

Beispiel 13.2.6. *Anton legt 10000 Franken auf die Bank und erhält jährlich 2% ausbezahlt. Am Ende von 12 Jahren erhält er die 10000 Franken zurück. Wieviel wurde ihm in 12 Jahren insgesamt samt der 10000 Franken ausbezahlt? Es liegt eine arithmetische Folge mit $a_1 = 10000$, $b = 200$ und $n = 13$ vor. Man spricht von einfacher Verzinsung, da der Zins nicht zum Kapital hinzugeschlagen wird. Zu berechnen ist*

$$\begin{aligned}a_{13} &= a_1 + (13-1)b \\ &= 10000 + 12 \cdot 200 \\ &= 12400,\end{aligned}$$

denn $a_1 = 10000$; am Ende des ersten Jahres ist $a_2 = 10000 + (2-1)200$. Am Ende des zweiten Jahres ist $a_3 = 10000 + (3-1)200$, etc.. ◊

Die Definitionen der strikten Monotonie (s. Seite 128) übertragen sich auf Folgen. Man kann offenbar festhalten:

Satz 13.2.7. *Für eine arithmetische Folge (a_n) mit $a_1, a_{n+1} = a_n + b$ gilt: Ist $b > 0$, dann ist (a_n) strikt monoton wachsend, ist $b < 0$, dann ist (a_n) strikt monoton fallend.*

Beweis. für die erste Aussage: Sei $n > n_0$ und $b > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}n > n_0 &\Longleftrightarrow \\ n-1 > n_0 - 1 &\Longleftrightarrow \\ (n-1)\,b > (n_0-1)\,b &\Longleftrightarrow \\ a_1 + (n-1)\,b > a_1 + (n_0-1)\,b &\Longleftrightarrow \\ a_n > a_{n_0}&.\end{aligned}$$

Der Beweis für die zweite Aussage erfolgt analog. □

Übungen

1. Bestimmen Sie b für die arithmetischen Folgen mit $a_n = f(n) = a_{n-1} + b$:

   (a) $f(n) = 7n - 12$, $n \in \mathbb{N}^*$

   (b) $a_n = \frac{3n+2}{5}$, $n \in \mathbb{N}^*$

   (c) $f(n) = 2\sqrt{2} + \frac{n-1}{\sqrt{2}}$, $n \in \mathbb{N}^*$

   Geben Sie diese Folgen auch in rekursiver Form an.

2. Gegeben ist für eine arithmetische Folge $a_1 = -100$; $a_2 = -17$; Berechnen Sie a_6. Geben Sie die Folge in rekursiver und in geschlossener Form an.

3. Sei (a_n) eine arithmetische Folge mit $a_n = 3n - 12$. Berechnen Sie $\sum_{i=1}^{500} a_i$.

Lösungen

1. Es ergibt sich:

   (a) $f(n+1) - f(n) = 7(n+1) - 12 - (7n - 12) = 7 = b$
   rekursive Form: $f(1) = 7 \cdot 1 - 12 = -5$. Damit gilt $a_1 = -5$; $a_{n+1} = a_n + 7$.

   (b) $a_{n+1} - a_n = \frac{3(n+1)+2}{5} - \frac{3n+2}{5} = \frac{3}{5} = b$
   rekursive Form: $a_1 = \frac{3 \cdot 1 + 2}{5} = 1$; $a_{n+1} = a_n + \frac{3}{5}$.

   (c) $f(n+1) - f(n) = 2\sqrt{2} + \frac{n+1-1}{\sqrt{2}} - \left(2\sqrt{2} + \frac{n-1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
   rekursive Form: $f(1) = 2\sqrt{2} + \frac{1-1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} = a_1$; $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

2. $b = a_2 - a_1 = -17 + 100 = 83$. Damit ist dann mit $a_n = a_1 + (n-1)b$

$$\begin{aligned} a_6 &= -100 + (6-1)83 \\ &= 315 \end{aligned}$$

   rekursive Form: $a_1 = -100$; $a_{n+1} = a_n + 83$;
   geschlossene Form: $f(n) = bn + (a_1 - b)$ (s. Beispiel 13.2.2). Damit gilt dann $f(n) = 83n - 100 - 83 = 83n - 183$ für $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Es gilt

$$\begin{aligned} b &= a_{n+1} - a_n \\ &= 3(n+1) - 12 - (3n - 12) \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \cdot (1) - 12 \\ &= -9. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{500} &= -9 + 499 \cdot 3 \\ &= 1488 \end{aligned}$$

   Damit gilt dann:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{500} a_i &= \frac{500\,(-9 + 1488)}{2} \\ &= 369750 \end{aligned}$$

13.3 Geometrische Folgen

Geometrische Folgen spielen in der Finanzmathematik eine wichtige Rolle. Wir definieren diese wie folgt:

Definition 13.3.1. *Die Folge (a_n) ist geometrisch genau dann, wenn*

$$\begin{aligned} a_1 &\in \mathbb{R} \\ a_{n+1} &= a_n q \end{aligned}$$

mit $n \in \mathbb{N}^*, q \in \mathbb{R}^+ \backslash \{0, 1\}$. ◊

Auch hier wäre es nützlich, eine Formel zu haben, mit Hilfe derer man a_n mit q und a_1 direkt berechnen könnte. Man kann den folgenden Satz beweisen:

Satz 13.3.2. *Ist (a_n) eine geometrische Folge mit a_1 und $a_{n+1} = a_n q$, dann gilt*

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

mit $n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$.

Beweis. (i) Der Satz gilt für a_2, denn gemäss Definition gilt $a_2 = a_1 q = a_1 q^1 = a_1 q^{2-1}$
(ii) Wir nehmen an, dass der Satz für a_n gilt. Damit gilt dann

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

und

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n q \\ &= a_1 q^{n-1} q \\ &= a_1 q^n \\ &= a_1 q^{n+1-1} \end{aligned}$$

Damit gilt der Satz für $n+1$, wenn er für n gilt.
(iii) Daraus kann man schliessen, dass der Satz für $n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$ gilt. □

Man kann also auch geometrische Folgen in „geschlossener“ Form angeben.

Die Punkte einer geometrischen Folge liegen auf einer Funktion, die durch eine Gleichung der folgenden Art definiert ist (Produkt einer Konstanten mit der Verkettung der Exponentialfunktion zur Basis q mit der Funktion $x - 1$, s. auch die folgende graphische Darstellung 13.3.2):

$$f(x) = a_1 q^{x-1},$$

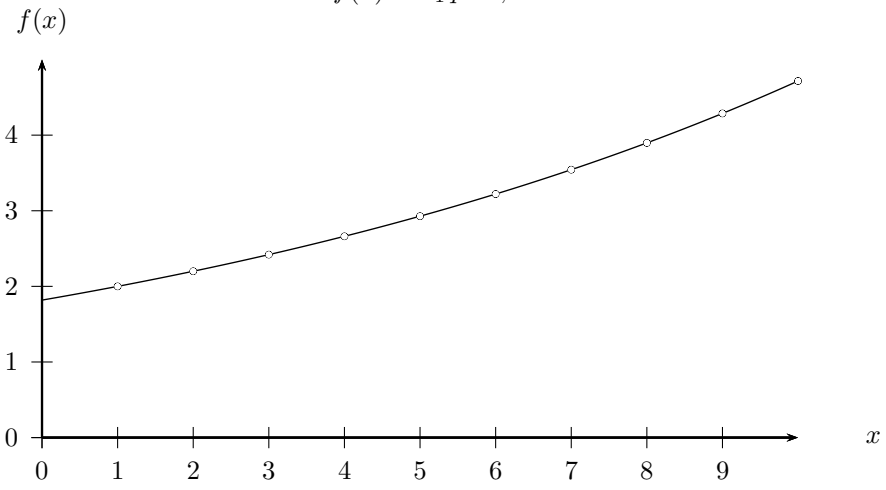


Abbildung 13.3.2: Graphische Darstellung der geometrischen Folge $a_n = 2 \cdot 1.1^{n-1}$ und der Funktion $f(x) = 2 \cdot 1.1^{x-1}$

Beispiel 13.3.3. *Die Folge (K_n) mit*

$$K_n = K_0(1+i)^n \text{ (Zinseszinsformel)}$$

ist eine geometrische Folge, die rekursiv mit $a_1 = K_0(1+i) = K_1$ und $a_{n+1} = K_{n+1} = K_n(1+i)$ definiert werden kann. Entsprechend ist $q = 1 + i$. Aus der rekursiven Form kommt man auf die geschlossene Form $K_n = K_0(1+i)^n$ durch $K_n = a_1 q^{n-1} = K_0(1+i)(1+i)^{n-1} = K_0(1+i)^n$. ◊

Als nächstes beweisen wir einen Zwischensatz, mit Hilfe dessen wir in der Folge eine Formel für die Summe der ersten n Glieder einer geometrischen Folge herleiten können:

Satz 13.3.4.

$$\begin{aligned}\frac{q^n-1}{q-1} &= \sum_{i=0}^{n-1} q^i \\ &= 1+q+q^2+...+q^{n-2}+q^{n-1}\end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}&(q-1)(1+q+q^2+...+q^{n-2}+q^{n-1}) \\ &= q+q^2+q^3+...+q^{n-1}+q^n-(1+q+q^2+...+q^{n-2}+q^{n-1}) \\ &= q^n-1 \Longrightarrow \\ &\qquad \frac{q^n-1}{q-1} = (1+q+q^2+...+q^{n-2}+q^{n-1})\end{aligned}$$

□

Damit können wir nun die folgende Formel für die Summe der ersten n Glieder einer geometrischen Folge herleiten:

Satz 13.3.5. *Ist (a_n) eine geometrische Folge mit $a_1, a_{n+1} = a_n q$, dann gilt*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_1 q^i = a_1 \frac{q^n-1}{q-1}$$

Beweis.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$$

Damit gilt dann gemäss Satz 13.3.2

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i &= a_1q^0 + a_1q + a_1q^2 + ... + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} \\ &= a_1(1+q+q^2+...+q^{n-2}+q^{n-1}) \\ &= a_1\frac{q^n-1}{q-1} \text{ (letzter Schritt mit Satz 13.3.4)}\end{aligned}$$

□

Wir halten bezüglich des Wachstumsverhaltens von geometrischen Folgen den folgenden einleuchtenden Satz fest:

Satz 13.3.6. *Sei (a_n) eine geometrische Folge mit a_1 und $a_n = qa_{n-1}$, dann gilt:*
Wenn $a_1 > 0$ und $q > 1$, dann ist (a_n) strikt monoton wachsend.
Wenn $a_1 > 0$ und $0 < q < 1$, dann ist (a_n) strikt monoton sinkend.
Wenn $a_1 < 0$ und $q > 1$, dann ist (a_n) strikt monoton sinkend.
Wenn $a_1 < 0$ und $0 < q < 1$, dann ist (a_n) strikt monoton wachsend.
Wenn $a_1 = 0$, dann ist ist (a_n) konstant.

Beweis. Beweis für $a_1 > 0$ und $0 < q < 1$:

$$\begin{aligned}n > n_0 &\Longleftrightarrow \\ q^n < q^{n_0} &\Longleftrightarrow \\ a_1q^n < a_1q^{n_0} &\Longleftrightarrow \\ a_1q^{n-1} < a_1q^{n_0-1} &\Longleftrightarrow \\ a_n < a_{n_0}&\end{aligned}$$

Die anderen Beweise, bis auf den letzten, erfolgen analog. Der letzte Satz gilt, da $a_1 q^n = 0$ für $a_1 = 0$ □

Beispiel 13.3.7. *Sei $R = 500$ eine jährliche Einzahlung auf die Bank, die zum Zinssatz $i = 0.03$ verzinst wird. Wieviel Geld liegt nach $n = 10$ Jahren auf der Bank, wenn die Einzahlung jeweils Ende Jahr erfolgt (nachschüssig)?*
Es gilt offensichtlich mit der Zinseszinsformel: Die erste Einzahlung hat am Ende des $n-$ten Jahres einen Geldwert von

$$R\,(1+i)^{n-1}$$

Die zweite Einzahlung hat am Ende des $n-$ten Jahres einen Geldwert von

$$R\,(1+i)^{n-2}$$

Die zweitletzte Einzahlung hat am Ende des $n-$ten Jahres einen Geldwert von

$$R\,(1+i)^{1}$$

Die letzte Einzahlung, die am Anfang des $n-$ten Jahres erfolgt, hat am Ende des $n-$ten Jahres einen Geldwert von

$$R\,(1+i)^{0} = R$$

(s. Abbildung 13.3.3)

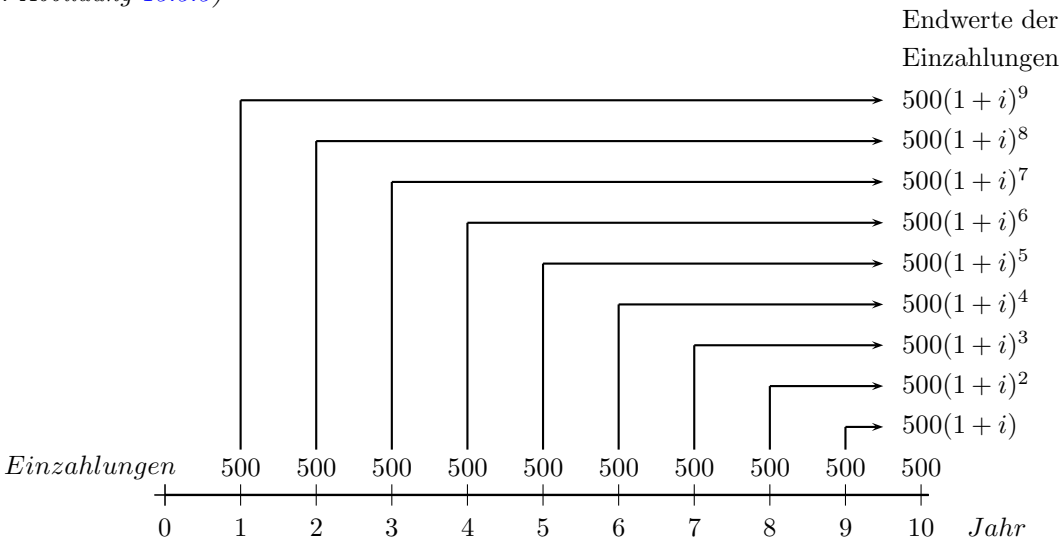


Abbildung 13.3.3: Endwerte der Einzahlungen einer nachschüssigen Rente

Damit ist die Summe dieser Endwerte die Summe der Glieder einer geometrischen Folge mit $1+i$ für q und R für a_1, wobei gilt:

$$\sum_{k=0}^{n-1} R(1+i)^k = R + R(1+i) + R(1+i)^2 + \ldots + R(1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-1}.$$

Man erhält damit gemäss Satz 13.3.5

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} R(1+i)^k &= R\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} \\ &= R\frac{(1+i)^n - 1}{i}\end{aligned}$$

und im Beispiel

$$\sum_{k=0}^{9} 500(1+0.03)^k = 500\frac{(1+0.03)^{10}-1}{0.03}$$
$$= 5731.9.$$

$\Diamond$

Das Beispiel lässt uns den folgenden Satz festhalten.

Satz 13.3.8. *Der Endwert K_n einer jährlichen Ein- oder Auszahlung am Schluss des Jahres (nachschüssig) eines fixen Betrages R (Rente) beträgt*

$$K_n = R\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

(mit i = Zinssatz; n = Anzahl Jahre).

Beispiel 13.3.9. *Sei $R = 500$ eine jährliche Einzahlung auf die Bank, die zum Zinssatz $i = 0.03$ verzinst wird. Wieviel Geld liegt nach $n = 10$ Jahren auf der Bank, wenn die Einzahlung jeweils Anfangs Jahr erfolgt (vorschüssig)? Es gilt offensichtlich mit der Zinseszinsformel: Die erste Einzahlung hat am Ende des $n-$ten Jahres einen Geldwert von*

$$R\,(1+i)^n$$

Die zweite Einzahlung hat am Ende des $n-$ten Jahres einen Geldwert von

$$R\,(1+i)^{n-1}$$

Die zweitletzte Einzahlung hat am Ende des $n-$ten Jahres einen Geldwert von

$$R\,(1+i)^2$$

Die letzte Einzahlung, die am Ende des $n-$ten Jahres erfolgt, hat dann einen Geldwert von

$$R\,(1+i)^1$$

(s. Abbildung 13.3.4)

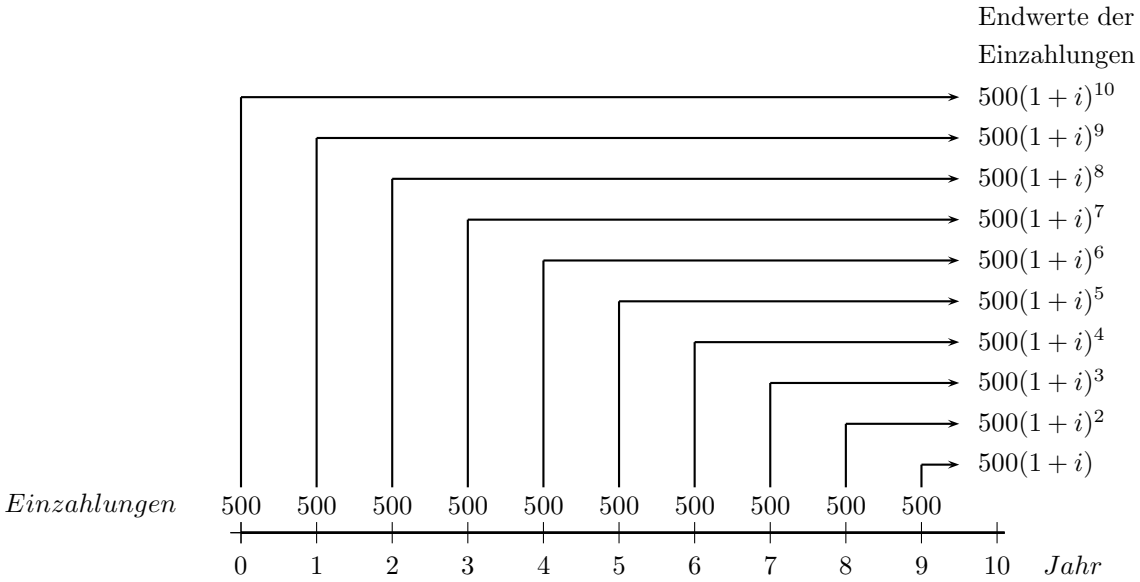


Abbildung 13.3.4: Endwerte der Einzahlungen einer vorschüssigen Rente

Damit ist die Summe dieser Geldwerte

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} R(1+i)^k &= R(1+i) + R(1+i)^2 + ... + R(1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^n \\ &= (1+i)\left(R + R(1+i)^1 + ... + R(1+i)^{n-3} + R(1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-1}\right) \\ &= (1+i)\sum_{k=0}^{n-1} R(1+i)^k \\ &= (1+i)\,R\frac{(1+i)^n - 1}{i}\end{aligned}$$

und im Beispiel

$$(1+0.03)\,500\frac{(1+0.03)^{10}-1}{0.03} = 5903.9$$

◊

Das Beispiel lässt uns den folgenden Satz festhalten.

Satz 13.3.10. *Der Endwert K_n einer jährlichen Ein- oder Auszahlung am Anfang des Jahres (vorschüssig) eines fixen Betrages R (Rente) beträgt*

$$K_n = (1+i)\,R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

(mit i = Zinssatz; n = Anzahl Jahre).

Übungen

1. Finden Sie für
$$a_n = 15^{n-1} \cdot 500$$
die rekursive Form.

2. Lösen Sie die Gleichung
$$K_n = R\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right)$$
nach den Variablen R, i und n auf und lösen Sie dann die folgenden Aufgaben:

(a) Welche Summe muss jährlich einbezahlt werden, um in 14 Jahren ein Kapital von 50′000 Franken zu akkumulieren ($i = 0.05$, nachschüssig)?

(b) Welches Kapital wird durch die jährliche Zahlung von 4500 Franken nach 20 Jahren akkumuliert ($i = 0.02$, nachschüssig)?

(c) Nach wie vielen Jahren wird durch die regelmässige Zahlung von 3000 Franken ein Kapital von 45′000 akkumuliert ($i = 0.03$, nachschüssig)?

(d) Zu welchem Zinssatz i wird mit der jährlichen Zahlung von 2500 Franken nach drei Jahren ein Kapital von 8′200 akkumuliert (nachschüssig)?

3. Lösen Sie die Gleichung

$$K_n = (1+i)R\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right)$$

nach den Variablen R, i und n auf und lösen Sie dann die folgenden Aufgaben:

(a) Welche Summe muss jährlich einbezahlt werden, um in 14 Jahren ein Kapital von 50′000 Franken zu akkumulieren ($i = 0.05$, vorschüssig)?

(b) Welches Kapital wird durch die jährliche Zahlung von 4500 Franken nach 20 Jahren akkumuliert ($i = 0.02$, vorschüssig)?

(c) Nach wie vielen Jahren wird durch die regelmässige Zahlung von 3000 Franken ein Kapital von 45′000 akkumuliert ($i = 0.03$, vorschüssig)?

(d) Zu welchem Zinssatz i wird mit der jährlichen Zahlung von 2500 Franken nach drei Jahren ein Kapital von 8′200 akkumuliert (vorschüssig)?

4. Wegen des exponentiellen Charakters der Zinsenzinsformel, machen bei Kapitalanlagen relative kleine Zins-Unterschiede einen grossen Unterschied in mittlerer Frist. Berechnen Sie für $i = 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.10, 0.11$ den Endwerte eines Kapitals von 1000 in 15 Jahren.

Lösungen

1. Da $a_n = a_1 q^{n-1}$, gilt für eine geometrische Folge

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_1 q^n}{a_1 q^{n-1}} = q$$

Wir können damit wie folgt überprüfen, ob eine geometrische Folge vorliegt:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{15^n \cdot 500}{15^{n-1} \cdot 500} = 15$$

Damit ist durch die Gleichung eine geometrische Folge definiert mit $q = 15$. Zudem gilt:

$$a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{15^{2-1} \cdot 500}{15} = 500$$

2.

$$R = \frac{K_n i}{(1+i)^n - 1}$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{K_n i}{R} + 1\right)}{\ln(1+i)}$$

Nach i kann die Gleichung nicht aufgelöst werden. Es gilt allerdings:

$$R\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right) - K_n = 0 \Longrightarrow$$

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i} - \frac{K_n}{R} = 0$$

Es geht also darum, die Nullstelle einer rationalen Funktion zu bestimmen - statt der Variable x liegt die Variable i vor. Die durch die Gleichung gegebene rationale Funktion ist nicht definiert für $i = 0$. Wir können zusätzlich vereinfachen:

$$\frac{K_n}{R}i - (1+i)^n + 1 = 0$$

Die Nullstellen dieses Polynoms sind z.B. mit dem Solver von Excel oder mit R zu finden.

(a)

$$R = \frac{K_n i}{(1+i)^n - 1} \Longrightarrow R = \frac{50000 \cdot 0.05}{(1+0.05)^{14} - 1} = 2551.2$$

(b)

$$K_n = R\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right) \Longrightarrow K_n = 4500\left(\frac{(1+0.02)^{20} - 1}{0.02}\right)$$
$$= 109338.1641 \text{ (gerundet: } 109338.15)$$

(c)

$$n = \frac{\ln\left(\frac{K_n i}{R} + 1\right)}{\ln(1+i)} \Longrightarrow n = \frac{\ln\left(\frac{45000 \cdot 0.03}{3000} + 1\right)}{\ln(1+0.03)} = 12.57$$

(d)

$$\frac{K_n}{R}i - (1+i)^n + 1 = 0 \Longrightarrow \frac{8200}{2500}i - (1+i)^3 + 1 = 0$$

Mit dem Solver von Excel oder mit R: $i = 0.090595685$.
R-Befehle: f=function(x) (8200/2500)*x - (1+x)^3 +1
uniroot(f,c(0.0000001,0.5),tol=10^-20)

3.

$$R = \frac{K_n i}{(1+i)\left((1+i)^n - 1\right)}$$
$$n = \frac{\ln\left(\frac{K_n i}{R(1+i)} + 1\right)}{\ln(1+i)}$$

Die Berechnung von i erfolgt wiederum mit der Lösung des Nullstellenproblems einer rationalen Funktion $\mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
(1+i)R\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right) - K_n = 0 &\Longrightarrow \\
(1+i)R\left((1+i)^n - 1\right) - K_n i = 0 &\Longrightarrow \\
R\left((1+i)^{n+1} - (1+i)\right) - K_n i = 0 &\Longrightarrow \\
R(1+i)^{n+1} - R - Ri - K_n i = 0 &\Longrightarrow \\
R(1+i)^{n+1} - R - (R+K_n)i = 0 &
\end{aligned}$$

(a)

$$R = \frac{K_n i}{(1+i)\left((1+i)^n - 1\right)} \Longrightarrow R = \frac{50000 \cdot 0.05}{(1+0.05)\left((1+0.05)^{14} - 1\right)} = 2429.7$$

(b)

$$K_n = (1+i)R\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right) \Longrightarrow K_n = (1+0.02)4500\left(\frac{(1+0.02)^{20} - 1}{0.02}\right)$$
$$= 111524.9274 \text{ (gerundet: } 111524.95)$$

(c)

$$n = \frac{\ln\left(\frac{K_n i}{R(1+i)} + 1\right)}{\ln(1+i)} \Longrightarrow n = \frac{\ln\left(\frac{45000 \cdot 0.03}{3000(1+0.03)} + 1\right)}{\ln(1+0.03)} = 12.263$$

(d)

$$R(1+i)^{n+1} - R - (R + K_n)i = 0 \Longrightarrow$$
$$2500(1+i)^4 - 2500 - 10\,700i = 0$$

Mit Excel oder mit R erhalten wir $i = 0.04528409$
Kontrolle:

$$K_n = (1 + 0.04528409)2500\left(\frac{(1+0.04528409)^3 - 1}{0.04528409}\right)$$
$$= 8200$$

Bemerkung: Da der Zinssatz grösser als 0 sein wird und kleiner als 1, gibt man als Grenzen des Intervalls am besten z.B. 0.000001 und 1 ein.

4. Es ergibt sich

Zinssätze i	$1000(1+i)^{15}$	Zunahmefaktor
0.01	1160.968955	1.160968955
0.02	1345.868338	1.345868338
0.03	1557.967417	1.557967417
0.04	1800.943506	1.800943506
0.05	2078.928179	2.078928179
0.06	2396.558193	2.396558193
0.07	2759.031541	2.759031541
0.08	3172.169114	3.172169114
0.09	3642.48246	3.64248246
0.1	4177.248169	4.177248169
0.11	4784.589488	4.784589488

Tabelle 13.3.1: Unterschiedliche Zunahmegeschwindigkeit eines Kapitals bei Verzinsung der Zinsen je nach Zinssatz

13.4 Durchschnittliche Zinssätze

13.4.1 Geometrisches Mittel

Zinssätze verändern sich über die Jahre. Sei ein n-Tupel von Zinssätzen $(i_1, i_2, ..., i_n)$ mit den unterschiedlichen Zinssätzen der Jahre 1 bis n gegeben. Wird ein Kapital zu diesen Zinssätzen angelegt - wobei am Ende des Jahres jeweils der Zins zum Kapital geschlagen wird - und interessiert man sich für den mittleren Zins, so wird das sogenannte geometrische Mittel der Zinsraten berechnet.

Um dieses einzuführen, wird zuerst ein Symbol für das Produkt der Komponenten von $n-$Tupeln oder von Folgengliedern eingeführt:

Definition 13.4.1. *Für x_i gilt $\prod_{i=1}^{n} x_i := x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_{n-1} \cdot x_n$ mit $x = (x_1, ..., x_n)$ oder für Folgenglieder x_i der Folge (x_n) mit $1 \leq i \leq n$.* ◊

Beispiel 13.4.2. *So ist z.B.* $\prod_{i=1}^{5} x_i = 6 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 252$ *für* $x = (6, 7, 1, 2, 3)$.

Es ist $\prod_{i=1}^{4} (5 + 3i) = 20\,944$.

Es ist $\prod_{i=1}^{4} i^2 = 576$ ◊

Ein Kapital werde pro Jahr jeweils zu unterschiedlichen Zinssätzen verzinst. Es gilt damit

$$\begin{aligned} K_n &= K_0(1 + i_1)\,(1 + i_2)\,...\,(1 + i_{n-1})\,(1 + i_n) \\ &= K_0 \prod_{j=1}^{n} (1 + i_j) \end{aligned}$$

(K_n) ist eine Folge, wobei wir das jeweils folgende Glied nicht mittels der Multiplikation mit einer identischen Konstanten gewinnen sondern mit einer jeweils verschiedenen Konstanten. Es stellt sich die Frage, ob sich ein mittlerer Zinssatz berechnen lässt, der zum selben Resultat K_n führt. Für einen mittleren Zinssatz müsste gelten:

$$K_0\,(1 + i)^n = K_0 \prod_{j=1}^{n} (1 + i_j)$$

Damit gilt:

$$(1 + i)^n = \prod_{j=1}^{n} (1 + i_j)$$

und

$$\begin{aligned} 1 + i &= \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} (1 + i_j)} \Longrightarrow \\ i &= \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} (1 + i_j)} - 1 \end{aligned}$$

Definition 13.4.3. *Für* $x_i > 0$ *wird*

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

das geometrische Mittel von $(x_1, ..., x_n)$ *genannt.* ◊

Bemerkung 13.4.4. *Für ein* $x_i = 0$*, wird* $\prod_{i=1}^{n} x_i = 0$*. Entsprechend wird* $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = 0$*. Deshalb ist eine Definition, die* $x_i = 0$ *zulässt, im allgemeinen wenig sinnvoll.* ◊

Bemerkung 13.4.5. *Das arithmetische Mittel der Zinssätze führt nicht zum korrekten Ergebnis, wie man sich leicht überzeugen kann. Sei der folgende Zinsvektor gegeben:*

$$(0.01, 0.02, 0.015, 0.03)\,.$$

Das arithmetische Mittel der Zinssätze ist

$$\frac{0.01 + 0.02 + 0.015 + 0.03}{4} = 0.018\,75.$$

Ein Kapital von 1000 *ergibt mit diesem mittleren Zinssatz*

$$1000\,(1+0.018\,75)^4 = 1077.135866.$$

Das korrekte Endkapital ist demgegenüber:

$$1000\,(1+0.01)\,(1+0.02)\,(1+0.015)\,(1+0.03) = 1077.02259.$$

Bei kleinen Zinssätzen ist der Unterschied nicht besonders gross. ◊

Bemerkung 13.4.6. *Es gilt*

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

und damit

$$\ln \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \ln \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \ln \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln x_i.$$

Das logarithmierte geometrische Mittel ist damit das arithmetische Mittel der logarithmierten Faktoren des betrachteten Produktes. Das geometrische Mittel erhält man durch

$$\exp\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right).$$

◊

13.4.2 Interner Zinssatz

Um die Rentabilität von Investitionen zu vergleichen, gibt es unterschiedliche Methoden. Eine davon besteht in der Berechnung des sogenannten internen Zinssatzes. Bei gleichem Risiko ist eine Investition mit höherem internem Zinssatz vorzuziehen. Bei Investitionen ist der Zinsvektor nicht gegeben. Möchte man den durchschnittlichen Zins berechnen (durchschnittliche Rendite), so geht man von folgender Gleichung aus

$$K_n = K_0\,(1+i)^n + d_1\,(1+i)^{n-1} + \ldots + d_{n-1}\,(1+i) = K_0\,(1+i)^n + \sum_{j=1}^{n-1} d_j\,(1+i)^{n-j}, \quad (13.4.2)$$

wobei d_j den Geldfluss, der am Ende des $j-$ten Jahres erfolgt, K_0 die Anfangsinvestition und K_n das Endkapital angibt. Es wird also der Zinssatz berechnet, der die Investitionen in den Enderlös aufzinst. Die Geldflüsse d_j können positiv (weitere Investitionen) oder negativ sein (Verminderung der Investition durch Geldentnahme aus der Investition), wobei man zur Berechnung den Nettozufluss oder Nettoabfluss betrachtet. i wird „interner Zinssatz“ genannt. Um diesen zu bestimmen, muss man das Gleichungssystem nach $r := 1+i$ auflösen. Es handelt sich um ein Polynom $n-$ten Grades, das mit den bekannten Näherungsmethoden gelöst werden kann.

Beispiel 13.4.7. *Sei* $K_0 = 5000$, $d_1 = -200$, $d_2 = 300$, $d_3 = 400$, $d_4 = 500$ *und* $K_5 = 7000$. *Dann ergibt sich*

$$7000 = 5000r^5 - 200r^4 + 300r^3 + 400r^2 + 500r$$

In R muss man eingeben: polyroot(c(-7000,500,400,300,-200,5000)) und man erhält als einzige reelle Lösung 1.0354140. *Damit ist der Innere Zinssatz* 0.035414. ◊

In der Literatur findet man eine weitere Formel für den internen Zinssatz, die mit der obigen äquivalent ist. Aus der obigen Formel (13.4.2) ergibt sich die folgende Formel mittels Division der Gleichung (13.4.2) durch $(1+i)^n$.

Satz 13.4.8. $K_n = K_0 (1+i)^n + d_1 (1+i)^{n-1} + ... + d_{n-1} (1+i)$ *genau dann, wenn*

$$\frac{K_n}{(1+i)^n} = K_0 + \frac{d_1}{1+i} + \frac{d_2}{(1+i)^2} + ... + \frac{d_{n-1}}{(1+i)^{n-1}} = K_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{d_j}{(1+i)^j}$$

Mit dem internen Zinssatz kann man den Ertrag einer Investition z.B. mit dem Marktzins oder mit dem internen Zinssatz anderer Investitionen vergleichen. Zu wählen ist die Investition oder die Anlage mit dem höchsten Zins.

Übungen

1. Ein Kapital von 5000 wird zu folgenden Zinssätzen verzinst: 1. Jahr 0.045; 2. Jahr 0.035; 3. Jahr 0.04; 4. Jahr 0.03; 5. Jahr 0.04. Berechnen Sie den mittleren Zinssatz - auch mit Hilfe von Logarithmen.

2. Eine Firma wachse im Jahr 2000 um 5%, im Jahr 2001 um 4%, im Jahr 2002 um 8%, im Jahr 2003 um 11%. Berechnen Sie das mittlere Wachstum in %.

3. Wieviel betrug das durchschnittliche Bevölkerungswachstum eines Landes in %, wenn im Jahr 1980 6 Millionen Einwohner im Lande lebten, im Jahr 2000 jedoch 7.5 Millionen?

4. Eine Anfangsinvestition K_0 weise am Anfang des j-Jahres die folgenden folgenden Finanzflüsse d_j (Ertrag und Kosten der Investition zum Zeitpunkt j) auf: $K_0 = 500000, d_1 = -3000$, $d_2 = 2000$, $d_3 = 5000$, $d_4 = 4000$, $d_5 = 6000$. Der Endwert der Investition betrage $K_6 = 700000$. Zu berechnen ist der interne Zinssatz.

5. Berechnen Sie für die Aktien- und Obligationenindices der Schweiz (s. Excel-Tabelle auf dem Internet; Daten von Pictet et Cie, Genf) die durchschnittliche Entwicklung in %.

Lösungen

1.

$$\begin{aligned} i &= \sqrt[5]{(1+0.045)(1+0.035)(1+0.04)(1+0.03)(1+0.04)} - 1 \\ &= 1.037987465 - 1 = 0.037987465 \end{aligned}$$

Kontrolle: $5000 \cdot 1.045 \cdot 1.035 \cdot 1.04 \cdot 1.03 \cdot 1.04 = 6024.6$
$5000 \cdot 1.037987465^5 = 6024.6$
Mit Hilfe von Logarithmen erhält man (s. Bemerkung 13.4.6):
$\frac{1}{5} (\ln(1+0.045) + \ln(1+0.035) + \ln(1+0.04) + \ln(1+0.03) + \ln(1+0.04))$
$= 0.037283708$,
daraus $\exp(0.037283708) = 1.037987465$ und damit den mittleren Zinssatz 0.037987465.

2. Für Wachstumsprozesse mit konstanten Wachstumszuwächsen in % bezüglich des Vorjahres (Umsatzwachstum; Bevölkerungswachstum; Wachstum des BNPs, etc.) gilt eine der Zinseszinsformel analoge Formel.
Sei i der Wachstumszuwachs in Anteilen bezüglich des Vorjahres einer Grösse A_0. Dann gilt im

$$\begin{aligned} \text{ersten Jahr: } A_1 &= A_0 (1+i) \\ \text{zweiten Jahr: } A_2 &= A_1 (1+i) = A_0 (1+i)^2 \\ \text{dritten Jahr: } A_3 &= A_2 (1+i) = A_0 (1+i)^3 \\ \text{n-ten Jahr: } A_n &= A_{n-1} (1+i) = A_0 (1+i)^n \end{aligned}$$

Es liegt also eine geometrische Folge (A_n) vor. Entsprechend gilt für den durchschnittlichen Zuwachs

$$A_0 (1+i)^n = A_0 \prod_{k=1}^{n} (1+i_k)$$

Wir erhalten:

$$i = \sqrt[4]{1.05 \cdot 1.04 \cdot 1.08 \cdot 1.11} - 1 = 0.069652$$

Kontrolle: $U_4 = U_0 1.05 \cdot 1.04 \cdot 1.08 \cdot 1.11 = 1.3091 U_0$
$U_4 = U_0 1.069652^4 = 1.3091 U_0$

3.

$$\begin{aligned} 7500000 &= 6000000 (1+i)^{20} \Longrightarrow \\ (1+i)^{20} &= \frac{7500000}{6000000} \Longrightarrow \\ (1+i)^{20} &= \frac{5}{4} \Longrightarrow \\ 1+i &= \sqrt[20]{\frac{5}{4}} \Longrightarrow \\ i &= \sqrt[20]{\frac{5}{4}} - 1 \\ &= 0.011219651 \quad (1.12\%) \end{aligned}$$

Kontrolle: $6000000 (1 + 0.011219651)^{20} = 7500000$

4. polyroot(c(-700000,6000,4000,5000,2000,-3000,500000)) ergibt zwei reelle Lösungen: 1.0538221; -1.0580103,
wobei nur die erste ökonomisch Sinn macht. Entsprechend erhält man einen internen Zinssatz von 0.0538221 (5.38%)

5. Es ergibt sich Mittelwert Aktien nominal und real (inflationsbereinigt):

	Aktien	Obligationen
nominal	0.07600743144447	0.0446634884339 (4.47%)
real	0.05248490779729	0.02182553715419 (2.18%)

Zu rechnen ist mit dem geometrischen Mittel. Zu beachten ist, dass dieses nur für Zahlen grösser 0 definiert ist. Es ist mit den Faktoren $1 + i$ statt mit den Änderungsraten i zu rechnen.

13.5 Barwert

Der Barwert B_n eines Kapitals K_n, das in n Jahren fällig ist, ist der augenblickliche Wert des Kapitals. Der Barwert wird auch „Gegenwartswert“ genannt (englisch „present value“, französisch „valeur actuelle“).

Definition 13.5.1. *Sei K_n ein Kapital, dass in n Jahren fällig wird. Dann ist der Barwert B_n dieses Kapitals definiert als*

$$B_n = \frac{K_n}{(1+i)^n}.$$

i wird Abzinsungssatz oder Diskontierungssatz (taux d'actualisation) genannt. ◊

Multipliziert man in der Definition beide Seiten mit $(1+i)^n$, erhält man die Zinseszinsformel, wenn man den Barwert B_n durch K_0 ersetzt:

$$B_n\,(1+i)^n = K_0\,(1+i)^n = K_n.$$

Der Barwert von K_n entspricht also dem Anfangskapital, das bei einem Zinssatz von i in n Jahren ein Endkapital von K_n erwirtschaftet.

Bemerkung 13.5.2. *(1) Beim Vergleichen des Wertes von verschiedenen künftigen Geldflüssen verwendet man den Barwert, um eine gemeinsame Vergleichsbasis zu haben. Bei dessen Berechnung braucht man für i in der Regel den Marktzinssatz. Bei Wertpapieren entspricht der Barwert im Falle der Verwendung des Marktzinses i dem aktuellen Marktpreis des Papiers - sofern der Markt für die entsprechenden Wertpapiere spielt. Um dies zu verstehen, betrachten wir sogenannte Zero-Bonds (= pure discount bonds; Nullcouponanleihen). Es sind Obligationen, die während der Laufzeit keinen Zins abwerfen. Der Nennwert wird am Ende der Laufzeit dem Inhaber der Obligation ausbezahlt. Der Zins wird über die Differenz von Ausgabekurswert (= Preis der Obligation zum Ausgabezeitpunkt) und Nennwert erwirtschaftet. Wir setzen zudem voraus, der betrachteten Bonds seien risikolos (z.B. Staatsanleihen der Schweiz). Wir betrachten eine Anleihe, die in 10 Jahren eine Auszahlung von 10000 Franken verbürgt. Der Marktzins sei 3%. Der Marktpreis des Papiers muss heute $\frac{10000}{(1+0.03)^{10}} = 7440.9$ betragen. Denn wäre der Marktpreis kleiner als 7440.9, z.B. 7300 - dies würde einem internen Zinssatz von $\frac{10000}{(1+i)^{10}} = 7300 \Longrightarrow i = \sqrt[10]{\frac{10000}{7300}} - 1 = 0.031972$ entsprechen - könnte man auf der Bank ein Darlehen von 7300 Franken aufnehmen und die Anleihe zum Preis von 7300 kaufen. Nach 10 Jahren bezahlt man der Bank $7300\,(1+0.03)^{10} = 9810.6$ zurück und man erhält 10000 Franken durch den Verfall der Anleihe. Man erwirtschaftet einen Gewinn von $10000 - 9810.6 = 189.4$ Franken. Dieser Gewinn ist investitionslos und wird Arbitragegewinn genannt. Anleger würden diese Gelegenheit sofort wahrnehmen, wodurch die Nachfrage nach solchen Papieren steigt und der Preis der Anleihe in die Höhe getrieben wird.*
Sei umgekehrt der Preis der Anleihe grösser als 7440.9, z.B. 8000 - was einem internen Zinssatz von 0.02565 entsprechen würde. Niemand würde die Anleihe kaufen, da man das Geld besser auf der Bank anlegt: dort würde man für 8000 Franken in 10 Jahren $8000\,(1+0.03)^{10} = 10751$ erhalten. Entsprechend wird der verkaufswillige Anleihenbesitzer den Preis auf 7440.9 senken müssen. Der Marktpreis der Anleihe entspricht also $\frac{10000}{(1+0.03)^{10}}$. Es ist also vernünftig, den gegenwärtigen Wert der Anleihe mit dem Marktwert der Anleihe zu identifizieren, wobei wir als Diskontierungssatz den Marktzins wählen müssen.
(2) Bei der individuellen Bewertung künftiger Finanzflüsse spielt der individuelle Diskontierungssatz eine Rolle. Je ärmer jemand ist, desto höher ist sein individueller Diskontierungssatz. Dies kann man auch wie folgt ausdrücken: Je wichtiger die Gegenwart ist, desto höher ist der Diskontierungssatz (im Extremfall: wenn man ums tägliche Überleben kämpft, ist die Gegenwart so wichtig, dass man nicht in die Zukunft investieren kann). Entsprechend investiert man z.B. mehr in Ausbildung, wenn der persönliche Diskontierungssatz klein ist, d.h. wenn man in der Gegenwart materiell abgesichert ist. ◊

Bemerkung 13.5.3. *(B_n) ist für $i > 0$ eine strikt monoton sinkende geometrische Folge mit $a_1 = \frac{K_n}{1+i}$ und $0 < q = \frac{1}{1+i} < 1$.* ◊

Künftige Kapital- oder Rentenflüsse können nur miteinander verglichen werden, wenn Sie bezüglich einer gemeinsamen Basis verglichen werden. Eine solche stellt der Barwert der jeweiligen Geldflüsse dar.

Beispiel 13.5.4. *Ist es z.B. besser heute 100′000 ausbezahlt zu bekommen oder 120′000 in 10 Jahren? Der Barwert der 100′000 Franken ist 100′000 Franken. Der Barwert der 120′000 in 10*

Jahren hängt vom einzusetzenden Diskontierungssatz ab. Mit $i = 0.02$ würde gelten:

$$\begin{aligned} B(120000) &= \frac{120000}{(1+0.02)^{10}} \\ &= 98441.80 \end{aligned}$$

Damit müsste bei ökonomisch-rationaler Entscheidung und einem Diskontierungssatz von 0.02 die Wahl auf die 100′000 heute fallen. ◊

Beispiel 13.5.5. *Ist es für eine Person vernünftiger, von heute weg 20 Jahre lang eine Rente von 5000 Franken zu beziehen (nachschüssig), oder sich heute ein Kapital von 50000 auszahlen zu lassen? Der Endwert der Rente von 5000 beträgt gemäss bereits entwickelter Formel:*

$$K_n = 5000\frac{(1+0.02)^{20}-1}{0.02} = 121486.85$$

Der Barwert von K_n ist dann

$$B_n = \frac{121486.85}{(1+0.02)^{20}} = 81759.30$$

Es wäre also besser, die Rente zu beziehen - sofern man andere Unwägbarkeiten wie die vermutliche Lebensdauer, Unfallgefahr und ähnliches ausser acht lässt. ◊

Das letzte Beispiel lässt uns festhalten:

Satz 13.5.6. *Der Barwert B_n einer nachschüssigen Rente R beträgt beim Zinssatz i und der Laufzeit n*

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{K_n}{(1+i)^n} = \frac{R\frac{(1+i)^n-1}{i}}{(1+i)^n} \\ &= R\frac{(1+i)^n-1}{i\,(1+i)^n} \end{aligned}$$

Der Barwert B_n einer vorschüssigen Rente R beträgt beim Zinssatz i und der Laufzeit n

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{K_n}{(1+i)^n} = \frac{(1+i)R\frac{(1+i)^n-1}{i}}{(1+i)^n} = (1+i)R\frac{(1+i)^n-1}{i\,(1+i)^n} \\ &= R\frac{(1+i)^n-1}{i\,(1+i)^{n-1}} \end{aligned}$$

Für nachschüssig: der Barwert der Rente, die Ende des ersten Jahres ausbezahlt wird, ist anfangs Jahr $\frac{R}{(1+i)}$. Der Barwert der Rente, die Ende zweiten Jahres ausbezahlt wird, ist $\frac{R}{(1+i)^2}$. Der Barwert aller Renten von n Jahren ist damit

$$\sum_{l=1}^{n}\frac{R}{(1+i)^l}$$

Es handelt sich um die Summe der Glieder einer geometrischen Folge mit $a_1 = \frac{R}{(1+i)}$ und $q = \frac{1}{(1+i)}$.

Für diese Summe gilt gemäss Satz 13.3.5

$$\begin{aligned} a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} &= \frac{R}{(1+i)} \frac{\left(\frac{1}{(1+i)}\right)^n - 1}{\frac{1}{(1+i)} - 1} \\ &= \frac{R}{(1+i)} \frac{\frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n}}{\frac{1-(1+i)}{(1+i)}} \\ &= \frac{R}{(1+i)} \frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n} \frac{(1+i)}{1-(1+i)} \\ &= R \frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n} \frac{1}{-i} \\ &= R \frac{(1+i)^n - 1}{i\,(1+i)^n} \end{aligned}$$

Statt den Satz zu beweisen, sieht man ihn direkt ein: der Endwert ist $R\frac{(1+i)^n-1}{i}$. Dieser wird diskontiert:

$$\frac{R\frac{(1+i)^n-1}{i}}{(1+i)^n}.$$

Der Beweis für den Barwert einer vorschüssigen Rente erfolgt analog. Der Endwert ist $(i+1)\,R\frac{(1+i)^n-1}{i}$ (s. Satz 13.3.10). Diskontiert ergibt sich

$$B_0 = (i+1)\,R\frac{(1+i)^n - 1}{i\,(1+i)^n} = R\frac{(1+i)^n - 1}{i\,(1+i)^{n-1}}.$$

Übungen

1. Berechnen Sie den Barwert eines Kapitals von 150000 Franken, das in 11 Jahren fällig ist (i = 0.03).

2. Berechnen Sie den Barwert einer nachschüssigen jährlichen Rente von 11000 Franken (Laufzeit 15 Jahre; i = 0.035)

3. Berechnen Sie den Barwert einer vorschüssigen jährlichen Rente von 11000 (Laufzeit 15 Jahre; i = 0.035)

4. Welche Rente ist mehr wert (nachschüssig, i = 0.025): während 14 Jahren 3000 Franken pro Jahr oder während 16 Jahren 2900 Franken pro Jahr?

5. Es soll analysiert werden, welche der beiden folgenden Investitionen mehr abwirft ($i = 0.04$), indem man die Barwerte vergleicht (Kapitalwertmethode)

	Investiton 1		Investition 2	
	Aufwand	Ertrag	Aufwand	Ertrag
Jahr 0	50000	0	50000	1000
Jahr 1	10000	20000	4000	15000
Jahr 2	1000	30000	2000	34000
Jahr 3	500	20000	5500	20000

Berechnen Sie den Gewinn in Prozenten. Neben der Kapitalwertmethode gibt es noch die Annuitätenmethode, die wir nicht behandeln. Zudem kann man die Investitionen mit der internen Zinssatzmethode vergleichen (s. Seite 340).

6. a) Wieviel muss der Ausgabekurswert eines Zero-Bonds mit einem Nennwert von 100 SFr. mit einer Laufzeit von 3 Jahren betragen, wenn der Zinssatz 0.05 ist?
   b) Wieviel beträgt der Zinssatz eines Zerobonds mit einem Nennwert von 500 Sfr. mit einer Laufzeit von 2 Jahren, wenn der Ausgabekurswert 400 Sfr. beträgt?
   c) Zero-Bonds werden gehandelt. Ihr Kurswert steigt an, wenn der Marktzins sinkt und umgekehrt. Versuchen Sie, diese Aussage zu begründen. Um wieviel verändert sich der Kurswert eines Zero-Bonds mit Nennwert 10000 SFr. mit einer Laufzeit von 10 Jahren 5 Jahre vor Auszahlung, wenn der Marktzins von 2.5% auf 3% steigt?

7. Zinssätze für unterschiedlich lange Zero-Bonds unterscheiden sich. Das n-Tupel von Zinssätzen $(i_1, ..., i_n)$ für Laufzeiten i von Zero-Bonds nennt man „Zinsstruktur“. Gewöhnlich liegt eine monoton steigende Zinsstruktur vor: je länger die Laufzeit eines Bonds, desto mehr Zins wirft er ab. Berechnen Sie den Barwert von 5 Zero-Bonds mit folgenden Nennwerten: 1000 (Laufzeit 1 Jahr), 2000 (Laufzeit 2 Jahre), 1500 (Laufzeit 4 Jahre), 3000 (Laufzeit 5 Jahre) und 4000 (Laufzeit 10 Jahre) sowie folgender Zinsstruktur ($i_1 = 0.01$; $i_2 = 0.012$; $i_3 = 0.015$; $i_4 = 0.02$; $i_5 = 0.025$; ...; $i_{10} = 0.04$).

8. Zu welchem Zinssatz ergibt ein Kapital von 6800 in 5 Jahren denselben Barwert wie ein Kapital von 6500 in 4 Jahren?

9. Zu welchem Zinssatz ergibt ein Kapital von 6700 in 6 Jahren denselben Barwert wie ein Kapital von 6400 in 4 Jahren?

Lösungen

1. $$B_{11} = \frac{150000}{(1+0.03)^{11}} = 108363.20$$

2. $$B_{15} = 11000\frac{(1+0.035)^{15}-1}{(1+0.035)^{15}\,0.035} = 126691.50$$

3. $$B_{15} = 11000\frac{(1+0.035)^{15}-1}{(1+0.035)^{14}\,0.035} = 131125.70$$

4. $$B_{14} = 3000\frac{(1+0.025)^{14}-1}{(1+0.025)^{14}\,0.025} = 35073$$
   $$B_{16} = 2900\frac{(1+0.025)^{16}-1}{(1+0.025)^{16}\,0.025} = 37860$$

5. Wir berechnen für jede Geldfluss den jeweiligen Barwert und summieren diese, d.h. wir berechnen fürs k-te Jahre jeweils:
   $$\frac{Betrag}{(1+0.04)^k}$$
   und berechnen dann die Summen.

	Investiton 1		Investition 2	
	Barwerte Aufwand	Barwerte Ertrag	Barwerte Aufwand	Barwerte Ertrag
Jahr 0	50000	0	50000	1000
Jahr 1	9615.384615	19230.76923	3846.153846	14423.07692
Jahr 2	924.556213	27736.68639	1849.112426	31434.91124
Jahr 3	444.4981793	17779.92717	4889.479973	17779.92717
Summen	60984.43901	64747.38279	60584.74624	64637.91534

Für die Investition 1 erhält man $64747.38279 - 60984.43901 = 3762.9$
Für die Investition 2 erhält man $64637.91534 - 60584.74624 = 4053.2$. Damit ist die zweite Investition rentabler. Beachten Sie, dass die nichtdiskontierten Ausgaben und Einnahmen für beide Investitionen identische Summen ergeben. In Prozenten:

$$\frac{3762.9 \cdot 100}{60984.43901} = 6.1703$$
$$\frac{4053.2 \cdot 100}{60584.74624} = 6.6901$$

6. a) $B_0 = \frac{100}{(1+0.05)^3} = 86.38375985$
   b) mit $r := 1 + i$ gilt

$$400 = \frac{500}{r^2} \Longrightarrow$$
$$r^2 = \frac{500}{400} \Longrightarrow$$
$$r = \sqrt{\frac{5}{4}} = 1.118033989$$

   Damit ist $i = 0.118033989$.
   c) Zur Begründung der Aussage: Wir nehmen an, der bisherige Marktzins sei 4%. Zudem betrachten wir einen Zero Bond mit einem Endwert von 100 und einer restlichen Laufzeit von 3 Jahren. Der Kurswert des Bonds beträgt damit $\frac{100}{1.04^3} = 88.89963587$. Wir nehmen an, der Marktzins sinke von 4% auf 3% und der Kurswert des Bonds steige nicht an. Dann kann man ein Darlehen aufnehmen und den Bond für 88.89963587 kaufen. Das Darlehen wird nach drei Jahren zurückbezahlt. Dabei ist $88.89963587\,(1.03)^3 = 97.1430324$ zu bezahlen. Der Bond ergibt einen Erlös von 100. Damit ergibt sich ein Gewinn von $100 - 97.1430324 = 2.857$. Entsprechend kann man ohne Investition einen Gewinn realisieren (Arbitrage-Gewinn). Die Möglichkeit einer Arbitrage-Strategie würde von vielen Marktteilnehmern gesehen, wodurch sich die Nachfrage nach den Bonds erhöht. Dies wirkt sich in einer Erhöhung des Kurswertes von Bonds aus. Ähnlich kann man umgekehrt für den Fall einer Erhöhung der Zinsen argumentieren - versuchen Sie das!
   Rechenbeispiel: $B_{5_{2.5}} = \frac{10000}{(1+0.025)^5} = 8838.542876$
   $B_{5_3} = \frac{10000}{(1+0.03)^5} = 8626.087844$
   Durch das Steigen des Marktzinses sinkt der Kurswert um $8838.542876 - 8626.087844 = 212.4550323$.

7. Es ergibt sich

Nennwert K_j	i	Jahre j	Barwert $\frac{K_j}{(1+i)^j}$
1000	0.01	1	990.0990099
2000	0.012	2	1952.85038
1500	0.02	4	1385.768139
3000	0.025	5	2651.562863
4000	0.04	10	2702.256675
11500		Summen	9682.537067

Tabelle 13.5.2: Mögliche Berechnungstabelle für die Berechnung des Barwertes eines Portfolios von Zerobonds mit unterschiedlicher Laufzeit

8.

$$\frac{6800}{(1+z)^5} = \frac{6500}{(1+z)^4}$$
$$\frac{6800}{(1+z)^5} - \frac{6500}{(1+z)^4} = 0$$

Mit uniroot: f=function(z) 6800/(1+z)^5-6500/(1+z)^4;uniroot(f,c(0.00001,0.5),tol=10^(-20)) ergibt: 0.04615385. Oder rechnerisch:

$$\frac{6800}{6500} = \frac{(1+z)^5}{(1+z)^4} = (1+z)^{5-4} = 1+z$$
$$z = \frac{6800}{6500} - 1$$
$$= \frac{3}{65} = 0.04615385$$

9. Zu welchem Zinssatz ergibt ein Kapital von 6700 in 6 Jahren denselben Barwert wie ein Kapital von 6400 in 4 Jahren?

$$\frac{6700}{(1+z)^6} = \frac{6400}{(1+z)^4}$$
$$\frac{6700}{6400} = \frac{(1+z)^6}{(1+z)^4} = (1+z)^{6-4} = (1+z)^2$$
$$1+z = \sqrt[2]{\frac{6700}{6400}}$$
$$z = \sqrt[2]{\frac{6700}{6400}} - 1 = 0.023169$$

13.6 Annuitätentilgung

Um eine Schuld S abzuzahlen, möchte man jedes Jahr denselben Betrag A zurückzahlen (Annuität). Die Annuität setzt sich jeweils aus einer Abzahlung und Zinsen zusammen:

$$\textit{Annuität} = \textit{Abzahlung} + \textit{Zinsen der verbliebenen Schuld}$$

Da durchs Abzahlen die Schuld sinkt, nimmt im Verlaufe der Zeit der Zinsanteil an A ab, während der Abzahlungsanteil zunimmt. Wir nehmen an, es werde am Ende des Jahre gezahlt. Sei R_k die Abzahlung des $k-$ten Jahres. Es gilt offenbar für $2 \leq k \leq n$:

$$A = R_1 + iS \tag{13.6.3}$$
$$A = R_k + i\left(S - \sum_{l=1}^{k-1} R_l\right) \tag{13.6.4}$$

Es stellt sich das Problem, wie hoch A sein muss, um eine Schuld S in n Jahren zurückzuzahlen. Wir gelangen zu einer Lösung, wenn wir A so wählen, dass der Barwert der Zahlungen A mit der Schuld identisch ist. Der Endwert K_n der regelmässig bezahlten Beträge A ist gemäss Rentenformel (Satz 13.3.8):

$$K_n = A\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right)$$

Entsprechend muss gelten ($S = K_n$ diskontiert):

$$S = \frac{K_n}{(1+i)^n} = \frac{A}{(1+i)^n}\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right) \Longrightarrow$$
$$A = \frac{S\,(1+i)^n\, i}{(1+i)^n - 1}$$

Der Ausdruck

$$\frac{(1+i)^n\, i}{(1+i)^n - 1}$$

wird „Annuitätenfaktor“ genannt. Mit ihm wird die Schuld multipliziert, um die Annuität zu erhalten.

Beispiel 13.6.1. *Eine Teilhypotheke eines Hauses (*$50'000$*) soll in* 6 *Jahren im Annuitätenverfahren abgezahlt werden. Wieviel muss die Familie jedes Jahr aufbringen, wenn der Zinssatz* 0.035 *beträgt.*

$$\begin{aligned} A &= \frac{50000\,(1+0.035)^6\,0.035}{(1+0.035)^6 - 1} \\ &= 9383.4 \end{aligned}$$

Am Beispiel können wir die Korrektheit des Verfahrens illustrieren. Am Ende des ersten Jahres betragen die Zinsen

$$50000 \cdot 0.035 = 1750$$

und damit die Abzahlung

$$9383.4 - 1750 = 7633.4$$

Die Schuld verringert sich damit auf

$$50000 - 7633.4 = 42366.6$$

Wir rechnen diesen Überlegungen für alle Jahre durch:

	Zinsen	*Tilgung*	*Restschuld*
1	$50000 \cdot 0.035 = 1750$	$9383.4 - 1750 = 7633.4$	$50000 - 7633.4 = 42367$
2	$42367 \cdot 0.035 = 1482.8$	$9383.4 - 1482.8 = 7900.6$	$42367 - 7900.6 = 34466$
3	$34466 \cdot 0.035 = 1206.3$	$9383.4 - 1206.3 = 8177.1$	$34466 - 8177.1 = 26289$
4	$26289 \cdot 0.035 = 920.12$	$9383.4 - 920.12 = 8463.3$	$26289 - 8463.3 = 17826$
5	$17826 \cdot 0.035 = 623.91$	$9383.4 - 623.91 = 8759.5$	$17826 - 8759.5 = 9066.5$
6	$9066.5 \cdot 0.035 = 317.33$	$9383.4 - 317.33 = 9066.1$	$9066.5 - 9066.1 = 0.4$

◊

Wegen Rundungsfehlern verbleibt ein Rest von 40 Rappen. Solche Tabellen werden „Tilgungsplan“ genannt, und man kann sie mit Excel problemlos und schnell erstellen (tun Sie das!).

Ohne einen Tilgungsplan zu erstellen, können wir über die Zusammensetzung der Annuität in einem bestimmten Jahr Aufschluss erhalten. Es gilt nämlich im ersten Jahr

$$A = R_1 + Si$$

und im zweiten Jahr gemäss (13.6.4)

$$A = R_2 + (S - R_1)i$$

Daraus folgt dann durch Gleichsetzen

$$\begin{aligned} R_1 + Si &= R_2 + (S - R_1)i \Longrightarrow \\ R_2 &= R_1 + Si - Si + R_1 i \\ &= R_1(1+i) \Longrightarrow \\ R_2 &= R_1(1+i) \end{aligned}$$

Analog erhält man mit

$$\begin{aligned} A &= R_2 + (S - R_1)i \\ A &= R_3 + (S - R_1 - R_2)i \Longrightarrow \\ R_3 &= R_2 + Si - R_1 i - Si + R_1 i + R_2 i \\ &= R_2(1+i) = R_1(1+i)(1+i) \\ &= R_1(1+i)^2 \end{aligned}$$

und nach dem selben Verfahren

$$R_4 = R_1(1+i)^3$$

Es gilt also

$$R_k = R_1(1+i)^{k-1}$$

Es handelt sich um die Glieder einer geometrischen Folge.

Übungen

1. Lösen Sie die Gleichung

$$A = \frac{iS(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

   nach den Variablen S, n und i auf und berechnen Sie:

   (a) $S = ?, n = 15, A = 5000, i = 0.035$

   (b) $S = 500'000, n = ?, A = 40'000, i = 0.045$

   (c) $S = 500'000, n = 15, A = 40'000, i = ?$

   (d) $S = 600'000, n = 20, A = ?, i = 0.05$. Berechnen Sie R_1 et R_{16}.

2. Erstellen Sie einen Annuitätentilgungsplan für eine Schuld von $300'000$, $i = 0.045$, $n = 14$ (nachschüssig)

Lösungen

1.

$$S = \frac{A\left((1+i)^n - 1\right)}{i(1+i)^n}$$

$$
\begin{aligned}
A = \frac{iS(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} &\Longrightarrow \\
A\left((1+i)^n - 1\right) = iS(1+i)^n &\Longrightarrow \\
A(1+i)^n - A = iS(1+i)^n &\Longrightarrow \\
A(1+i)^n - iS(1+i)^n = A &\Longrightarrow \\
(1+i)^n(A - iS) = A &\Longrightarrow \\
(1+i)^n = \frac{A}{A - iS} &\Longrightarrow \\
\ln\left((1+i)^n\right) = \ln\left(\frac{A}{A - iS}\right) &\Longrightarrow \\
n\ln(1+i) = \ln A - \ln(A - iS) & \\
n = \frac{\ln A - \ln(A - iS)}{\ln(1+i)} &
\end{aligned}
$$

Für i muss man wiederum mit Näherungsverfahren arbeiten. Es gilt

$$
\begin{aligned}
A = \frac{iS(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} &\Longrightarrow \\
A(1+i)^n - A = iS(1+i)^n &\Longrightarrow \\
A(1+i)^n - A - iS(1+i)^n = 0 &\Longrightarrow \\
(1+i)^n(A - iS) - A = 0 &
\end{aligned}
$$

(a) Wir erhalten mit den Formeln

$$
S = \frac{A\left((1+i)^n - 1\right)}{i(1+i)^n} \Longrightarrow S = \frac{5000\left((1+0.035)^{15} - 1\right)}{0.035(1+0.035)^{15}} = 57587
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
n = \frac{\ln A - \ln(A - iS)}{\ln(1+i)} &\Longrightarrow \\
n = \frac{\ln 40000 - \ln(40000 - 0.045 \cdot 500000)}{\ln(1+0.045)} &= 18.781
\end{aligned}
$$

(c) Die Formel kann nicht nach i aufgelöst werden. Entsprechend ist ein Näherungsverfahren anzuwenden: Aus $A = \frac{iS(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$ folgt $\frac{iS(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} - A = 0$. Es gilt also die Nullstelle der Funktion $f(i) = \frac{iS(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} - A$ zu finden, wobei $\frac{iS(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} - A = \frac{i500000(1+i)^{15}}{(1+i)^{15} - 1} - 40000$. Mit dem Solver von Excel oder mit den R-Befehlen

```
f=function(x) x*500000*(1+x)^15/((1+x)^15-1)-40000
uniroot(f,c(0.0000001,0.3),tol=10 ^-20)
```

erhält man $i = 0.023706631$ (f ist zwar ein Polynom, aber nicht in standardisierter Form. Entsprechend ist die R-Funktion uniroot und nicht polyroot zu verwenden). Man kann auch die letzte Formel $(1+i)^n(A - iS) - A = 0$ oben verwenden (einfacher):

```
f=function(x) (1+x)^15*(40000-x*500000)-40000
uniroot(f,c(0.0000001,0.3),tol=10 ^-20)
```

(d) $A = \frac{0.05 \cdot 600000(1+0.05)^{20}}{(1+0.05)^{20} - 1} = 48146.$
$R_1 = A - S \cdot i \Longrightarrow R_1 = 48146 - (600000 \cdot 0.05) = 18146.$
$R_{16} = R_1(1+0.05)^{16-1} = 18146(1+0.05)^{15} = 37724$

2. $A = \frac{0.045 \cdot 300000(1+0.045)^{14}}{(1+0.045)^{14}-1} = 29346.09481$.
Dies ergibt den folgenden Tilgungsplan

Jahr	Zinsen	Tilgung	Restschuld
			300000
1	13500	15846.09481	284153.9052
2	12786.92573	16559.16908	267594.7361
3	12041.76313	17304.33168	250290.4044
4	11263.0682	18083.02661	232207.3778
5	10449.332	18896.76281	213310.615
6	9598.977676	19747.11713	193563.4979
7	8710.357405	20635.7374	172927.7605
8	7781.749221	21564.34559	151363.4149
9	6811.35367	22534.74114	128828.6738
10	5797.290319	23548.80449	105279.8693
11	4737.594117	24608.50069	80671.36857
12	3630.211586	25715.88322	54955.48535
13	2472.996841	26873.09797	28082.38738
14	1263.707432	28082.38738	-1.07684E-09

13.7 Reihen

Reihen sind eine spezielle Art von Folgen. Betrachten wir für eine Folge (a_n)

$$s_n := \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

so ordnen wir derart jedem n eine Zahl zu. Wir erhalten damit eine neue Folge (s_n), deren Glieder jeweils aus der Summe der n ersten Glieder der Folge (a_n) besteht. Offensichtlich gilt:

$$s_{n+1} - s_n = \sum_{i=1}^{n+1} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i = a_{n+1} \tag{13.7.5}$$

Zudem gilt offenbar, dass jeder Folge eine Reihe entspricht und wegen (13.7.5) entspricht auch jeder Reihe eine Folge.

Beispiel 13.7.1. *Der arithmetischen Folge $a_n = a_{n-1} + 5$ und $a_1 = 3$ entspricht die Reihe:*

a_i	3	8	13	18	23	28	33	38	43	48	53	$\cdots$
s_i	3	11	24	42	65	93	126	164	207	255	308	$\cdots$

◊

Beispiel 13.7.2.

$$K_n = R\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right)$$

ist die Summe der n ersten Glieder einer geometrischen Folge, wie oben gezeigt. Entsprechend ist (K_n) die Reihe einer geometrischen Folge. ◊

13.8 Grenzwerte von Folgen und Reihen

Es stellt sich die Frage, wie sich Folgen und Reihen verhalten, wenn n immer grösser wird. Für arithmetische Folgen gilt dabei, dass sie gegen Unendlich oder minus Unendlich gehen. Wir schreiben dafür

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \text{ (Unendlich)}$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \text{ (minus Unendlich)}$$

Die Abkürzung „lim“ entstammt dem Lateinischen (limes: Grenze). Für die folgenden präziseren Definitionen brauchen wir die folgenden Abkürzungen:

Definition 13.8.1. *$-\infty < x < \infty$ genau dann, wenn $x \in \mathbb{R}$.* ◊

Definition 13.8.2. *Wenn A eine Menge mit endlich vielen Elemente ist, schreiben wir*

$$|A|$$

für die Anzahl Elemente von A. $|A|$ wird „Kardinalzahl von A“ genannt. ◊

$|A| < \infty$ drückt aus, dass die Menge $|A|$ endlich viele Elemente hat. Die Menge der ersten n Glieder einer Folge ist jeweils endlich, während die Menge der restlichen Glieder unendlich ist. Die folgende Definition präzisiert den Gedanken, dass eine Folge für $n \to \infty$ dann gegen Unendlich geht, wenn für ein beliebig grosse k gilt: nur endlich viele Glieder sind kleiner als k (s. Abbildung 13.8.5). Entsprechend sind jeweils unendlich viele Glieder grösser als k.

Definition 13.8.3. *Für eine Folge (a_n) gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

genau dann, wenn für alle $k > 0$ gilt:

$$|\{a_i \mid a_i < k\}| < \infty.$$

◊

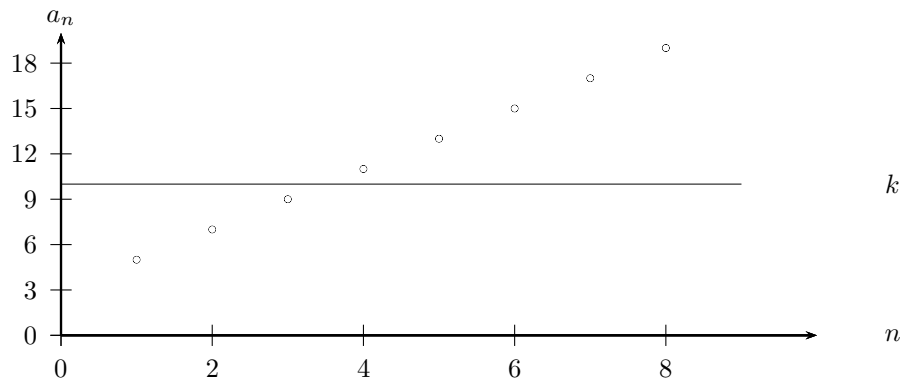


Abbildung 13.8.5: Graphische Darstellung zur Idee der Definition 13.8.3: nur endlich viele Punkte der Folge (a_n) liegen unter k. Dies gilt für beliebige $k > 0$. Deshalb gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Satz 13.8.4. *Sei (a_n) eine arithmetische Folge mit a_1 und $a_{n+1} = a_n + b$ mit $b > 0$. Dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Beweis. Für jedes $k > 0$ gibt es ein n_0, so dass $a_{n_0} > k$. Da $a_1 + b(n-1) > k \iff n > \frac{k-a_1}{b} + 1$, erhalten wir nämlich ein solches n_0 durch

$$n_0 := \min\{n \mid n > \frac{k - a_1}{b} + 1\}.$$

Da (a_n) strikt monoton steigend ist, gilt für $n > n_0 : a_n > a_{n_0}$, und für $n < n_0 : a_n < a_{n_0}$. Damit ist die Menge der $a_n > a_{n_0}$ mit $n > n_0$ unendlich und die Menge der $a_n < a_{n_0}$ mit $n < n_0$ endlich. Damit gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. □

Analog kann man zeigen, dass eine geometrische Folge (a_n) mit $a_1 > 0$ und $a_{n+1} = a_n q$ mit $q > 1$ für $n \to \infty$ gegen Unendlich geht. Für ein graphisches Beispiel siehe die Abbildung 13.3.2. Es folgt nun die Definition für den Fall, dass eine Folge für $n \to \infty$ gegen minus Unendlich geht.

Definition 13.8.5. *Für eine Folge (a_n) gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

genau dann, wenn für alle $k < 0$ gilt:

$$|\{a_i \mid a_i > k\}| < \infty.$$

◊

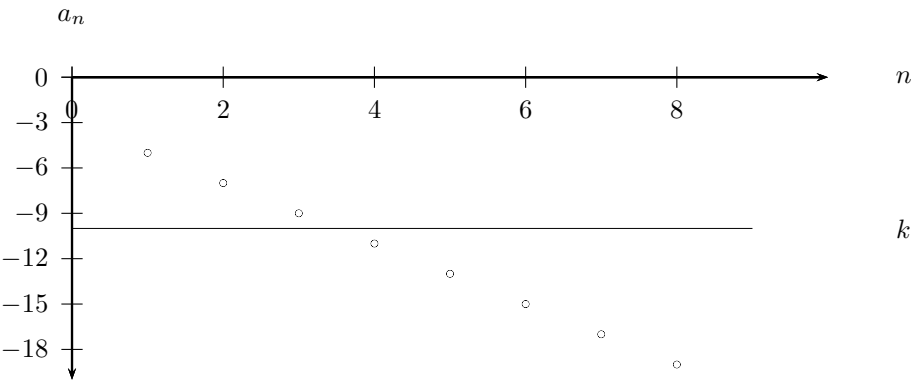


Abbildung 13.8.6: Graphische Darstellung zur Idee der Definition 13.8.5: nur endlich viele Punkte der Folge (a_n) liegen über k. Dies gilt für beliebige $k < 0$. Deshalb gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Die Idee hinter der Definition ist, dass es für beliebig kleine k nur endlich viele Glieder der Folge gibt, die grösser als das k sind. Ohne Beweis halten wir fest:

Satz 13.8.6. *Sei (a_n) eine arithmetische Folge mit a_1 und $a_{n+1} = a_n + b$ mit $b < 0$. Dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Als nächstes definieren wir reelle Grenzwerte von Folgen. Eine Folge geht für $n \to \infty$ gegen einen reellen Grenzwert c, genau dann, wenn ausserhalb jedes noch so kleinen Intervalls $]c-k, c+k[$ mit $k > 0$ nur endlich viele Glieder liegen. Wir schreiben

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c$$

und halten die Definition noch formeller fest:

Definition 13.8.7.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c \in \mathbb{R}$$

genau dann, wenn wenn für alle $k > 0$ *gilt:*

$$|\{a_i \mid a_i \notin \ ]c-k, c+k[\}| < \infty$$

Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = c \in \mathbb{R}$*, sagt man auch, die Folge* (a_n) *konvergiere (gegen einen Grenzwert; gegen den Grenzwert* c*).* ◊

Als Beispiel für eine Folge mit einem reellen Grenzwert betrachten wir die geometrische Folge (a_n) mit $a_1 = 2$ und $a_n = 0.5a_{n-1}$. Entsprechend ist $q = 0.5$. Für (a_n) gilt $a_1 = 2$; $a_2 = 0.5 \cdot 2 = 1$; $a_3 = 0.5 \cdot 1 = 0.5$; $a_n = 2 \cdot 0.5^{n-1}$. Offensichtlich nähert sich 0.5^n der Zahl 0, wobei ausserhalb eines Intervalls $]0-k, 0+k[$ nur endlich viele Glieder der Folge liegen, in diesem Intervall für beliebig kleine k jedoch unendlich viele Glieder (s. Abbildung 13.8.7).

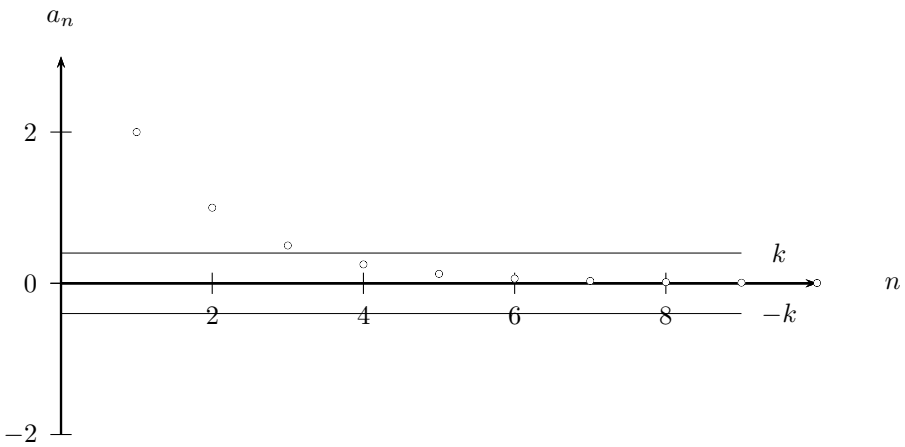


Abbildung 13.8.7: Graphische Darstellung zur Idee der Definition 13.8.7: Nur endlich viele Punkte der Folge (a_n) liegen ausserhalb des Intervalls $]0-k, 0+k[$. Entsprechend liegen unendlich viele im Intervall. Dies gilt für beliebige $k > 0$. Deshalb gilt $\lim_{n\to\infty}(a_n) = 0$.

In Verallgemeinerung des Beispiels können wir festhalten:

Satz 13.8.8. *Für eine geometrische Folge* (a_n) *mit* $a_1 \in \mathbb{R}$*,* $n \geq 1$ *und* $a_n = a_{n-1}q$ *sowie* $0 < q < 1$ *gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Beweis. Sei $k > 0$ beliebig. Zu zeigen ist, dass die Menge der a_i, die nicht in $]0-k, 0+k[$ enthalten sind, endlich ist. Es gilt für alle Folgenglieder $a_n > 0$. Entsprechend können wir uns darauf beschränken zu zeigen, dass die Menge der a_i die nicht in $[0, k[$ enthalten sind, endlich ist. Nun gibt es für jedes noch so kleine $k > 0$ ein n_0, so dass $a_{n_0} < k$, denn − beachten Sie, dass $\ln q < 0$ −

$$\begin{aligned} a_n = a_1 q^{n-1} < k \iff \\ \ln a_1 + (n-1)\ln q < \ln k \iff \\ n > \frac{\ln k - \ln a_1}{\ln q} + 1. \end{aligned}$$

Setzen wir

$$a_0 := \min\{a_n \mid n > \frac{\ln k - \ln a_1}{\ln q} + 1\},$$

haben wir eine solches a_{n_0} gefunden. Die Folge ist, wie bewiesen, strikt monoton sinkend. Entsprechend ist die Menge der a_n mit $a_n < a_{n_0} < k$ unendlich und die Menge der a_n mit $a_n > a_{n_0}$ endlich. Da wegen $k > a_{n_0}$ gilt: $\{a_n \mid a_n > k\} \subset \{a_n \mid a_n > a_{n_0}\}$, und da die zweite Menge endlich ist, ist auch $\{a_n \mid a_n > k\}$ endlich. □

Wir nennen die Folge (a_n) mit $a_i = a \in \mathbb{R}$ die konstante Folge. Jeder natürlichen Zahl wird dieselbe Zahl zugeordnet. Es gilt offenbar:

Satz 13.8.9. *Sei (a_n) eine konstante Folge, d.h. $a_n = a$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Beweis. Da für alle a_i gilt: $a_i = a$, liegen ausser halb eines beliebigen Intervalls $]a-k, a+k[$ keine Folgenglieder - die Menge der ausserhalb des Intervalls liegenden Glieder ist damit die leere Menge. Die leere Menge ist endlich. Also gilt $\lim_{n\to\infty} a = a$. □

Satz 13.8.10. *Ist $a \in \mathbb{R}$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = c \in \mathbb{R}$, dann ist*

$$\lim_{n\to\infty} (aa_n) = a \lim_{n\to\infty} a_n = ac$$

Beweis. Sei $k > 0$. Da $\lim_{n\to\infty} a_n = c \in \mathbb{R}$, ist die Menge der ausser des Intervalls $]c-k, c+k[$ liegenden Folgenglieder endlich. Entsprechend ist auch die ausserhalb der Menge $]ac-k, ac+k[$ liegenden Folgenglieder aa_i mit $a_i \notin]c-k, c+k[$ endlich, da $a_i \in]c-k, c+k[$ genau dann, wenn $aa_i \in]ac-k, ac+k[$. Somit ist ac der Grenzwert der Folge (aa_n). □

Satz 13.8.11. *Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = c \in \mathbb{R}$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = d \in \mathbb{R}$*
dann ist

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = c + d.$$

Beweis. Sei $k > 0$. Da $\lim_{n\to\infty} a_n = c \in \mathbb{R}$, ist die Menge der ausser des Intervalls $]c-\frac{k}{2}, c+\frac{k}{2}[$ liegenden Folgenglieder endlich. Analog gilt für (b_n), dass die Menge der ausser des Intervalls $]d-\frac{k}{2}, d+\frac{k}{2}[$ liegenden Folgenglieder endlich sind. Zudem gilt: Ist $a_i \in]c-\frac{k}{2}, c+\frac{k}{2}[$ und $b_i \in]c-\frac{k}{2}, c+\frac{k}{2}[$, dann ist $a_i + b_i \in]c+d-k, c+d+k[$. Entsprechend sind höchstens Folgenglieder $a_i + b_i$ ausserhalb dieses Intervalls, für die $a_i \notin]c-\frac{k}{2}, c+\frac{k}{2}[$ oder $b_i \notin]c-\frac{k}{2}, c+\frac{k}{2}[$. Da es nur endlich viele solcher Folgenglieder gibt, sind endlich viele $a_i + b_i \notin]c+d-k, c+d+k[$. Damit gilt $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = c + d$. □

Ohne Beweis halten wir fest:

Satz 13.8.12. *Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = c \in \mathbb{R}$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = d \in \mathbb{R}$, dann ist*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = cd.$$

Satz 13.8.13. *Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = c \in \mathbb{R}$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = d \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ sowie $b_n \neq 0$ für $n \in \mathbb{N}^*$,*
dann ist

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{c}{d}.$$

Satz 13.8.14. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Beweis. (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$ ist offensichtlich eine strikt monoton sinkende Folge, denn $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$. Zudem gilt: $\frac{1}{n} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$. Sei nun $k > 0$ beliebig. Zu zeigen ist, dass die Menge der Folgenlieder $\frac{1}{n}$ ausserhalb $[0, k[$ endlich sind. Es gilt: $\frac{1}{n} < k$ genau dann, wenn $n > \frac{1}{k}$. Wir können also $n_0 := \min\{n \mid n > \frac{1}{k}\}$ definieren. Damit gilt: $\frac{1}{n} > \frac{1}{k}$ für $n < n_0$. Die Menge der ausserhalb von $[0, k[$ liegenden Folgenglieder ist wegen der strikten Monotonie endlich. □

Satz 13.8.15. *Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = c$ und ist $|b_n - c| < |a_n - c|$ für alle n, dann ist $\lim_{n\to\infty} b_n = c$*

Beweis. Da $\lim_{n\to\infty} a_n = c$ liegen für beliebige k nur endlich viele Folgenglieder ausserhalb des Intervalls $]c-k, c+k[$. Da für alle $|b_n - c| < |a_n - c|$ liegen damit auch nur endlich viele b_n ausserhalb des Intervalls $]c-k, c+k[$ (Sandwichtheorem) □

Beispiel 13.8.16. $\lim \frac{1}{n^2} = 0$, *da* $\lim \frac{1}{n} = 0$ *und* $0 < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$ *ist für alle* n. ◊

Die für reelle Funktionen eingeführten Grenzwertdefinitionen für $x \to \infty$ kann auch für Folgen verwendet werden. Es gilt nämlich z.B.

Satz 13.8.17. $\lim_{n\to\infty} a_n = c \in \mathbb{R}$ *genau dann, wenn es für alle reellen* $k > 0$ *ein* n_0 *gibt, so dass für* $n > n_0$ *gilt,* $|c - a_n| < k$.

Beweis. (i) Wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = c \in \mathbb{R}$, dann gilt gemäss Definition für alle $k > 0$:

$$|\{a_i \mid a_i \notin\ ]c-k, c+k[\}| < \infty$$

d.h. bis auf endlich viele Folgenglieder gilt $|c - a_n| < k$. Da es nur endlich viele Folgenglieder gibt, für die $|c - a_n| \geq k$ gilt, können wir das Glied mit dem grössten n' betrachten und wählen $n_0 := n' + 1$. Damit gibt es ein n_0 so dass für alle $n > n_0$ gilt $|c - a_n| < k$.
(ii) gebe es umgekehrt für alle reellen $k > 0$ ein n_0, so dass für $n > n_0$ gilt, $|c - a_n| < k$. Dann liegen offensichtlich nur endlich viele Glieder ausserhalb von $]c-a_n, c+a_n[$, d.h. $\lim_{n\to\infty} a_n = c \in \mathbb{R}$ □

Definition 13.8.18. *Eine Folge* (a_n) *ist oben beschränkt genau dann, wenn es ein* $b \in \mathbb{R}$ *gibt, so dass* $a_n \leq b$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.
Eine Folge (a_n) *ist unten beschränkt genau dann, wenn es ein* $b \in \mathbb{R}$ *gibt, so dass* $a_n \geq b$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. ◊

Satz 13.8.19. *(i) Eine monoton steigende Folge, die oben beschränkt ist, konvergiert (d.h. hat einen Grenzwert).*
(ii) Eine monoton sinkende Folge, die unten beschränkt ist, konvergiert.

Beweis. Wir beweisen (i). Wir betrachten $\min\{b | a_n \leq b,\ n \in \mathbb{N}\}$, d.h. die kleinste Schranke von (a_n). Für alle $k > 0$ gilt: nur endlich viele a_n liegen ausserhalb von $]b, b-k[$, da wegen der strikten Monotonie die a_n nach einem gewissen n_0 innerhalb dieses Intervalls liegen und entsprechend nur die ersten a_n, $n \leq n_0$, ausserhalb des Intervalls liegen. Der Beweis von (ii) erfolgt analog. □

Satz 13.8.20. *Wenn* $\lim_{n\to\infty} a_n = c \in \mathbb{R}$, *dann ist für* $b \in \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^b = c^b$$

Statt eines Beweises: Für kleiner werdendes $|a_n - c|$ wird offensichtlich auch $\left|a_n^b - c^b\right|$ kleiner, d.h. $\lim_{n\to\infty} a_n^b = c^b$.

Satz 13.8.21. *Der Barwert einer unendlichen Rente ist* $\frac{R}{i}$ *(i Zinssatz; R Rente).*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} B_n &= R\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n\, i} \\ &= R\left(\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n\, i} - \frac{1}{(1+i)^n\, i}\right) = \\ &= R\frac{1}{i} - \frac{R}{(1+i)^n\, i} \\ &= \frac{R}{i} - \frac{R}{i}\frac{1}{(1+i)^n} \end{aligned}$$

R und i sind in diesem Zusammenhang Konstanten. $\frac{1}{(1+i)^n}$ ist eine geometrische Folge mit $a_1 = 1$ und $0 < q = \frac{1}{1+i} < 1$, die gemäss Satz 13.8.8 gegen 0 geht. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} B_n &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{R}{i} - \frac{R}{i} \frac{1}{(1+i)^n} \right) \\
&\underset{\text{Satz } 13.8.11}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{R}{i} - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{R}{i} \frac{1}{(1+i)^n} \right) \\
&\underset{\text{Satz } 13.8.9}{=} \frac{R}{i} - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{R}{i} \frac{1}{(1+i)^n} \right) \\
&\underset{\text{Satz } 13.8.10}{=} \frac{R}{i} - \frac{R}{i} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+i)^n} \\
&\underset{\text{Satz } 13.8.8}{=} \frac{R}{i} - \frac{R}{i} \cdot 0 \\
&= \frac{R}{i}
\end{aligned}$$

□

Damit haben wir mit Hilfe eines Beispiels gezeigt, dass Reihen mit positiven Summanden einen reellen Grenzwert haben können: eine unendliche Summe von positiven Beträgen muss nicht unendlich sein.

Wir werfen auf dem Hintergrund der Folgen und Reihen nochmals eine Blick auf die bereits auf der Seite 137 eingeführte Zahl e und die Funktion exp. Die Funktionswerte von exp sowie die Zahl e als spezieller Funktionswert $\exp(1)$ sind Grenzwerte spezifischer Reihen (Folgen). Es gilt ja

Definition 13.8.22.

$$\begin{aligned}
&\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\
&e^x := \exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}
\end{aligned}$$

◊

Jedem $x \in \mathbb{R}$ wird als Funktionswert e^x - der Grenzwert der Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right)$ - zugeordnet. Um die Definition zu rechtfertigen, müsste man noch zeigen, dass $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergiert. Dies würde allerdings weitere technische Hilfsmittel verlangen, deren Einführung hier zu weit ginge. Insbesondere ist e der Grenzwert der Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right)$.

Man kann beweisen:

Satz 13.8.23.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Beweis. Gemäss Definition gilt $e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.
Zu zeigen ist, dass es für beliebige $a > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$\left| e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right| < a.$$

Es gilt - gemäss binomischem Lehrsatz -

$$(c+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} c^{n-k} b^k$$

und eingesetzt

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\left(\frac{x}{n}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^k}{n^k}.\end{aligned}$$

Zudem gilt

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\frac{x^k}{n^k} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{x^k}{n^k} \\ &= \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\frac{x^k}{n^k} \\ &= \frac{x^k}{k!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{n} \\ &= \frac{x^k}{k!}1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\end{aligned}$$

und damit, da $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{m}{n}\right)=1$ für $m\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}\frac{x^k}{n^k} &= \lim_{n\to\infty}\frac{x^k}{k!}1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\ &= \frac{x^k}{k!}.\end{aligned}$$

Sei $a:=4b>0$ eine reelle Zahl. Da

$$e^x := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$$

Grenzwert der Reihe $\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$ ist, gibt es für beliebige reelle $b>0$ ein k_0 so dass

$$\left|e^x-\sum_{k=0}^{k_0}\frac{x^k}{k!}\right| = \left|\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right| < b.$$

(d.h. die restliche Reihensumme ist kleiner als b). Wegen

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}\frac{x^k}{n^k} = \frac{x^k}{k!}$$

gibt es für jedes k ein $n_k\geq k$, so dass für alle $n\geq n_k$ gilt

$$\left|\frac{x^k}{k!}-\binom{n}{k}\frac{x^k}{n^k}\right| < \frac{b}{2^k}. \tag{13.8.6}$$

Sei nun $n_0:=\max\{n_1,n_2,..,n_{k_0}\}$. Damit gilt mit (13.8.6)

$$\left|\sum_{k=0}^{k_0}\frac{x^k}{k!}-\sum_{k=0}^{k_0}\binom{n}{k}\frac{x^k}{n^k}\right| \leq \sum_{k=0}^{k_0}\left|\frac{x^k}{k!}-\binom{n}{k}\frac{x^k}{n^k}\right| < b+\frac{b}{2}+\frac{b}{4}+\ldots+\frac{b}{2^{k_0}} < 2b.$$

$b + \frac{b}{2} + ... + \frac{b}{a^{k_0}} < 2b$ gilt, da $b + \frac{b}{2} + ... + \frac{b}{a^{k_0}} = b\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^{k_0}}\right)$ gemäss Satz 13.3.4 mit $b\left(\frac{0.5^{k_0+1}-1}{0.5-1}\right)$ identisch ist. Nun ist $b\left(\frac{0.5^{k_0+1}-1}{0.5-1}\right) = b\left(\frac{1-0.5^{k_0+1}}{1-0.5}\right) = 2b\left(1 - 0.5^{k_0+1}\right)$ und $1 - 0.5^{k_0+1} < 1$. Also ist $b + \frac{b}{2} + ... + \frac{b}{a^{k_0}} < 2b$. Damit gilt nun - beachten Sie $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ -

$$\begin{aligned}\left|e^x - \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right| &= \left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}\frac{x^k}{n^k}\right| = \left|\sum_{k=0}^{k_0}\frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{k_0}\binom{n}{k}\frac{x^k}{n^k} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{x^k}{k!} - \sum_{k=k_0+1}^{\infty}\binom{n}{k}\frac{x^k}{n^k}\right| \\ &\leq \left|\sum_{k=0}^{k_0}\frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{k_0}\binom{n}{k}\frac{x^k}{n^k}\right| + \left|\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right| + \left|\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\binom{n}{k}\frac{x^k}{n^k}\right| \\ &\leq 2b + b + b = 4b = \frac{4a}{4} = a.\end{aligned}$$

Damit gibt es für ein beliebiges reelles $a > 0$ ein n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ $\left|e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right| < a$, d.h. die Differenz von e^x und $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ wird beliebig klein, und damit gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

□

Aus dem Satz folgt für $x = 1$

Satz 13.8.24.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Zur Illustration des Satzes 13.8.24 kann die folgende Abbildung 13.8.8 konsultiert werden.

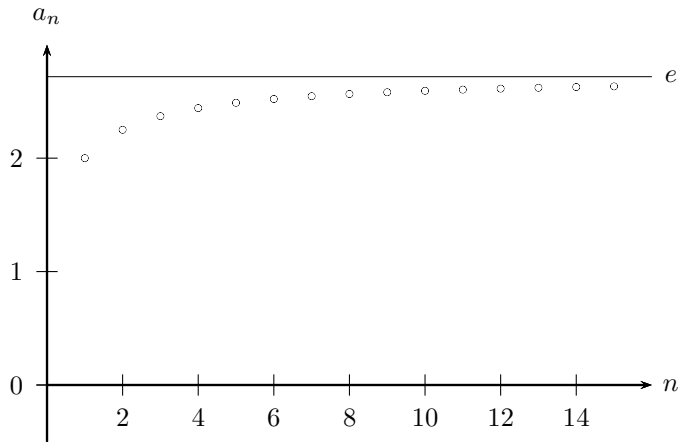


Abbildung 13.8.8: Graphische Darstellung der ersten Glieder der Folge $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ mit ihrem Grenzwert e

Der Satz 13.8.23 zeigt, dass man die oben eingeführten Sätze für Grenzwertberechnungen strikt anwenden muss. Es gilt etwa $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Es gilt aber

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \neq \lim_{n\to\infty} 1^n = 1$$

Man beachte, dass im Satz (13.8.20) die Hochzahl konstant ist - im Satz (13.8.23) hingegen nicht. Der obige Beweis zeigt zudem, dass Grenzwertberechnungen recht anspruchsvoll werden, wenn man nicht unmittelbar die Regeln (13.8.9) bis (13.8.15) anwenden kann.

Mit Satz (13.8.20) und Satz (13.8.23) gilt:

Satz 13.8.25.

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{k}{m}\right)^{mn}=e^{kn}$$

Bemerkung 13.8.26. *Zu beachten ist, dass Grenzwerte Zahlen sind und nicht Näherungsverfahren. Eine Folge kann, braucht aber nicht, Glieder zu haben, die mit dem Grenzwert zusammenfallen. Bei der konstanten Folge fallen alle Folgenglieder mit dem Grenzwert zusammen, bei geometrischen Folgen der Art des Satzes 13.8.8 fällt kein Glied der Folge mit dem Grenzwert zusammen. Bei solchen Folgen ist der Grenzwert der Folge die Zahl, der die Folgenglieder mit steigendem n beliebig nahe kommen.* ♢

Bemerkung 13.8.27. *Der Satz 13.8.23 besagt, dass e Grenzwert der Folge $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ist. Bekanntlich kann man e als Dezimalzahl nicht zu Papier bringen - die Zahl weist in Dezimalform unendlich viele Stellen auf, die keine Regelmässigkeit aufweisen. Mit Hilfe der obigen Folge kann man aber Näherungen an die Zahl e berechnen, wobei zu beachten ist, dass die Folge, wie schon die Zeichnung zeigt, langsam konvergiert. Zudem liefert der Computer in Folge von Rundungsfehlern bei genügend grossem n falsche Resultate. Entsprechend ist es besser, um eine Näherung an e zu berechnen, Folgenglieder der Reihe $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ zu berechnen. So ergibt etwa $\sum_{k=0}^{17}\frac{1}{k!}=2.71828182845905$. Excel ergibt unter $\exp(1)=2.71828182845905$. Damit ist $\sum_{k=0}^{17}\frac{1}{k!}$ eine gute Näherung an e, während z.B. $\left(1+\frac{1}{200}\right)^{200}=2.711517123$.* ♢

Bemerkung 13.8.28. *Folgen müssen für $n\to\infty$ nicht gegen Unendlich, minus Unendlich oder gegen eine reelle Zahl gehen. So hat z.B. die Folge (a_n) mit $a_n=(-1)^n$ keinen Grenzwert. Unendliche viele Glieder der Folge sind -1 und unendlich viele 1. Denn $(-1)^n=-1$ für ungerade n und $(-1)^n=1$ für gerade n.* ♢

Bemerkung 13.8.29. *Grenzwerte sind, wenn Sie für eine Folge existieren, eindeutig bestimmt. Dies können die folgenden Überlegungen zeigen: es gilt etwa $\lim_{n\to\infty}\left(4+\frac{1}{n}\right)=4$. Die Folgenglieder sind alle grösser als 4. Könnte also auch 5 Grenzwert dieser Folge sein? Dies ist nicht der Fall. Für ein $k<1$ liegen nämlich fast alle Glieder ausserhalb des Intervall $]5-k,5+k[$. Entsprechend liegen nicht alle, ausser endlich viele in diesem Intervall. Diese Überlegung gilt für beliebige Zahlen x, die grösser als 4 sind - man muss nur k genügend klein wählen, nämlich als $k<x-4$. Analoges gilt für Zahlen, die kleiner als 4 sind. Betrachten wir 3. Für $k<1$ gilt dann, das bis auf endlich viele Glieder alle ausserhalb des Intervalls $]3-k,3+k[$ liegen. Entsprechend ist 3 nicht Grenzwert der Folge. Diese Überlegung gilt für beliebige Zahlen x, die kleiner als 4 sind - man muss nur k genügend klein wählen, nämlich als $k<4-x$.* ♢

Übungen

1. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte von Folgen:
   (a) $\lim_{n\to\infty}(50+0.2^n)$
   (b) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}$
   (c) $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}$
   (d) $\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+3n-4}{n^2+4}$
   (e) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+1}{7n^3+2}$
   (f) $\lim_{n\to\infty}\frac{-6n^2+8n+8}{3n+2}$

2. Berechnen Sie den Barwert der ewigen jährlichen Rente 5000 a) zum Zinssatz 0.025 und b) zum Zinssatz 0.05 (nachschüssig).

3. Jemand steht vor der Entscheidung, eine ewige Rente von 6000 pro Jahr zu erhalten oder eine Rente von 8000 auf 20 Jahre ($i = 0.04$; nachschüssig). Was soll er wählen? Bei welchem Diskontierungssatz sind die beiden Renten identisch?

Lösungen

1. (a) Da $\lim_{n\to\infty} 0.2^n = 0 \in \mathbb{R}$ und $\lim_{n\to\infty} 50 = 50 \in \mathbb{R}$ gilt gemäss Satz 13.8.11 und Satz 13.8.8

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} (50 + 0.2^n) &= \lim_{n\to\infty} 50 + \lim_{n\to\infty} 0.2^n \\ &= 50 + 0 \\ &= 50\end{aligned}$$

   (b) Es gilt $0 < \frac{1}{n^3} < \frac{1}{n}$ sowie $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Damit gilt gemäss Sandwichtheorem $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0$.

   (c) Da $\lim_{n\to\infty} n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$, können wir den Satz 13.8.13 nicht unmittelbar anwenden. Wir kommen weiter, indem wir mit $\frac{1}{n}$ erweitern:

$$\frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{1}{n}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

   Es gilt $\lim_{n\to\infty} 1 = 1 \in \mathbb{R}$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \in \mathbb{R}$. Damit gilt $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1 \neq 0$. Zudem gilt $1 + \frac{1}{n} \neq 0$ für alle $n > 0$. Damit kann man die obigen Sätze anwenden und man erhält

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \\ &= \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)} \\ &= \frac{1}{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{1 + 0} \\ &= 1.\end{aligned}$$

   (d) Auch hier geht der Nenner und der Zähler für $n \to \infty$ gegen Unendlich. Wir erweitern mit $\frac{1}{n^2}$.

$$\begin{aligned}\frac{5n^2 + 3n - 4}{n^2 + 4} &= \frac{\frac{5n^2}{n^2} + \frac{3n}{n^2} - \frac{4}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{4}{n^2}} \\ &= \frac{5 + \frac{3}{n} - \frac{4}{n^2}}{1 + \frac{4}{n^2}}\end{aligned}$$

   Da $0 < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$ gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$. Zudem gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^2} = 4 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 4 \cdot 0 = 0 \\ \lim_{n\to\infty} 1 = 1\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}=1+0=1\neq 0.$$

Zudem gilt: $1+\frac{4}{n^2}\neq 0$ für $n>0$. Zuletzt gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}5&=5\\ \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}&=3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\\ \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{4}{n^2}\right)&=-4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0\end{aligned}$$

Damit gilt dann mit den obigen Regeln:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+3n-4}{n^2+4}&=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}}{1+\frac{4}{n^2}}\\ &=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(5+\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n^2}\right)}\\ &=\frac{\lim_{n\to\infty}5+3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}-4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim_{n\to\infty}1+4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}\\ &=\frac{5+3\cdot 0-4\cdot 0}{1+4\cdot 0}\\ &=5\end{aligned}$$

(e) Da der Nenner wie der Zähler für $n\to\infty$ gegen Unendlich gehen, versuchen wir es mit Erweitern:

$$\begin{aligned}\frac{n^3+1}{7n^3+2}&=\frac{\frac{n^3}{n^3}+\frac{1}{n^3}}{\frac{7n^3}{n^3}+\frac{2}{n^3}}\\ &=\frac{1+\frac{1}{n^3}}{7+\frac{2}{n^3}}\end{aligned}$$

Da $0<\frac{1}{n^3}<\frac{1}{n}$, gilt $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}=0$. Zudem gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}7&=7\\ \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^3}&=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}=2\cdot 0=0\\ \lim_{n\to\infty}1&=1\end{aligned}$$

und damit

$$\lim_{n\to\infty}\left(7+\frac{2}{n^3}\right)=\lim_{n\to\infty}7+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^3}=7+0=7\neq 0$$

Zudem gilt $7 + \frac{2}{n^3} \neq 0$ für alle n. Wir erhalten damit mit den obigen Sätzen:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+1}{7n^3+2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n^3}}{7+\frac{2}{n^3}} \\ &\frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(7+\frac{2}{n^3}\right)} \\ &\frac{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}}{\lim_{n\to\infty} 7 + \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^3}} \\ &= \frac{1}{7}\end{aligned}$$

(f) Da der Zähler und der Nenner für $n \to \infty$ gegen Unendlich gehen, könne wir die Regeln nicht unmittelbar anwenden. Erweitern führt nicht zum Ziel, da $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2}$ und damit eine Division durch 0 erfolgen würde. Wir versuchen es mit Faktorisieren, um eventuell zu kürzen:

$$\begin{aligned}\frac{-6n^2+8n+8}{3n+2} &= \frac{(2+3n)(4-2n)}{3n+2} \\ &= 4-2n\end{aligned}$$

Damit geht der Ausdruck für $n \to \infty$ gegen minus Unendlich (arithmetische Folge mit negativem b).

2. a) $B_\infty = \frac{5000}{0.025} = 200000$; b) $B_\infty = \frac{5000}{0.05} = 100000$

3. $B_\infty = \frac{6000}{0.04} = 150000$; $B_{20} = 8000\frac{(1+0.04)^{20}-1}{0.04(1+0.04)^{20}} = 108722.611$

$$\begin{aligned}\frac{6000}{i} = 8000\frac{(1+i)^{20}-1}{i(1+i)^{20}} &\Longrightarrow \\ 6000i(1+i)^{20} = i8000(1+i)^{20} - i8000 &\Longrightarrow \\ 6000i(1+i)^{20} - i8000(1+i)^{20} + i8000 = 0 &\Longrightarrow \\ -2000(1+i)^{20} + 8000 = 0\end{aligned}$$

(nicht definiert für $i = 0$). Mit dem Solver von Excel oder mit R: 0.071773463. Kontrolle: $B_\infty = \frac{6000}{0.071773463} = 83596$. $B_{20} = 8000\frac{(1+0.071773463)^{20}-1}{0.071773463(1+0.071773463)^{20}} = 83596$.
Bemerkung: Durch einen höheren Diskontierungssatz werden zeitlich näher erfolgende Einkünfte stärker gewichtet als weiter fort liegende Einkünfte.

13.9 Stetige Verzinsung

Bisher haben wir nur den Fall betrachtet, dass Zinsen für eine ganzes Jahr berechnet und dann zum Kapital hinzugeschlagen werden. Wie entwickeln sich Zinserträge, wenn man der Zins zum Jahreszinssatz i nach kürzeren Zeitspannen zum verzinslichen Kapital schlägt und - man spricht von „unterjähriger Verzinsung“?

K_1 nach $\frac{1}{m}$ Jahr ($m \in \mathbb{N}^*$ ist die Zahl der gleich langen Perioden pro Jahr) beträgt:

$$K_1 = K_0\left(1+\frac{i}{m}\right)$$

K_2 nach $\frac{2}{m}$ Jahr beträgt:

$$K_2 = K_1\left(1+\frac{i}{m}\right) = K_0\left(1+\frac{i}{m}\right)\left(1+\frac{i}{m}\right) = K_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^2$$

K_3 nach $\frac{3}{m}$ Jahren ist:

$$K_3 = K_2\left(1+\frac{i}{m}\right) = K_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^2\left(1+\frac{i}{m}\right) = K_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^3$$

Allgemein

$$K_r = K_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^r$$

Betrachten wir nur r mit $\frac{r}{m} = n \in \mathbb{N}$, so gilt $r = mn \in \mathbb{N}$ - das Kapital wird ganze Jahre unterjährig verzinst. Damit gilt

$$K_{nm} = K_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}$$

Lassen wir nun m immer grösser werden - damit werden die Zeitabschnitte, nach denen der Zins zum Kapital geschlagen wird immer kleiner - erhält man mit dem Satz 13.8.25:

$$K_{n\cdot\infty} := \lim_{m\to\infty} K_{nm} = \lim_{m\to\infty} K_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^{nm} = K_0\left(\lim_{m\to\infty}(1+\frac{i}{m})^m\right)^n = K_0e^{i\cdot n}$$

Wir sprechen von „stetiger Verzinsung“. Die Formel gilt nicht nur für ganze Jahre: Für $t \in \mathbb{R}^+$

$$K_\infty(t) = K_0e^{i\cdot t}$$

Beispiel 13.9.1. *Wir berechnen den Endwert eines Kapitals von 1000 Franken nach 10 Jahren ($i = 0.04$) für jährliche, trimesterweise , monatlich und stetige Verzinsung:*

Jährliche Verzinsung	$K_{10} = 1000(1+0.04)^{10} =$	1480.2
Quartalsweise Verzinsung	$K_{10\cdot4} = 1000(1+\frac{0.04}{4})^{10\cdot4} =$	1488.9
Monatliche Verzinsung	$K_{10\cdot12} = 1000(1+\frac{0.04}{12})^{10\cdot12} =$	1490.8
Stetige Verzinsung	$K_{10\cdot\infty} = 1000(e^{10\cdot0.04}) =$	1491.8

Man sieht, dass die jährliche Verzinsung zu einem kleineren Endkapital führt als die stetige Verzinsung. Man kann nun den Zins bei der stetigen Verzinsung so anpassen, dass die stetige Verzinsung zum selben Resultat führt wie die jährliche Verzinsung. Dabei muss gelten:

$$\begin{aligned} K_0(1+i)^n &= K_0e^{ni'} \Longrightarrow \\ (1+i)^n &= e^{ni'} \Longrightarrow \\ n\ln(1+i) &= ni' \Longrightarrow \\ i' &= \frac{n\ln(1+i)}{n} \\ &= \ln(1+i) \end{aligned}$$

Wir erhalten also mit der stetigen Verzinsung denselben Zins wie mit der jährlichen Verzinsung, wenn wir statt mit i mit $\ln(1+i)$ rechnen. Am Beispiel können wir das überprüfen:

$$\ln(1+0.04) = 0.039221$$
$$1000(e^{10\cdot0.039221}) = 1480.2$$

Man kann dies auch wie folgt zeigen:

$$\begin{aligned} K_0 e^{n\ln(1+i)} &= K_0 \left(e^{\ln(1+i)}\right)^n \\ &= K_0 (1+i)^n , \end{aligned}$$

was beweist, dass man bei stetiger Verzinsung mit $\ln(1+i)$ *den korrekten Endwert bei jährlicher Verzinsung zum Zinssatz* i *erhält. Es zeigt sich zudem, dass die reelle Funktion*

$$\begin{aligned} K &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ K(t) &= K_0 (1+i)^t \end{aligned}$$

der stetigen Verzinsung von K_0 *zum Zinssatz* $\ln(1+i)$ *entspricht (s. die Ausführungen auf der Seite 138 und den entsprechende Übungen auf Seite 146 f.).* ◊

Der Barwert bei stetiger Verzinsung ist

$$K_0(t) = \lim_{m\to\infty} \frac{K_t}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt}} = \frac{K_t}{\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt}} = \frac{K_t}{\left(\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}\right)^{t}} = \frac{K_t}{e^{i\cdot t}}.$$

Die Rentenformel wird zu

$$K(t) = \lim_{m\to\infty} R\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt}-1}{i} = \frac{R}{i}\lim_{m\to\infty}\left(\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt}-1\right) = \frac{R}{i}\left(e^{it}-1\right)$$

und die Rentenbarwertformel mit den obigen Schritten zu

$$K_0(t) = \lim_{m\to\infty} R\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt}-1}{i\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt}} = \frac{R}{i}\frac{e^{it}-1}{e^{it}}$$

Auch bei diesen drei Formeln kann man in der stetigen Formel i durch $\ln(1+i)$ ersetzen - nur in den Exponenten!, um dieselben Resultate wie bei der jährlichen Verzinsung und ganzen Jahren zu erhalten. Es folgt nämlich durch Ersetzen von i' in den Exponenten durch $\ln(1+i)$

$$\frac{K_t}{e^{ti'}} = \frac{K_t}{e^{t\ln(1+i)}} = \frac{K_t}{e^{\ln(1+i)^t}} = \frac{K_t}{(1+i)^t}$$

$$R\frac{e^{ti'}-1}{i} = R\frac{e^{t\ln(1+i)}-1}{i} = R\frac{e^{\ln(1+i)^t}-1}{i} = R\frac{(1+i)^t-1}{i}$$

und

$$\frac{R}{i}\frac{e^{ti'}-1}{e^{ti'}} = \frac{R}{i}\frac{e^{t\ln(1+i)}-1}{e^{t\ln(1+i)}} = \frac{R}{i}\frac{(1+i)^t-1}{(1+i)^t}.$$

Übungen

1. Lösen sie die Gleichung $K_{nm} = K_0(1+\frac{i}{m})^{nm}$ nach K_0, i und n auf und verwenden Sie die Formeln dann fürs Lösen der folgenden Aufgaben. $\frac{1}{m}$ ist der Anteil am Jahr, nach dem der Zins jeweils zum Kapital geschlagen wird.

2. Sei $i = 0.05$. $K_0 = 5000$. Berechnen Sie $K_{3,4}$ (= Verzinsung während drei Jahren, vierteljährliche Verzinsung)

3. $i = 0.04$. $K_0 = 25000$; Berechnen Sie $K_{13,12}$ (= monatliche Verzinsung; Laufzeit 13 Jahre).

4. Nach wieviel Zeit hat sich ein Kapital von 150′000 verdoppelt (zweimonatliche Verzinsung; $i = 0.025$).

5. Entwickeln Sie eine allgemeine Formel für n in $K_{nm} = xK_0$ mit $x \in \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}$. (wenn $x = 3$, ist $K_{nm} = 3K_0$)

6. Berechnen Sie i für $K_0 = 5000$; $K_{mn} = 11000$; $m = 3$; $n = 5$.

7. Lösen Sie die Gleichung $K_{n\cdot\infty} = K_0 e^{in}$ nach K_0, i, n auf.

8. $i = 0.045; n = 8; K_0 = 45000$. Berechnen Sie $K_{8\cdot\infty}$

9. $i = 0.0325; n = 10; K_0 = 5400$. Berechnen Sie $K_{10\cdot\infty}$

10. $K_{n\cdot\infty} = 5420; K_0 = 4005; i = 0.025$: Berechnen Sie n.

11. $K_{n\cdot\infty} = 145'820; K_0 = 97'105; i = 0.015$: Berechnen Sie n.

12. $K_{12\cdot\infty} = 2145; K_0 = 709; n = 12$; Berechnen Sie i.

13. $K_{15\cdot\infty} = 100'000; K_0 = 55'000; n = 15$; Berechnen Sie i.

14. Nach wie vielen Jahren hat sich ein Kapital K_0 verdoppelt (stetige Verzinsung; $i = 0.01$)

15. Berechnen Sie die Zeit, nach der gilt: $K_{n\cdot\infty} = xK_0$ (stetige Verzinsung) mit $x \in \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}$.

16. Berechnen Sie mit der eben hergeleiteten Formel n für $K_{n\cdot\infty} = 5K_0$ ($i = 0.02$).

17. Berechnen Sie mit der eben hergeleiteten Formel n für $K_{n\cdot\infty} = 10K_0$ ($i = 0.055$).

18. Obligationen von ökonomisch stabilen Ländern gelten als sicher. Obligationen von Unternehmen oder anderen Ländern gelten als weniger sicher. Die Unsicherheit drückt sich in einem erhöhten Zins aus. Die Unsicherheit kann wie folgt quantifiziert werden: wir berechnen für beide Anleihen die Barwerte und dann den folgenden Quotienten, wobei die Barwerte auf 100 GE Endwert beider Obligationen berechnet wird:

$$\frac{\text{BarwertSicher - Barwert_Unsicher}}{\text{BarwertSicher}}$$

Berechnen Sie diese Kennzahl für folgenden Obligationen: CH-Staatsanleihen Zins 2% auf 2 Jahre; Anleihe der Firma X 4% auf 3 Jahre (stetige Verzinsung).

19. Terminkontrakte sind Verträge, welche den Verkauf oder Kauf von Basiswerten (Aktien, Rohstoffen, etc.) auf einen spezifischen Termin (= Verfall) hin regeln (geregelt werden Preis, Zeitpunkt, etc.). Eine spezielle Form von Terminkontrakten sind Futures, welche standardisiert und an der Börse frei handelbar sind. Das Abschliessen eines solchen Teriminkontraktes wird „Kauf des Futures“ genannt, wenn man sich verpflichtet, bei Verfall den Basiswert zu kaufen, und wird „Verkauf des Futures“ genannt, wenn man sich verpflichtet, den Basiswert bei Verfall zu verkaufen. Der Preis des Futures ist der Betrag, der bei Verfall für den Basiswert vertragsgemäss bezahlt wird. Beim Kauf eines Futures muss der Preis des Futures also *nicht* bezahlt werden! Will man Arbitrage ausschliessen (s. Bemerkung 13.5.2, S. 343), so ist der korrekte Preis F eines Futures

$$F(T) = S_0 e^{rT}$$

mit dem risikofreien Zinssatz r (p.a. = per annum, pro Jahr), dem Wert des Basiswertes S_0 zum Zeitpunkt 0 und der Zeit T bis zum Verfall. Versuchen Sie, das zu begründen. Berechnen Sie den Futurepreis einer Aktie mit dem heutigen Wert von 50 sFr., $r = 0.02$ und $T = 3$ Monate. Berechnen Sie den Futurepreis von Gold ($S_0 = 40525$ sFr., $r = 0.015$, $T = 6$ Monate).

20. Der arbitragefreie Preis eine Futures auf eine Aktie mit einer Dividende, deren Anteil am Preis der Aktie D ist, wird berechnet durch

$$F(T) = S_0 e^{(r-D)T}$$

Wieviel beträgt der aribtragefreie Preis eine Futures auf eine Aktie zum heutigen Wert von 40, wenn die Dividende pro Jahr 2 ist und der risikofreie Zins $r = 0.02$ (T=1 Jahr)? Versuchen Sie die Formel zu begründen (d.h. zu zeigen, dass bei einem anderen Wert investitionslose Gewinnmöglichkeiten entstehen).

21. Ein Future wurde zum Zeitpunkt 0 gekauft (Verfalldatum in 3 Monaten, Marktzins $r = 1.75\%$, der Wert S_0 des Basiswertes zum Zeitpunkt 0 beträgt 50000. Nach einem Monat beträgt der Marktwert S_t des Basiswertes 52000. Der Kurswert des Futures nach einer Zeitdauer von t wird berechnet durch

$$\frac{S_t e^{r(T-t)} - S_0 e^{rT}}{e^{r(T-t)}}$$

(auf den Zeitpunkt t diskontierte Differenz der Endwerte!).

   (a) Berechnen Sie den Kurswert nach einer Zeitdauer von einen Monat nach Kauf des Futures (Bemerkung: T und t werden als Anteile am Jahr bestimmt).

   (b) Beim Kauf eines Futures muss die sogenannte „initial margin“ einbezahlt werden. Diese beträgt im allgemeinen 5% des Endwertes des Futures zum Zeitpunkt 0. Bei sinkendem Kurs des Basiswertes muss man diese aufstocken, bei steigendem Kurs kann man ihr Geld entziehen (maintenance margin). Beim Verkauf des Futures wird die verbleibende Margin bezogen. Die initial margin ist die einzige Investition, die beim Kauf eines Futures zu tätigen ist (abgesehen von Gebühren und eventuell von den Banken verlangte zusätzlichen Sicherheiten). Berechnen Sie den Gewinn, den der „Investor“ in % macht, wenn er den obigen Future nach einem Monat verkauft.

22. Ein Bio-Bauer züchtet im Tessin schottische Hochlandrinder und bietet folgende Investition an. Für 2500, die heute zu zahlen sind, erhält der Investor während 10 Jahren jedes Jahr (am Ende des Jahres ab Investitionsdatum) jeweils Fleisch oder Käse für 350 Franken. Wieviel beträgt der interne Zinssatz?

23. Eine Obligation von 100 Franken, die jährlich 4.5% Zins abwirft ist, ist in 6 Jahren fällig. Wieviel beträgt der Kurswert der Obligation, wenn der Marktzins 1.1% beträgt. Begründen Sie mit Hilfe das „keine Arbitrage“-Argumentes.

24. Berechnen Sie den heutigen Barwert einer jährlichen Rente (10000 CHF pro Jahr, 25 Jahre), deren Auszahlung in drei Jahren beginnt (Diskontierungssatz 0.03).

25. Eine Rente von 12000 CHF pro Jahr zahlbar während 5 Jahren wird monatlich ausbezahlt (1000 pro Monat). Berechnen Sie den Barwert der Rente (Diskontierungssatz 0.04).

26. Eine Schuld von 10000 Franken wird während 5 Jahren zurückbezahlt (konstante Amortisation von 2000 CHF, i = 0.05) Berechnen Sie die jährlichen Zahlungen an die Bank, indem Sie mit Excel eine dem Annuitätenverfahren analoge Tabelle erstellen.

27. Ein Auto kostet 31 000 CHFr und wird linear abgeschrieben (5% pro Jahr), d.h. das Auto verliert pro Jahr immer denselben Wert, der gewöhnlich in Prozenten auf den Anfangswert gegeben wird. Wieviel beträgt sein Wert nach 6 Jahren. Dasselbe Auto wird degressiv abgeschrieben, d.h. die 5% werden nicht auf den Anfangswert, sondern auf den jeweils verbleibenden Wert berechnet. Wieviel beträgt sein Wert nach 6 Jahren? Sei die Halbwertszeit eines Autos definiert als die Zeitdauer, in der das Auto die Hälfte seines Wertes verliert. Berechnen Sie die Halbwertzeit für beide Abschreibungsarten.

28. Ein Grossvater hat seinem Enkel Kurt am Tag der Geburt ein Konto mit einem Startkapital von CHF 1000 eröffnet. Die Verzinsung betrug zuerst 1.25%, sie wurde von der Bank an Kurts 4. Geburtstag auf 1% gesenkt.

    (a) Welchen Stand wird das Konto an Levins 18. Geburtstag erreichen, wenn die Verzinsung bei 1% bleibt und die Verrechnungssteuer vernachlässigt wird?

    (b) Welchen Betrag hätte der Grossvater zu Kurts 10. Geburtstag zusätzlich auf das Konto einzahlen müssen, damit der Kontostand an Kurts 18. Geburtstag CHF 2500 erreichen würde (sonst gleiche Ausgangslage wie unter a))

    (c) Spätestens an welchem Geburtstag von Kurt müsste der Grossvater zusätzlich CHF 2000 einzahlen, damit Kurt an seinem 18. Geburtstag mindestens CHF 3400 auf dem Konto hätte? (sonst gleiche Ausgangslage wie unter a))

    (d) Wie hoch müsste der Zinssatz nach dem 4. Geburtstag sein, damit Kurts Konto am 18. Geburtstag den Stand von CHF 1500 erreichen würde? (Sonst gleiche Ausgangslage wie unter a) (a-b Aus kaufmännischer Berufsmaturaprüfung, Brig, 2013).

    (e) Berechnen Sie den durchschnittlichen Zinssatz.

29. (Aus Berufsmaturaprüfung 2015 Brig) Eine Vermögensverwaltungsbank bezahlt auf CHF 300 Mio., die sei bei der Nationalbank deponiert hat, Negativzinsen. Der Zinssatz p betrage -0.75%.

    (a) Wie gross wären die Kosten für die Bank, wenn Negativzinsen dieser Höhe während genau 3 Jahren bezahlt werden müssten?

    (b) Wie lange würde es dauern, bis sich die Kosten auf 30 Mio. summiert hätten?

    (c) Unter der Annahme, die Bank müsse während 5 Jahren einen Negativzins von -0.75% zahlen, welche durchschnittliche Verzinsung müsste die Bank in den folgenden drei Jahren erwirtschaften, um diese Kosten zu decken?

30. (Aus Berufsmaturaprüfung 2015 Brig) Jemand ist verpflichtet nach 4 Jahren 10000 Franken, nach 7 Jahren 18000 Franken und nach 10 Jahren 22000 Franken zu bezahlen. Er möchte nun aber die ganze Summe von 50000 Franken auf einmal zahlen. Nach wie vielen Jahren sollte er dies tun, so dass er bei einem konstanten Zinssatz von 2.5% weder bevorzugt noch benachteiligt wird?

31. Am Schluss dieses Kapitels wurde bewiesen, das man in den stetigen Formeln (Barwert, Endwert Rente und Barwert Rente) in den Exponenten i' durch $\ln(1+i)$ ersetzen kann, um dieselben Resultate wie bei der jährlichen Verzinsung und ganzen Jahren zu erhalten. Zeigen Sie dies an den folgenden konkreten Beispielen:

    (a) für den Barwert eines Kapitals (n = 15, i = 0.05, $K_{15} = 5000$)

    (b) für den Endwert einer Rente: R = 500, n = 15, i = 0.04

    (c) für den Barwert einer Rente: R = 500, n = 15, i = 0.04.

Lösungen

1.
$$K_{nm} = K_0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{nm}$$
$$K_0 = \frac{K_{nm}}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{nm}}$$

$$\frac{K_{nm}}{K_0} = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{nm} \Longrightarrow$$
$$\ln K_{nm} - \ln K_0 = nm \ln\left(1 + \frac{i}{m}\right) \Longrightarrow$$
$$n = \frac{\ln K_{nm} - \ln K_0}{m \ln(1 + \frac{i}{m})}$$

$$\frac{K_{nm}}{K_0} = (1 + \frac{i}{m})^{nm} \Longrightarrow$$
$$\sqrt[nm]{\frac{K_{nm}}{K_0}} = 1 + \frac{i}{m} \Longrightarrow$$
$$i = \left(\sqrt[nm]{\frac{K_{nm}}{K_0}} - 1\right) m$$

2.
$$K_{3,4} = 5000\left(1 + \frac{0.05}{4}\right)^{3\cdot 4} = 5803.772589$$

3.
$$K_{13,12} = 25000\left(1 + \frac{0.04}{12}\right)^{13\cdot 12} = 42014.35$$

4. $K_{nm} = 2K_0$. Damit gilt
$$n = \frac{\ln K_{nm} - \ln K_0}{m \ln(1 + \frac{i}{m})} \Longrightarrow$$
$$n = \frac{\ln(2K_0) - \ln K_0}{6 \ln\left(1 + \frac{0.025}{6}\right)}$$
$$= \frac{\ln 2 + \ln K_0 - \ln K_0}{6 \ln\left(1 + \frac{0.025}{6}\right)}$$
$$= \frac{\ln 2}{6 \ln\left(1 + \frac{0.025}{6}\right)} \Longrightarrow$$
$$n = 27.784$$

5. $K_{nm} = xK_0$. Damit gilt:
$$n = \frac{\ln K_{nm} - \ln K_0}{m \ln(1 + \frac{i}{m})} \Longrightarrow$$
$$n = \frac{\ln(xK_0) - \ln K_0}{m \ln(1 + \frac{i}{m})}$$
$$= \frac{\ln x + \ln K_0 - \ln K_0}{m \ln(1 + \frac{i}{m})}$$
$$= \frac{\ln x}{m \ln(1 + \frac{i}{m})}$$

6.
$$i = \left(\sqrt[nm]{\frac{K_{nm}}{K_0}} - 1\right) m \Longrightarrow$$
$$i = \left(\sqrt[5\cdot 3]{\frac{11000}{5000}} - 1\right) 3$$
$$= 0.161\,91$$

7.
$$B_n := K_0 = \frac{K_{n\cdot\infty}}{e^{i\cdot n}}$$

(Barwert eines stetig verzinsten Kapitals)

$$\begin{aligned}
K_{n\cdot\infty} &= K_0 e^{in} \Longrightarrow \\
\frac{K_{n\cdot\infty}}{K_0} &= e^{in} \Longrightarrow \\
\ln\frac{K_{n\cdot\infty}}{K_0} &= \ln e^{in} \Longrightarrow \\
\ln K_{n\cdot\infty} - \ln K_0 &= in \Longrightarrow \\
i &= \frac{\ln K_{n\cdot\infty} - \ln K_0}{n} \\
n &= \frac{\ln K_{n\cdot\infty} - \ln K_0}{i}
\end{aligned}$$

8.
$$K_{8\cdot\infty} = 45000 \cdot e^{0.045\cdot 8} = 64499.80$$

9.
$$K_{10\cdot\infty} = 5400 \cdot e^{0.0325\cdot 10} = 7473.75$$

10.
$$n = \frac{\ln 5420 - \ln 4005}{0.025} = 12.1020894$$

11.
$$n = \frac{\ln 145820 - \ln 97105}{0.015} = 27.10534114$$

12.
$$i = \frac{\ln 2145 - \ln 709}{12} = 0.092253275$$

13.
$$i = \frac{\ln 100000 - \ln 55000}{15} = 0.0398558$$

14. Das Kapital verdoppelt sich, wenn $K_{n\cdot\infty} = 2K_0$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
2K_0 &= K_0 e^{i\cdot n} \Longrightarrow \\
2 &= e^{0.01\cdot n} \Longrightarrow \\
\ln 2 &= 0.01 \cdot n \ln e \\
&= 0.01 \cdot n \Longrightarrow \\
n &= \frac{\ln 2}{0.01} \\
&= 69.31471806
\end{aligned}$$

15. Es gilt $K_{n\cdot\infty} = xK_0$ und damit

$$\begin{aligned} xK_0 &= K_0 e^{i\cdot n} \Longrightarrow \\ x &= e^{i\cdot n} \Longrightarrow \\ \ln x &= \ln e^{in} \\ &= in \Longrightarrow \\ i &= \frac{\ln x}{n} \\ n &= \frac{\ln x}{i} \end{aligned}$$

16.
$$n = \frac{\ln 5}{0.02} = 80.47189562$$

17.
$$n = \frac{\ln 10}{0.055} = 41.86518351$$

18.
$$\frac{100 \cdot e^{-0.02\cdot 2} - 100 \cdot e^{-0.04\cdot 3}}{100 \cdot e^{-0.02\cdot 2}} = 0.076883654$$

oder 7.688%. Man sieht, dass sich die 100 wegkürzen und man direkt

$$\frac{e^{-0.02\cdot 2} - e^{-0.04\cdot 3}}{e^{-0.02\cdot 2}}$$

berechnen kann.

19.
$$\begin{aligned} F_a &= 50e^{0.02\cdot 0.25} = 50.25062604 \\ F_g &= 40525e^{0.015\cdot 0.5} = 40830.08012 \end{aligned}$$

Begründung der Berechnungsformel: Wir nehmen im Aktienfall an, der Futurepreis betrage mehr als 50.25062604, z.B. 51. Dann verkauft man den Future (bei Verfall muss man also den Basiswert liefern), nimmt einen Kredit von 50 auf, um den Basiswert zu kaufen, übergibt den Basiswert bei Verfall und zahlt den Kredit zurück. Man erhält für den Basiswerte bei Verfall 51 und muss für den Kredit 50.25062604 bezahlen, womit sich ein Gewinn ohne Investition von $51 - 50.25062604$ ergibt (= Arbitrage). Diese Arbitrage-Strategie wird „Cash and Carry“ genannt. In Wirklichkeit würden natürlich noch Gebühren, Kosten für investierte Zeit, Kosten für die Lagerung des Basiswertes, etc. anfallen, was wir einfachheitshalber ausblenden. Wir nehmen nun an, der Futurepreis sei kleiner als 50.25062604, z.B. 49. In diesem Fall kauft man den Future (muss also bei Verfall den Basiswert übernehmen), verkauft den Basiswert zum Preis von 50 (Leerverkauf) und legt das Geld auf die Bank. Bei Verfall erhält man von der Bank 50.25062604, bezahlt bei Verfall 49 und übernimmt den Basiswert, den man dann weitergibt, um den Lehrverkauf zu bereinigen. Es ergibt sich ein Gewinn von $50.25062604 - 49$. Die Strategie wird „reversed Cash and Carry“ genannt. Auch hier blenden wir verschiedene durch die Strategie in der Wirklichkeit entstehende Kosten oder etwa auch Zinsunterschiede zwischen Anlagen und Krediten aus. *Bemerkung zu „Leerverkauf“*: Es handelt sich um einen Verkauf von Gütern, die man nicht besitzt. So kann eine Bank Wertpapiere verkaufen, die sie nicht besitzt. Verlangt der ursprüngliche Besitzer nicht die Aushändigung der Wertpapiere, so ergibt sich kein Problem. Verlangt nur ein einzelner die Auslieferung, kann die Bank Wertpapiere von anderen Besitzern an den ursprünglichen Besitzer überschreiben oder sie kann die benötigten Wertpapier hinzukaufen, um sie dem Besitzer

zu liefern. Im Normalfall muss sie keines von beiden tun. Sie kann bei Verfall die Wertpapiere einfach an den ursprünglichen Besitzer zurücktransferieren. Probleme ergeben sich bei Leerverkäufen, wenn plötzlich alle Besitzer eines bestimmten Wertpapiers diese zurückwollen oder wenn bei der Notwendigkeit eines Zukaufs sich der Wert des Wertpapiers massiv erhöht hat.

20. $D = \frac{2}{40} = 0.05$

$$F = 40e^{(0.02-0.05)1} = 38.818$$

21. Man erhält:

    (a) Kurswert nach einem Monat nach Kauf des Futures:

    $$\frac{52000 * \exp(0.0175 * 1/6) - 50000 * \exp(0.0175 * 1/4)}{\exp(0.0175 * 1/6)} = 1927.030139$$

    (b) Die Margin (= Investition, die man zurückerhält), beträgt $0.05 * 50000 = 2500$. Aufgezinst auf den Verkaufszeitpunkt ergibt diese $2500 \exp(0.0175 * 1/12) = 2503.648493$. Damit ergibt sich als Gewinn relativ zur Investition

    $$\frac{1927.030139}{2503.648493} * 100 = 76.9688774\%$$

    Oder in einer Formel:

    $$\frac{1927.030139}{0.05 * 50000 * \exp(0.0175 * 1/12)} * 100$$

    (Die Möglichkeit, mit Futures relativ zur Investition hohe Gewinne oder hohe Verluste zu machen, wird mit dem Begriff „Hebelwirkung“ umschrieben).

22. Es gilt:

$$2500\,(1+i)^{10} = \sum_{k=0}^{10-1} 350\,(1+i)^k = 350\frac{(1+i)^{10}-1}{i}$$

Lösung mit R: `f=function(x)2500*(1+x)^10-350*((1+x)^10-1)/x`
`uniroot(f,c(0.000001,0.5)) ergibt:` 0.06636592, also 6.637%

23. Die Obligation wirft pro Jahr 4.5 Franken ab - eine Art Rente, deren Endwert wir mit Hilfe der Rentenendwertformel berechnen können:

$$4.5 \cdot \frac{(1+0.011)^6 - 1}{0.011} = 27.753$$

Das Kapital am Ende der 6 Jahre beträgt damit 127.753. Diskontieren wir diese zum Marktzinssatz, ergibt sich ein Kurswert von

$$\frac{127.753}{(1+0.011)^6} = 119.64.$$

Die Rendite der Obligation, die zum Kurswert gekauft wird, beträgt 1.1% (Marktzinssatz). Jeder andere Kurswert führt zur Möglichkeit, Gewinn ohne Investitionen zu machen (= Arbitrage) und kommt deshalb auf einem transparenten Markt ohne Gebühren nicht vor.

24. Barwert in drei Jahren: $\frac{10000 \cdot \left(1.03^{25}-1\right)}{0.03 \cdot 1.03^{25}} = 174131.4769$
Barwert in drei Jahren diskontieren auf heute: $\frac{174131.4769}{1.03^3} = 159354.9687$

25. Am besten berechnet man den Zinssatz pro Monat, der bei monatlichem Zinseszinsrechnen dem jährlichen Zinssatz von 0.04 entspricht. Es gilt also $(1+i_{12})^{12} = 1+0.04$, was nach i_{12} aufzulösen ist. ($(1+0.04)^{\frac{1}{12}} - 1 = i_{12} = 0.00327374$). Wir rechnen mit 60 Monaten zum angepassten Zinssatz i_{12}.
Der Barwert ist gemäss hergeleiteter Formel $\frac{1000\cdot(1.00327374^{60}-1)}{0.00327374\cdot 1.00327374^{60}} = 54394.33307$.

26. Es ergibt sich (s. Tabelle 13.9.3):

Jahr	Kapital	Amortisation	Zins	Zahlungen an Bank	
0	10000				
1	8000	2000	500	2500	
2	6000	2000	400	2400	
3	4000	2000	300	2300	
4	2000	2000	200	2200	
5	0	2000	100	2100	

Tabelle 13.9.3: Beispiel für konstante Amortisation eines Kredits

27. Wert nach 6 Jahren: $31000 - 6\,(0.05\cdot 31000) = 21700$
Degressiv: $31000\,(0.95)^6 = 22787.84861$
denn am Ende des ersten Jahres beträgt der Wert des Autos $31000\cdot 0.95$, am Ende des zweiten Jahres $(31000\cdot 0.95)\,0.95 = 31000\cdot 0.95^2$, am Ende des 3. Jahres $((31000\cdot 0.95)\,0.95)\,0.95 = 31000\cdot 0.95^3$, etc.
Halbwertszeit linear: $31000 - t\,(0.05\cdot 31000) = \frac{31000}{2}$, nach t auflösen: $t = 10$ (oder: da das Auto 5% pro Jahr an Wert verliert, verliert es in wie vielen Jahren 50% - in 10 natürlich).
Halbwertszeit degressiv: $31000\cdot 0.95^t = \frac{31000}{2} \iff 2\cdot 0.95^t = 1 \iff \ln 2 + t\ln 0.95 = 0 \iff t = \frac{-\ln 2}{\ln 0.95} = 13.51340733$
Kontrolle: $31000\cdot 0.95^{13.51340733} = 15500$.

28. Ein Grossvater hat seinem Enkel Kurt am Tag der Geburt ein Konto mit einem Startkapital von CHF 1000 eröffnet. Die Verzinsung betrug zuerst 1.25%, sie wurde von der Bank an Kurts 4. Geburtstag auf 1% gesenkt.

(a) $1000\,(1+0.0125)^4\,(1+0.01)^{14} = 1208.034564$

(b) $\left(1000\,(1+0.0125)^4\,(1+0.01)^6 + x\right)(1+0.01)^8 = 2500$

$$\begin{aligned} x &= \frac{2500}{(1+0.01)^8} - 1000\,(1+0.0125)^4\,(1+0.01)^6 \\ &= 1193.108404 \end{aligned}$$

(c) $1000\,(1+0.0125)^4\,(1+0.01)^{14} + 2000\,(1+0.01)^t = 3400$

$$\begin{aligned} (1+0.01)^t &= \frac{3400 - 1000\,(1+0.0125)^4\,(1+0.01)^{14}}{2000} \\ t &= \frac{\ln \frac{3400-1000(1+0.0125)^4(1+0.01)^{14}}{2000}}{\ln(1.01)} \\ &= 9.210891715 \end{aligned}$$

(d) $1000\,(1+0.0125)^4\,(1+i)^{14} = 1500$

$$(1+i)^{14} = \frac{1500}{1000\,(1+0.0125)^4}$$

$$i = \sqrt[14]{\frac{1500}{1000\,(1+0.0125)^4}} - 1$$

$$= 0.025738152$$

Also 2.5738153%.

(e) $\sqrt[18]{1.0125^4 1.01^{14}}$ =1.010555022; also 1.0555022%

29. Man erhält:

(a) Kosten: $300 - 300\,(1-0.0075)^3 = 6.6995$ (Mio.)

(b) $300 - 300\,(1-0.0075)^t = 30$

$$(1-0.0075)^t = -\frac{30-300}{300}$$

$$t = \frac{\ln\left(-\frac{30-300}{300}\right)}{\ln\,(1-0.0075)} = 13.995 \text{ (Jahre)}$$

(c) $300 - 300\,(1-0.0075)^5 = 11.083$ (Mio.). $300\,(1-0.0075)^5 = 288.92$
$288.92\,(1+i)^3 = 300$

$$i = \sqrt[3]{\frac{300}{288.92}} - 1$$

$\sqrt[3]{\frac{300}{288.92}} - 1 = 0.012623$ (1.2623%)

30. Barwert von 10000: $\frac{10000}{1.025^4} = 9059.5$
Barwert von 18000: $\frac{18000}{1.025^7} = 15143.$
Barwert von 22000: $\frac{22000}{1.025^{10}} = 17186.$
Summe Barwerte: $\frac{10000}{1.025^4} + \frac{18000}{1.025^7} + \frac{22000}{1.025^{10}} = 41389.$

$$41389\,(1+0.025)^t = 50000$$

$$t = \frac{\ln\frac{50000}{41389}}{\ln 1.025} = 7.6544$$

31. Man erhält:

(a) für den Barwert eines Kapitals (n = 15, i = 0.05, K_{15} = 5000)

$$\frac{5000}{(1+0.05)^{15}} = 2405.1$$

$$\frac{5000}{e^{15\ln(1+0.05)}} = 2405.1$$

(b) für den Endwert einer Rente: R = 500, n = 15, i = 0.04

$$500\frac{(1+0.04)^{15}}{0.04} = 22512$$

$$500\frac{e^{15\ln(1.04)}}{0.04} = 22512$$

(c) für den Barwert einer Rente: R = 500, n = 15, i = 0.04.

$$500\frac{(1+0.04)^{15}-1}{0.04\,(1+0.04)^{15}} = 5559.2$$
$$500\frac{e^{15\ln(1.04)}-1}{0.04e^{15\ln(1.04)}} = 5559.2$$

Literatur

Es wird empfohlen selbständig ein Buch zur Finanzmathematik durchzuarbeiten. Ein Blick auf Amazon (Stichwort „Finanzmathematik“) ergibt eine grosse Anzahl Bücher, die augenblicklich zum Thema auf dem Markt sind. Es folgt aus dieser Liste die Angaben zu einem dieser Bücher: Tietze, J. (2006), *Einführung in die Finanzmathematik*, Wiesbaden: Vieweg+Teubner (mit Übungsbuch: Tietze, J. (2008), *Übungsbuch zur Finanzmathematik: Aufgaben, Testklausuren und Lösungen*, Wiesbaden: Vieweg).

13.10 Lernziele

- Die Definition einer Folge kennen. Die Definitionen der arithmetischen, geometrischen und konstanten Folge kennen. Die Definition einer Reihe kennen.
- Folgenglieder für arithmetische und geometrische Folgen berechnen können. Die finanzmathematischen Anwendungen kennen und entsprechende Berechnungen durchführen können. Die Summen der ersten n Glieder von arithmetischen und geometrischen Folgen berechnen können. Die finanzmathematischen Anwendungen kennen und berechnen können (Renten)
- Wissen, wie man durchschnittliche Zinssätze berechnet.
- Die Definition des Barwertes kennen und den Barwert von Kapitalien sowie von Renten berechnen können. Die Kapitalwertmethode beim Investitionsvergleich anwenden können.
- Die Annuitätentilgung berechnen können (Tilgungspläne mit Excel berechnen können).
- Den Grenzwertbegriff für Folgen und Reihen für $n \to \infty$ kennen (Definitionen dafür, dass die Folge gegen Unendlich oder gegen minus Unendlich; gegen $c \in \mathbb{R}$ geht). Den Grenzwert für geometrische Folgen mit $0 < q < 1$ kennen. Den Barwert einer unendlichen Rente berechnen können.
- Den Begriff der stetigen Verzinsung kennen und entsprechende Endkapitalien und Barwerte berechnen können.
- Übungen der obigen Art lösen können.

Kapitel 14

Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen

Bisher wurden vor allem Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ betrachtet. Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tauchten nur kurz bei der linearen Optimierung mit nicht-affinem Restriktionssystem auf. Allgemein kann man Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ betrachten, wobei wir uns hier auf Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ beschränken wollen. Ökonomische Beispiele solcher Funktionen sind leicht zu finden: produziert man mehrere Güterarten, so können den entsprechenden Mengen $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ die Kosten der gesamten Produktion zugeordnet werden. Es ergibt sich eine Funktion $K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \to K(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$. Ein entsprechendes konkretes Beispiel könnte wie folgt aussehen:

Beispiel 14.0.1.

$$K : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$K(x, y, z) = x^3y^2 + 2yz^2$$

Für $(x, y, z) = (5, 3, 10)$ *würde man* $K(5, 3, 10) = 5^3 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 10^2 = 1725$ *erhalten - die Kosten, die bei der Produktion von* 5 *Einheiten des ersten Gutes,* 3 *Einheiten des zweiten Gutes und* 10 *Einheiten des dritten Gutes anfallen.* ◊

In diesem Kapitel werden wir nur Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ behandeln. Im Rahmen der linearen Optimierung führt man das dreidimensionale Problem auf ein zweidimensionales zurück, indem die dritte Dimension konstant gesetzt wird. Beispiele, die mit dieser Methode gelöst werden können, werden im ersten Unterkapitel geliefert. Im zweiten Unterkapitel behandeln wir an Beispielen dreidimensionale Funktionen, bei denen ein funktionaler Zusammenhang zwischen den unabhängigen Variablen besteht. Man kann in diesem Fall eine der Variablen durch die andere ersetzen, wie wir sehen werden. Zuletzt werden wir Methoden einführen, die es erlauben, Extremalstellen von dreidimensionalen Funktionen zu berechnen.

14.1 Dimensionsreduktion durch Konstantsetzung

Wir betrachten als Beispiel für die Methode die Grenzrate der Substitution. Gegeben sei die Nutzenfunktion $U(x_1, x_2)$. Sie drückt den Nutzen des Konsums von zwei Arten von Gütern in den Mengen x_1 und x_2 aus. Damit betrachten wir eine Funktion im dreidimensionalen Raum (U ordnet jedem geordneten Paar (x_1, x_2) einen Nutzen U zu). Für konstanten Nutzen U_0 können wir die Nutzenfunktion jedoch auf eine zweidimensionale Funktion zurückführen: Es gilt dann $U_0 = U(x_1, x_2)$. Die Funktion $U(x_1, x_2) = U_0$ wird die „Indifferenzlinie“ oder „Indifferenzkurve“ genannt. Sie gibt die verschiedenen Kombinationen von x_1 und x_2 an, die man braucht, um denselben Nutzen zu haben. Da sich der Nutzen nicht verändert, ist man gegenüber entsprechenden Güterkombinationen indifferent.

Beispiel 14.1.1. $U(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$. *Wir fixieren* U*:* $U_0 = 400 = x_1 \cdot x_2$. *Diese zweite Funktion gibt uns an, welche Mengenkombinationen einen konstanten Nutzen von* 400 *ergeben. Wenn wir die Menge* x_1 *kennen, können wir die Menge* x_2*, die mit* x_1 *einen Nutzen von* 400 *erzeugt. Sei z.B.* $x_1 = 40 \Longrightarrow x_2 = \frac{400}{40} = 10$.
Das Paar $(x_1, x_2) = (40, 10)$ *produziert einen Nutzen von* 400.
Wenn $x_1 = 15$*, dann* $x_2 = \frac{400}{15}. = \frac{80}{3} = 26.667$
Das Paar $(15, 26\frac{2}{3})$ *produziert ebenfalls einen Nutzen von* 400*, etc.*
Für verschiedene Nutzen U_0 *erhalten wir andere Funktionen, die angeben, welche Mengen* x_1 *und* x_2 *den Nutzen* U_0 *erzeugen. z.B.* $500 = U_0 = x_1 \cdot x_2$. *Wir nennen diese (unendliche vielen) Funktionen mit* $U_0 = x_1 \cdot x_2$ *(*U_0 *ist eine Konstante) alle „Indifferenzkurven".* ◊

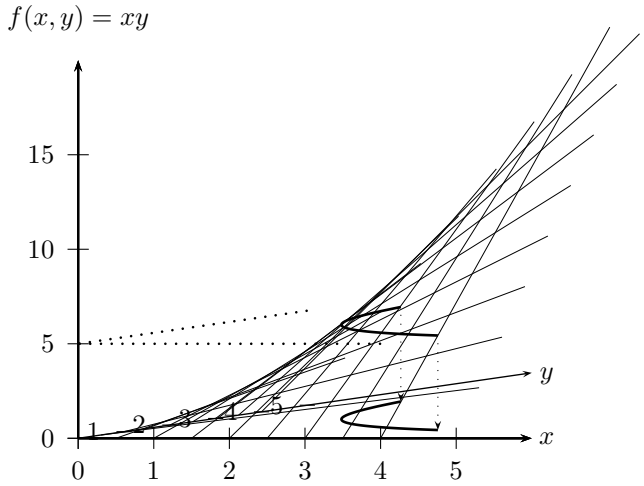


Abbildung 14.1.1: Konstantsetzung der dritten Dimension der Funktion $f(x, y) = xy$ - im Graphikbeispiel wird $f(x, y) = 5$ gesetzt - und Projektion des resultierenden Schnittes auf die (x,y)-Ebene durch Auflösung von $xy = 5$ nach y: $y(x) = \frac{5}{x}$

Definition 14.1.2. *Sei eine Funktion* $C = F(x_1, x_2)$ *gegeben (*C *ist eine Konstante,* $C \in \mathbb{R}$*), die nach* x_2 *aufgelöst eine Funktion* $x_2(x_1)$ *ergibt. Dann ist die Grenzrate der Substitution von* F*:* $\frac{d}{dx_1} x_2(x_1)$ ◊

Die Grenzrate der Substitution gibt näherungsweise an, um wieviel mehr man von einem Gut braucht, um eine Einheit eines anderen Gutes zu ersetzen, wenn man die Zielgrösse konstant hält. Bei einer Nutzenfunktion gibt die Grenzrate der Substitution also näherungsweise an, wieviel von einem Gut man bei der Reduktion um eine Einheit eines anderen Gutes braucht, um den Nutzen konstant zu halten. Um die Grenzrate der Substitution im Falle einer Nutzenfunktion zu berechnen, lösen wir die Funktion für ein spezifisches U_0 nach x_2 auf: Im obigen Beispiel 14.1.1: $400 = x_1 \cdot x_2 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = x_2(x_1) = \frac{400}{x_1}$ und berechnen die erste Ableitung:

$$x_2'(x_1) = \frac{d}{dx_1} \frac{400}{x_1} = -\frac{400}{x_1^2}$$

Bei $x_1 = 15.492$ beträgt damit die Substitutionsrate $\frac{-400}{x_1^2} = \frac{-400}{15.492^2} = -1.6667$. Erhöht man also x_1 um eine Einheit, so kann man x_2 näherungsweise um 1.6667 Einheiten reduzieren, ohne den Nutzen zu verändern.

Beispiel 14.1.3. $U(x_1, x_2) = 0.5x_1^{0.2} \cdot x_2^{0.8}$
$500 = 0.5x_1^{0.2}x_2^{0.8}$ *(*500 *willkürlich gewählt) und mit* $x_2^{0.8} = \left(\sqrt[5]{x_2}\right)^4 = x_2^{\frac{4}{5}}$

$$500 = 0.5x_1^{0.2}x_2^{0.8} \Longrightarrow$$
$$(\sqrt[5]{x_2})^4 = \frac{500}{0.5x_1^{0.2}} \Longrightarrow$$
$$x_2(x_1) = \left(\sqrt[4]{\frac{500}{0.5x_1^{0.2}}}\right)^5 = \left(\frac{500}{0.5x_1^{0.2}}\right)^{\frac{5}{4}}$$

(nützliche Regel: löst man $y^{\frac{m}{n}} = x$ nach y auf, ergibt sich $y = x^{\frac{n}{m}}$)
Wenn $x_1 = 40$ und $x_2 = 2236.067977$, empfindet das Individuum einen Nutzen von 500, denn

$$2236.067977 = x_2(40) = \left(\sqrt[4]{\frac{500}{0.5\sqrt[5]{40}}}\right)^5 = \left(\frac{500}{0.5\sqrt[5]{40}}\right)^{\frac{5}{4}}$$

und

$$0.5 \cdot 40^{0.2} \cdot 2236.067977^{0.8} = 500.$$

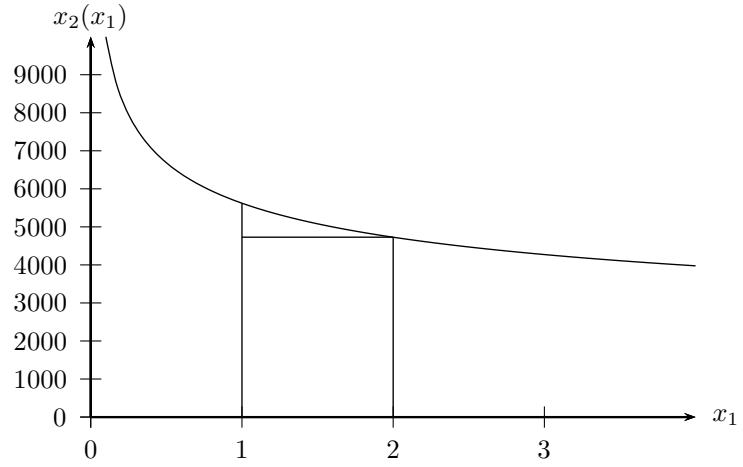


Abbildung 14.1.2: Nutzenindifferenzkurve des Beispiels mit $U = 500$. Konsumiert man in 1 eine Einheit mehr von Gut x_1, so kann man bei konstantem Nutzen von 500 auf $\left(\frac{500}{0.5\cdot 2^{0.2}}\right)^{\frac{5}{4}} - \left(\frac{500}{0.5\cdot 1^{0.2}}\right)^{\frac{5}{4}} = 5623.413252 - 4728.708045 = 894.7052069$ Einheiten des Gutes x_2 verzichten.

Die Grenzrate der Substitution für beliebige x_1 lautet für $U_0 = 500$ (mit der Kettenregel und der Quotientenregel bei der inneren Ableitung):

$$\frac{dx_2(x_1)}{dx_1} = \frac{d}{dx_1}\left(\frac{500}{0.5x_1^{0.2}}\right)^{\frac{5}{4}} = \frac{d}{dx_1}\left(\frac{500}{0.5x_1^{\frac{1}{5}}}\right)^{\frac{5}{4}}$$
$$= \underbrace{\frac{5}{4}\left(\frac{500}{0.5x_1^{\frac{1}{5}}}\right)^{\frac{1}{4}}}_{\text{Äussere Ableitung}} \cdot \underbrace{\left(-\frac{500\frac{1}{5}0.5x_1^{-\frac{4}{5}}}{0.5^2x_1^{\frac{2}{5}}}\right)}_{\text{Innere Ableitung (Quotientenregel)}}$$

was (fakultativ zu)

$$\frac{dx_2(x_1)}{dx_1} = -250\frac{\left(\sqrt[4]{10}\right)^3}{\left(\sqrt[4]{x_1}\right)^5}$$

vereinfacht werden kann (man könnte aber auch die Hochzahl $\frac{5}{4}$ auf den Bruch verteilen und kann dann auf die Kettenregel verzichten. Die unvereinfachte Endformel wird einfacher!). Um eine die Grenzrate der Substitution in einem spezifischen $x_1 = 30$ zu berechnen, setzen wir ein:

$$x_2'(30) = \frac{5}{4}\left(\frac{500}{0.5 \cdot 30^{\frac{1}{5}}}\right)^{\frac{1}{4}}\left(-\frac{500 \cdot \frac{1}{5} \cdot 0.5 \cdot 30^{-\frac{4}{5}}}{0.5^2 \cdot 30^{\frac{2}{5}}}\right) = -20.024.$$

Interpretation: Erhöhen wir in $x_1 = 30$ die Grösse x_1 um eine Einheit auf 31, so müssen wir näherungsweise 20.023 weniger Einheiten von x_2 haben, um denselben Nutzen zu haben. In $x_1 = 40$ ergibt sich

$$x_2'(40) = -250\frac{\left(\sqrt[4]{10}\right)^3}{\left(\sqrt[4]{40}\right)^5} = -13.975.$$

In $x_1 = 30$ kann man also auf mehr von x_2 verzichten als in $x_1 = 40$ - bei konstantem Nutzen. $\Diamond$

Die gemachten Überlegungen können auch für Produktionsfunktionen gemacht werden. Sei $x(r_1, r_2)$ die Produktionsfunktion, die den Output x als Funktion des Inputs r_1 und r_2 ausdrückt. Es handelt sich wiederum um eine Funktion im dreidimensionalen Raum (x ordnet jedem geordneten Paar (r_1, r_2) einen Output x zu). Für konstante Outputs können wir die Produktionsfunktion auf eine zweidimensionale Funktion zurückführen: Es gilt dann $c_0 = x(r_1, r_2)$. Wir nennen c_0 eine Isoquante (= gleiche Menge). Diese Funktion gibt an, welche Inputkombinationen einen konstanten Output c_0 ergeben. Wir können diese Funktion nach r_2 auflösen. Wir definieren nun die Grenzrate der Substitution: $r_2'(r_1)$. Die Grenzrate der Substitution gibt näherungsweise an, um wieviel mehr wir r_2 brauchen, wenn wir eine Einheit r_1 weniger einsetzen.

14.2 Dimensionsreduktion durch Einsetzen von Gleichungen

Beispiel 14.2.1. *Sei die Nutzenfunktion*

$$U(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$$

gegeben. Eine ME von x_1 koste 50 GE und eine ME von x_2 koste 30 GE. Man bestimme die kostengünstigste Mengenkombination von x_1 und x_2, welche einen Nutzen von 400 produziert. Lösung: Die variable Kostenfunktion ist damit

$$K(x_1, x_2) = 50x_1 + 30x_2.$$

Es gilt

$$400 = x_1 x_2$$

und damit

$$x_2(x_1) = \frac{400}{x_1}.$$

Es liegt also ein funktionaler Zusammenhang zwischen den beiden unabhängigen Variablen vor. In die Kostenfunktion eingesetzt erhält man

$$K(x_1) = 50x_1 + 30\frac{400}{x_1} = 50x_1 + \frac{12000}{x_1}.$$

Durch Ableiten erhält man:

$$\frac{d}{dx_1}K(x_1) = \frac{d}{dx_1}\left(50x_1 + \frac{12000}{x_1}\right) = 50 - \frac{12\,000}{x_1^2}$$

und durch Nullsetzen

$$50 - \frac{12\,000}{x_1^2} = 0 \Longrightarrow x_1 = 4\sqrt{15} \approx 15.492$$

für $x_1 \geq 0$. *Zweite Ableitung:*

$$\frac{d}{dx_1}\left(50 - \frac{12\,000}{x_1^2}\right) = \frac{24\,000}{x_1^3} > 0$$

für $x_1 = 15.492$. *Damit liegt in* 15.492 *ein Minimum vor. Die kostengünstigste Mengenkombination für den angestrebten Nutzen ist damit*

$$(x_1, x_2(x_1)) = (15.492, \frac{400}{15.492}) = (15.492, 25.820).$$

$\Diamond$

Beispiel 14.2.2. *Ein Zylinder ist definiert als ein Körper mit kreisrunden Deckeln, so dass einer der Deckel in den andern überführt werden kann durch Parallelverschiebung auf einer Geraden (s. Abbildung).*

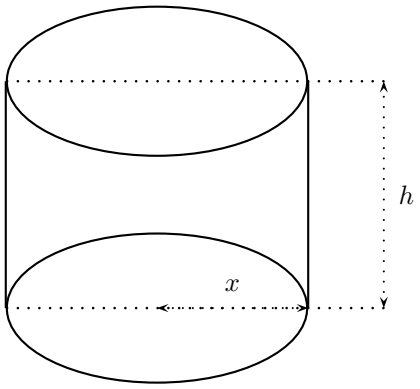


Abbildung 14.2.3: Zylinder mit Höhe h und Radius x

Die Fläche des Kreises ist gegeben durch πx^2, *der Kreisumfang durch* $2x\pi$, *wobei* x *der Radius des Kreises ist. Das Volumen eines spezifischen Zylinders betrage 1* dm^3 *(Tunfischkonserven für Grossküchen). Wie muss* h *und* x *gewählt werden, damit die Oberfläche des Zylinders minimal ist (um Verpackungsmaterial zu sparen)? Für die Oberfläche des Zylinders gilt* $O(x,h) = 2x\pi h + 2\pi x^2$ *(zweimal einen Deckel:* $2\pi x^2$ *und dann ein Rechteck mit der Basis* $2x\pi$ *und der Höhe* h*) und für den Inhalt des Zylinders* $I(x,h) = x^2\pi h$ *(Basisfläche mal Höhe). Nun gilt* $I(x,h) = x^2\pi h = 1dm^3$ *und damit* $h = \frac{1}{x^2\pi}$ *(Funktionaler Zusammenhang zwischen den unabhängigen Variablen). In* $O(x,h)$ *eingesetzt fällt die Variable* h *weg:*

$$\begin{aligned} O(x) &= 2x\pi\frac{1}{x^2\pi} + 2\pi x^2 \\ &= \frac{2}{x} + 2\pi x^2 \end{aligned}$$

Durch Ableiten erhält man:

$$O'(x) = -\frac{2}{x^2} + 4\pi x$$

und durch Nullsetzen als einzige reelle Lösung $\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} = 0.541\,93$. *Die zweite Ableitung ist*

$$O''(x) = \frac{4}{x^3} + 4\pi > 0$$

für $x > 0$. Damit liegt ein Minimum vor. Die Höhe ist dann: $h = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}^2}\,\pi} = 1.0839$

Kontrolle: $\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}^2 \pi \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}^2}\,\pi} = 1$ ◊

14.3 Extrema bei dreidimensionalen Funktionen

Für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kann man sich fragen, wo Sie Extrema annehmen. Die entsprechende Theorie wird anspruchsvoller als im Fall $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir beschränken uns in der Folge auf Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die in die Richtung x und die Richtung y zweimal stetig ableitbar sind, d.h. die zweiten Ableitungen sind stetige Funktionen. Solche Funktionen kann man graphisch darstellen, im Gegensatz zu Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $n > 2$. Ein Beispiel für eine solche Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist

Beispiel 14.3.1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x, y) = (x + 1)^2 + y^2 + 0.1$. *Es könnte sich z.B. um eine Kostenfunktion handeln (Fixkosten = 0.1). So wird z.B. dem Punkt* $(1, 3)$ *die Zahl* $(1 + 1)^2 + 3^2 + 0.1 = 13.1$ *zugeordnet. Die graphische Darstellung dieser Funktion sieht wie folgt aus (s. Abbildung 14.3.4; statt der Menge aller Punkte, die eine gekrümmte Fläche darstellen, werden Linien verwendet - Projektionen von zu den Achsen parallelen Geraden auf die Funktionsfläche - um die Darstellung plastischer werden zu lassen).*

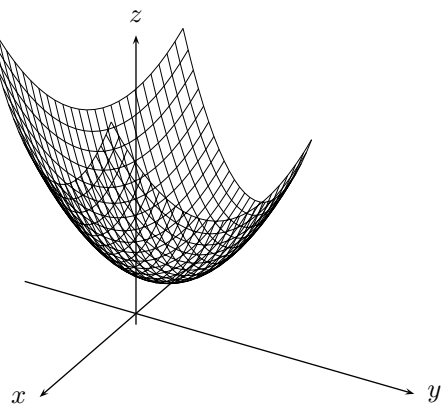


Abbildung 14.3.4: Graphische Darstellung der Funktion $z := f(x, y) = (x + 1)^2 + y^2 + 0.1$ im Bereich $[-1, 1] \times [-0.8, 1]$ (Teilmenge des Definitionsbereichs)

◊

Es stellt sich das Problem, wie man Maxima und Minima solcher Funktionen bestimmt. Es ist zu vermuten, dass diese in Punkten liegen, in denen die Steigung mindestens in die x-Richtung und in die y-Richtung mit 0 identisch ist. Entsprechend werden die Funktionen nach diesen beiden Variablen abgeleitet, wobei man solche Ableitungen „partielle Ableitungen“ nennt und statt $\frac{d}{dx} f(x, y)$ und $\frac{d}{dy} f(x, y)$ üblicherweise

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \text{ und } \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$$

geschrieben wird. Für das Beispiel 14.3.1 erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((x + 1)^2 + y^2 + 0.1\right) = 2x + 2$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left((x + 1)^2 + y^2 + 0.1\right) = 2y$$

Nun ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + 2 &= 0 \\ 2y &= 0 \end{aligned}$$

zu lösen. Man erhält $x = -1, y = 0$, d.h. den Punkt $(-1, 0)$. Einen solchen Punkt nennen wir „Nullstellenvektor“.

Als nächstes gilt es, zu überprüfen, ob im Nullstellenvektor ein Minimum oder ein Maximum vorliegt, wobei hier zusätzlich z.B. die Möglichkeit von Sattelpunkten ins Spiel kommt. Der Sattelpunkt ist in eine Richtung ein Minimum und in eine andere Richtung ein Maximum (s. Abbildung 14.3.5).

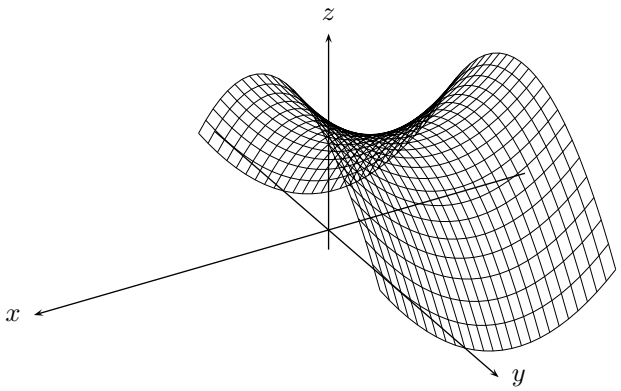


Abbildung 14.3.5: Graphische Darstellung der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $z := f(x, y) = 0.5x^2 - y^2 + 0.1$ mit Sattelpunkt

Leiten wir jede der Ableitungen nach beiden Variablen ab, so ergibt sich mit

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) := \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right)$$

eine 2×2 Tabelle

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x \partial x} f(x, y) & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) & \frac{\partial^2}{\partial y \partial y} f(x, y) \end{pmatrix},$$

im Beispiel 14.3.1

$$\begin{aligned} H &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x \partial x} f(x, y) & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) & \frac{\partial^2}{\partial y \partial y} f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(2x + 2) & \frac{\partial}{\partial x} 2y \\ \frac{\partial}{\partial y}(2x + 2) & \frac{\partial}{\partial y} 2y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Diese Tabellen werden gewöhnlich „Hessematrix“ genannt (nach Otto Hesse, 1811 - 1874, Deutscher Mathematiker). Setzt man nun in die Matrix für x und y die entsprechenden Nullstellen ein - im Beispiel gibt es nichts zu ersetzen, da die zweiten Ableitungen konstant sind -, so entsteht eine Matrix H_0, die im Beispiel mit H zusammenfällt. Für ein Beispiel mit Einsetzen s. Beispiel 14.3.5.

Man kann für stetige und in beide Richtungen zweimal ableitbare Funktionen zeigen:

Satz 14.3.2. *Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig ableitbar. Dann liegt ein Maximum vor, wenn für alle von $(0, 0)$ verschiedenen Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und die Matrix $H_0 = \begin{pmatrix} h_{11}^0 & h_{12}^0 \\ h_{21}^0 & h_{22}^0 \end{pmatrix}$ gilt*

$$x\left(xh_{11}^0 + yh_{12}^0\right) + y\left(xh_{21}^0 + yh_{22}^0\right) < 0.$$

Ein Minimum liegt vor, wenn gilt

$$x\left(xh_{11}^0+yh_{12}^0\right)+y\left(xh_{21}^0+yh_{22}^0\right)>0$$

für alle für alle von $(0,0)$ *verschiedenen* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
Kein Extrempunkt liegt vor, wenn für manche $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$x\left(xh_{11}^0+yh_{12}^0\right)+y\left(xh_{21}^0+yh_{22}^0\right)>0$$

und für manche

$$x\left(xh_{11}^0+yh_{12}^0\right)+y\left(xh_{21}^0+yh_{22}^0\right)<0$$

Bemerkung 14.3.3. *Es gilt mit der im nächsten Semester eingeführten Matrixmultiplikation*

$$x\left(xh_{11}^0+yh_{12}^0\right)+y\left(xh_{21}^0+yh_{22}^0\right)=\begin{pmatrix} x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_{11}^0 & h_{12}^0\\ h_{21}^0 & h_{22}^0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$$

◊

Im Beispiel 14.3.1 ist

$$x\left(x2+y\cdot 0\right)+y\left(x\cdot 0+y2\right)=2x^2+2y^2>0$$

für alle von $(0,0)$ verschiedenen $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, womit in $(-1,0)$ ein Minimum vorliegt.

Die Bedingungen für Minima und Maxima können umgewandelt werden, was sich in manchen Fällen als nützlich erweist:

Satz 14.3.4. *Sei* $H_0:=\begin{pmatrix} h_{11}^0 & h_{12}^0\\ h_{21}^0 & h_{22}^0\end{pmatrix}$ *die Hessematrix einer zweimal stetig ableitbaren Funktion* $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, *in die die Nullstellen der ersten Ableitung eingesetzt wurden, sofern in* H *noch Variablen vorliegen. Dann liegt im (eingesetzten) Nullstellenvektor*
(i) ein Minimum genau dann vor, wenn $h_{11}^0>0$ *und* $h_{11}^0h_{22}^0>\left(h_{12}^0\right)^2$
(ii) ein Maximum genau dann vor, wenn $h_{11}^0<0$ *und* $h_{11}^0h_{22}^0>\left(h_{12}^0\right)^2$

Beweis. Es gilt - bei zweimal stetiger Ableitbarkeit ist nämlich $h_{21}^0=h_{21}^0$ -

$$\begin{aligned} x\left(xh_{11}^0+yh_{12}^0\right)+y\left(xh_{21}^0+yh_{22}^0\right)&=x^2h_{11}^0+xyh_{12}^0+yxh_{21}^0+y^2h_{22}^0\\ &=x^2h_{11}^0+2xyh_{12}^0+y^2h_{22}^0\\ &=h_{11}^0\left(x+\frac{h_{12}^0y}{h_{11}^0}\right)^2+\frac{h_{11}^0h_{22}^0-\left(h_{12}^0\right)^2}{h_{11}^0}y^2\end{aligned}$$

denn der letzte Ausdruck ist mit

$$\begin{aligned} &h_{11}^0\left(x^2+2x\frac{h_{12}^0y}{h_{11}^0}+\left(\frac{h_{12}^0y}{h_{11}^0}\right)^2\right)+\frac{h_{11}^0h_{22}^0y^2-\left(h_{12}^0\right)^2y^2}{h_{11}^0}\\ &=h_{11}^0x^2+2x\frac{h_{11}^0h_{12}^0y}{h_{11}^0}+h_{11}^0\left(\frac{h_{12}^0y}{h_{11}^0}\right)^2+\frac{h_{11}^0h_{22}^0y^2-\left(h_{12}^0\right)^2y^2}{h_{11}^0}\\ &=h_{11}^0x^2+2xh_{12}^0y+\frac{\left(h_{12}^0\right)^2y^2}{h_{11}^0}+h_{22}^0y^2-\frac{\left(h_{12}^0\right)^2y^2}{h_{11}^0}\end{aligned}$$

identisch.
Fürs Minimum: Wenn $h_{11}^0>0$ ist $h_{11}^0\left(x+\frac{h_{12}^0y}{h_{11}^0}\right)^2+\frac{h_{11}^0h_{22}^0-\left(h_{12}^0\right)^2}{h_{11}^0}y^2>0$ genau dann, wenn

$h_{11}^0 h_{22}^0 > \left(h_{12}^0\right)^2$. Denn wenn $h_{11}^0 > 0$ ist $h_{11}^0 \left(x + \frac{h_{12}^0 y}{h_{11}^0}\right)^2 > 0$. Zudem ist in $\frac{h_{11}^0 h_{22}^0 - \left(h_{12}^0\right)^2}{h_{11}^0} y^2 > 0$ genau dann, wenn $h_{11}^0 h_{22}^0 - \left(h_{12}^0\right)^2 > 0$ - h_{11}^0 ist ja positiv).
Fürs Maximum: Wenn $h_{11}^0 < 0$, dann ist $h_{11}^0 \left(x + \frac{h_{12}^0 y}{h_{11}^0}\right)^2 + \frac{h_{11}^0 h_{22}^0 - \left(h_{12}^0\right)^2}{h_{11}^0} y^2 < 0$ genau dann, wenn $h_{11}^0 h_{22}^0 > \left(h_{12}^0\right)^2$. Denn h_{11}^0 ist negativ, und deshalb muss der Zähler in $\frac{h_{11}^0 h_{22}^0 - \left(h_{12}^0\right)^2}{h_{11}^0}$ positiv sein, damit der Ausdruck $\frac{h_{11}^0 h_{22}^0 - \left(h_{12}^0\right)^2}{h_{11}^0} y^2$ negativ ist. □

Beispiel 14.3.5. *Sei* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x, y) = 0.1x^4 + 0.2x^3 + 0.05y^2 + 0.03y + 1$ *(s. Abbildung 14.3.6). Zu suchen sind allfällige Extrema.*
Man berechnet: $\frac{\partial}{\partial x}\left(0.1x^4 + 0.2x^3 + 0.05y^2 + 0.03y + 1\right) = 0.6x^2 + 0.4x^3$

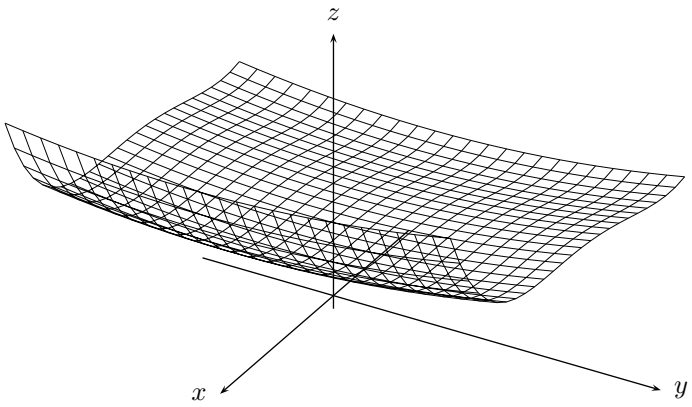


Abbildung 14.3.6: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = 0.1x^4 + 0.2x^3 + 0.05y^2 + 0.03y + 1$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(0.1x^4 + 0.2x^3 + 0.05y^2 + 0.03y + 1\right) = 0.1y + 0.03$
Das führt zum Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 0.6x^2 + 0.4x^3 &= 0 \\ 0.1y + 0.03 &= 0, \end{aligned}$$

womit $x = 0$ *oder* $x = -1.5$ *und* $y = -0.3$. *Man erhält* $(0, -0.3)$ *und* $(-1.5, -0.3)$ *als Kandidaten für Extrema.*

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left(0.6x^2 + 0.4x^3\right) & \frac{\partial}{\partial x}\left(0.1y + 0.03\right) \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(0.6x^2 + 0.4x^3\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(0.1y + 0.03\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2x + 1.2x^2 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Setzt man in $1.2x + 1.2x^2$ *die erste Nullstelle ein, erhält man*

$$H_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}$$

und mit den obigen Formeln (Satz 14.3.2)

$$\begin{aligned} x\left(xh_{11}^0 + yh_{12}^0\right) + y\left(xh_{21}^0 + yh_{22}^0\right) &= x\left(x \cdot 0 + y \cdot 0\right) + y\left(x \cdot 0 + 0.1y\right) \\ &= 0.1y^2 \end{aligned}$$

Für $(x, y) = (1, 0) \neq (0, 0)$ *ist dies nicht von* 0 *verschieden. Also liegt in* $(0, -0.3)$ *kein Extremum vor.*
Setzt man die zweite Nullstelle ein, erhält man

$$H_0 = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} x\left(xh_{11}^0+yh_{12}^0\right)+y\left(xh_{21}^0+yh_{22}^0\right) &= x\left(0.9x+y0\right)+y\left(x0+0.1y\right)\\ &= 0.9x^2+0.1y^2>0 \end{aligned}$$

für alle (x,y)*, die von* $(0,0)$ *verschieden sind. Damit liegt in* $(-1.5,-0.3)$ *ein Minimum vor.* ◊

Beispiel 14.3.6. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *mit* $f(x,y)=-0.1(x+0.05)^2+-0.5y^2+1$ *(s. Abbildung 14.3.7). f könnte z.B. eine Gewinnfunktion sein, welche den Gewinn als Funktion der Produktion zweier Güterarten darstellt. Zu suchen sind allfällige Extrema.*

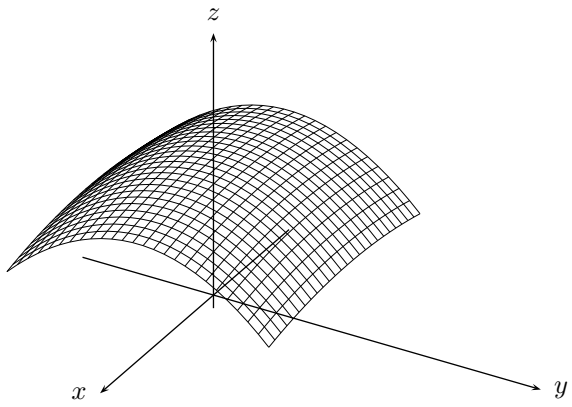


Abbildung 14.3.7: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mit $f(x,y)=-0.1(x+0.05)^2-0.5y^2+1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(-0.1(x+0.05)^2+-0.5y^2+1\right) &= -0.2x-0.01\\ \frac{\partial}{\partial y}\left(-0.1(x+0.05)^2+-0.5y^2+1\right) &= -y, \end{aligned}$$

was zum Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -0.2x-0.01&=0\\ -y&=0 \end{aligned}$$

führt und damit zum Nullstellenvektor $(-0.05,0)$.

$$H=\begin{pmatrix} -0.2 & 0\\ 0 & -1 \end{pmatrix}=H_0$$

Mit Satz 14.3.2

$$\begin{aligned} x\left(xh_{11}^0+yh_{12}^0\right)+y\left(xh_{21}^0+yh_{22}^0\right) &= x\left(-0.2x\right)+y\left(-y\right)\\ &= -0.2x^2-y^2<0 \end{aligned}$$

für alle $(x,y)\neq(0,0)$*. Damit liegt in* $(-0.05,0)$ *ein Maximum vor. Im Falle einer Gewinnfunktion würde sich dieses allerdings nicht im ökonomisch sinnvollen Bereich befinden.* ◊

Beispiel 14.3.7. *Für obiges Beispiel* $f(x,y)=0.5x^2-y^2+0.1$ *(s. Abbildung 14.3.5) ergibt sich:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(0.5x^2-y^2+0.1\right) &= x\\ \frac{\partial}{\partial y}\left(0.5x^2-y^2+0.1\right) &= -2y \end{aligned}$$

Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ -2y &= 0 \end{aligned}$$

Nullstellenvektor: $(0,0)$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = H_0$$

Mit Satz 14.3.2

$$\begin{aligned} x\left(xh_{11}^0 + yh_{12}^0\right) + y\left(xh_{21}^0 + yh_{22}^0\right) &= x\left(x\right) + y\left(-2y\right) \\ &= x^2 - 2y^2 \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist kleiner als Null für $(1,1)$, *denn* $1^2 - 2 \cdot 1^2 = -1$ *und grösser als Null für z.B.* $(3,1)$, *was* $3^2 - 2 \cdot 1^2 = 7$ *ergibt. Entsprechend liegt im Punkt* $(0,0)$ *kein Extremum vor.* ◊

Beispiel 14.3.8. *Bei der bivariaten linearen Regression gilt es die Funktion* $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *mit*

$$S\left(a,b\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \left(ax_i + b\right)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - ax_i - b\right)^2$$

zu minimieren, wobei vorausgesetzt wird, dass nicht alle x_i *identisch sind und* $n \geq 2$. *Es handelt sich um eine Summe, die summandenweise abgeleitet werden kann. Mit Hilfe der Kettenregel ergibt sich dann*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a}\left(\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - ax_i - b\right)^2\right) &= \sum_{i=1}^{n} 2\left(y_i - ax_i - b\right)\left(-x_i\right) \\ \frac{\partial}{\partial b}\left(\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - ax_i - b\right)^2\right) &= \sum_{i=1}^{n} 2\left(y_i - ax_i - b\right)\left(-1\right) \end{aligned}$$

Für die Nullstellen gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} 2\left(y_i - ax_i - b\right)\left(-x_i\right) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(x_i y_i - ax_i^2 - bx_i\right) = 0$$

und

$$\sum_{i=1}^{n} 2\left(y_i - ax_i - b\right)\left(-1\right) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - ax_i - b\right) = 0.$$

Durch Verteilen des Summenzeichens ergibt sich:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(x_i y_i - ax_i^2 - bx_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \tag{14.3.1}$$

und

$$\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - ax_i - b\right) = \sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - nb = 0 \tag{14.3.2}$$

Wir lösen diese letzte Gleichung (14.3.2) nach b auf:

$$\begin{aligned} b &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i - a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - a\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \\ &= \bar{y} - a\bar{x} \end{aligned}$$

Wir setzen das Resultat in die Gleichung (14.3.1) ein, um a zu isolieren:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{y} - a\bar{x})\sum_{i=1}^{n} x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i\bar{y} + a\sum_{i=1}^{n} x_i\bar{x} \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i\bar{y} - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a\sum_{i=1}^{n} x_i\bar{x} \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i\left(y_i - \bar{y}\right) - a\sum_{i=1}^{n} x_i\left(x_i - \bar{x}\right) = 0\end{aligned}$$

Damit erhält man

$$a = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i(y_i - \bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i(x_i - \bar{x})} \quad .$$

Der Nullstellenvektor ist also

$$\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i(y_i - \bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i(x_i - \bar{x})}, \bar{y} - a\bar{x}\right)$$

Wir müssen nun nachweisen, dass tatsächlich ein Minimum vorliegt. Wir berechnen die Hesse-Matrix:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial a \partial a} S(a,b) &= \frac{\partial}{\partial a}\left(\sum_{i=1}^{n} 2\left(y_i - ax_i - b\right)\left(-x_i\right)\right) = \frac{\partial}{\partial a}\sum_{i=1}^{n}\left(-2x_i y_i + 2ax_i^2 + 2bx_i\right) = \sum_{i=1}^{n} 2x_i^2 \\ \frac{\partial^2}{\partial b \partial b} S(a,b) &= \frac{\partial}{\partial b}\left(\sum_{i=1}^{n} 2\left(y_i - ax_i - b\right)\left(-1\right)\right) = \frac{\partial}{\partial b}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(-2y_i + 2ax_i + 2b\right)\right) = n2 \\ \frac{\partial^2}{\partial b \partial a} S(a,b) &= \frac{\partial}{\partial b}\sum_{i=1}^{n}\left(-2x_i y_i + 2ax_i^2 + 2x_i b\right) = \sum_{i=1}^{n} 2x_i \\ \frac{\partial^2}{\partial a \partial b} S(a,b) &= \frac{\partial}{\partial a}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(-2y_i + 2ax_i + 2b\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} 2x_i\end{aligned}$$

d.h.

$$H = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} 2x_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} 2x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} 2x_i & n2 \end{pmatrix} = H_0$$

Damit wird (s. Satz 14.3.2)

$$x\left(xh_{11}^0 + yh_{12}^0\right) + y\left(xh_{21}^0 + yh_{22}^0\right)$$

zu

$$\begin{aligned}
&x\left(x\sum_{i=1}^{n}2x_i^2+y\sum_{i=1}^{n}2x_i\right)+y\left(x\sum_{i=1}^{n}2x_i+yn2\right)\\
&=x^2\sum_{i=1}^{n}2x_i^2+xy\sum_{i=1}^{n}2x_i+yx\sum_{i=1}^{n}2x_i+y^2 2n\\
&=x^2\sum_{i=1}^{n}2x_i^2+4xy\sum_{i=1}^{n}x_i+y^2 2n\\
&=2\sum_{i=1}^{n}\left(x^2x_i^2+2xyx_i+y^2\right)\\
&=2\sum_{i=1}^{n}\left(xx_i+y\right)^2>0,
\end{aligned}$$

wenn $-xx_i \neq y$ für mindestens ein x_i. Unter der Voraussetzung, dass nicht alle x_i identisch sind, kann $(xx_i + y)$ nicht für alle 0 werden, womit die Ungleichung gilt - eine Regressionsgerade bei nur einem x_i zu berechnen würde keinen Sinn machen. Damit liegt im Nullstellenvektor ein Minimum von S vor. ◊

Die eingeführten Methoden können auf in alle n Richtungen zweimal stetig ableitbare Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ verallgemeinert werden. Das Auffinden der Nullvektoren, die Elemente des $\mathbb{R}^n$ sind, kann dabei mit den eingeführten Techniken erfolgen. Die Hessematrix, eine $n \times n-$Tabelle, kann analog berechnet werden. Der Nachweis, dass ein Extremum vorliegt, wird allerdings schwieriger und erfordert Methoden der linearen Algebra, die hier nicht eingeführt werden können.

14.3.1 Übungen

1. Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen $f(x) =$

   (a) x^2e^x
   (b) $x\ln x - x$
   (c) $\frac{1+x}{\sqrt{x}}$
   (d) $\frac{xe^x}{1+x}$
   (e) $(x^2+2x)^4$
   (f) $5e^{x^2}$
   (g) $\left(e^{\ln a}\right)^x$
   (h) $\left(e^{\ln x}\right)^a$
   (i) $e^{\sqrt{x^3-1}}$
   (j) $3e^{x^2-1}$
   (k) $2e^x - 3x$
   (l) $\frac{x^2-3x-4}{2x^2-4x}$
   (m) $\sqrt{2x^2-x+1}$
   (n) $\left(x^2+1\right)^5$
   (o) $e^{x\ln a}$
   (p) e^{-x}
   (q) $\ln\left(\sqrt{x^2e^x+2x^3-1}\right)$
   (r) $\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)^2$
   (s) $x^2e^{-2x^2+1}$
   (t) $\frac{\sqrt{\ln x}}{x^2-1}$
   (u) $\frac{10}{1+e^{-0.8t}}$
   (v) $0.6+\frac{10}{x}$
   (w) $0.1x^3-3x^2+75x+1000$

2. Man finde die erste Ableitung von:

   (a) $f(x) = -7e^x$
   (b) $f(x) = e^{-3x^2}$
   (c) $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$
   (d) $f(x) = e^x\ln\left(x^2+2\right)$
   (e) $f(x) = e^{5x^3}$
   (f) $f(x) = 2 - x^4e^{-x}$

(g) $f(x) = \left(e^x + x^2\right)^{10}$

(h) $f(x) = \ln\left(\sqrt{2x^2 - 2} + 1\right)$

(i) $f(x) = \sqrt[4]{\ln\left(1 + x^2 - 4x\right)}$

(j) $f\left(x\right) = e^{\ln\left(2x^3 - 4\right)}$

(k) $f\left(x\right) = \frac{\ln\left(5x^2 - e^x\right)}{e^{2x^2}}$

3. In welchen Intervallen sind die folgenden Funktionen monoton wachsend:

   (a) $f(x) = \left(\ln x\right)^2 - 4$

   (b) $f(x) = \ln\left(e^x + e^{-x}\right)$

   (c) $f(x) = x - \frac{3}{2}\ln\left(x^2 + 2\right)$

4. Bei der laufenden Produktion eines Gutes und bekannter Nachfrage stellt sich die Frage nach der richtigen Losgrösse x (= auf einmal zu produzierende Menge). Wir setzen voraus, dass bei jedem Produktionslos unabhängig von der Höhe der Produktionsmenge x fixe Rüstkosten K_R entstehen, so dass man möglichst hohe Losgrössen anstreben sollte, um die Rüstkosten zu minimieren. Andererseits entstehen bei steigender Losgrösse, bedingt durch den erhöhten Lagerbestand, auch steigende Lagerhaltungskosten K_L (Zinsen, Lagerungshallen, etc.). K_L ist damit eine Funktion der Losgrösse x. Die optimale Losgrösse liegt im Minimum der Summe

   $$K(x) = K_R + K_L\left(x\right)$$

   beider Kostenarten. Man setze voraus, dass die Gesamtnachfrage in einer Gesamtzeitdauer, z.B. während eines Jahres, m betrage. Die Anzahl der Lose in der Gesamtzeitdauer betrage h. Damit gilt $m = xh$. Die Aufstockung des Lagers erfolge mit der konstanten Rate z (d.h. die Aufstockung pro Zeiteinheit beträgt z), der Abgang aus dem Lager für den Verkauf erfolge mit konstanter Rate a mit $z > a$. Ist $z \leq a$, so ist kein Lager nötig. Pro Los erfolgt eine Phase, in der sowohl produziert als auch verkauft wird. Sei t das Ende dieser Phase. Es gilt $tz = x$ (während Zeit t produzierte Menge entspricht der Menge des Loses) und damit $t = \frac{x}{z}$. Anschliessend erfolgt eine Phase, in der nur verkauft wird, bis der Lagerbestand 0 ist, um dann wieder zu produzieren, etc. Der maximale Lagerbestand $b_{\max}$ wird jeweils zu t erreicht. Es gilt

   $$b_{\max} = t\left(z - a\right) = \frac{x}{z}\left(z - a\right) = x\left(1 - \frac{a}{z}\right),$$

   denn pro Zeiteinheit beträgt der Lagerzuwachs $z-a$, d.h. Zuwachs minus Abgang. Die Anzahl der Zeiteinheiten t mal diese Differenz ergibt $b_{\max}$)

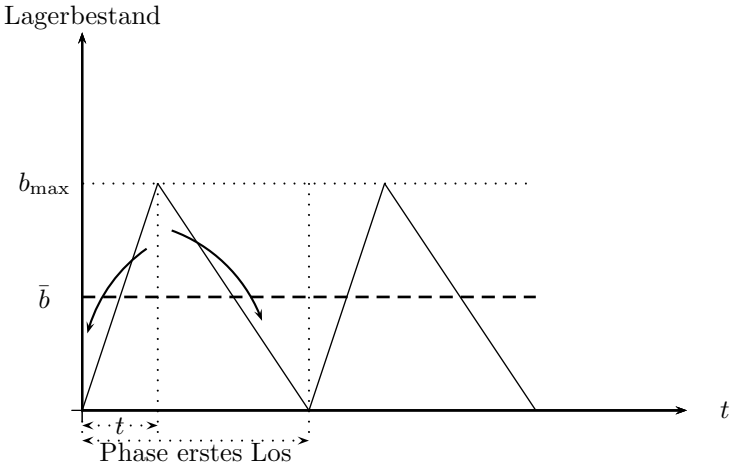


Abbildung 14.3.8: Entwicklung des Lagers bei der Produktion zweier Lose. Die zwei Dreiecke über der waagrechten gestrichelten Linie kann man zur Deckung bringen mit den Dreiecken unter dieser Linie (s. Pfeile) und es entsteht ein Rechteck über der Phase des ersten Loses

Der durchschnittliche Lagerbestand beträgt

$$\frac{1}{2} \cdot b_{\max} = \frac{1}{2} x \left(1 - \frac{a}{z}\right).$$

Denn: Der durchschnittliche Lagerbestand ist eine Konstante $\bar{b}$. Diese erhält man, wenn man $b_{\max}$ halbiert und das Dreieck über $\frac{1}{2} \cdot b_{\max}$ durch eine senkrechte Gerade durch die Spitze des Dreiecks aufteilt. Die entstehenden Dreiecke kann man so nach unten drehen, dass ein Rechteck mit der Höhe $\bar{b} = \frac{1}{2} \cdot b_{\max}$ entsteht (s. Abbildung 14.3.8).
Seien die Stücklagerkosten durch k_L gegeben. Die Lagerkosten K_L betragen damit

$$K_L(x) = \bar{b} k_L = k_L \frac{1}{2} x \left(1 - \frac{a}{z}\right)$$

Die Rüstkosten ergeben sich durch k_R (fester Rüstkostensatz pro Los), womit die gesamten Rüstkosten

$$K_R = h k_R = k_R \frac{m}{x}$$

betragen. Damit ergibt sich die Kostenfunktion

$$K(x) = k_L \frac{1}{2} x \left(1 - \frac{a}{z}\right) + \frac{m}{x} k_R.$$

mit
k_L = Stücklagerkosten
k_R = Rüstkosten pro Los
m = produzierte (oder bezogene) Gesamtmenge = hx (h Anzahl Lose; x Menge pro Los)
a = Abgangsrate (Sinken des Lagerbestandes durch Verkauf pro Zeiteinheit)
z = Aufstockungsrate (Zugangsrate) (Steigen des Lagerbestandes durch Produktion (oder Zukauf) pro Zeiteinheit).
Berechnen Sie die optimale Losgrösse x allgemein (Entwicklung einer Formel). Verwenden Sie dann die Formel, um die optimale Losgrösse für $m = 30, k_R = 4; k_L = 10, a = 3, z = 4$ zu berechnen.

5. Sei gegeben die Produktionsfunktion $x(r_1, r_2) = 5 r_1^{0.8} r_2^{0.2}$, wobei r_1 pro ME 20 GE kostet und r_2 pro ME 25 GE. Berechnen Sie die kostengünstigste Inputkombination für einen Output von $x = 700$.

6. Ermitteln und interpretieren Sie die Grenzrate der Substitution in folgenden Fällen.

   (a) Produktionsfunktion: $x(r_1, r_2) = 5r_1^{0.8} r_2^{0.4}$
   Der Output ist gegeben mit 20 ME. Berechnen Sie die Grenzrate der Substitution in $r_1 = 4ME$
   Wieviel muss an r_2 näherungsweise in diesem Punkt zusätzlich verwendet werden, um eine Reduktion von r_1 um eine ME wettzumachen?

   (b) Nutzenfunktion: $U(x_1, x_2) = 2x_1\sqrt{x_2}$
   Der Nutzen ist fest vorgegeben mit $U_0 = 1000$
   Berechnen Sie die Grenzrate der Substitution in $x_1 = 10ME_1$.
   Wieviel an x_2 muss in diesem Punkt näherungsweise zusätzlich konsumiert werden, um einen Verlust von einer Einheit x_1 wettzumachen?

7. Wir betrachten die Produktionsfunktion $x(r_1, r_2) = 0.5 \cdot r_1^{0.3} \cdot r_2^{0.7}$. Entwickeln Sie die Isoquante für $x(r_1, r_2) = 100$. Berechnen Sie die Grenzrate der Substitution in $r_1 = 16$ (r_2 und r_1 in Tonnen).

8. Man will eine zylindrische Büchse - ohne Deckel - konstruieren mit einem Volumen von 648π cm^3 ($648\pi \approx 2035.8$). Das Material für den Boden kostet 15 Rappen pro cm^2 und jenes der Seitenwand kostet 5 Rappen pro cm^2. Welche Masse muss die Büchse haben, um die Rohstoffkosten zu minimieren?
   (Erinnerung: Volumen eines Zylinders: $r^2\pi h$, d.h. Basisfläche mal Höhe; r = Radius; h = Höhe; $\pi = 3.1416...$. Kreisumfang: $2r\pi$). (Antwort: $r = 6$cm $h = 18$cm)

9. Ein Blatt Papier soll 600 cm^2 gedruckten Text enthalten. Der Kopf- und Fussrand soll je 5 cm breit sein und jede der beiden Seitenränder je 3 cm. Bestimmen Sie die Blattgrösse, für die es ein Minimum an Papier braucht. (Antwort: $\left(10 + 10\sqrt{10}\right) cm \times \left(6 + 6\sqrt{10}\right) cm$)

10. Ein Handelsgeschäft verkauft 100 Waschmaschinen pro Jahr. Für jede Bestellung durch das Handelsgeschäft laufen Administrations- und Verpackungskosten an: 40 Fr. fix und 16 Fr. pro Maschine. Die Lagerung einer Maschine pro Jahr kostet 20 Fr. Wieviel Bestellungen welcher Grössenordnung sollte das Geschäft pro Jahr tätigen, um die Gesamtkosten zu minimieren? (gehen Sie davon aus, dass der Verkauf der Maschinen regelmässig übers Jahr verteilt erfolgt und entsprechend die Lieferungen immer gleich gross sind). (Antwort: 5 Bestellungen à 20 Maschinen)

11. Eine Unternehmung produziert und verkauft ein Gut A, dessen Preis-Nachfragefunktion gegeben ist durch

$$p(x) = 45 - 15x + 2x^2$$

(x in 1000 Tonnen des Gutes A; p in Franken pro Kg). Man weiss, dass die Nachfrage 3000 Tonnen nicht übersteigt. Die Kostenfunktion der Produktion und Vertrieb des Gutes ist gegeben durch (in Millionen Franken)

$$K(x) = 1 + 6x - 3x^2 + x^3$$

   (a) Welche Menge x muss die Unternehmung produzieren und verkaufen, um den Gewinn zu maximieren?

   (b) Der Staat entscheidet, eine Steuer auf den Verkauf des Gutes A zu erheben. Wenn die Steuer t Franken pro kg beträgt, stellt das Produkt $tx10^6$ die Erhöhung der Produktions- und Vertriebskosten für die Unternehmung dar. Geben Sie die Funktion m an, welche die gewinnmaximierende Menge als Funktion der Steuer t darstellt.

   (c) Wie hoch muss die Steuer t sein, damit der Steuerertrag maximal wird.

   (d) Geben Sie den Verkaufspreis und die verkaufte Menge an.

   (e) Wie hoch ist der Gewinn der Unternehmung und der Steuerertrag?

(Antworten a) $x = 2.27$ Millionen kg; $p = 21.27$; Gewinn = 37.99); b) $x(t) = 4 - \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{9+t}$; c) $t = 18$ Fr./kg; d) p=32; q=1; e) Gewinn = 9; Steuerertrag = 18).

12. Für die Gesamtkostenfunktion

$$K(x) = 0.06x^2 + 6x + 600$$

soll man

(a) die Stückkostenfunktion k angeben;

(b) die Menge x, für die die Stückkosten $k(x)$ minimal sind und

(c) die entsprechenden minimalen Stückkosten.

(Antworten: a) $k(x) = 0.06x + 6 + \frac{600}{x}$; b) $x_{\min} = 100$; c) $k(100) = 18$)

13. Ein Elektronikgeschäft verkauft 2500 Fernsehapparate pro Jahr. Die Lagerkosten pro Apparat belaufen sich auf 20 Franken pro Jahr. Für jede Bestellung fallen 20 Franken fixe Kosten und 9 Franken pro Apparat an. Berechnen Sie die Anzahl der Bestellungen und deren Grösse, um die Gesamtkosten zu minimieren (gehen Sie davon aus, dass der Verkauf der Maschinen regelmässig übers Jahr verteilt erfolgt und entsprechend die Lieferungen immer gleich gross sind). (Antwort: 20 Lieferungen à 71 Apparate, 15 Lieferungen à 72 Apparate.)

14. Für ein gewisses Gut A sind die Konsumenten bereit, die Menge x zum Preis p zu zahlen. Die Beziehung zwischen x und p wird durch die folgende Relation dargestellt:

$$\{(x,p) \,|x + 2p = 90,\, x, p \in \mathbb{R}^+\}$$

Der Produzent nimmt auf dem Markt eine Monopolstellung ein. Die Gesamtkosten werden durch die folgende Funktion (Preis in Abhängigkeit von der produzierten Menge) dargestellt:

$$K(x) = x^3 - 8x^2 + 57x + 2$$

Der Produzent muss darauf achten, den Preis so zu fixieren, dass die produzierte Menge nachgefragt wird.

(a) Geben Sie eine Funktionsgleichung an, die den Preis als Funktion der zu diesem Preis nachgefragten Menge ausdrückt.

(b) Berechnen Sie den Erlös als Funktion der produzierten und nachgefragten Menge.

(c) Geben Sie den Gewinn als Funktion der produzierten und nachgefragten Menge an.

(d) Wieviel muss der Produzent produzieren, um den Gewinn zu maximieren.

(Antworten: a) $p(x) = \frac{90-x}{2}$; b) $E(x) = \frac{90x-x^2}{2}$; c) $G(x) = -x^3 + \frac{15}{2}x^2 - 12x - 2$; d) $x = 4$)

15. Um die Menge x eines Gutes A zu produzieren, rechnet eine Unternehmung mit der Funktion der variablen Kosten

$$K_V(x) = 0.5x^3 - x^2 + 4x$$

und Fixkosten von 4 GE.

(a) Geben Sie die Gesamtkostenfunktion K mit Hilfe einer Funktionsgleichung an.

(b) Geben Sie die Stückkostenfunktion k an.

(c) Geben Sie die Grenzkostenfunktion K' an.

(d) Geben Sie die variable Stückkostenfunktion k_v an.

(e) Geben sie die Funktion der Stückfixkosten k_F an.

(f) Geben sie die Minima (Menge und Kosten) der folgenden Funktionen an. k, K', k_v

(g) Berechnen sie das Betriebsminimum (= Minimum der variablen Stückkostenfunktion) und das Betriebsoptimum (Rentabilitätsschwelle = Minimum der Stückkostenfunktion).

(h) Die Unternehmung verkauft die Produktion zu einem Stückpreis p. Berechnen Sie die gewinnmaximierende Produktionsmenge für $p = 3$; $p = 4$; $p = 6$; $p = 8$ (Antworten: a) $K(x) = 0.5x^3 - x^2 + 4x + 4$; b) $k(x) = 0.5x^2 - x + 4$; c) $K'(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x + 4 + \frac{4}{x}$; d) mit c) identisch; e) $k_F(x) = \frac{4}{x}$; f) $x = 2$; $x = \frac{2}{3}; x = 1$); g) Betriebsminimum: 3.5; Betriebsoptimum: 6; h) $p = 3; x = 0; G(0) = -4$ (Betriebsschliessung), $p = 4; x = 1.33; G(1.33) = -3.41$ (nicht rentable Produktion, kann aber vorübergehen fortgeführt werden); $p = 6; x = 2; G(2) = 0$; Produktion und Verkauf decken genau die Kosten; $p = 8; x = 2.43; G(2.43) = 4.45$)

16. Berechnen Sie Extrema der folgenden Funktion $f(x, y) = xy + x$

17. Berechnen Sie Extrema der folgenden Funktion $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4y$

18. Berechnen Sie Extrema der folgenden Funktion $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 2x + 7y + 2$

19. Berechnen Sie Extrema der folgenden Funktion $f(x, y) = x - 8y - x^2 + xy - y^2$

20. Berechnen Sie Extrema der folgenden Funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$

21. Monopolist mit zwei Gütern: Gegeben seien die Nachfragepreisfunktionen

$$x_1(p_1, p_2) = 5 - p_1 + 2p_2$$
$$x_2(p_1, p_2) = 4 + 2p_1 - 5p_2,$$

d.h. der Preis beider Güter hat einen Einfluss auf die absetzbare Menge x_1, aber auch auf die absetzbare Menge x_2. Die Kostenfunktion sei gegeben durch

$$K(x_1, x_2) = 4x_1 + 2x_2.$$

Es ist die Preiskombination gefragt, die den Gewinn maximiert.

22. Ein Monopolist, der zwei Gütertypen X und Y herstellt, steht der folgenden Nachfragefunktion gegenüber (Menge in Abhängigkeit vom Preis; keine gegenseitige Beeinflussung der Preise auf die Nachfrage des anderen Gutes)

$$x(p_X) = 36 - 4p_X$$
$$y(p_Y) = 24 - 2p_Y.$$

Zudem sei die folgende Kostenfunktion gegeben:

$$K(x, y) = x^2 + y^2$$

Gesucht sind die Preise, welche den Gewinn maximieren. Welche Mengen werden verkauft?

23. Ein Monopolist, der zwei Gütertypen X und Y herstellt, kennt die Nachfragefunktionen (wiederum keine gegenseitige Beeinflussung der verkauften Menge durch die jeweiligen Preise) und zwar

$$x(p_X) = 12 - p_X$$
$$y(p_Y) = 8 - \frac{1}{2}p_Y.$$

Die Kostenfunktion ist gegeben durch

$$K(x, y) = 3x^2 + xy + 2y^2$$

(es gibt also eine Interaktion der produzierten Mengen auf die Kosten!). Man berechne wiederum die optimalen Preise (und die entsprechenden Mengen).

24. Die Nachfragefunktionen der Gütertypen X und Y eines Monopolisten seien gegeben durch (gegenseitige Beeinflussung der verkauften Mengen durch die jeweiligen Preise).

$$x(p_X) = 8 - 2p_X + p_Y$$
$$y(p_Y) = 10 + p_X - 3p_Y$$

Die Kostenfunktion ist

$$K(x, y) = x^2 + y^2$$

Gesucht sind die gewinnmaximierenden Preise (und Mengen).

25. Die Nachfragefunktionen der Gütertypen X und Y eines Monopolisten seien gegeben durch (gegenseitige Beinflussung der verkauften Mengen durch die jeweiligen Preise).

$$x(p_X) = 8 - 4p_X + p_Y$$
$$y(p_Y) = 7 + p_X - 2p_Y$$

Die Kostenfunktion ist

$$K(x, y) = x^2 + 2y^2$$

Gesucht sind die gewinnmaximierenden Preise (und Mengen).

26. Berechnen Sie allfällige Extrema der folgenden Funktion: $f(x, y) = x^3y+2x^2-2xy+3x-4y+4$

27. Berechnen Sie allfällige Extrema der folgenden Funktion: $f(x, y) = x^2y - 2xy^2 + 3xy + 4$

14.3.2 Lösungen

1. Lösungen an der Wandtafel
2. Lösungen an der Wandtagel
3. Lösungen:
   (a) $f(x) = (\ln x)^2-4$: $x > 0$ bei Logarithmusfunktionen. Definitionsbereich ist also $\mathbb{R}^+\backslash\{0\}$. $\frac{d}{dx}\left((\ln x)^2 - 4\right) = 2(\ln x)\frac{1}{x}$. Nullstellen: $2(\ln x)\frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Links von 1 gilt: $2(\ln 0.5)\frac{1}{0.5} < 0$, rechts von 1 gilt $2(\ln 2)\frac{1}{2} > 0$. Also strikt monoton steigend auf $]0,\infty[$. Zur Kontrolle zeichne man f=function(x) 2*(log(x))^2*(1/x); plot(f,xlim=c(0.5,2))
   (b) $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$ e^x und $e^{-x} > 0$ für alle x. Also auf $\mathbb{R}$ definiert. $\frac{d}{dx}(\ln(e^x + e^{-x})) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$, Nullstelle: $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = 0 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x} \Leftrightarrow x = -x \Leftrightarrow x = 0$. Links von 0 erhält man $\frac{e^{-1}-e^1}{e^{-1}+e^1} = -0.761\,59 < 0$ und rechts von 0: $\frac{e^1-e^{-1}}{e^1+e^{-1}} = 0.761\,59 > 0$. Also strikt monoton steigend auf $]0,\infty[$. Graphische Kontrolle mit: f=function(x)log(exp(x)+exp(-x)); plot(f,xlim=c(-1,1))
   (c) $f(x) = x-\frac{3}{2}\ln\left(x^2+2\right)$. Ist definiert auf $\mathbb{R}$, da $x^2+2 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. $\frac{d}{dx}\left(x - \frac{3}{2}\ln\left(x^2+2\right)\right) = 1 - \frac{3}{2(x^2+2)}(2x) = 1 - \frac{3x}{x^2+2}$: Nullstellen: $1 - \frac{3x}{x^2+2} = 0 \Leftrightarrow 3x = x^2 + 2 \Leftrightarrow x \in \{2, 1\}$. $f'(0) = 1 > 0$, $f'(1.5) = 1 - \frac{3\cdot 1.5}{1.5^2+2} = -0.05.882\,4 < 0$ und $f'(3) = 1 - \frac{3\cdot 3}{3^2+2} = \frac{2}{11} > 0$. Also strikt monotonsteigend in $]-\infty, 1[\cup]2, \infty[$. Graphische Kontrolle mit: f=function(x) x-(3/2)*log(x^2+2); plot(f,xlim=c(0,3))
4.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(k_L\frac{1}{2}x\left(1-\frac{a}{z}\right)+\frac{m}{x}k_R.\right) &= \frac{d}{dx}\left(k_L\frac{1}{2}x - k_L\frac{1}{2}x\frac{a}{z} + \frac{m}{x}k_R\right)\\ &= \frac{1}{2}k_L - \frac{1}{2}\frac{a}{z}k_L - \frac{m}{x^2}k_R\\ &= \frac{k_L}{2}\left(1-\frac{a}{z}\right) - \frac{m}{x^2}k_R = 0\end{aligned}$$

Also

$$x = \sqrt[2]{\frac{2mk_R}{k_L\left(1-\frac{a}{z}\right)}}$$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}k_L - \frac{1}{2}\frac{a}{z}k_L - \frac{m}{x^2}k_R\right) = 2\frac{m}{x^3}k_R > 0$ für positive Mengen x. Also liegt dort tatsächlich ein Minimum vor. Es gibt nur eine reelle Lösung, wenn $0 \leq \frac{a}{z} < 1$ (d.h. $z \geq a$). Für $m = 30, k_R = 4; k_L = 10,\ a = 3, z = 4$ ergibt sich

$$x = \sqrt[2]{\frac{2 \cdot 30 \cdot 4}{10\left(1-\frac{3}{4}\right)}} = 4\sqrt{6} = 9.798\,0$$

5. $x(r_1, r_2) = 5r_1^{0.8}r_2^{0.2} = 700$ nach r_2 aufgelöst:

$$r_2(r_1) = \left(\frac{700}{5r_1^{0.8}}\right)^5 = \left(\frac{140}{r_1^{0.8}}\right)^5 = \frac{140^5}{r_1^4}$$

Die Funktion der variablen Kosten: $K(r_1, r_2) = 20r_1 + 25r_2$.
Eingesetzt: $K(r_1) = 20r_1 + \frac{25 \cdot 140^5}{r_1^4}$.
Durch Ableiten:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr_1}\left(20r_1 + \frac{25 \cdot 140^5}{r_1^4}\right) &= 20 - \frac{25 \cdot 140^5 \cdot 4r_1^3}{r_1^8} \\ &= 20 - \frac{25 \cdot 140^5 \cdot 4}{r_1^5}\end{aligned}$$

Durch Nullsetzen: $20 - \frac{25 \cdot 140^5 \cdot 4}{r_1^5} = 0 \Longrightarrow r_1 = \sqrt[5]{268\,912\,000\,000} = 193.16$
Zweite Ableitung:

$$\frac{d}{dr_1}\left(20 - \frac{25 \cdot 140^5 \cdot 4}{r_1^5}\right) = \frac{100 \cdot 140^5 \cdot 5r_1^4}{r_1^{10}} = \frac{500 \cdot 140^5}{r_1^6}$$

$\frac{d}{dr_1}\left(20 - \frac{25 \cdot 140^5 \cdot 4}{r_1^5}\right) = \frac{26\,891\,200\,000\,000}{r_1^6} > 0.$
Damit liegt in $r_1 = 193.16$ ein Minimum vor. Die kostengünstigste Inputkombination ist also
$(193.16, r_2(193.16)) =$
$(193.16, \frac{140^5}{193.16^4}) = \begin{pmatrix} 193.16 & 38.634 \end{pmatrix}$.

6. Man erhält:

   (a) Produktionsfunktion: $x(r_1, r_2) = 5r_1^{0.8}r_2^{0.4} = 20 \Longrightarrow$

$$r_2^{0.4} = r_2^{\frac{2}{5}} = \frac{20}{5r_1^{0.8}} = \frac{4}{r_1^{\frac{4}{5}}}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}r_2\left(r_1\right) &= \left(\frac{4}{r_1^{\frac{4}{5}}}\right)^{\frac{5}{2}} = \frac{4^{\frac{5}{2}}}{r_1^{\frac{4}{5}\frac{5}{2}}} = \frac{4^{\frac{5}{2}}}{r_1^{\frac{4}{2}}} \\ &= \frac{32}{r_1^2} = 32r_1^{-2}.\end{aligned}$$

   Gleichung der Isoquante: $r_2(r_1) = 32r_1^{-2} \Longrightarrow$

$$\frac{d}{dr_1}32r_1^{-2} = \frac{32 \cdot -2}{r_1^3} = -\frac{64}{r_1^3}$$

Für $r_1 = 4$: $-\frac{64}{4^3} = -1$
d. h. wenn - ausgehend vom Wert 4 ME_1 $-r_1$ um 1 Einheit erhöht wird, kann näherungsweise je 1 ME_2 von r_2 eingespart werden, ohne den Output von 20 ME zu verändern.
Es braucht: $32 \cdot 4^{-2} = 2ME_2$

(b) $x_2(x_1) = \frac{250000}{x_1^2} \Longrightarrow \frac{d}{dx_1}\frac{250000}{x_1^2} = -\frac{500\,000}{x_1^3} \Longrightarrow$ in $x_1 = 10 : -500ME_2/ME_1$.
Die Grenzrate der Substitution von -500 bedeutet hier, daß eine Erhöhung von x_1 - ausgehend von 10 ME_1 - um 1 Einheit näherungsweise eine Verringerung von x_2 um 500 Mengeneinheiten ermöglicht, ohne das Nutzenniveau von $U_0 = 1000$ zu verändern.

7. Man löst $100 = x(r_1, r_2) = 0.5 \cdot r_1^{0.3} \cdot r_2^{0.7}$ nach r_2 auf:

$$r_2^{0.7}(r_1) = r_2^{\frac{7}{10}}(r_1) = \frac{100}{0.5 \cdot r_1^{0.3}} \Longrightarrow r_2(r_1) = \sqrt[7]{\left(\frac{100}{0.5 \cdot r_1^{0.3}}\right)^{10}}$$

Wir leiten nach r_1 ab:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr_1}\sqrt[7]{\left(\frac{100}{0.5 \cdot r_1^{0.3}}\right)^{10}} &= \frac{d}{dr_1}\left(\frac{100}{0.5 \cdot r_1^{0.3}}\right)^{\frac{10}{7}} \\
&\underset{\text{Kettenregel}}{=} \frac{10}{7}\left(\frac{100}{0.5 \cdot r_1^{0.3}}\right)^{\frac{3}{7}} \frac{d}{dr_1}\frac{100}{0.5 \cdot r_1^{0.3}} \\
&= \frac{10}{7}\left(\frac{100}{0.5 \cdot r_1^{0.3}}\right)^{\frac{3}{7}} \frac{d}{dr_1}\left(\frac{100}{0.5} r_1^{-0.3}\right) \\
&= \frac{10}{7}\left(\frac{100}{0.5 \cdot r_1^{0.3}}\right)^{\frac{3}{7}} \left(\frac{-0.3 \cdot 100}{0.5} r_1^{-1.3}\right)
\end{aligned}$$

Bemerkung: Die Formel könnte weiter vereinfacht werden, ist aber bereits korrekt; unmittelbar eine einfachere Endformel erhält man, wenn man die Hochzahl $\frac{10}{7}$ ganz zu Beginn auf den Bruch zu verteilen! $\left(\frac{100}{0.5 \cdot r_1^{0.3}}\right)^{\frac{10}{7}} = \left(\frac{100}{0.5 \cdot r_1^{0.3}}\right)^{\frac{10}{7}} = \left(\frac{100}{0.5}\right)^{\frac{10}{7}} r_1^{-\frac{3}{10}\frac{10}{7}}$
$= 1937.3 r_1^{-\frac{3}{7}}$ und abgeleitet: $\frac{d}{dr_1}\left(1937.3 r_1^{-\frac{3}{7}}\right) = -\frac{3}{7} 1937.3 r_1^{-\frac{10}{7}}$. *Ende Bemerkung.*
In 16 erhält man die Substitutionsrate

$$r_2(16) = \frac{10}{7}\left(\frac{100}{0.5 \cdot 16^{0.3}}\right)^{\frac{3}{7}} \left(\frac{-0.3 \cdot 100}{0.5} 16^{-1.3}\right) = -15.814$$

oder mit dem Resultat der Bemerkung: $-\frac{3}{7} 1937.3 \cdot 16^{-\frac{10}{7}} = -15.814$
Um eine Einheit von r_1 zu kompensieren, braucht man 15.814 Einheiten von r_2 oder wenn r_1 um 1 steigt, braucht man 15.814 Einheiten von r_2 weniger (näherungsweise).

8. Kostenfunktion $K(r, h) = 2r\pi h \cdot 5 + r^2\pi \cdot 15 = 10r\pi h + 15r^2\pi$
$V(r, h) = \pi r^2 h = 648\pi \Longrightarrow h = \frac{648}{r^2}$
$K(r) = 10r\pi\frac{648}{r^2} + 15r^2\pi = 10\pi\frac{648}{r} + 15r^2\pi$
$\frac{d}{dr}\left(10\frac{648}{r}\pi + 15r^2\pi\right) = 30\pi r - \frac{6480\pi}{r^2} = 0 \Longrightarrow r = 6$ (cm)
zweite Ableitung: $\frac{d}{dr}\left(30\pi r - \frac{6480\pi}{r^2}\right) = 30\pi + 12\,960\frac{\pi}{r^3} > 0$ für $r > 0$ (also Minimum in $r = 6$).
$h = \frac{648}{(6)^2} = 18$ (cm).

9. Blattgrösse: $G(a, b) = (a + 10)(b + 6)$
$ab = 600 \Longrightarrow b = \frac{600}{a}$.
$G(a) = (a + 10)\left(\frac{600}{a} + 6\right) = 6a + \frac{6000}{a} + 660$
$\frac{d}{da}\left(6a + \frac{6000}{a} + 660\right) = 6 - \frac{6000}{a^2}$

$6-\frac{6000}{a^2}=0 \Longrightarrow -10\sqrt{10}, 10\sqrt{10}$
zweite Ableitung: $\frac{d}{da}\left(6-\frac{6000}{a^2}\right)=\frac{12000}{a^3}>0$ für $a>0$.
$b=\frac{600}{10\sqrt{10}}=6\sqrt{10}$
Seitenlängen: $a+10=10\sqrt{10}+10; b+6=6\sqrt{10}+6$ (cm)

10. (für analoge Theorie, s. Aufgabe 4, S. 390) Kosten einer Bestellung in Abhängigkeit von Bestellgrösse x: $K_b(x)=16x+40$;
Kosten bei h Bestellungen: $hK_b(x)=h\left(16x+40\right)$
mittlere Lagerhaltung: $\frac{x}{2}$.
Lagerkosten in Abhängigkeit von Bestellgrösse: $K_L\left(x\right)=\frac{x}{2}20=10x$.
Gesamtkostenfunktion: $K\left(x,h\right)=hK_b(x)+K_L\left(x\right)=h16x+h40+10x$
Gesamtlieferung: $xh=100=m$ und damit $h=\frac{100}{x}=\frac{m}{x}$.
Damit ergibt sich: $K\left(x\right)=\frac{100}{x}16x+\frac{100}{x}40+10x=10x+\frac{4000}{x}+1600$
$K'\left(x\right)=\frac{d}{dx}\left(10x+\frac{4000}{x}+1600\right)=10-\frac{4000}{x^2}$
$10-\frac{4000}{x^2}=0 \Longrightarrow$ Nullstellen: $20,-20$. Damit ist $x=20$.
$K''\left(x\right)=\frac{d}{dx}\left(10-\frac{4000}{x^2}\right)=\frac{8000}{x^3}>0$ für $x>0$. Damit liegt tatsächlich ein Minimum vor.
$h=\frac{100}{20}=5$.
Man könnte auch hier eine allgemeine Formel berechnen und dann diese verwenden - vor allem wenn man immer wieder strukturgleiche Probleme zu lösen hat:

$$\frac{d}{dx}K\left(x\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{m}{x}K_b(x)+\frac{x}{2}k_L\right)=0$$

Dies kann man nicht allgemein auflösen, da $K_b\left(x\right)$ allgemein bleibt. Setzt man dafür eine spezifische Funktionsgleichung ein, z.B. $K_b\left(x\right)=ax+c$ erhält man für ein Extremum:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{m}{x}\left(ax+c\right)+\frac{x}{2}k_L\right)&=\frac{d}{dx}\left(ma+\frac{mc}{x}+\frac{x}{2}k_L\right)\\&=-\frac{mc}{x^2}+\frac{1}{2}k_L=0\end{aligned}$$

Dies ergibt:

$$x=\sqrt{\frac{2cm}{k_L}}$$

Wir setzen ein, um das Resultat zu überprüfen:

$$x=\sqrt{\frac{2\cdot 40\cdot 100}{20}}$$

Wir erhalten wiederum 20. Es liegt ein Minimum vor, weil

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{mc}{x^2}+\frac{1}{2}k_L\right)=\frac{mc}{x^3}>0 \text{ für } m,c,x>0.$$

11. (a) $E(x)=xp\left(x\right)=x10^6\left(45-15x+2x^2\right)=10^6\left(45x-15x^2+2x^3\right)$
(man muss $p(x)$ mit 10^6x multiplizieren, da $p(x)$ der Preis in Franken pro Kg ist, x aber in Millionen KG gemessen wird)
$G\left(x\right)=E\left(x\right)-10^6K\left(x\right)=10^6\left(45x-15x^2+2x^3\right)-10^6\left(1+6x-3x^2+x^3\right)=$
$10^6\left(39x-12x^2+x^3-1\right)$
$\frac{d}{dx}G\left(x\right)=\frac{d}{dx}\left(10^6\left(39x-12x^2+x^3-1\right)\right)=10^6\left(3x^2-24x+39\right)$
$10^6\left(3x^2-24x+39\right)=0 \Longleftrightarrow 3x^2-24x+39=0 \Longrightarrow$ Nullstellen: $4-\sqrt{3}=2.2679$ (Tausend Tonnen)
$\sqrt{3}+4=5.7321$ (in 1000 Tonnen, zweite Lösung ist also grösser als 3000 Tonnen und fällt nicht in Betracht).
$G''\left(x\right)=\frac{d}{dx}10^6\left(3x^2-24x+39\right)=10^6\left(6x-24\right)$

$G''\left(4-\sqrt{3}\right)=10^6\left(6\left(4-\sqrt{3}\right)-24\right)=-6\sqrt{3}10^6<0$. Also liegt ein Maximum vor.
Preis: $p\left(4-\sqrt{3}\right)=45-15\left(4-\sqrt{3}\right)+2\left(4-\sqrt{3}\right)^2=23-\sqrt{3}=21.268$ (Franken pro Kg)
$G\left(2.2679\right)=10^6\left(39\cdot 2.2679-12\cdot 2.2679^2+2.2679^3-1\right)=3.739\,2\times 10^7$

(b) Neue Kostenfunktion: $K(x,t)=10^6\left(1+6x-3x^2+x^3\right)+10^6tx$
Gewinn: $G\left(x,t\right)=10^6\left(45x-15x^2+2x^3\right)-10^6\left(1+6x-3x^2+x^3\right)-10^6tx=$
$10^6\left(39x-tx-12x^2+x^3-1\right)$
$\frac{d}{dx}\left(10^6\left(39x-tx-12x^2+x^3-1\right)\right)=10^6\left(3x^2-24x-t+39\right)$
$10^6\left(3x^2-24x-t+39\right)=0\Longleftrightarrow 3x^2-24x-t+39=0.$
Mit der NS-Formel für Polynome zweiten Grades: $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ erhält man mit $a=3,b=-24,c=-t+39$ die Nullstellen:

$$\begin{aligned}\frac{24\pm\sqrt{24^2-4\cdot 3\cdot(-t+39)}}{2\cdot 3}&=\frac{24\pm\sqrt{24^2-4\cdot 3\cdot(-t+39)}}{6}\\&=\frac{24\pm\sqrt{2^2 12^2+12t-12\cdot 39}}{6}\\&=\frac{24\pm\sqrt{3}2\sqrt{2^2 12+t-39}}{6}\\&=\frac{12\pm\sqrt{3}\sqrt{t+9}}{3}\\&=4\pm\frac{\sqrt{3}\sqrt{t+9}}{3}\end{aligned}$$

$\frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{t+9}+4=0.577\,35\sqrt{t+9}+4>3$ für $t\geq 0$ (Die in der Aufgabenstellung angegebene Bedingung <3000 Tonnen wird durch diese Lösung also nicht erfüllt).
Als Lösung bleibt also: $4-\frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{t+9}$.
d.h. die gewinnmaximierende zu produzierende Menge m in Abhängigkeit von der Steuer t ist also:

$$m\left(t\right)=4-\frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{t+9}=4-0.577\,35\sqrt{t+9}$$

Wir überprüfen, ob tatsächlich ein Maximum vorkommt, wofür wird die zweite Ableitung der Gewinnfunktion berechnen und die Nullstelle $m\left(t\right)$ der ersten Ableitung in diese einsetzen: $G''\left(x,t\right)=\frac{d}{dx}\left(10^6\left(3x^2-24x-t+39\right)\right)=10^6\left(6x-24\right)$
$G''\left(4-\frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{t+9}\right)=10^6\left(6\left(4-\frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{t+9}\right)-24\right)=-3.464\,1\cdot 10^6\sqrt{t+9}<0$
Damit gibt die Funktion m tatsächlich Gewinnmaximastellen als Funktion von t an.

(c) Damit der Steuertrag S maximal wird, muss das Produkt von produzierter Menge und der Steuer t maximal sein, wobei zu berücksichtigen ist, dass die Unternehmung die Menge produziert, die ihren Gewinn maximiert.
Die Steuerertragsfunktion (Steuerertrag S als Funktion der Steuer t) ist damit $S\left(t\right)=tm\left(t\right)$
$\frac{d}{dt}tm\left(t\right)=\frac{d}{dt}\left(4t-\frac{t}{3}\sqrt{3}\sqrt{t+9}\right)=4-\frac{1}{6}t\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{t+9}}-\frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{t+9}$
$4-\frac{1}{6}t\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{t+9}}-\frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{t+9}=0$. Nullstelle: 18
$S''(t)=\frac{d}{dt}\left(4-\frac{1}{6}\frac{\sqrt{3}t}{\sqrt{t+9}}-\frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{t+9}\right)=-\frac{1}{6}\frac{\sqrt{3}\sqrt{t+9}-\sqrt{3}t\cdot\frac{1}{2}(t+9)^{-\frac{1}{2}}}{t+9}-\frac{1}{3}\sqrt{3}\frac{1}{2}\left(t+9\right)^{-\frac{1}{2}}$
$S''\left(18\right)=-\frac{1}{6}\frac{\sqrt{3}\sqrt{18+9}-\sqrt{3}18\cdot\frac{1}{2}(18+9)^{-\frac{1}{2}}}{18+9}-\frac{1}{3}\sqrt{3}\frac{1}{2}\left(18+9\right)^{-\frac{1}{2}}=-9.259\,3\times 10^{-2}$
Also liegt in 18 ein Maximum vor (18 Franken pro Kg).

(d) $m\left(18\right)=4-\frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{18+9}=1$ (in Millionen Kg)
$p\left(1\right)=(45-15+2)=32$ (in Franken pro Kg).

(e) Der Steuertrag pro Kg wurde bereits berechnet. Insgesamt ergibt sich: $18\cdot 10^6$
Der Gewinn mit $G\left(x\right)=10^6\left(39x-12x^2+x^3-1\right)$ oder in Millionen Franken $G_m\left(x\right)=$

$39x - 12x^2 + x^3 - 1$
ist $G_m(1) - 18 = 39 - 12 + 1 - 1 - 18 = 9$.

12. Es ergibt sich

(a)

$$\begin{aligned} k(x) &= \frac{0.06x^2 + 6x + 600}{x} \\ &= 0.06x + 6 + \frac{600}{x} \end{aligned}$$

(b) $\frac{d}{dx}k(x) = \frac{d}{dx}\left(0.06x + 6 + \frac{600}{x}\right) = 0.06 - \frac{600}{x^2}$
$0.06 - \frac{600}{x^2} = 0$, Nullstellen: $100, -100$
im ökonomischen Bereich: 100:
$k''(x) = \frac{d}{dx}\left(0.06 - \frac{600}{x^2}\right) = \frac{1200}{x^3} > 0$ für $x > 0$.
Damit liegt in 100 tatsächlich ein Minimum vor.

(c) $k(100) = 0.06 \cdot 100 + 6 + \frac{600}{100} = 18$.

13. h = Anzahl Lieferungen; x = Lieferumfang; $\frac{x}{2}$ durchschnittlicher Lagerbestand; Lagerkosten pro Stück: 20
Bestellkosten für eine Bestellung: $K_b(x) = 20 + 9x$.
Gesamtkosten: $K(h, x) = hK_b(x) = h20 + 9h + \frac{x}{2}20$.
$hx = 2500 = m; h = \frac{2500}{x}$
$K(x) = 20\frac{2500}{x} + \frac{2500}{x}9x + 20\frac{x}{2} = 10x + \frac{50\,000}{x} + 22\,500$
$\frac{d}{dx}K(x) = \frac{d}{dx}\left(10x + \frac{50\,000}{x} + 22\,500\right) = 10 - \frac{50\,000}{x^2}$
$10 - \frac{50\,000}{x^2} = 0$, Nullstellen: $-50\sqrt{2}$, $50\sqrt{2} = 70.711$
$K''(x) = \frac{d}{dx}\left(10 - \frac{50\,000}{x^2}\right) = \frac{100\,000}{x^3} > 0$ für $x > 0$. Damit liegt ein Minimum vor.
$\frac{2500}{70.711} = 35.355; \quad 35 \cdot 71 = 2485$
Man muss also in manchen Lieferungen 71 bestellen, in manchen 72.
20 Lieferungen à 71 Apparate und 15 Lieferungen à 72 Apparate. Dies erhält man mit

$$\begin{aligned} x71 + y72 &= 2500 \\ x + y &= 35 \end{aligned}$$

Lösung: $x = 20, y = 15$. Es gilt nun tatsächlich $20 \cdot 71 + 15 \cdot 72 = 2500$
Mit der unter Aufgabe 10. entwickelten Formel:

$$x = \sqrt{\frac{2cm}{k_L}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \cdot 2500}{20}} = 70.711$$

14. (a) $p(x) = \frac{90-x}{2}$

(b) $E(x) = xp(x) = \frac{90x-x^2}{2}$

(c) $G(x) = E(x) - K(x) = \frac{90x-x^2}{2} - \left(x^3 - 8x^2 + 57x + 2\right) = \frac{15}{2}x^2 - 12x - x^3 - 2$

(d) $\frac{d}{dx}G(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{15}{2}x^2 - 12x - x^3 - 2\right) = 15x - 3x^2 - 12$
$15x - 3x^2 - 12 = 0$, Nullstellen: $1, 4$
$\frac{d}{dx}G'(x) = \frac{d}{dx}\left(15x - 3x^2 - 12\right) = 15 - 6x$
$G''(1) = 15 - 6 = 9 > 0$ (Minimum)
$G''(4) = 15 - 6 \cdot 4 = -9 < 0$ (Maximum).
$G(0) = -2 < G(4) = \frac{15}{2}4^2 - 12 \cdot 4 - 4^3 - 2 = 6$
Die maximierende Menge ist 4, der maximale Gewinn 6. Der Preis, zu dem die maximierende Menge zu verkaufen ist: $p(4) = \frac{90-4}{2} = 43$.

15. (a)
$$K(x) = 0.5x^3 - x^2 + 4x + 4$$

(b)
$$k(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{0.5x^3 - x^2 + 4x + 4}{x} = 0.5x^2 - x + 4 + \frac{4}{x}$$

(c)
$$K'(x) = \frac{d}{dx}K(x) = \frac{d}{dx}\left(0.5x^3 - x^2 + 4x + 4\right) = 1.5x^2 - 2x + 4$$

(d)
$$k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x} = \frac{0.5x^3 - x^2 + 4x}{x} = 0.5x^2 - x + 4$$

(e)
$$k_F(x) = \frac{K_F(x)}{x} = \frac{4}{x}$$

(f) $\frac{d}{dx}k(x) = \frac{d}{dx}\left(0.5x^2 - x + 4 + \frac{4}{x}\right) = x - \frac{4}{x^2} - 1$; $x - \frac{4}{x^2} - 1 = 0$, Nullstelle: 2; $\frac{d}{dx}\left(x - \frac{4}{x^2} - 1\right) = \frac{8}{x^3} + 1 > 0$ für $x = 2$ (also Minimum in 2);
$\frac{d}{dx}K'(x) = \frac{d}{dx}\left(1.5x^2 - 2x + 4\right) = 3x - 2$; $3x - 2 = 0$, Nullstelle: $\frac{2}{3} > 0$ (also Minimum in $\frac{2}{3}$)
$\frac{d}{dx}k_v(x) = \frac{d}{dx}\left(0.5x^2 - x + 4\right) = x - 1$; $x - 1 = 0$, Nullstelle: 1; $\frac{d}{dx}(x - 1) = 1 > 0$ (also Minimum in 1).

(g) $k_v(1) = 0.5 - 1 + 4 = 3.5$; $k(2) = 0.5 \cdot 2^2 - 2 + 4 + \frac{4}{2} = 6$

(h) $E(x) = xp$; $G(x) = E(x) - K(x) = xp - \left(0.5x^3 - x^2 + 4x + 4\right)$
$\frac{d}{dx}G(x) = \frac{d}{dx}\left(xp - 0.5x^3 + x^2 - 4x - 4\right) = p + 2x - 1.5x^2 - 4$
$p + 2x - 1.5x^2 - 4 = 0$, Nullstellen: $\frac{1}{3}\sqrt{6p - 20} + \frac{2}{3}$, $\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{6p - 20}$ (definiert für $p \geq \frac{10}{3}$):
$\frac{d}{dx}\left(p + 2x - 1.5x^2 - 4\right) = 2 - 3x$;
$2 - 3\left(\frac{1}{3}\sqrt{6p - 20} + \frac{2}{3}\right) < 0$ genau dann, wenn $p \in \left(\frac{10}{3}, \infty\right)$.
$2 - 3\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{6p - 20}\right) < 0$ für kein $p \geq \frac{10}{3}$.
Damit liegen für $p \geq \frac{10}{3}$ an den Nullstellen $\frac{1}{3}\sqrt{6p - 20} + \frac{2}{3}$ jeweils Maxima vor, was zur folgenden Nullstellenfunktion führt:

$$x_0(p) = \frac{1}{3}\sqrt{6p - 20} + \frac{2}{3}$$

Dies ergibt:

p	x	Gewinn $G(p, x)$
3	$\frac{1}{3}\sqrt{6 \cdot 3 - 20} + \frac{2}{3}$ (nicht reell), also $x = 0$	$G(3, 0) = -4$
4	$\frac{1}{3}\sqrt{6 \cdot 4 - 20} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$	$G\left(4, \frac{4}{3}\right) = -3.4074$
6	$\frac{1}{3}\sqrt{6 \cdot 6 - 20} + \frac{2}{3} = 2$	$G(6, 2) = 0$
8	$\frac{1}{3}\sqrt{6 \cdot 8 - 20} + \frac{2}{3} = 2.430\,5$	$G(8, 2.4305) = 4.450\,4$

mit $G(3, 0) = 0 \cdot 3 - \left(0.5(0)^3 - (0)^2 + 4 \cdot 0 + 4\right) = -4$
$G\left(4, \frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} \cdot 4 - \left(0.5\left(\frac{4}{3}\right)^3 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 4 \cdot \frac{4}{3} + 4\right) = -3.4074$
$G(6, 2) = 2 \cdot 6 - \left(0.5 \cdot 2^3 - 2^2 + 4 \cdot 2 + 4\right) = 0$
$G(8, 2.4305) = 2.4305 \cdot 8 - \left(0.5 \cdot 2.4305^3 - 2.4305^2 + 4 \cdot 2.4305 + 4\right) = 4.\,450\,4$

16. $\frac{\partial}{\partial x}(xy+x) = y+1$
$\frac{\partial}{\partial y}(xy+x) = x$
Nullstellenvektor: $(0,-1)$
$\frac{\partial}{\partial x}(y+1) = 0 = h_{11}$
$\frac{\partial}{\partial y}(y+1) = 1 = h_{21}$
$\frac{\partial}{\partial y}(x) = 0 = h_{22}$
$\frac{\partial}{\partial x}(x) = 1 = h_{12}$
$H = H_0$.
Damit ergibt sich: $x\left(xh_{11}^0 + yh_{12}^0\right) + y\left(xh_{21}^0 + yh_{22}^0\right) = xy + xy = 2xy$ (> 0 z.B. für $(x,y) = (1,1)$, < 0 z.B. für $(x,y) = (1,-1)$. Entsprechend liegt kein Extrempunkt vor - es liegt ein Sattelpunkt vor.

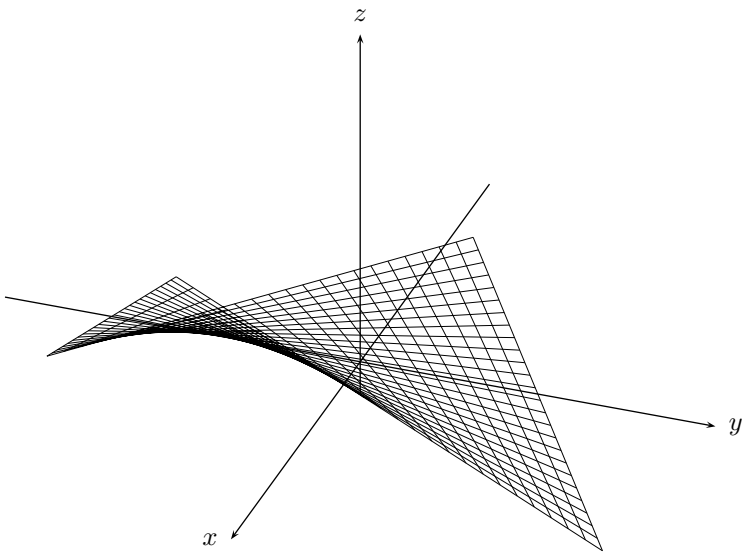


Abbildung 14.3.9: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = xy + x$

17. $\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + 2y^2 - 4y\right) = 2x$
$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + 2y^2 - 4y\right) = 4y - 4$

$$2x = 0$$
$$4y - 4 = 0$$

Nullstellenvektor $(0,1)$.
$\frac{\partial}{\partial x} 2x = 2 = h_{11} = h_{11}^0$
$\frac{\partial}{\partial y} 2x = 0 = h_{21} = h_{21}^0$
$\frac{\partial}{\partial y}(4y-4) = 4 = h_{22} = h_{22}^0$
$\frac{\partial}{\partial x}(4y-4) = 0 = h_{12} = h_{12}^0$
$x(2x) + y(4y) = 2x^2 + 4y^2 > 0$ für $(x,y) \neq (0,0)$. Damit liegt in $(0,1)$ ein Minimum vor.

18. $\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + 3y^2 - 2x + 7y + 2\right) = 2x - 2$
$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + 3y^2 - 2x + 7y + 2\right) = 6y + 7$

$$2x - 2 = 0$$
$$6y + 7 = 0$$

Nullstellenvektor: $(1, -\frac{7}{6})$
$\frac{\partial}{\partial x}(2x-2) = 2 = h_{11} = h_{11}^0$
$\frac{\partial}{\partial y}(2x-2) = 0 = h_{21} = h_{21}^0$
$\frac{\partial}{\partial y}(6y+7) = 6 = h_{22} = h_{22}^0$
$\frac{\partial}{\partial x}(6y+7) = 0 = h_{12} = h_{12}^0$
$x(2x) + y(6y) = 2x^2 + 6y^2 > 0$ für $(x,y) \neq (0,0)$. Damit liegt in $(0,1)$ ein Minimum vor.

19. $\frac{\partial}{\partial x}\left(x - 8y - x^2 + xy - y^2\right) = y - 2x + 1$
$\frac{\partial}{\partial y}\left(x - 8y - x^2 + xy - y^2\right) = x - 2y - 8$

$$\begin{aligned} y - 2x + 1 &= 0 \\ x - 2y - 8 &= 0 \end{aligned}$$

Nullstellenvektor: $(-2, -5)$
$\frac{\partial}{\partial x}(y - 2x + 1) = -2 = h_{11} = h_{11}^0$
$\frac{\partial}{\partial y}(y - 2x + 1) = 1 = h_{21} = h_{21}^0$
$\frac{\partial}{\partial y}(x - 2y - 8) = -2 = h_{22} = h_{22}^0$
$\frac{\partial}{\partial x}(x - 2y - 8) = 1 = h_{12} = h_{12}^0$
$h_{11}^0 < 0$; $h_{11}^0 h_{22}^0 = (-2)(-2) = 4 > (1)^2 = 1$. Damit liegt in $(-2,-5)$ ein Maximum vor.

20. $\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - y^2\right) = 2x$
$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - y^2\right) = -2y$

$$\begin{aligned} 2x &= 0 \\ -2y &= 0 \end{aligned}$$

Nullstellenvektor: $(0,0)$
$\frac{\partial}{\partial x}(2x) = 2 = h_{11} = h_{11}^0$
$\frac{\partial}{\partial y}(2x) = 0 = h_{21} = h_{21}^0$
$\frac{\partial}{\partial y}(-2y) = -2 = h_{22} = h_{22}^0$
$\frac{\partial}{\partial x}(-2y) = 0 = h_{12} = h_{12}^0$
$h_{11}^0 > 0$; $h_{11}^0 h_{22}^0 = 2(-2) = -4 < (0)^2 = 0$ (also kein Extremum)

21. $K(x_1, x_2) = 4x_1 + 2x_2 \Longrightarrow K(p_1, p_2) = 4(5 - p_1 + 2p_2) + 2(4 + 2p_1 - 5p_2)$
Für die Gewinnfunktion erhält man dann:

$$\begin{aligned} G(p_1,p_2) &= p_1 x_1(p_1,p_2) + p_2 x_2(p_1,p_2) - K(p_1,p_2) \\ &= p_1(5 - p_1 + 2p_2) + p_2(4 + 2p_1 - 5p_2) - 4(5 - p_1 + 2p_2) - 2(4 + 2p_1 - 5p_2) \\ &= 5p_1 + 6p_2 + 4p_1p_2 - p_1^2 - 5p_2^2 - 28 \end{aligned}$$

Wir berechnen die ersten partiellen Ableitungen: $\frac{\partial}{\partial p_1}\left(5p_1 + 6p_2 + 4p_1p_2 - p_1^2 - 5p_2^2 - 28\right) = 4p_2 - 2p_1 + 5$
$\frac{\partial}{\partial p_2}\left(5p_1 + 6p_2 + 4p_1p_2 - p_1^2 - 5p_2^2 - 28\right) = 4p_1 - 10p_2 + 6$ und lösen das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 0 &= 4p_2 - 2p_1 + 5 \\ 0 &= 4p_1 - 10p_2 + 6. \end{aligned}$$

Die Lösung ist $p_1 = \frac{37}{2}, p_2 = 8$. Das ergibt die folgenden Mengen: $x_1 = 5 - \frac{37}{2} + 2 \cdot 8 = \frac{5}{2}$
$x_2 = 4 + 2 \cdot \frac{37}{2} - 5 \cdot 8 = 1$.
Zu überprüfen ist noch, ob es sich um ein Maximum handelt.
$\frac{\partial}{\partial p_1}(4p_2 - 2p_1 + 5) = -2 = h_{11} = h_{11}^0$

$\frac{\partial}{\partial p_2}(4p_2 - 2p_1 + 5) = 4 = h_{21} = h^0_{21}$
$\frac{\partial}{\partial p_2}(4p_1 - 10p_2 + 6) = -10 = h_{22} = h^0_{22}$
$\frac{\partial}{\partial p_1}(4p_1 - 10p_2 + 6) = 4 = h_{12} = h^0_{12}$. Damit ergibt sich mit Satz 14.3.4
$h^0_{11} = -2 < 0;\ h^0_{11}h^0_{22} = -2 \cdot -10 = 20 > \left(h^0_{21}\right)^2 = 4^2 = 16$
Damit liegt ein Maximum vor.

22. $p_X(x) = \frac{x-36}{-4}$; $p_Y(y) = \frac{y-24}{-2}$
$E(x) = xp_X(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 9x; E(y) = -\frac{1}{2}y^2 + 12y$
$G(x,y) = E(x) + E(y) - K(x,y) = -\frac{1}{4}x^2 + 9x + -\frac{1}{2}y^2 + 12y - x^2 - y^2 = 9x + 12y - \frac{5}{4}x^2 - \frac{3}{2}y^2$
$\frac{\partial}{\partial x}\left(9x + 12y - \frac{5}{4}x^2 - \frac{3}{2}y^2\right) = 9 - \frac{5}{2}x$
$\frac{\partial}{\partial y}\left(9x + 12y - \frac{5}{4}x^2 - \frac{3}{2}y^2\right) = 12 - 3y$

$$9 - \frac{5}{2}x = 0$$
$$12 - 3y = 0$$

Nullstellenvektor: $\left(\frac{18}{5}, 4\right)$
$\frac{\partial}{\partial x}\left(9 - \frac{5}{2}x\right) = -\frac{5}{2} = h_{11} = h^0_{11}$
$\frac{\partial}{\partial y}\left(9 - \frac{5}{2}x\right) = 0 = h_{21} = h^0_{21}$
$\frac{\partial}{\partial y}(12 - 3y) = -3 = h_{22} = h^0_{22}$
$\frac{\partial}{\partial x}(12 - 3y) = 0 = h_{12} = h^0_{12}$
$x\left(xh^0_{11} + yh^0_{12}\right) + y\left(xh^0_{21} + yh^0_{22}\right) = -\frac{5}{2}x^2 - 3y^2 < 0$ für alle $(x,y) \neq (0,0)$.
Damit liegt ein Maximum vor (Mengenvektor). Die Preise erhält man durch: $p_X\left(\frac{18}{5}\right) = \frac{\frac{18}{5}-36}{-4} = \frac{81}{10} = 8.1$
und $p_Y(4) = \frac{4-24}{-2} = 10$

23. $p_X(x) = 12 - x$, $p_Y(y) = 16 - 2y$
$E(x,y) = x(12 - x) + y(16 - 2y) = 12x + 16y - x^2 - 2y^2$
$G(x,y) = E(x,y) - K(x,y) = 12x + 16y - x^2 - 2y^2 - \left(3x^2 + xy + 2y^2\right) = 12x + 16y - xy - 4x^2 - 4y^2$
$\frac{\partial}{\partial x}\left(12x + 16y - xy - 4x^2 - 4y^2\right) = 12 - y - 8x$
$\frac{\partial}{\partial y}\left(12x + 16y - xy - 4x^2 - 4y^2\right) = 16 - 8y - x$

$$12 - y - 8x = 0$$
$$16 - 8y - x = 0$$

Nullstellenvektor: $\left(\frac{80}{63}, \frac{116}{63}\right) = (1.2698, 1.8413)$
$\frac{\partial}{\partial x}(12 - y - 8x) = -8 = h_{11} = h^0_{11}$
$\frac{\partial}{\partial y}(12 - y - 8x) = -1 = h_{21} = h^0_{21}$
$\frac{\partial}{\partial y}(16 - 8y - x) = -8 = h_{22} = h^0_{22}$
$\frac{\partial}{\partial x}(16 - 8y - x) = -1 = h_{12} = h^0_{12}$
$h^0_{11} = -8 < 0$; $h^0_{11}h^0_{22} = (-8)^2 = 64 > (-1)^2 = 1$
Damit liegt ein Maximum vor.
Die Preise erhält man durch $p_X\left(\frac{80}{63}\right) = 12 - \frac{80}{63} = \frac{676}{63} = 10.73$, $p_Y\left(\frac{116}{63}\right) = 16 - 2 \cdot \frac{116}{63} = \frac{776}{63} = 12.317$

24. Wir setzen aus schreibökonomischen Gründen $p := p_X$ und $q := p_Y$.
$E(p,q) = px(p) + qy(q) = p(8 - 2p + q) + q(10 + p - 3q) = 8p + 10q + 2pq - 2p^2 - 3q^2$
$K(p,q) = (8 - 2p + q)^2 + (10 + p - 3q)^2 = 5p^2 - 44q - 10pq - 12p + 10q^2 + 164$
$G(p,q) = E(p,q) - K(p,q) =$
$8p + 10q + 2pq - 2p^2 - 3q^2 - \left(5p^2 - 44q - 10pq - 12p + 10q^2 + 164\right) =$
$20p + 54q + 12pq - 7p^2 - 13q^2 - 164$

$\frac{\partial}{\partial p}\left(20p+54q+12pq-7p^2-13q^2-164\right)=12q-14p+20$
$\frac{\partial}{\partial q}\left(20p+54q+12pq-7p^2-13q^2-164\right)=12p-26q+54$

$$12q-14p+20=0$$
$$12p-26q+54=0$$

Nullstellenvektor (Preise): $\left(\frac{292}{55},\frac{249}{55}\right)=(5.3091,4.5273)$
$\frac{\partial}{\partial p}\left(12q-14p+20\right)=-14=h_{11}=h_{11}^0$
$\frac{\partial}{\partial q}\left(12q-14p+20\right)=12=h_{21}=h_{21}^0$
$\frac{\partial}{\partial q}\left(12p-26q+54\right)=-26=h_{22}=h_{22}^0$
$\frac{\partial}{\partial p}\left(12p-26q+54\right)=12=h_{12}=h_{12}^0$
$h_{11}^0=-14<0$
$h_{11}^0h_{22}^0=(-14)(-26)=364>\left(h_{12}\right)^2=(12)^2=144$
Damit liegt ein Maximum vor.
Mengen: $x\left(\frac{292}{55},\frac{249}{55}\right)=8-2\cdot\frac{292}{55}+\frac{249}{55}=\frac{21}{11}=1.\,909\,1$
$y\left(\frac{292}{55},\frac{249}{55}\right)=10+\frac{292}{55}-3\cdot\frac{249}{55}=\frac{19}{11}=1.\,727\,3$

25. Wir setzen aus schreibökonomischen Gründen wiederum $p:=p_X$ und $q:=p_Y$.
$E(p,q)=p(8-4p+q)+q(7+p-2q)=8p+7q+2pq-4p^2-2q^2$
$K(p,q)=(8-4p+q)^2+2(7+p-2q)^2=18p^2-40q-16pq-36p+9q^2+162$
$G(p,q)=8p+7q+2pq-4p^2-2q^2-\left(18p^2-40q-16pq-36p+9q^2+162\right)$
$=44p+47q+18pq-22p^2-11q^2-162$
$\frac{\partial}{\partial p}\left(44p+47q+18pq-22p^2-11q^2-162\right)=18q-44p+44$
$\frac{\partial}{\partial q}\left(44p+47q+18pq-22p^2-11q^2-162\right)=18p-22q+47$

$$18q-44p+44=0$$
$$18p-22q+47=0$$

Nullstellenvektor: $\left(\frac{907}{322},\frac{715}{161}\right)=(2.\,816\,8,4.\,441\,0)$
$\frac{\partial}{\partial p}\left(18q-44p+44\right)=-44=h_{11}=h_{11}^0$
$\frac{\partial}{\partial q}\left(18q-44p+44\right)=18=h_{21}=h_{21}^0$
$\frac{\partial}{\partial q}\left(18p-22q+47\right)=-22=h_{22}=h_{22}^0$
$\frac{\partial}{\partial p}\left(18p-22q+47\right)=18=h_{12}=h_{12}^0$
$h_{11}^0=-44<0$; $h_{11}^0h_{22}^0=(-44)(-22)=968>\left(h_{12}^0\right)^2=(18)^2=324$
Also liegt ein Maximum vor.
Mengen: $x\left(\frac{907}{322},\frac{715}{161}\right)=8-4\cdot\frac{907}{322}+\frac{715}{161}=\frac{27}{23}=1.\,173\,9$
$y\left(\frac{907}{322},\frac{715}{161}\right)=7+\frac{907}{322}-2\cdot\frac{715}{161}=\frac{43}{46}=0.934\,78$

26. $f(x,y)=x^3y+2x^2-2xy+3x-4y+4$
$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3y+2x^2-2xy+3x-4y+4\right)=4x-2y+3x^2y+3$
$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^3y+2x^2-2xy+3x-4y+4\right)=x^3-2x-4$

$$4x-2y+3x^2y+3=0$$
$$x^3-2x-4=0$$

Nullstellenvektor: $(x,y)=\left(2,-\frac{11}{10}\right)$
$\frac{\partial}{\partial x}\left(4x-2y+3x^2y+3\right)=6xy+4=h_{11}$
$\frac{\partial}{\partial y}\left(4x-2y+3x^2y+3\right)=3x^2-2=h_{21}$
$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^3-2x-4\right)=0=h_{22}$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3-2x-4\right)=3x^2-2=h_{12}$.
Damit ist dann

$$H_0=\begin{pmatrix} 6\cdot 2\cdot -\frac{11}{10}+4 & 3\cdot 2^2-2 \\ 3\cdot 2^2-2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{46}{5} & 10 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$$

$x\left(-\frac{46}{5}x+10y\right)+y\left(10x+y\cdot 0\right)=20xy-\frac{46}{5}x^2>0$ für $x=1$ und $y=5$
$(20\cdot 1\cdot 5-\frac{46}{5}=90.8)$ und $20xy-\frac{46}{5}x^2<0$ für $x=100, y=1$
$(20\cdot 100\cdot 1-\frac{46}{5}\cdot 100^2=-90\,000)$.
Also liegt kein Extremum vor.

27. $f(x,y)=x^2y-2xy^2+3xy+4$
$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2y-2xy^2+3xy+4\right)=3y+2xy-2y^2$
$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y-2xy^2+3xy+4\right)=3x-4xy+x^2$

$$\begin{aligned} 3y+2xy-2y^2&=0\\ 3x-4xy+x^2&=0 \end{aligned}$$

Nullstellenvektoren: $\left(-1,\frac{1}{2}\right),(0,0),(-3,0),\left(0,\frac{3}{2}\right)$.
$\frac{\partial}{\partial x}\left(3y+2xy-2y^2\right)=2y=h_{11}$
$\frac{\partial}{\partial y}\left(3y+2xy-2y^2\right)=2x-4y+3=h_{21}$
$\frac{\partial}{\partial y}\left(3x-4xy+x^2\right)=-4x=h_{22}$
$\frac{\partial}{\partial x}\left(3x-4xy+x^2\right)=2x-4y+3=h_{12}$.
Da es vier Nullstellenvektoren gibt, gibt es 4 H_0-Matrizen.

$$H_0^{\left(-1,\frac{1}{2}\right)}=\begin{pmatrix} 2\cdot\frac{1}{2} & 2\cdot -1-4\cdot\frac{1}{2}+3 \\ 2\cdot -1-4\cdot\frac{1}{2}+3 & -4\cdot -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$h_{11}^0>0$. Dann liegt dort ein Minimum, wenn $h_{11}^0h_{22}^0>\left(h_{12}^0\right)^2$. Da $1\cdot 4>(-1)^2$, gilt dies und es liegt in $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ ein Minimum vor.

$$H_0^{(0,0)}=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt $x\left(x\cdot 0+y\cdot 3\right)+y\left(x\cdot 3+y\cdot 0\right)=6xy$. Ist grösser oder kleiner als 0, je nach Wahl von x und y (bei $x,y\neq 0$ und umgekehrten Vorzeichen immer kleiner als 0, bei $x,y\neq 0$ und gleichen Vorzeichen, immer grösser als 0). Es liegt also kein Extremum vor.

$$H_0^{(-3,0)}=\begin{pmatrix} 2\cdot 0 & 2\cdot(-3)-4\cdot 0+3 \\ 2\cdot(-3)-4\cdot 0+3 & -4\cdot(-3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}$$

$x\left(0x+-3y\right)+y\left(-3x+12y\right)=12y^2-6xy$ ist positiv oder negativ, je nach Wahl von x und y (z.B. $y=1$,$x=5$: $12-6\cdot 5=-18; y=20, x=1: 12\cdot 20^2-6\cdot 20=4680$). Also liegt kein Extremum vor.

$$H_0^{\left(0,\frac{3}{2}\right)}=\begin{pmatrix} 2\cdot\frac{3}{2} & 2\cdot 0-4\cdot\frac{3}{2}+3 \\ 2\cdot 0-4\cdot\frac{3}{2}+3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$x\left(3x+(-3y)\right)+y\left(-3x+0y\right)=3x^2-6xy$. Es liegt kein Extremum vor, da sowohl positive wie negative Werte möglich sind ($x=1, y=20: 3-6\cdot 20=-117; x=20, y=1: 3\cdot 20^2-6\cdot 20=1080$).

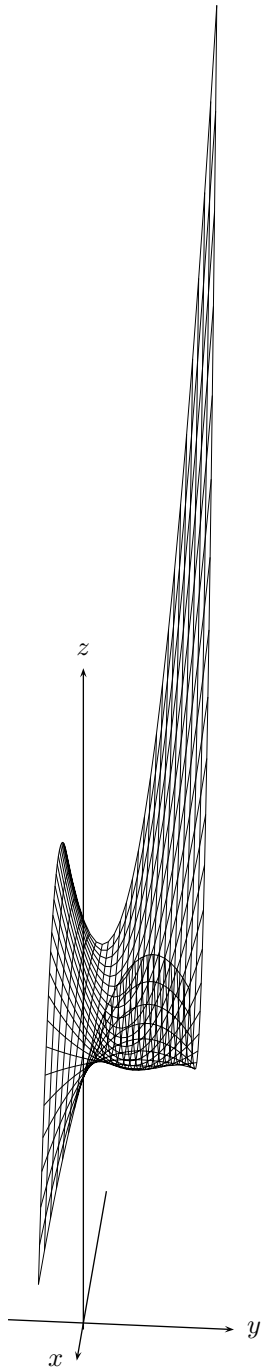


Abbildung 14.3.10: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2y - 2xy^2 + 3xy + 4$; 3 Sattelpunkte und 1 lokales Minimum

14.4 Lernziele

- Je nach Problemlage kann man dreidimensionale Funktionen auf zweidimensionale reduzieren, um eine Fragestellung zu beantworten. Die entsprechenden beiden Methoden kennen und berechnen können (Konstantsetzung der Funktionswerte, funktionaler Zusammenhang zwischen den unabhängigen Variablen)
- Maxima und Minima von dreidimensionalen Funktionen berechnen können. Rechnerisch kontrollieren können, ob ein Maximum oder ein Minimum vorliegt.
- Aufgaben von der Art der Übungen lösen können.

Kapitel 15

Integrale

15.1 Das unbestimmte Integral

Wir definieren für Funktionen f mit Definitionsbereich $I \subset \mathbb{R}$ und Wertebereich $\mathbb{R}$ (I ist ein Intervall):

Definition 15.1.1. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $C \in \mathbb{R}$: $F + C$ ist in I eine Stammfunktion von f genau dann wenn in I gilt:*

$$\frac{d}{dx}(F(x) + C) = f(x)$$

$\Diamond$

Für Stammfunktionen schreiben wir auch:

$$\int f(x)dx := F(x) + C,$$

mit $C \in \mathbb{R}$. Das Symbol $\int$ nennen wir „Integralzeichen“. Stammfunktionen werden auch „unbestimmte Integrale“ genannt. Das „dx“ dient unter anderem dazu, anzugeben, nach welcher Variable integriert wird. Das unbestimmte Intergral ist eine Art Umkehrung des Differenzierens.

Bemerkung 15.1.2. *Man beachte, dass es überabzälhlbar unendlich viele Stammfunktion für eine Funktion f gibt, wenn es eine gibt. Man kann daraus, dass F und G Stammfunktionen von f sind, nicht schliessen, dass $F = G$. Sonst würden wir Widersprüche ableiten können. Es ist z.B.*

$$\frac{d}{dx}\left(5x^2 + 3\right) = 10x,$$

und

$$\frac{d}{dx}(5x^2 + 4) = 10x$$

Entsprechend sind $F(x) = 5x^2 + 3$ und $G(x) = 5x^2 + 4$ zwei Stammfunktionen von f. Würden wir auf die Gleichheit der Stammfunktionen schliessen, würde daraus folgen:

$$\begin{aligned} 5x^2 + 3 &= 5x^2 + 4 \\ \Longrightarrow 3 &= 4 \end{aligned}$$

(dies würde im Widerspruch zum Satz $3 \neq 4$ stehen). Schreibt man somit

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

(mit $C \in \mathbb{R}$), so ist damit nur gemeint, dass $F + C$ eine Stammfunktion von f ist. $\Diamond$

Beispiel 15.1.3. $f(x) = 4x^3 \Longrightarrow \frac{4}{4}x^4 + C = x^4 + C$ *ist eine Stammfunktion von* $4x^3$.
$f(x) = 4x^3 + 5x^2 \Longrightarrow \frac{4}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 + C = x^4 + \frac{5}{3}x^3 + C$ *ist eine Stammfunktion von* $4x^3 + 5x^2$
$f(x) = \frac{1}{x} \Longrightarrow \ln x + C$ *ist eine Stammfunktion von* $\frac{1}{x}$
$f(x) = \frac{1}{x^2} \Longrightarrow -x^{-1} + C$ *ist eine Stammfunktion von* $\frac{1}{x^2}$
$f(z) = e^z \Longrightarrow e^z + C$ *ist eine Stammfunktion von* e^z ◊

Satz 15.1.4. *Sind* H, G *Stammfunktionen von* f*, dann gilt:* $H(b) - H(a) = G(b) - G(a)$.

Beweis. Sind H, G Stammfunktionen von f, dann gibt es genau eine Funktion F, so dass $H = F + C$ und $G = F + D$ mit $C, D \in \mathbb{R}$. Es gilt dann:
$H(b) - H(a) = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a)$ und
$G(b) - G(a) = F(b) + D - F(a) - D = F(b) - F(a) \Longrightarrow$
$H(b) - H(a) = G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$ □

Es folgt eine Tabelle 15.1.1 mit einigen Stammfunktionen:

$f(x)$	$\int f(x)dx = F(x) + C$	Anwendungsbedingungen und Bemerkungen
0	C	$C \in \mathbb{R}$ (C = eine reelle Konstante)
a	$ax + C$	für a ungleich 0
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$
$(ax+b)^n$	$\frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$	wenn $n \in \mathbb{N} : x, a, b \in \mathbb{R}$ wenn $n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\} : x \neq 0,\ ax + b \neq 0$ wenn $n \in \mathbb{R}\backslash\{-1\} :\ x > 0, \quad ax + b > 0$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$	$x > 0$
$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a}\ln(ax + b) + C$	$ax + b > 0; a \neq 0$
e^x	$e^x + C$	$x \in \mathbb{R}$
e^{ax+b}	$\frac{1}{a}e^{ax+b} + C$	$a \neq 0$
$a^x \ln a$	$a^x + C$	$x \in R; a \neq 0$
$\frac{1}{a^x}$	$-\frac{1}{a^x \ln a}$	$a > 0$

Tabelle 15.1.1: Stammfunktionen einiger reeller Funktionen

Zudem gelten die Regeln:

$$\boxed{\begin{array}{l} \int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx \\ \hline \int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx \end{array}}$$

Sie gelten, da $\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$
und $\frac{d}{dx}af(x) = a\frac{d}{dx}f(x)$

15.1.1 Weitere Beispiele und Spezialfälle

$\int x^7 dx = \frac{1}{8}x^8 + C$
$\int \sqrt{y}dy = \int y^{\frac{1}{2}}dy = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt[2]{y^3} + C = \frac{2}{3}\left(\sqrt{y}\right)^3 + C$
$\int \sqrt{y}dx = \sqrt{y}x + C$
$\int (2x)^2 dx = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(2x)^3}{3}\right) + C$ (oder durch Integration von $4x^2 : 4\frac{x^3}{3} + C = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x)^3}{3} + C$)
$\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}dx = \int x^{-\frac{2}{5}}dx = \frac{5}{3}x^{\frac{3}{5}} + C$
$\int (3z - 2)^2 dz = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{(3z-2)^3}{3}\right) + C$
$\int \sqrt{2x - 1}dx = \int (2x - 1)^{\frac{1}{2}}\, dx = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-1)^{1.5}}{1.5}\right) + C = \left(\frac{1}{3} \cdot \sqrt{(2x - 1)^3}\right) + C$
$\int \frac{1}{2x-8}dx = \begin{cases} 0.5\ln(2x - 8) + C & \text{für } x > 4 \end{cases}$
$\int e^{0.5t-7}dt = \frac{1}{0.5}e^{0.5t-7} + C = 2e^{0.5t-7} + C$

$\int e^{-0.1t}dt = -10e^{-0.1t} + C$
$\int 6x^7dx = 6\int x^7dx = \frac{6}{8}x^8 + C = \frac{3}{4}x^8 + C$
$\int -\frac{1}{x}dx = -\int \frac{1}{x}dx = -\ln x + C \quad (x > 0)$
$\int \left(8x^3 - 4x + 2 + \frac{12}{\sqrt{4x+9}}\right)dx = 2x^4 - 2x^2 + 2x + 6\sqrt{4x+9} + C$

15.1.2 Übungen

1. Beweisen Sie die Regeln der obigen Tabelle 15.1.1, indem Sie die jeweilige Stammfunktion ableiten.

2. Eine Unternehmung produziert ein Gut, wobei folgende Grenzproduktivitätsfunktion vorliegt: $x'(r) = -2r^2 + 4r + 6$. Zudem weiss man, dass $x(0) = 0$. Berechnen Sie die Produktionsfunktion $x(r)$.

3. Eine Unternehmung produziert ein spezifisches Gut mit der folgenden Grenzkostenfunktion: $K'(x) = 1.5x^2 - 4x + 4$. Zudem gilt: $K(10) = 372$. Berechnen Sie die Gesamtkostenfunktion und die Stückkostenfunktion.

4. Sei $C'(Y) = \frac{7.2}{\sqrt{0.6Y+4}}$ (C = Konsumfunktion, Y = Einkommen). Das Existenzminimum liege bei 50. Bestimmen Sie die Konsumfunktion und die Sparfunktion $S(Y)$.

5. Sei $E'(x) = 4 - 1.5x$ die Grenzerlösfunktion. Berechnen Sie die Preis-Nachfragefunktion $p(x)$.

6. Bestimmen Sie die folgenden Integrale:
   $\int (4x^7 - 2x^3 + 4 - \frac{10}{x})dx$
   $\int \frac{1}{z\sqrt{z}}dz$
   $\int 4\sqrt[3]{4y-3}dy$
   $\int 18e^{0.09t}dt$
   $\int \frac{30}{\sqrt[5]{5x-1}}dx$
   $\int \frac{4}{\sqrt{1-u}}du$
   $\int \frac{4}{(1-u)^2}du$
   $\int \left((24(2x+1)^{11} - e^{-x} + \frac{\sqrt{x}}{2x^2} + \frac{30}{16-5x}\right)dx$

15.1.3 Lösungen

1. $\frac{d}{dx}C = 0$
   $\frac{d}{dx}(ax + C) = a$
   $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right) = \frac{n+1}{n+1}x^n + 0 = x^n$
   $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C\right) = \frac{n+1}{a(n+1)}(ax+b)^n a + 0 = (ax+b)^n$
   $\frac{d}{dx}(\ln x + C) = \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x}$
   $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}\ln(ax+b) + C)\right) = \frac{1}{a}\frac{a}{(ax+b)\cdot \ln e} + 0 = \frac{1}{ax+b}$
   $\frac{d}{dx}(e^x + C) = e^x + 0 = e^x$
   $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}e^{ax+b} + C\right) = \frac{1}{a}e^{ax+b}\left(a \cdot \ln e + (ax+b)\cdot\frac{0}{e}\right) + 0 =$
   $\frac{1}{a}e^{ax+b}(a+0) = e^{ax+b}$

2. $\int(-2r^2 + 4r + 6)dr. = -\frac{2}{3}r^3 + 2r^2 + 6r + C. \quad x(0) = 0$, somit ist die Produktionsfunktion:
   $x(r) = -\frac{2}{3}r^3 + 2r^2 + 6r$

3. $\int(1.5x^2 - 4x + 4)dx = 0.5x^3 - 2x^2 + 4x + K_f$
   $K(10) = 0.5 \cdot 10^3 - 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + K_f = 372 \Longrightarrow K_f = 32$
   $K(x) = 0.5x^3 - 2x^2 + 4x + 32$

4. $\int \left(\frac{7.2}{\sqrt{0.6Y+4}}\right) dY = 24\sqrt{(0.6Y+4)} + D$
   $C(Y) = 24\sqrt{(0.6Y+4)} + 50.$
   $S(Y) = Y - C(Y) = Y - \left(24\sqrt{(0.6Y+4)} + 50\right)$

5. $\int (4 - 1.5x)dx = 4x - 0.75x^2 + C \Longrightarrow$ (wenn $x = 0$, $E(x) = 0$)
   $E(x) = xp(x) = 4x - 0.75x^2 = x(4 - 0.75x) \Longrightarrow p(x) = 4 - 0.75x.$

6. $\int (4x^7 - 2x^3 + 4 - \frac{10}{x})dx = \frac{4}{8}x^8 - \frac{2}{4}x^4 + 4x - 10\ln x + C =$
   $\frac{1}{2}x^8 - \frac{1}{2}x^4 + 4x - 10\ln x + C$

   $\int \frac{1}{z\sqrt{z}}dz = \int \frac{1}{\sqrt{z^3}}dz = \int z^{-\frac{3}{2}}dz = -2z^{-\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{\sqrt{z}} + C$ für $z > 0$.

   $\int 4\sqrt[3]{4y-3}dy = \int 4\,(4y-3)^{\frac{1}{3}}\,dy = \frac{4\cdot 3}{4\cdot 4}(4y-3)^{\frac{4}{3}} + C =$
   $\frac{3}{4}(4y-3)^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}(4y-3)\sqrt[3]{4y-3} + C$ für $4y - 3 > 0 \Longrightarrow y > \frac{3}{4}$.

   $\int 18e^{0.09t}dt = \frac{18e^{0.09t}}{0.09} + C = 200e^{0.09t} + C$

   $\int \frac{30}{\sqrt[5]{5x-1}}dx = \int 30\,(5x-1)^{-\frac{1}{5}}\,dx = \frac{30\cdot 5}{5\cdot 4}\,(5x-1)^{\frac{4}{5}} + C = \frac{15}{2}\,(5x-1)^{\frac{4}{5}} + C$
   $= \frac{15}{2}\sqrt[5]{5x-1}^4 + C = \frac{15}{2}\sqrt[5]{(5x-1)^4} + C$ für $\sqrt[5]{5x-1} > 0 \Longrightarrow x > \frac{1}{5}$.

   $\int \frac{4}{\sqrt{1-u}}du = \int 4(1-u)^{-\frac{1}{2}}du = \frac{4\cdot 2}{-1}(1-u)^{\frac{1}{2}} + C = -8\sqrt{(1-u)} + C$
   für $\sqrt{1-u} > 0 \Longrightarrow u < 1$

   $\int \frac{4}{(1-u)^2}du = \int 4(1-u)^{-2}du = 4\,(1-u)^{-1} + C = \frac{4}{1-u} + C$
   für $(1-u)^2 \neq 0 \Longrightarrow u \neq 1$ (Wegen innerer Ableitung verschweindet Minuszeichen!).

   $\int \left((24(2x+1)^{11} - e^{-x} + \frac{\sqrt{x}}{2x^2} + \frac{30}{16-5x}\right) dx = \int \left((24(2x+1)^{11} - e^{-x} + \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{2} + \frac{30}{16-5x}\right) dx =$
   $\frac{24}{12\cdot 2}(2x+1)^{12} + e^{-x} - x^{-\frac{1}{2}} + \frac{30}{-5}\ln(16-5x)^1 + C =$
   $(2x+1)^{12} + e^{-x} - x^{-\frac{1}{2}} + \frac{30}{-5}\ln(16-5x) + C =$
   $(2x+1)^{12} + e^{-x} - x^{-\frac{1}{2}} - 6\ln(16-5x) + C$
   für $2x^2 \neq 0 \Longrightarrow x \neq 0$ und
   $16 - 5x \neq 0 \Longrightarrow x \neq \frac{16}{5} = 3.2$ und
   $\sqrt{x} > 0 \Longrightarrow x > 0$.

15.2 Das bestimmte Integral

Mit Hilfe der bestimmten Integrale kann man Flächenberechnungen vornehmen. Um dies zu zeigen, betrachten wir ein einfaches Beispiel: Wir beschränken uns vorerst auf Funktionen,

- die im Intervall stetig sind
- die auf beschränkte reelle Intervall definiert sind
- die im betrachteten Intervall nicht negativ sind (d.h. $f(x) \geq 0$) und
- die nach oben beschränkt sind.

Wir definieren die unbekannten Ausdrücke:

Definition 15.2.1. *Ein Intervall I ist beschränkt genau dann, wenn*
$I =]a, b[$ *oder*
$I = [a, b]$ *oder*

$I =]a, b]$ *oder*
$I = [a, b[$ *und*
$a, b \in \mathbb{R}$. ◊

Definition 15.2.2. *Eine Abbildung $f : I \to \mathbb{R}$ ist in I nach oben beschränkt genau dann, wenn es eine reelle Zahl c gibt, so dass $f(x) < c$ für $x \in I$.*
Eine Abbildung $f : I \to \mathbb{R}$ ist in I nach unten beschränkt genau dann, wenn es eine reelle Zahl c gibt, so dass $f(x) > c$ für $x \in I$.
Eine Abbildung $f : I \to \mathbb{R}$ ist in I beschränkt genau dann, wenn sie nach unten und nach oben beschränkt ist.

◊

Wir fragen uns nun für eine spezifische Funktion, die in einem beschränkten Intervall beschränkt ist: Welches ist die Fläche A zwischen der x-Achse und der Funktion $f(x) = 2x + 5$ im Intervall $[1, 6]$ (s. Abbildung 15.2.1)?

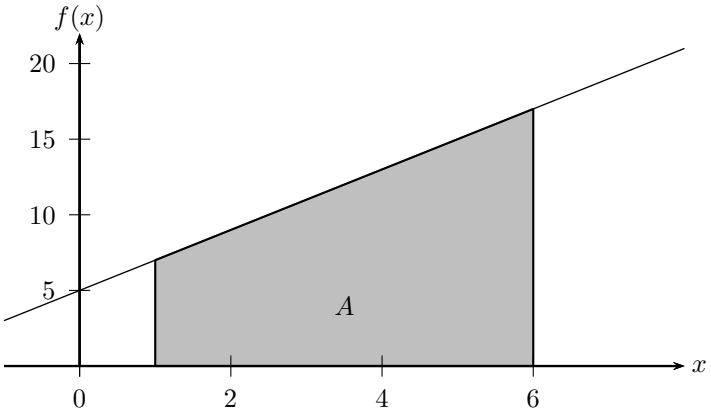


Abbildung 15.2.1: Zu berechnende Fläche A zwischen der Kurve $f(x) = 2x + 5$ und der x-Achse im Intervall $[1, 6]$

15.2.1 Berechnungsmethode 1: klassische Geometrie

Die Fläche besteht aus zwei Flächen: dem Rechteck $f(1) \cdot 5 = (2 + 5) \cdot 5 = 35$ und dem Dreieck

$$\frac{(f(6) - f(1)) \cdot 5}{2} = \frac{(((2 \cdot 6) + 5) - ((2 \cdot 1) + 5)) \cdot 5}{2}$$
$$= 25$$

$\Longrightarrow A = 35 + 25 = 60$ (s. Abbildung 15.2.2).

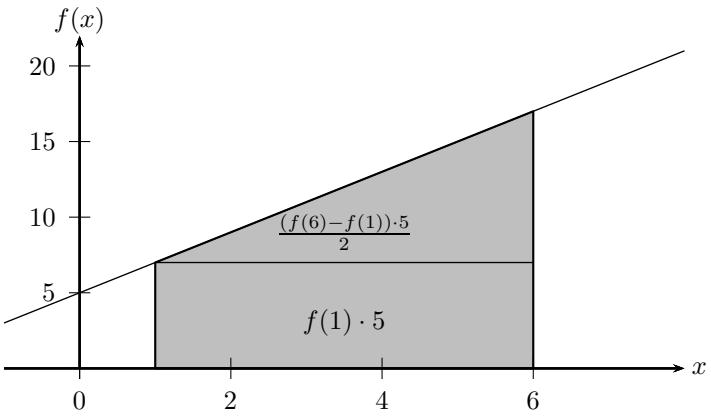


Abbildung 15.2.2: Berechnung der Fläche zwischen der Kurve $f(x) = 2x + 5$ und der x-Achse im Intervall $[1, 6]$ durch klassische Geometrie (Aufteilung in Rechteck und Dreieck. Höhe des Rechteckes ist $f(1)$; Höhe des Dreiecks ist $f(6) - f(1)$. Die Basis beider Flächen ist $6 - 1 = 5$

Die Methode funktioniert gut für den einfachen Fall einer Geraden. Sie würde jedoch bereits bei einer quadratischen Funktion versagen.

15.2.2 Berechnungsmethode 2: Grenzwertberechnung

Wir können eine Treppenfunktion auf die Fläche legen, so dass immer die rechte Ecke oben auf der Geraden liegt. Dann berechnen wir die Fläche des Treppenkörpers (= Fläche zwischen der Treppe und der x-Achse). So können wir z.B. eine Treppe mit 5 Tritten anlegen: Dies ergibt eine Länge pro Tritt von $\frac{6-1}{5} = 1$ (s. Abbildung 15.2.3).

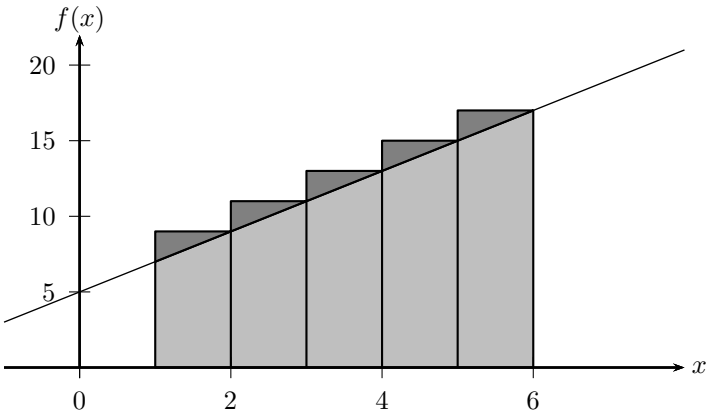


Abbildung 15.2.3: Näherungsweise Berechnung der Fläche zwischen der Kurve $f(x) = 2x + 5$ und der x-Achse im Intervall $[1, 6]$ mit Hilfe eines Treppenkörpers

Wir können die Fläche des Treppenkörpers wie folgt berechnen:
Das *erste Rechteck* hat eine Fläche von $f(1 + 1) \cdot 1 = (2 \cdot 2 + 5) \cdot 1 = 9$.
Das *zweite Rechteck* hat eine Fläche von $f(1 + 2) \cdot 1 = (2 \cdot 3 + 5) \cdot 1 = 11$
Das *dritte Rechteck* hat eine Fläche von $f(1 + 3) \cdot 1 = (2 \cdot 4 + 5) \cdot 1 = 13$
Das *vierte Rechteck* hat eine Fläche von $f(1 + 4) \cdot 1 = (2 \cdot 5 + 5) \cdot 1 = 15$
Das *fünfte Rechteck* hat eine Fläche von $f(1 + 5) \cdot 1 = (2 \cdot 6 + 5) \cdot 1 = 17$
Allgemein erhält man für das $i-$te Rechteck: $f(1 + i) \cdot 1 = (2 \cdot (1 + i) + 5 = 7 + 2i$
Insgesamt erhalten wir eine Fläche von: $9 + 11 + 13 + 15 + 17 = 65$ oder mit der Formel $\sum_{i=1}^{n} i =$

$\frac{n(n+1)}{2}$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{5} f(1+i)\cdot 1 &= \sum_{i=1}^{5}(2i+7)\\ &= 2\sum_{i=1}^{5} i + \sum_{i=1}^{5} 7\\ &= 2\frac{5\cdot 6}{2} + 5\cdot 7\\ &= 65 > 60.\end{aligned}$$

Die Fläche ist wie erwartet zu gross.

Als nächstes berechnen wir die Fläche eines analogen Treppenkörpers, indem wir statt 5 10 Rechtecke wählen.

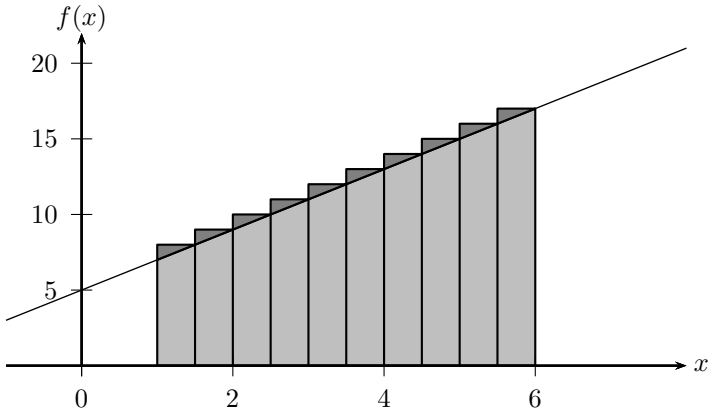


Abbildung 15.2.4: Näherungsweise Berechnung der Fläche zwischen der Kurve $f(x) = 2x + 5$ und der x-Achse im Intervall $[1, 6]$ mit Hilfe eines Treppenkörpers

Das *erste Rechteck* hat eine Fläche von $f(1 + 0.5) \cdot 0.5 = (2 \cdot 1.5 + 5) \cdot 0.5 = 4$
Das *zweite Rechteck* hat eine Fläche von $f(1 + 1) \cdot 0.5 = (2 \cdot 2 + 5) \cdot 0.5 = 4.5$
Das dritte Rechteck hat eine Fläche von $f(1 + 1.5) \cdot 0.5 = (2 \cdot 2.5 + 5) \cdot 0.5 = 5.0$
etc.
Allgemein erhält man für das $i-$te Rechteck:
$f(1 + i) \cdot 0.5 = (2(1 + i \cdot 0.5) + 5)\, 0.5 = 3.5 + 0.5i$
Insgesamt erhalten wir eine Fläche von:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{10} f(1+i\cdot 0.5)\cdot 0.5 &= \sum_{i=1}^{10} 3.5 + 0.5\sum_{i=1}^{10} i\\ &= 35 + 0.5\frac{10\cdot 11}{2} = 62.5\end{aligned}$$

Die Fläche ist wie erwartet zu gross, sie ist der wirklichen Fläche aber näher gekommen. Dies zeigt, dass wir der tatsächlichen Fläche immer näher kommen, je grösser wir das n wählen.

Bevor wir die Fläche von entsprechenden Treppenkörpern für $n > 10$ berechnen, wollen wir einige allgemeine Resultat festhalten: Sei a die untere Grenze des Intervalls und b die obere Grenze des Intervalls, in dem wir zwischen der $x-$Achse und der stetigen Funktion f die Fläche berechnen wollen. Bei gleicher Trittbreite erhält man bei n Tritten die folgende Basis der Rechtecke

$$\frac{b-a}{n}.$$

Diese Basis multiplizieren wir mit der Höhe der Rechtecke, um die Fläche der Rechtecke zu erhalten. Die Höhe des $i-$ten Rechteckes ist $f(a+i\frac{b-a}{n})$. Damit erhält man für die Fläche des i-ten Rechteckes

$$f(a+i\frac{b-a}{n})\cdot\frac{b-a}{n}$$

Summieren wir über alle Rechtecke, erhält man für die Gesamtfläche A_T (Treppenkörper über $[a,b]$ und n Treppen; s. für ein weiteres graphisches Beispiel Abbildung 15.2.5):

$$A_T=\sum_{i=1}^{n}\left(f(a+i\frac{b-a}{n})\cdot\frac{b-a}{n}\right)=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(a+i\frac{b-a}{n})$$

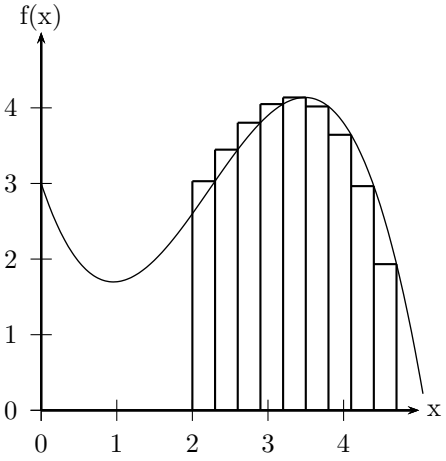


Abbildung 15.2.5: A_T für $f(x)=-0.3x^3+2x^2-3x+3$ im Intervall $[2,4.7]$ und $n=9$

Im Falle einer Geraden $f(x)=cx+d$ erhalten wir die allgemeine Formel

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(c\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)+d\right)$$

und für den obigen konkreten Fall $f(x)=2x+5$:

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(2\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)+5\right)$$

Wir kommen nun zur Berechnung des konkreten Treppenkörpers für $n>10$ im Intervall $[a,b]=[1,6]$ zurück:

Für $n=20$: $\frac{6-1}{20}\sum\limits_{i=1}^{20}\left(2\left(1+i\frac{6-1}{20}\right)+5\right)=61.25$

Für $n=100$: $\frac{6-1}{100}\sum\limits_{i=1}^{100}\left(2\left(1+i\frac{6-1}{100}\right)+5\right)=60.25$

Wir sehen, dass sich die Fläche des Treppenkörpers mit steigendem n der gesuchten Fläche nähert. Entsprechend ist es naheliegend, die Fläche A mit folgendem Ausdruck zu identifizieren:

$$A=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(a+i\frac{b-a}{n})\right],$$

sofern dieser Grenzwert definiert ist.

Für den umständlichen Ausdruck

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a+i\frac{b-a}{n})\right]$$

führen wir eine Abkürzung ein:

Definition 15.2.3. *(des bestimmten Integrals):*

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{n\to\infty}\left[\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a+i\frac{b-a}{n})\right]$$

(für $x \in [a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$ mit $f(x) \geq 0$, f stetig und beschränkt) ◊

Bemerkung 15.2.4. *Wir haben oben jeweils identisch lange Intervalle gewählt. Der definierende Grenzwert der Definition 15.2.3 ist von dieser Voraussetzung unabhängig. Die Wahl von Rechtecken wäre für die numerische, näherungsweise Berechnung der Fläche nicht besonders effizient. Trapeze wären besser. Hier geht es jedoch nicht um die numerische, näherungsweise Berechung der Fläche. Wir sind am Grenzwert interessiert!* ◊

Wir berechnen übungshalber das bestimmte Integral für eine Gerade $f(x) = cx + d$ im Intervall $[a,b]$. Durch Einsetzen erhalten wir:

$$A = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(c(a+i\frac{b-a}{n})+d\right)\right]$$

Wir vereinfachen zuerst:

$$c(a+i\frac{b-a}{n})+d = ca + ci\frac{b-a}{n} + d$$

Somit gilt dann:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left(ca+ci\frac{b-a}{n}+d\right) &= \sum_{i=1}^{n} ca + \sum_{i=1}^{n} ci\frac{b-a}{n} + \sum_{i=1}^{n} d\\ &= nca + c\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} i + nd\end{aligned}$$

Da nun

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

(arithmetische Reihe, $a=1, r=1$), erhalten wir:

$$\begin{aligned}nca + c\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} i + nd &= nca + c\frac{b-a}{n}\frac{n(n+1)}{2} + nd\\ &= nca + c\frac{(b-a)(n+1)}{2} + nd\\ &= \frac{1}{2}can + \frac{1}{2}cbn + \frac{1}{2}cb - \frac{1}{2}ca + nd\end{aligned}$$

Damit ist dann

$$\begin{aligned}\left[\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(c(a+i\frac{b-a}{n})+d\right)\right] &= \frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2}can+\frac{1}{2}cbn+\frac{1}{2}cb-\frac{1}{2}ca+nd\right)\\ &= (b-a)\left(\frac{1}{2n}can+\frac{1}{2n}cbn+\frac{1}{2n}cb-\frac{1}{2n}ca+\frac{nd}{n}\right)\\ &= (b-a)\left(\frac{1}{2}ca+\frac{1}{2}cb+\frac{1}{2n}cb-\frac{1}{2n}ca+d\right).\end{aligned}$$

Berechnen wir nun den Grenzwert, dieses Ausdrucks, erhalten wir:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left((b-a)\left(\frac{1}{2}ca+\frac{1}{2}cb+\frac{1}{2n}cb-\frac{1}{2n}ca+d\right)\right) &= (b-a)\left(\frac{1}{2}ca+\frac{1}{2}cb+d\right)\\ &= \frac{1}{2}cb^2+bd-\frac{1}{2}ca^2-ad\end{aligned} \tag{15.2.1}$$

Wir kontrollieren das Resulat am Beispiel:

$$A=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 6^2+6\cdot 5-\frac{1}{2}2\cdot 1^2-1\cdot 5=60$$

Die Methode ist nicht nur für affine Funktionen anwendbar, sondern beliebige Funktionen f, $f\geq 0$, die in einem beschränkten Intervall I stetig sind und die nach oben beschränkt sind. Das Beispiel zeigt allerdings, dass die Berechnung des Grenzwertes selbst im Falle einer Geraden algebraisch aufwendig wird. Für Polynome höheren Grades wird die Rechnerei schnell unübersichtlich und verlangt einiges an algebraischer Kreativität. Bevor wir zu einer dritten, effizienteren Berechnungsmethode übergehen, noch ein paar Sätze zum bestimmten Intergral.

Satz 15.2.5. $\int_c^c f(x)dx=0$, $c\in\mathbb{R}$, $f\geq 0$ *ist stetig und beschränkt.*

Beweis.

$$\begin{aligned}\int_c^c f(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{c-c}{n}\sum_{i=1}^{n}f(c+i\frac{c-c}{n})\right]\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(0\cdot\sum_{i=1}^{n}f(c)\right)=\lim_{n\to\infty}0=0\end{aligned}$$

(denn $c-c=0$) □

Satz 15.2.6. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(a+i\frac{b-a}{n})\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f(a+i\frac{b-a}{n})\right]$, $f\geq 0$ *ist stetig und beschränkt. (der Grenzwert des oberen Treppenkörpers ist identisch mit den Grenzwert des unteren Treppenkörpers)*

Beweis.

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left[\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(a+i\frac{b-a}{n})\right]-\lim_{n\to\infty}\left[\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f(a+i\frac{b-a}{n})\right]\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}f(a+i\frac{b-a}{n})-\sum_{i=0}^{n-1}f(a+i\frac{b-a}{n})\right)\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\left(f(b)-f(a)\right)\\ &=\left(f(b)-f(a)\right)(b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\end{aligned}$$

Die Vereinfachung der Summe im dritten Schritt kann man sich am folgenden Beispiel klarmachen:
$\sum_{i=1}^{4} f(a+i\frac{b-a}{4}) - \sum_{i=0}^{4-1} f(a+i\frac{b-a}{4}) = f\left(a+\frac{b-a}{4}\right) + f\left(a+2\frac{b-a}{4}\right) + f\left(a+3\frac{b-a}{4}\right) + f\left(a+4\frac{b-a}{4}\right) -$
$\left(f(a) + f\left(a+\frac{b-a}{4}\right) + f\left(a+2\frac{b-a}{4}\right) + f\left(a+3\frac{b-a}{4}\right)\right) =$
$f\left(a+4\frac{b-a}{4}\right) - f(a) = f(b) - f(a).$ □

Satz 15.2.7. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, $a, b \in \mathbb{R}$, $f \geq 0$ *ist stetig und beschränkt.*

Beweis. Laut Definition gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\right]$$

und:

$$\int_b^a f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{a-b}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(b+i\frac{a-b}{n}\right)\right]$$

Es gilt

$$\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} f\left(b+i\frac{a-b}{n}\right),$$

Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, $b > a$ (also $a - b < 0$). Zu beachten ist, dass wir bei $a + i\frac{b-a}{n}$ zu a jeweils $i\frac{b-a}{n}$ hinzuzählen, während wir bei $b + k\frac{a-b}{n}$ jeweils $k\frac{a-b}{n}$ von b abzählen ($i, k \in \mathbb{N}_n^*$). Für manche i und k ist $f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right) = f\left(b+k\frac{b-a}{n}\right)$, wobei in diesem Fall $f\left(a+k\frac{a-b}{n}\right) - f\left(b+i\frac{a-b}{n}\right) = 0$ ergibt. Dabei ist $b+i\frac{a-b}{n} = b+k\frac{a-b}{n}$ genau dann, wenn $i+k=n$ (also $i = n-k$) für $0 \leq i \leq n-1$, denn es gilt in diesem Fall

$$\begin{aligned} a + (n-k)\frac{b-a}{n} &= b + k\frac{a-b}{n} \iff \\ na + (n-k)(b-a) &= nb + k(a-b) \iff \\ ak - bk + bn &= nb + ka - kb. \end{aligned}$$

Damit gilt $\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right) - \sum_{i=1}^{n} f\left(b+i\frac{a-b}{n}\right) =$
$f\left(a+0\frac{b-a}{n}\right) + f\left(a+\frac{b-a}{n}\right) + f\left(a+2\frac{b-a}{n}\right) + ... + f\left(a+(n-2)\frac{b-a}{n}\right) + f\left(a+(n-1)\frac{b-a}{n}\right) -$
$\left(f\left(b+\frac{a-b}{n}\right) + f\left(b+2\frac{a-b}{n}\right) + ... + f\left(b+(n-1)\frac{a-b}{n}\right) + f\left(b+n\frac{a-b}{n}\right)\right)$

$= f\left(a+0\frac{b-a}{n}\right) - f\left(b+n\frac{a-b}{n}\right) + f\left(a+\frac{b-a}{n}\right) - f\left(b+(n-1)\frac{a-b}{n}\right) + ... + f\left(a+(n-2)\frac{b-a}{n}\right) -$
$f\left(b+2\frac{a-b}{n}\right)$
$+f\left(a+(n-1)\frac{b-a}{n}\right) - f\left(b+\frac{a-b}{n}\right) = 0,$

da in jeweils zwei durch $-$ verbunden Ausdrücken $k+i=n$ ist.
Damit gilt auf Grund des Satzes 15.2.6 (für $b > a$ gilt $a - b < 0$):
$-\int_b^a f(x)dx = -\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a-b}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(b+i\frac{a-b}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(b+i\frac{a-b}{n}\right)\right] =$
$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\right] = \int_a^b f(x)dx.$ □

Satz 15.2.8. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$, $a, b \in \mathbb{R}$, $f \geq 0$ *ist stetig und beschränkt.*

Beweis.

$$\begin{aligned}\int_a^b cf(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\left[c\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a+i\frac{b-a}{n})\right]\\ &= c\lim_{n\to\infty}\left[\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a+i\frac{b-a}{n})\right]\\ &= c\int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

□

Satz 15.2.9. $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx, \quad a,b\in\mathbb{R}$, $f\geq 0$ *ist stetig und beschränkt.*

Beweis.

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b (f+g)(x))dx &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}(f+g)(a+i\frac{b-a}{n})\right]\\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}(f(a+i\frac{b-a}{n})+g(a+i\frac{b-a}{n}))\right]\\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{b-a}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} f(a+i\frac{b-a}{n})+\sum_{i=1}^{n} g(a+i\frac{b-a}{n})\right)\right]\\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a+i\frac{b-a}{n})+\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} g(a+i\frac{b-a}{n})\right]\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a+i\frac{b-a}{n})\right)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} g(a+i\frac{b-a}{n})\right)\\ &= \int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx\end{aligned}$$

□

Ohne Beweis halten wir den einleuchtenden Satz fest, dass die Fläche über einem Intervall, das in zwei Teilintervalle zerlegt wird, die Summe der Flächen über den Teilintervallen ist:

Satz 15.2.10. $\int_a^b f(x)+\int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$ *für* $a<b<c$, $f\geq 0$ *ist stetig und beschränkt.*

15.2.3 Methode 3: Hauptsatz der Integralrechnung

Der Hauptsatz der Integralrechnung stellt eine Beziehung zwischen dem unbestimmten und dem bestimmten Integral her:

Satz 15.2.11. ***(Hauptsatz der Integralrechnung)***
Wenn F eine Stammfunktion von f mit $f(x)\geq 0$, f stetig und beschränkt, $a,b\in\mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

Mit dem bisher Bewiesenen können wir den Hauptsatz der Integralrechnung für affine Funktionen in ihrem positiven Bereich einfach beweisen. Für $f(x) = cx + d$ gilt: F mit $F(x) = \frac{cx^2}{2} + dx + C$ ist eine Stammfunktion von f. Somit ist dann:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \frac{cb^2}{2} + db + C - \left(\frac{ca^2}{2} + da + C\right) \\ &= \frac{cb^2}{2} + bd - \frac{ca^2}{2} - da \end{aligned}$$

Es handelt sich um genau die Formel, die wir oben für $\int_a^b (cx + d)\, dx$ erhalten haben (s. Gleichung (15.2.1)).

Beweis des Hauptsatzes der Integralrechnung

Wir nehmen an, f sei stetig und sei im Intervall $[a, b]$ bestimmt integrierbar, das heisst: $\int_a^b f(x)dx$ ist definiert. Wir definieren nun die folgende Funktion im Intervall $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$:

Definition 15.2.12.

$$A_c(t) := \int_c^t f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{t-c}{n} \sum_{i=1}^{n} f(c + i\frac{t-c}{n})\right] \quad (a \le c < t \le b).$$

◊

$\int_c^t f(x)dx$ drückt die Fläche zwischen c und t einerseits und der Funktion $f(x)$ und der x-Achse andererseits aus. Da t eine Variable ist, erhalten wir für jedes t eine Fläche. Die definierte Funktion ordnet somit jedem t genau eine Fläche zu. Ohne Beweis halten wir fest, dass A_c stetig ist, wenn f stetig ist.

Satz 15.2.13.

$$\frac{d}{dt} A_c(t) = \frac{d}{dt}\left(\int_c^t f(x)dx\right) = f(t).$$

(Manchmal 1. Hauptsatz der Integralrechnung genannt; bei dieser Namengebung wird der Hauptsatz „2. Hauptsatz genannt". Der Satz drückt aus, dass die Flächenänderung bei der Verschiebung der rechten Intervallgrenze nur von der Funktion f abhängt).

Beweis. 1. Wir definieren mit $t_o, t \in [a, b]$
$\min_{x\in[t_0,t]}\{f(x)\}$ = das minimale $f(x)$ im Interall $[t_o, t]$.
$\max_{x\in[t_0,t]}\{f(x)\}$ = das maximale $f(x)$ im Intervall $[t_o, t]$.

2. Gemäss der Ableitungsdefinition gilt:

$$\frac{d}{dt} A_c(t_o) = \lim_{t\to t_o} \frac{A_c(t) - A_c(t_o)}{t - t_o}$$

3. Wir können nun behaupten (s. Abbildung 15.2.6; die einzelnen Terme drücken Flächen aus):

$$\left(\min_{x\in[t_0,t]}\{f(x)\} \cdot (t - t_o)\right) \le [A_c(t) - A_c(t_o)] \le \left(\max_{x\in[t_0,t]}\{f(x)\} \cdot (t - t_o)\right)$$

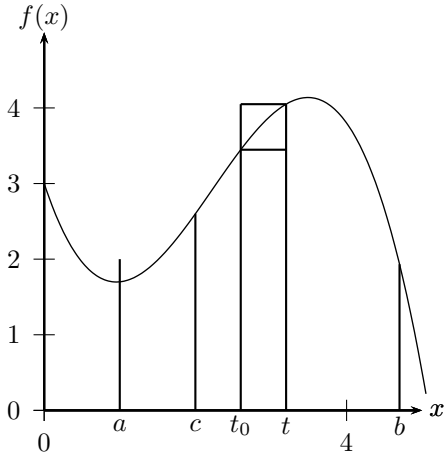


Abbildung 15.2.6: Skizze zum Beweis. Im Beispiel ist $\min\limits_{x\in[t_0,t]}\{f(x)\}$ im Intervall $[t,t_0]$ die Zahl $f(t_0)$ und $\max\limits_{x\in[t_0,t]}\{f(x)\}$ im Intervall $[t,t_0]$ die Zahl $f(t)$

4. Wir multiplizieren den Ausdruck

$$\left(\min_{x\in[t_0,t]}\{f(x)\}\cdot(t-t_0)\right)\leq[A_c(t)-A_c(t_0)]\leq\left(\max_{x\in[t_0,t]}\{f(x)\}\cdot(t-t_0)\right)$$

mit

$$\frac{1}{(t-t_0)}$$

und erhalten:

$$\min_{x\in[t_0,t]}\{f(x)\}\leq\frac{[A_c(t)-A_c(t_0)]}{t-t_0}\leq\max_{x\in[t_0,t]}\{f(x)\}$$

5. Wir beweisen einen Zwischensatz: Gilt für alle x, $f(x)\leq g(x)$ und ist $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ und $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ definiert, dann gilt: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\leq\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.
Beweis: Wir nehmen an, der Satz gelte nicht. Dann gilt für alle x, $f(x)\leq g(x)$ und $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)>\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$. Dann ist $k:=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)-\lim\limits_{x\to x_0}g(x)>0$. Laut Grenzwertdefinition gibt es dann ein $r>0$, so dass für alle x mit $|x-x_0|<r$ gilt: $\left|f(x)-\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\right|<k$. Somit gibt es ein x, so dass $f(x)>g(x)$. Dies steht im Widerspruch zur Aussage „für alle x, $f(x)\leq g(x)$“. Somit kann $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)>\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ nicht gelten. Folglich gilt: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\leq\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

6. Durch die Anwendung von (5) erhalten wir:

$$\lim_{t\to t_0}\min_{x\in[t_0,t]}\{f(x)\}\leq\lim_{t\to t_0}\frac{[A_c(t)-A_c(t_0)]}{t-t_0}\leq\lim_{t\to t_0}\max_{x\in[t_0,t]}\{f(x)\}$$

7. Es gilt offenbar (s. Abbildung 15.2.6):

$$\lim_{t\to t_0}\left[\min_{x\in[t_0,t]}\{f(x)\}\right]=f(t_0)$$

und

$$\lim_{t\to t_0}\left[\max_{x\in[t_0,t]}\{f(x)\}\right]=f(t_0)$$

Somit gilt:

$$f(t_0) \leq \frac{d}{dt_0} A_c(t_0) \leq f(t_0).$$

8. Daraus kann man schliessen:
$$\frac{d}{dt_0} A_c(t_0) = f(t_0).$$
(Wenn $5 \leq x \leq 5$, dann ist $x = 5$)

9. Da dies für alle t_0 gilt, kann man schliessen:
$$\frac{d}{dt} A_c(t) = \frac{d}{dt} \left(\int_c^t f(x)dx \right) = f(t)$$

10. Mit Hilfe der Definition der Stammfunktion erhalten wir nun:
A_c ist eine Stammfunktion von f.

□

Wir können nun zum Beweis des Hauptsatzes

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

übergehen, wobei F eine beliebige Stammfunktion von f ist. Es gilt

$$A_c(b) - A_c(a) = \int_c^b f(x)dx - \int_c^a f(x)dx =$$
$$\int_c^b f(x)dx + \int_a^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$
$$= \int_a^b f(x)dx$$

Da A_c eine Stammfunktion von f ist, gilt laut Satz 15.1.4: $F(b) - F(a) = A_c(b) - A_c(a)$, wobei F eine beliebige Stammfunktion von f ist (q.e.d).

Wir führen noch eine oft gebraucht Schreibweise für bestimmte Integrale ein:

Definition 15.2.14. *Ist $F(x) + C$ eine Stammfunktion von $f(x)$, dann schreiben wir*

$$F(x)|_a^b := \int_a^b f(x)dx$$

◊

Die Schreibweise erlaubt oft eine effizientere Darstellung bei der Berechnung von bestimmten Integralen. Beachten Sie, dass mit dieser Definition und dem Hauptsatz der Integralrechnung 15.2.11 gilt

$$F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Übungen

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

1. $\int_3^{10} 2x dx$
2. $\int_2^9 (4x+5)\,dx$
3. $\int_{2.5}^{5.4} \left(2x^2+3x-5\right) dx$
4. $\int_{-1.5}^{15} \left(1.5x^3+4x^2-2x+5\right) dx$
5. $\int_4^{11} \frac{1}{x} dx$
6. $\int_{0.5}^{8.5} \frac{3}{5x+4} dx$
7. $\int_1^8 e^x dx$
8. $\int_{1.5}^{1.6} e^{5x+3} dx$
9. $\int_1^8 \left(e^x - 2x + \frac{4}{2x}\right) dx$

Lösungen

1. Definitionsbereich von $f(x) = 2x$ ist $\mathbb{R}$. $2x \geq 0$ in $[0, \infty[$, wobei $[3, 10] \subset [0, \infty[$.
   $F(x) = x^2 + C$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = 2x$. Damit gilt

$$\int_3^{10} 2x dx = \left.\frac{2x^2}{2}\right|_3^{10} = \left. x^2 \right|_3^{10} = 10^2 + C - 3^2 - C = 91$$

2. Definitionsbereich von $f(x) = 4x + 5$ ist $\mathbb{R}$. $4x + 5 \geq 0$ in $[-\frac{5}{4}, \infty[$, wobei $[2, 9] \subset [-\frac{5}{4}, \infty[$.
   $F(x) = 2x^2 + 5x + C$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = 4x + 5$. Damit gilt: $\int_2^9 (4x+5)\,dx =$
   $\left.\frac{4x^2}{2} + 5x\right|_2^9 = \left. 2x^2 + 5x \right|_2^9 = 2 \cdot 9^2 + 5 \cdot 9 + C - \left(2 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 + C\right) = 189$

3. Definitionsbereich von $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ ist $\mathbb{R}$. $2x^2 + 3x - 5 \geq 0$ in $]-\infty, -\frac{5}{2}] \cup [1, \infty[$, wobei $[2.5, 5.4] \subset\ ]-\infty, -\frac{5}{2}] \cup [1, \infty[$.
   $F(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 5x + C$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$. Damit gilt:
   $\int_{2.5}^{5.4} \left(2x^2+3x-5\right) dx = \left.\frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 5x\right|_{2.5}^{5.4} =$
   $= \frac{2}{3} \cdot 5.4^3 + \frac{3}{2} \cdot 5.4^2 - 5 \cdot 5.4 + C - \left(\frac{2}{3} \cdot 2.5^3 + \frac{3}{2} \cdot 2.5^2 - 5 \cdot 2.5 + C\right) = 114.42$

4. Definitionsbereich von $f(x) = 1.5x^3 + 4x^2 - 2x + 5$ ist $\mathbb{R}$. $1.5x^3 + 4x^2 - 2x + 5 \geq 0$ in $[-3.359, \infty[$, wobei $[-1.5, 15] \subset [-3.359, \infty[$.
$F(x) = \frac{1.5}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - x^2 + 5x + C$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = 1.5x^3 + 4x^2 - 2x + 5$.
Damit ist $\int_{-1.5}^{15} \left(1.5x^3 + 4x^2 - 2x + 5\right) dx = \frac{1.5x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 5x\Big|_{-1.5}^{15} =$
$\frac{1.5}{4} \cdot 15^4 + \frac{4}{3} \cdot 15^3 - 15^2 + 5 \cdot 15 + C -$
$\left(\frac{1.5}{4} \cdot (-1.5)^4 + \frac{4}{3} \cdot (-1.5)^3 - (-1.5)^2 + 5 \cdot (-1.5) + C\right) = 23346.72656.$

5. Definitionsbereich von $f(x) = \frac{1}{x}$ ist $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. $\frac{1}{x} \geq 0$ in $\mathbb{R}^+\backslash\{0\}$. $[4, 11] \subset \mathbb{R}^+\backslash\{0\}$. $F(x) = \ln x + C$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{x}$. Damit gilt: $\int_4^{11} \frac{1}{x} dx = \ln x|_4^{11} = \ln 11 + C - (\ln 4 + C) = 1.011\,6$

6. Definitionsbereich von $f(x) = \frac{3}{5x+4}$ ist $\mathbb{R}\backslash\{-\frac{4}{5}\}$. $\frac{3}{5x+4} \geq 0$ in $]-\frac{4}{5}, \infty[$. $[0.5, 8.5] \subset\ ]-\frac{4}{5}, \infty[$.
$F(x) = \frac{3}{5}\ln(5x + 4) + C$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{3}{5x+4}$. Damit gilt $\int_{0.5}^{8.5} \frac{3}{5x+4} dx = \frac{3}{5}\ln(5x + 4)\big|_{0.5}^{8.5} = \frac{3}{5}\ln(5 \cdot 8.5 + 4) + C - \left(\frac{3}{5}\ln(5 \cdot 0.5 + 4) + C\right) = 1.180\,6$

7. Definitionsbereich von $f(x) = e^x$ ist $\mathbb{R}$. $e^x \geq 0$ in $\mathbb{R}$. $F(x) = e^x + C$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = e^x$. Entsprechend gilt: $\int_1^8 e^x dx = e^x|_1^8 = e^8 + C - e^1 - C = 2978.2$

8. Definitionsbereich von $f(x) = e^{5x+3}$ ist $\mathbb{R}$. $e^{5x+3} \geq 0$ in $\mathbb{R}$.
$F(x) = \frac{1}{5}e^{5x+3} + C$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = e^{5x+3}$. Also gilt: $\int_{1.5}^{1.6} e^{5x+3} dx = \frac{1}{5}e^{5x+3}\big|_{1.5}^{1.6} = \frac{1}{5}e^{5\cdot 1.6+3} + C - \left(\frac{1}{5}e^{5\cdot 1.5+3} + C\right) = 4711.7$

9. Definitionsbereich von $f(x) = e^x - 2x + \frac{2}{x}$ ist $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. $e^x - 2x + \frac{2}{x} \geq 0$ in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
$F(x) = e^x - x^2 + 2\ln x + C$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = e^x - 2x + \frac{2}{x}$. Darum gilt
$\int_1^8 \left(e^x - 2x + \frac{2}{x}\right) dx = e^x - x^2 + 2\ln x\big|_1^8 =$
$e^8 - 8^2 + 2\ln 8 + C - \left(e^1 - 1^2 + 2\ln 1 + C\right) = 2919.4$

15.2.4 Erweiterungen des Integralbegriffs

Als erstes können wir die obige Einschränkung bezüglich der Stetigkeit etwas auflockern. Wir definieren:

Definition 15.2.15. *Das Innere eines Intervalls mit den Grenzen a und b, die zu I gehören oder nicht, ist* $]a, b[$. ♢

Damit ist das Innere von $[a, b] =]a, b[$, das Innere von $]a, b] =]a, b[$, das Innere von $[a, b[=]a, b[$ und das Innere von $]a, b[=]a, b[$.

Definition 15.2.16. *Wenn* $I_1, ..., I_n$ *eine Zerlegung eines beschränkten Intervall I in Intervalle* I_i *ist und f auf den Intervallen* I_i *nach oben beschränkt ist,* $f(x) \geq 0$ *und f im Innern von* I_i *stetig ist, dann ist das Integrall auf I definiert als:* $\sum_{i=1}^{n} \int_{I_i} f(x)dx$,

wobei $\int_{I_i} f(x)dx := \int_{a_i}^{b_i} f(x)dx$ *für das Innere* $]a_i, b_i[$ *von* I_i. ♢

An den Intervallgrenzen braucht die Funktion f nun nicht mehr stetig zu sein. Entsprechend ist damit das Integral z.B. für Funktionen wie der folgenden im Intervall $[2, 7]$ definiert (s. Abbildung

15.2.7):

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x \in [2,4] \\ 0.3x^2 & \text{für } x \in]4,5[\\ 0.5e & \text{für } x \in [5,7] \end{cases}$$

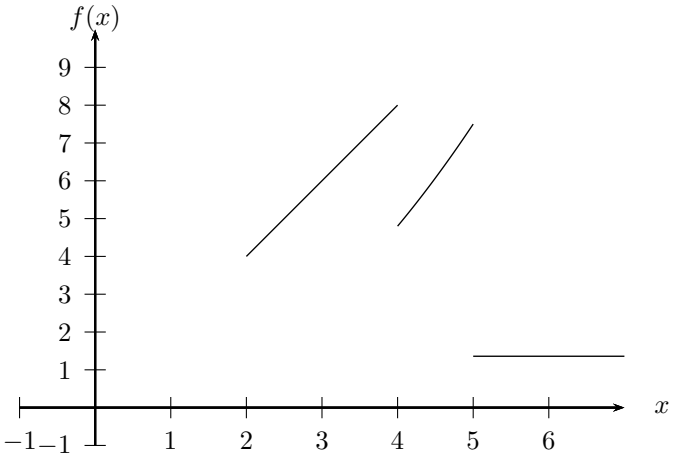


Abbildung 15.2.7: Beispiel für in $[2,7]$ nicht-stetige, aber trotzdem integrierbare Funktion

Es ist: $\int_2^7 f(x)dx = \int_2^4 2xdx + \int_4^5 0.3x^2dx + \int_5^7 0.5edx = 20.8182818.$

Bisher haben wir die Einschränkung $f(x) \geq 0$ beachtet. Gilt $f(x) < 0$, so können wir das entsprechende Integral nicht mehr als Fläche interpretieren, da Flächen nur positive Masszahlen zugeordnet werden können. Es ist aber nützlich (auch für die Anwendung, s. für ein ökonomisches Beispiel 15.2.20) den Integralbegriff so zu erweitern, dass er nicht mehr dem Flächenbegriff entspricht, sondern auch Funktionen in Intervallen ein Integral zuordnet, wo sie negativ sind.

Definition 15.2.17. *Sei $f(x) < 0$ für $x \in [a,b]$, dann wird definiert*

$$\int_a^b f(x)dx := -\int_a^b |f(x)|\,dx$$

◊

Damit wird der erweiterte Integralbegriff auf den alten zurückgeführt. $\int_a^b |f(x)|\,dx$ entspricht dem alten Integralbegriff, da wir ein Integral einer Funktion zuordnen, die im besagten Intervall positiv ist. Wir versehen das Resultat anschliessend mit einem Minuszeichen. Um das Betrags- und Minuszeichen brauchen wir uns bei Rechnungen allerdings nicht zu kümmern, wenn wir die obigen Regeln verwenden. Man erhält automatisch die korrekten Antworten.

Beispiel 15.2.18. *Zu bestimmen ist das Integral der Funktion $f(x) = 0.02x^2 - 5$ im Intervall $[-2,2]$ (s. Abbildung 15.2.8)*

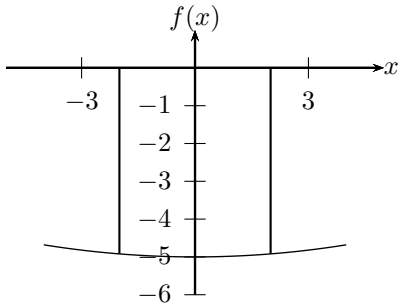


Abbildung 15.2.8: Fläche zwischen der x-Achse und der Funktion $f(x) = 0.02x^2 - 5$ im Intervall $[-2, 2]$ ist positiv, das Integral ist negativ.

Wir bestimmen eine Stammfunktion:

$$F(x) = \frac{0.02}{3}x^3 - 5x + C$$

und erhalten:

$$\begin{aligned} F(2) - F(-2) &= \frac{0.02}{3}2^3 - 5 \cdot 2 - \left(\frac{0.02}{3}(-2)^3 - 5 \cdot (-2)\right) \\ &= -19.893. \end{aligned}$$

Man würde aber auch dasselbe Resultat erhalten, wenn man

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx$$

rechnet, da im betrachteten Intervall

$$|f(x)| = -0.02x^2 + 5$$

ist. Damit erhält man dann:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2} |f(x)|\,dx &= \int_{-2}^{2} \left(-0.02x^2 + 5\right) dx \\ &= 19.893. \end{aligned}$$

Versehen wir das Resultat mit dem Minuszeichen, erhält man wiederum -19.893 ◊

Bemerkung 15.2.19. *Wollen wir eine Fläche berechnen, so werden wir nur positive Werte zulassen. Bei einer stetigen Funktion wäre entsprechend die Nullstellen zu finden und dann die Funktion intervallweise, von Nullstelle zu Nullstelle zu berechnen. Von den negativen Integralen würden wir dann den Betrag wählen. So ist z.B. das Integral* $\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \left(x^2 - 2\right) dx = 0$, *wie Sie selber nachrechnen mögen.*

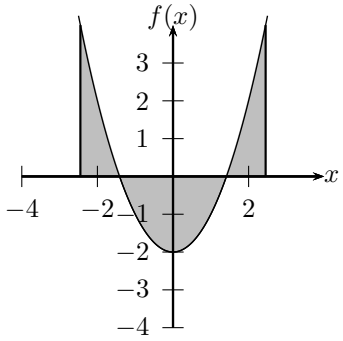


Abbildung 15.2.9: Fläche zwischen der x-Achse und der Funktion $f(x) = x^2 - 2$ im Intervall $[-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$

Das ist durchaus korrekt. Möchte aber ein Gärtner wissen, wieviel Blumenpflanzen er für die entsprechende Fläche kaufen muss, so wäre er mit der Antwort nicht zufrieden.
Die Fläche zwischen $f(x)$ und der x-Achse im Intervall $[-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$ erhalten wir durch:

$$\int_{-\sqrt{6}}^{-\sqrt{2}} \left(x^2 - 2\right) dx + \left| \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(x^2 - 2\right) dx \right| + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \left(x^2 - 2\right) dx = 7.542472333 \qquad \Diamond$$

Beispiel 15.2.20. *Sei die folgende Funktion $e(t)$ gegeben, deren Integral den Erlös einer Produktion ausdrückt, wobei die unabhängige Variable die Zeit ist:*

$$e(t) = 0.002t^2 + 0.3t.$$

Damit wäre der Erlös zwischen dem Zeitpunkt 5 *und dem Zeitpunkt* 6

$$\int_5^6 \left(0.002t^2 + 0.3t\right) dt = 1.710\,7$$

Zudem sei die folgende Funktion gegeben, deren Integral die Kosten einer Produktion ausdrückt (in Abhängigkeit von der Zeit):.

$$k(t) = 0.00002t^3 - 0.0001t^2 + 0.3t + 2$$

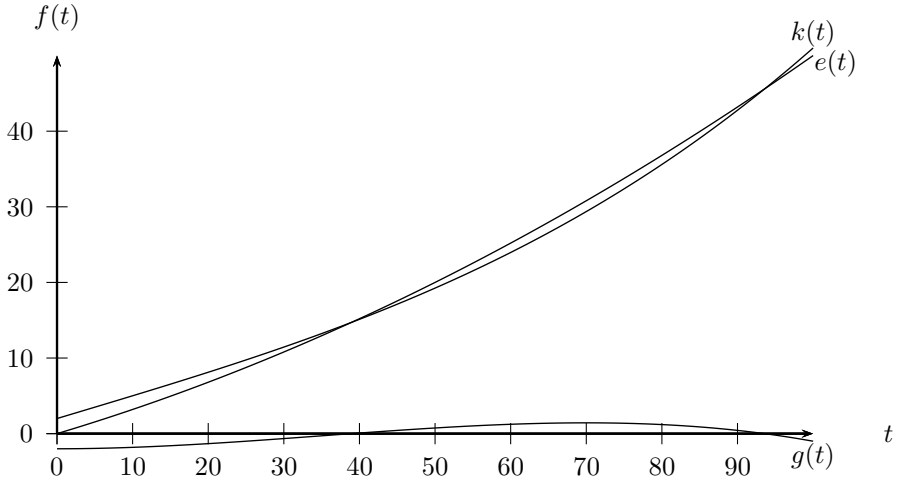


Abbildung 15.2.10: Die Funktionen k, e und g, die die Kosten, den Erklös sowie den Gewinn (Verlust) als Integral zwischen der t-Achse und der jeweiligen Kurve ausdrücken.

Wir berechnen den Gewinn, der im Zeitraum von 5 *bis* 6 *anfällt.*

$$\begin{aligned} g(t) &= e(t) - k(t) = 0.002t^2 + 0.3t - \left(0.00002t^3 - 0.0001t^2 + 0.3t + 2\right) \\ &= -0.000\,02t^3 + 0.002\,1t^2 - 2 \end{aligned}$$

Das Integral von g drückt den Gewinn aus. Ist $g(t) > 0$ *handelt es sich um die Fläche zwischen g und der t-Achse. Sonst drückt das Intergral den Verlust als mit dem Minuszeichen versehene Flächenmass zwischen der t-Achse und der Kurve aus.*

$$G(t) = -\frac{0.00002}{4}t^4 + \frac{0.0021}{3}t^3 - 2t + C$$

ist eine Stammfunktion von $g(t)$.
Der Gewinn im Zeitraum $[5, 6]$ *ist damit*

$$\begin{aligned} &\int_5^6 \left(-0.00002t^3 + 0.0021t^2 - 2\right) dt \\ &= -\frac{0.00002}{4}t^4 + \frac{0.0021}{3}t^3 - 2t\Big|_5^6 \\ &= -\frac{0.00002}{4}6^4 + \frac{0.0021}{3}6^3 - 2\cdot 6 + C - \left(-\frac{0.00002}{4}5^4 + \frac{0.0021}{3}5^3 - 2\cdot 5 + C\right) \\ &- 1.939\,7 \end{aligned}$$

Damit erfolgt in dieser Periode ein Verlust.
Wir können prüfen, in welcher Periode ein Gewinn erfolgt. Dazu sind die Nullstellen von $g(t)$ *zu berechnen:*
$-0.000\,02t^3 + 0.002\,1t^2 - 2 = 0 \Longrightarrow t_i = 93.581, 38.894, -27.475$
Dabei gilt: $g(50) = -0.000\,02 \cdot 50^3 + 0.002\,1 \cdot 50^2 - 2 = 0.75 > 0$
Entsprechend ist der Gewinn positiv im Zeitraum $]38.894, 93.581[$. *Wir berechnen*

$$\int_{38.894}^{93.581} \left(-0.00002t^3 + 0.0021t^2 - 2\right) dt = 51.09$$

Wir überprüfen, ob bis zum Zeitpunkt 93.581 *überhaupt ein Gewinn erwirtschaftet wurde:*

$$\int_0^{93.581} \left(-0.00002t^3 + 0.0021t^2 - 2\right) dt = 3.046.$$

Damit konnte der Gewinn im Zeitraum $[38.894, 93.581]$ *den Verlust im Intervall* $[0, 38.894]$ *wettmachen. Die Verlust im Zeitraum* $]0, 38.894[$ *betrug:*

$$\int_0^{38.894} \left(-0.00002t^3 + 0.0021t^2 - 2\right) dt = -48.044$$

◊

Bemerkung 15.2.21. *Es gibt weitere Erweiterungen des Integralbegriffs bezüglich beschränkter Intervalle (Riemann-Integral; Lesbesque-Integral und neuere Entwicklungen). Für unsere Zwecke genügt das bisher behandelte. Allerdings werden wir in der Folge noch die Einschränkung auf beschränkte Intervalle fallen lassen (Uneigentliche Integrale).* ◊

Übungen

1. a) Berechnen Sie das Integral der Funktion $f(x) = 0.1x^3 - 3x^2 + 2x + 500$ im Intervall
   (i)$[2, 30]$,
   (ii) $[0, 40]$ und
   (iii) zwischen dem lokalen Maximum und dem lokalen Minimum der Funktion.
   b) führen Sie dieselben Berechnungen für die Fläche zwischen $f(x)$ und der $x-$Achse durch.

2. a) Berechnen Sie die Fläche zwischen $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$ und $g(x) = -3x^2 + 14x - 3$ im Intervall
   (i) $[1, 2.5]$ und
   (ii) zwischen den Schnittpunkten der beiden Funktionen.
   b) Berechnen Sie die entsprechenden Integrale

3. Berechnen Sie die Fläche und das Integral zwischen der Funktion $f(x) = 2x^2 + 3x + 3$ und der x-Achse im Intervall $[2, 10]$.

4. Berechnen Sie die Fläche und das Integral zwischen der Funktion $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4x + 5$ und der x-Achse im Intervall $[-5, -3]$.

5. Berechnen sie die Fläche und das Integral zwischen $y = 3x - 12$ und der x-Achse im Intervall $[1, 12]$

6. Berechnen Sie die Fläche und das Integral zwischen $y = -0.64x^2 + 9.6x - 32$ und der x-Achse im Intervall $[2, 12]$.

7. Berechnen Sie die Fläche und das Integral zwischen $y = 0.38x^2 - 3.5x + 3$ und der x-Achse im Intervall $[5, 12]$.

8. Berechnen Sie die Fläche und das Integral zwischen $f(x) = -0.5x + 4.5$ und $g(x) = -4x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ im Intervall $[-1.3, 1.3]$

9. Berechnen Sie ein Polynom durch die Punkte $(5, 0), (20, 0), (10, -5)$ und berechnen Sie die Fläche und das Integral zwischen dieser Kurve und der $x-$Achse im Intervall $[0, 30]$.

10. Die Fläche zwischen der Kurve $k(t) = iK_0e^{it}$ und der $x-$Achse gebe das Wachstums eine Kapitals an (bei stetiger Zinseszinsverzinsung; $i = 0.02$). Berechnen Sie das Wachstum eines Kapitals von 30′000 SFr. im Zeitraum $[5, 10]$; im Zeitraum $[7.5, 8.333]$.

Lösungen

1. a) $F(x) = \int \left(0.1x^3 - 3x^2 + 2x + 500\right) dx = 0.025\,x^4 - x^3 + x^2 + 500x + C$
   (i) $F(30) - F(2) = 9150 - 996.4 = 8153.6$
   (ii) $F(40) - F(0) = 21600 - 0 = 21600$
   (iii) $\frac{d}{dx}\left(0.1x^3 - 3x^2 + 2x + 500\right) = 0.3x^2 - 6x + 2$
   Maxima und Minima in: $0.3x^2 - 6x + 2 = 0 \Longrightarrow x_1 = 0.339\,08, x_2 = 19.661$
   $F(19.661) - F(0.33908) = 6352.6 - 169.62 = 6183$

   b) Wir berechnen die Nullstellen: $0.1x^3 - 3x^2 + 2x + 500 = 0$. Nur eine reelle Nullstelle in $x_1 = -10.825$, die nicht im Intervall ist. Da die Funktion stetig ist, sind alle Werte im Intervall positiv oder negativ. In $x = 0$ sind sie positiv. Also sind alle Funktionswerte im Intervall positiv. Entsprechend fallen die Flächenberechnungen mit dem Integral zusammen. Die obigen Resultate können übernommen werden.

2. $d(x) = f(x) - g(x) = 2x^2 - 3x + 2 - \left(-3x^2 + 14x - 3\right) = 5x^2 - 17x + 5$
   Die Nullsstellen von $d(x)$ sind die Schnittpunkte von $f(x)$ und $g(x)$:
   $5x^2 - 17x + 5 = 0 \Longrightarrow x_1 = \frac{17}{10} - \frac{3}{10}\sqrt{21} = 0.325\,23$;
   $x_2 = \frac{3}{10}\sqrt{21} + \frac{17}{10} = 3.074\,8$

(i) Da das Intervall $[1, 2.5] \subset [0.32523, 3.0748]$, berechnen wir mit:
$D(x) = \int \left(5x^2 - 17x + 5\right) = \frac{5}{3}x^3 - \frac{17}{2}x^2 + 5x + C$
$D(2.5) - D(1) = \frac{5}{3}2.5^3 - \frac{17}{2}2.5^2 + 5 \cdot 2.5 - \left(\frac{5}{3}1^3 - \frac{17}{2}1^2 + 5 \cdot 1\right) = -12.75$
Die Fläche ist damit 12.75
Dasselbe Resultat würde man erhalten, wenn man die Funktion $f(x)$ und $g(x)$ zuerest getrennt intergriert, dann die Resultate abzählt und den Betrag der Differenz bildet.

(ii) $D(3.0748) - D(0.32523) =$
$\frac{5}{3}3.0748^3 - \frac{17}{2}3.0748^2 + 5 \cdot 3.0748 - \left(\frac{5}{3}0.32523^3 - \frac{17}{2}0.32523^2 + 5 \cdot 0.32523\right)$
$: -17.322$. Damit ist die Fläche 17.322 (s. Abbildung 15.2.11)

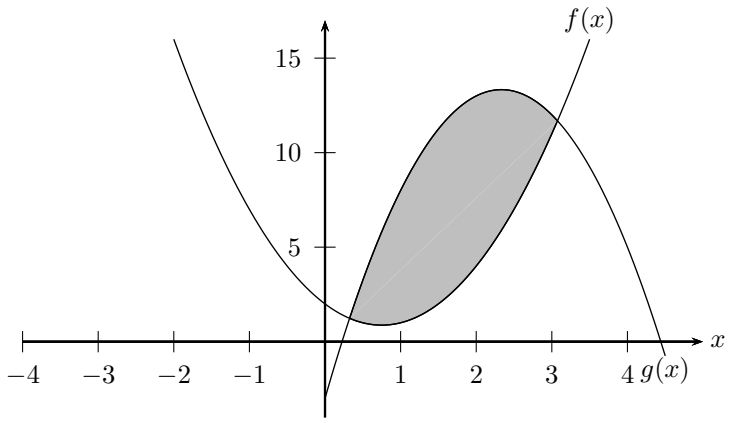


Abbildung 15.2.11: Fläche zwischen den Funktionen $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$ und $g(x) = -3x^2 + 14x - 3$

Fürs Integral erhalten wir, da keine Nullstellen der Differenz in den betrachteten Intervallen vorkommen, -12.75 und -17.322. Würden wir hingegen die Differenz $g(x) - f(x)$ betrachten, würden wir 12.75 und 17.322 erhalten.

3. Wir kontrollieren, ob Nullstellen im Intervall vorkommen: $2x^2 + 3x + 3 = 0$. Es gibt keine reelle Nullstellen. Somit gibt es keine Nullstellen im Intervall $[2, 10]$. Die Fläche und das Intergral werden (bis eventuell auf das Vorzeichen) identisch sein: Wir berechnen
$\int_2^{10} \left(2x^2 + 3x + 3\right) dx = \left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x\right)\Big|_2^{10} =$
$\left(\frac{2}{3} \cdot 10^3 + \frac{3}{2} \cdot 10^2 + 3 \cdot 10\right) - \left(\frac{2}{3} \cdot 2^3 + \frac{3}{2} \cdot 2^2 + 3 \cdot 2\right) = \frac{2488}{3} = 829.33$. Damit sind die Fläche und das Integral identisch.

4. Wir überprüfen das Vorliegen von Nullsstellen:
$3x^3 - 2x^2 + 4x + 5 \Longrightarrow x_1 = -0.716\,83$.
Die Nullstelle liegt nicht im Intervall. Wir berechnen:
$\int_{-5}^{-3} \left(3x^3 - 2x^2 + 4x + 5\right) dx = \left(\frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 5x\right)\Big|_{-5}^{-3} =$
$\left(\frac{3}{4} \cdot (-3)^4 - \frac{2}{3} \cdot (-3)^3 + 2 \cdot (-3)^2 + 5 \cdot (-3)\right) - \left(\frac{3}{4} \cdot (-5)^4 - \frac{2}{3} \cdot (-5)^3 + 2 \cdot (-5)^2 + 5 \cdot (-5)\right) =$
-495.33.
Der Wert des Integrals ist damit -495.33 und die Fläche beträgt 495.33

5. $F(x) = \int (3x - 12)\, dx = \frac{3}{2}x^2 - 12x + C$
Wir überprüfen, ob es im Intervall eine Nullstelle hat. $3x - 12 = 0 \Longrightarrow x = 4$
Es hat im Intervall eine Nullstelle. Somit müssen wir die Fläche intervallweise berechnen.
$\int_1^4 (3x - 12)\, dx = F(4) - F(1) =$

$\frac{3}{2}\cdot 4^2-12\cdot 4+C-\left(\frac{3}{2}\cdot 1^2-12\cdot 1+C\right)=-\frac{27}{2}$ und
$\int_4^{12}(3x-12)\,dx=F(12)-F(4)=$
$\frac{3}{2}\cdot 12^2-12\cdot 12+C-\left(\frac{3}{2}\cdot 4^2-12\cdot 4+C\right)=96$
Die Fläche ist: $\left|-\frac{27}{2}\right|+96=\frac{219}{2}=109.5$
Das bestimmte Integral der Funktion für dieses Intervall ist hingegen:
$\int_1^{12}(3x-12)\,dx=\frac{3}{2}\cdot 12^2-12\cdot 12+C-\left(\frac{3}{2}\cdot 1^2-12\cdot 1+C\right)=\frac{165}{2}=82.5$

6. $F(x)=\int\left(-0.64x^2+9.6x-32\right)dx=-0.213\,33x^3+4.8x^2-32x+C$
Wir überprüfen, ob es Nullstellen im Intervall hat.
$-0.64x^2+9.6x-32=0\Longrightarrow x_1=5;x_2=10.$
Es hat zwei Nullstellen. Wir müssen die Fläche intervallweise berechnen:
$\int_{10}^{12}\left(-0.64x^2+9.6x-32\right)dx=F(12)-F(10)=$
$-0.213\,33\cdot 12^3+4.8\cdot 12^2-32\cdot 12+C-$
$\left(-0.213\,33\cdot 10^3+4.8\cdot 10^2-32\cdot 10+C\right)=-8.104\,2$

$\int_5^{10}\left(-0.64x^2+9.6x-32\right)dx=F(10)-F(5)=13.333$

$\int_2^{5}\left(-0.64x^2+9.6x-32\right)dx=F(5)-F(2)=-20.16$

Wir erhalten: $|-8.104\,2|+13.333+|-20.16|=41.597$
Das Integral hingegen nimmt hingegen den folgenden Wert an:
$-0.213\,33\cdot 12^3+4.8\cdot 12^2-32\cdot 12+C-\left(-0.213\,33\cdot 2^3+4.8\cdot 2^2-32\cdot 2+C\right)=-14.928$

7. Nullstellen: $0.38x^2-3.5x+3=0\Longrightarrow x_1=0.956\,47,x_2=8.254\,1$
$F(x)=\int\left(0.38x^2-3.5x+3\right)dx=0.126\,67x^3-1.75x^2+3x$

$\int_{8.2541}^{12}\left(0.38x^2-3.5x+3\right)dx=F(12)-F(8.2541)=26.114$

$\int_{5}^{8.2541}\left(0.38x^2-3.5x+3\right)=-10.317$

Die Fläche ist: $26.114+|-10.317|=36.431$
Das Integral ist hingegen: $\int_5^{12}\left(0.38x^2-3.5x+3\right)dx=15.797$

8. Die Schnittpunkte der beiden Funktionen:
$-0.5x+4.5=-4x^3+2x^2+3x+4$
$x_1=-0.796\,18,x_2=0.135\,23,x_3=1.160\,9$
liegen im Intervall. Die Differenz der beiden Funktionen ist
$d(x)=-0.5x+4.5-\left(-4x^3+2x^2+3x+4\right)=4x^3-2x^2-3.5x+0.5$
$\int\left(4x^3-2x^2-3.5x+0.5\right)dx=x^4-0.666\,67x^3-1.75x^2+0.5x+C$
Für die Fläche müssen wir deshalb rechnen:

(a) $\int_{-1.3}^{-0.79618}\left(4x^3-2x^2-3.5x+0.5\right)dx=-1.482\,4$
$\int_{-0.79618}^{0.13523}\left(4x^3-2x^2-3.5x+0.5\right)dx=0.803\,42$
$\int_{0.13523}^{1.1609}\left(4x^3-2x^2-3.5x+0.5\right)dx=-1.039\,1$
$\int_{1.1609}^{1.3}\left(4x^3-2x^2-3.5x+0.5\right)dx=8.869\,5\times 10^{-2}$
Die Summe der Beträge ist damit:
$1.482\,4+0.803\,42+1.039\,1+8.869\,5\times 10^{-2}=3.413\,6$

(s. Abbildung 15.2.12)

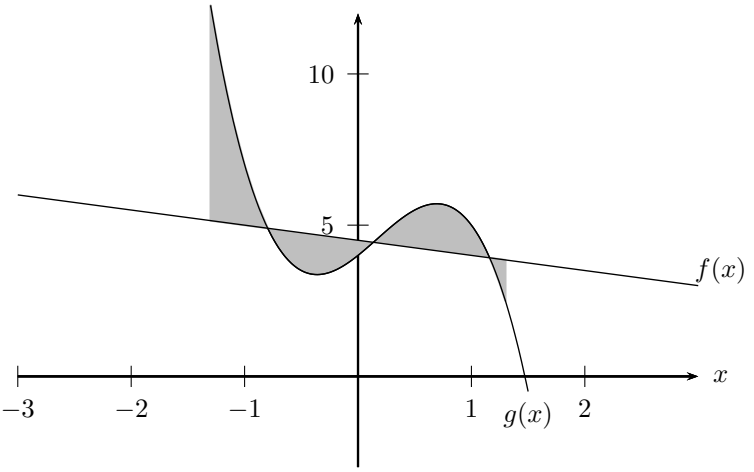


Abbildung 15.2.12: Fläche zwischen den Funktionen $f(x) = -0.5x + 4.5$ und $g(x) = -4x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ im Intervall $[-1.3, 1.3]$

Das Integral ist demgegenüber: $\int_{-1.3}^{1.3} \left(4x^3 - 2x^2 - 3.5x + 0.5\right) dx = -1.\,629\,3$

9.

$$\begin{aligned} 0 &= 25a + 5b + c \\ 0 &= 400a + 20b + c \\ -5 &= 100a + 10b + c \end{aligned}$$

Lösung: $a = \frac{1}{10}, b = -\frac{5}{2}, c = 10$
$f(x) = \frac{1}{10}x^2 - \frac{5}{2}x + 10$
Wir untersuchen, ob es Nullstellen hat:
$\frac{1}{10}x^2 - \frac{5}{2}x + 10 = 0 \Longrightarrow$ Nullstellen $x_1 = 5, x_2 = 20$
Die zwei Nullstellen sind im fraglichen Intervall $[0, 30]$.
$F(x) = \int \left(\frac{1}{10}x^2 - \frac{5}{2}x + 10\right) dx = \frac{1}{30}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + 10x + C$
(a) $\int_0^5 \left(\frac{1}{10}x^2 - \frac{5}{2}x + 10\right) dx = F(5) - F(0) = 22.\,917$
(b) $\int_5^{20} \left(\frac{1}{10}x^2 - \frac{5}{2}x + 10\right) dx = F(20) - F(5) = -56.\,25$
(c) $\int_{20}^{30} \left(\frac{1}{10}x^2 - \frac{5}{2}x + 10\right) dx = F(30) - F(20) = 108.33$

Die Fläche ist: $22.\,917 + 56.\,25 + 108.33 = 187.\,50$
Das Integral ist demgegenüber $\int_0^{30} \left(\frac{1}{10}x^2 - \frac{5}{2}x + 10\right) dx = 75$

10. $\int iK_0 e^{it} dt = K_0 e^{it} + C$
$\int_5^{10} 0.02 \cdot 30000 e^{0.02t} dt = 30000 e^{0.02t}\big|_5^{10} = 30000 e^{0.02 \cdot 10} - 30000 e^{0.02 \cdot 5} = 3487$
$\int_{7.5}^{8.333} 0.02 \cdot 30000 e^{0.02t} dt = 30000 e^{0.02t}\big|_{7.5}^{8.333} = 30000 e^{0.02 \cdot 8.333} - 30000 e^{0.02 \cdot 7.5} = 585.\,55$

15.2.5 Ein ökonomisches Beispiel: die Konsumenten- und Produzentenrente

Sei für ein spezifisches Produkt die folgende Preis-Nachfragefunktion

$$p(x) = 10 \cdot e^{-0.5x}$$

gegeben. Die Gleichgewichtsmenge befinde sich in $x_0 = 2$. Damit ist der Gleichgewichtspreis

$$p(2) = 10 \cdot e^{-0.5 \cdot 2} = 3.6788.$$

Es gibt nun Personen, die das Gut zu einem höheren Preis gekauft hätten, wir nehmen mal an zu einem Preis von 6. Zu diesem Preis wird eine Menge von $6 = 10 \cdot e^{-0.5x} \Longrightarrow x = 1.0217$ gekauft. Der zusätzlich Erlös, der daraus resultiert, ist $(6 - 3.6788) \cdot 1.0217 = 2.3716$ (s. Abbildung 15.2.13).

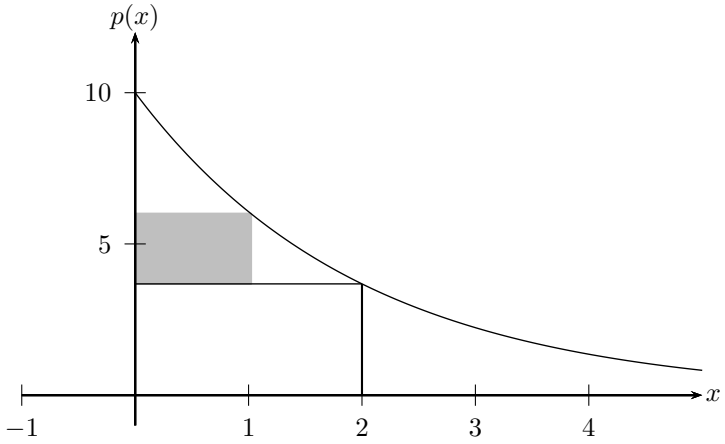


Abbildung 15.2.13: Bei einem Preis von 6 erfolgt ein zusätzlicher Erlös von $(6 - 3.6788) \cdot 1.021$ (graue Fläche), der von den Konsumenten, die bereit sind, einen Preis von 6 zu bezahlen, beim Kauf zum Marktpreis gespart wird.

Die Personen, die statt 6 nur 3.6788 zahlen, profitieren in einem gewissen Sinne von der Marktsituation, die dazu führt, dass sich die Preis-Nachfrage-Funktion und die Preis-Angebotsfunktion bei einem tieferen Preis schneiden, als sie zu zahlen bereit wären. Man nennt die gesamte Ersparnis dieser Personen deren „Konsumentenrente“. Für die verschiedenen Personen, die mehr zu zahlen bereit gewesen wären, variiert dieser Preis. Wir können, statt einem zusätzlichen Preis, zwei weitere oder n weitere Preise betrachten. Bei einem Preis von 7 (gekaufte Menge 0.71335) und 6 und 4.5 (gekaufte Menge 1.597) ergibt sich der folgende Erlös, der von den Konsumenten beim Bezahlen zum Marktpreis gespart wird (graue Fläche in Abbildung 15.2.14):

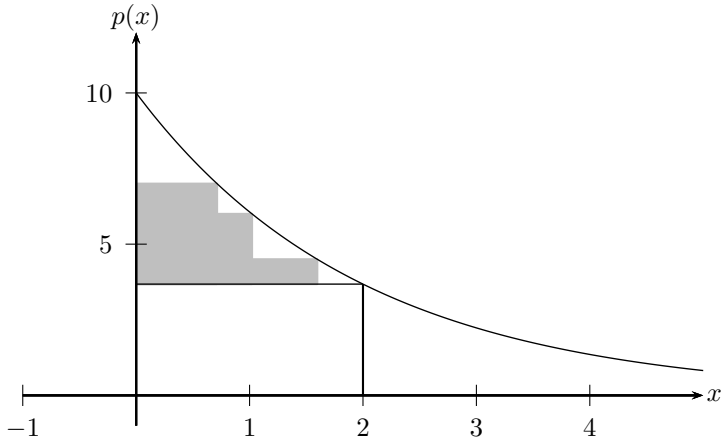


Abbildung 15.2.14: Konsumentenrente bei Preisen von $7,6$ und 4.5

Lassen wir die Anzahl der möglichen Preise, für welche es Konsumenten gibt, die sie zu zahlen bereit wären, gegen Unendlich gehen, erhalten wir als „Konsumentenrente“ die Fläche zwischen dem faktischen Preis (= konstante Funktion) und der Preis-Nachfrage-Funktion im Intervall $[0, 2]$ (s. Abbildung 15.2.15):

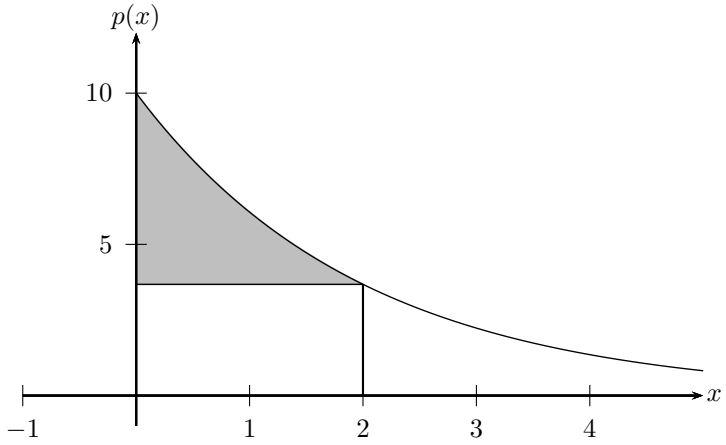


Abbildung 15.2.15: Konsumentenrente als Fläche zwischen den Funktionen $p(x) = 10e^{-0.5x}$ und dem Gleichgewichtspreis 3.6788 (Gerade) im Intervall $[0, 2]$

Die Überlegung zur Konsumentenrente haben auch einen praktischen Aspekt: die Produzenten versuchen den Markt aufzugliedern (z.B. indem das selbe Produkt als Marken- und Nichtmarken-Artikel verkauft wird oder indem länderspezifische Preise festgelegt werden), um die Konsumentenrente möglichst abzuschöpfen.

Konkret berechnen wir die Konsumentenrente als Differenz: wir ziehen von der Fläche zwischen $p(x)$ und der x-Achse die Fläche zwischen der Konstanten „Gleichgewichtspreis“ und der x-Achse ab. Die Berechnung kann in drei Varianten erfolgen:

1. Berechnung der Fläche zwischen der $p(x)$ und der x-Achse:

$$\begin{aligned}\int_0^2 \left(10 \cdot e^{-0.5x}\right) dx &= -20e^{-0.5x}\Big|_0^2 \\ &= -20e^{-0.5\cdot 2} - \left[-20e^{-0.5\cdot 0}\right] \\ &= 12.642\end{aligned}$$

   Berechnung der Fläche zwischen Gleichgewichtspreis $p = 3.6788$ und der $x-$Achse:

$$\int_0^2 3.6788 dx = 3.6788x + C$$

$$G(2) - G(0) = (3.6788 \cdot 2) - (3.6788 \cdot 0) = 7.3576$$

   Berechnung der Differenz: $12.642 - 7.3576 = 5.2844$

2. Da die Fläche zwischen Marktpreis und x-Achse ein Rechteck ist, können wir statt des zweiten Intergrals auch Gleichgewichtsmenge*Gleichgewichtspreis rechnen. Im Beispiel: $2 \cdot 3.6788 = 7.3576$.

3. Wir berechnen die Differenz der beiden Funktionen und dann das Intergral dieser Differenz:

$$\begin{aligned}\int_0^2 \left(10 \cdot e^{-0.5x} - 3.6788\right) dx &= -20e^{-0.5x} - 3.6788x\Big|_0^2 \\ &= -20e^{-0.5\cdot 2} - 3.6788 \cdot 2 - \left(-20e^{-0.5\cdot 0} - 3.6788 \cdot 0\right) \\ &= -20e^{-0.5\cdot 2} - 3.6788 \cdot 2 + 20 \\ &= 5.2848\end{aligned}$$

   Diese dritte Variante ist mit der ersten sehr verwandt, da gilt.

$$\int_0^2 \left(10 \cdot e^{-0.5x}\right) dx - \int_0^2 3.6788 dx = \int_0^2 \left(10 \cdot e^{-0.5x} - 3.6788\right) dx$$

Übungen

1. Sei

$$p_N(x) = 18 - 0.1x^2$$

   eine Preis-Nachfragefunktion und

$$p_A(x) = 5x + 2$$

   eine Preis-Angebotsfunktion. Bestimmen Sie die Konsumentenrente für das Marktgleichgewicht.

2. Auf Grund von zur Konsumentenrente analogen Überlegungen kann man auch von der Produzentenrente sprechen: es gibt Produzenten, die ihr Produkt auch zu einem tieferen Preis anbieten würden. Diese Produzenten profitieren von der Marktsituation. Für jeden Produzenten gibt es einen anderen Preis, zu dem er sein Produkt gerade noch verkaufen würde (s. Abbildung 15.2.16).

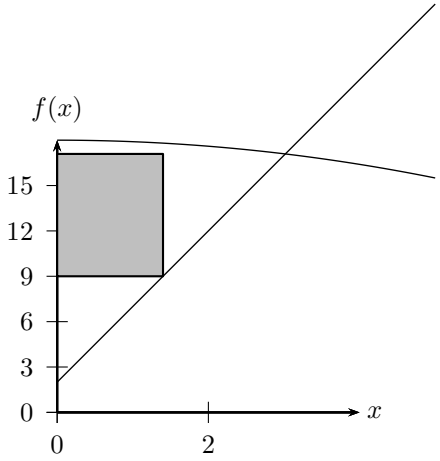


Abbildung 15.2.16: Beispiel zur die Produzentenrente eines Produzenten, der zu einem Preis von 9 Franken zu verkaufen bereit ist (eine Menge von 1.4)

Der Gesamterlös, der von den Produzenten derart zusätzlich erzielt wird, heisst „Produzentenrente“. Berechnen Sie die Produzentenrente für die Übung 1.

3. Berechnen Sie für die folgenden Preisnachfrage- und Preisangebotsfunktionen

$$p_N(x) = -5x + 500$$
$$p_A(x) = 6x$$

die Konsumenten- und die Produzentenrente.

4. Berechnen Sie die Produzentenrente: $p_A(x) = 4x + 2$. Gleichgewichtspreis: 5

5. Eine Unternehmung möchte den Markt in zwei Marktsegmente aufteilen (Luxussektor und Rest), um möglichst viel von der Konsumentenrente abzuschöpfen. Da die Marktaufteilung kostet, beschränkt man sich auf 2 Segmente. Bei welchem Preis für den Luxussektor ist die Produzentenrente maximal im Beispiel $p\,(x) = 10e^{-0.5x}$ mit Geichgewichtsmenge 2?

Lösungen

1. (auf jeweils drei oder vier Stellen genau gerechnet):
Gleichgewichtsmenge:

$$18 - 0.1x^2 = 5x + 2$$
$$-0.1x^2 - 5x + 16 = 0$$

Lösungsmenge: $\{3.017\,9, -53.018\}$
Ökonomisch sinnvolle Lösung: 3.0179
Gleichgewichtspreis: $5 \cdot 3.0179 + 2 = 17.090$
Konsumentenrente: $\int_0^{3.0179} \left(18 - 0.1x^2\right) dx - \int_0^{3.0179} 17.09 dx = \int_0^{3.0179} \left(18 - 0.1x^2 - 17.09\right) dx =$
$\int_0^{3.0179} \left(0.91 - 0.1x^2\right) dx = 0.91x - \frac{0.1}{3}x^3\big|_0^{3.0179} =$
$0.91 \cdot 3.0179 - \frac{0.1}{3} \cdot 3.0179^3 = 1.830\,1$
oder mit Berechnung mittels Abzug von Viereck:
$\int_0^{3.0179} \left(18 - 0.1x^2\right) dx = 18x - \frac{0.1}{3}x^3\big|_0^{3.0179} = 18 \cdot 3.0179 - \frac{0.1}{3} \cdot 3.0179^3 = 53.406$
Rechteck: $3.0179 \cdot 17.09 = 51.576$
Differenz: $53.406 - 51.576 = 1.83$ (s. Abbildung 15.2.17)

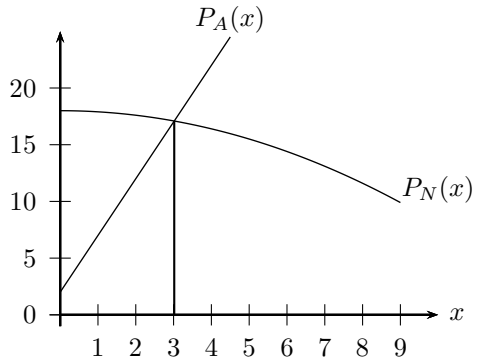


Abbildung 15.2.17: Graphik zur Berechnung der Konsumentenrente

2. Man muss die Fläche zwischen $p = 17.098$ und der Kurve $p_A(x) = 5x + 2$ im Intervall $[0, 3.0179]$ berechnen.
   $\int (5x + 2)\,dx = \frac{5}{2}x^2 + 2x + C =: F(x)$
   $\int (17.098)\,dx = 17.098x + C =: G(x)$
   $[G(3.0179) - G(0)] - [F(3.0179) - F(0)] =$
   $(17.098 \cdot 3.0179) - \left(\frac{5}{2} \cdot 3.0179^2 + 2 \cdot 3.0179\right) = 22.795$
   Variante:

$$\begin{aligned}\int_0^{3.0179} (17.098 - (5x + 2))\,dx &= \int_0^{3.0179} (15.098 - 5x)\,dx \\ &= 15.098x - 2.5x^2\Big|_0^{3.0179} \\ &= 22.795\end{aligned}$$

   (s. Abbildung 15.2.18)

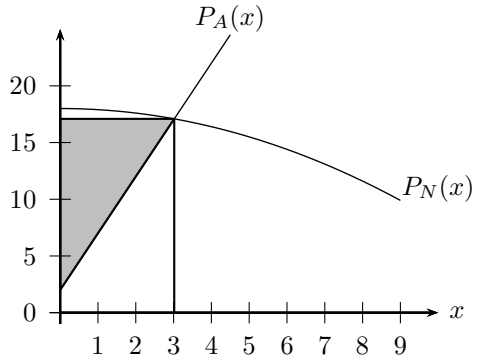


Abbildung 15.2.18: Graphik zur Berechnung der Produzentenrente

3. Gleichgewichtsmenge: $-5x + 500 = 6x \Longrightarrow x = \frac{500}{11} = 45.455$
   Gleichgewichtspreis: $p(\frac{500}{11}) = 6\left(\frac{500}{11}\right) = \frac{3000}{11} = 272.73$
   Konsumentenrente: $\int_0^{45.455} (-5x + 500)\,dx = -2.5x^2 + 500x\Big|_0^{45.455} = 17562.$
   $\int_0^{45.455} 272.73dx = 12397.$
   Differenz: $17562 - 12397 = 5165$
   oder: $\int_0^{45.455} (-5x + 500 - 272.73)\,dx = 5165$
   Produzentenrente: $\int_0^{45.455} (272.73 - 6x)\,dx = 6198.47107$ (s. Abbildung 15.2.19)

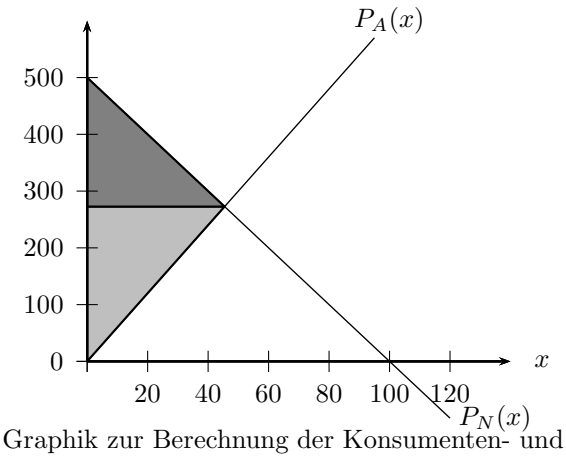


Abbildung 15.2.19: Graphik zur Berechnung der Konsumenten- und Produzentenrente

4. $5 = 4x + 2 \Longrightarrow x = \frac{3}{4} = 0.75$ (Gleichgewichtsmenge)
   Produzentenrente: $\int_0^{0.75} (5 - (4x + 2))\, dx = 1.125$

5. Es geht darum, x_1 so zu bestimmen, dass das Rechteck $(p(x_1) - 3.6788)\, x_1 = x_1 10e^{-0.5x_1} - 3.6788x_1$ maximal wird (s. Abbildung 15.2.20)

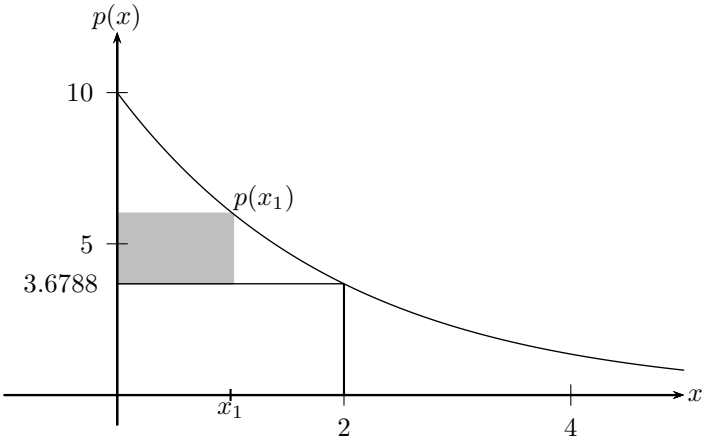


Abbildung 15.2.20: Die graue Fläche soll maximiert werden

Ableiten: $\frac{d}{dx}\left(x10e^{-0.5x} - 3.6788x\right) = 10e^{-0.5x} - 5xe^{-0.5x} - 3.6788$ und Nullsetzen
$10e^{-0.5x} - 5xe^{-0.5x} - 3.6788 = 0$; Lösung: 0.8657123 (Menge).
(Berechnung mit uniroot von R; Funktionsdefintion: f=function(x) 10*exp(-0.5*x)-5*x*exp(-0.5*x)-3.6788
Graphik, um Intervall mit Nullstelle festlegen zu können: plot(f,xlim=c(0,5))
Nullstelle berechnen: uniroot(f,c(0,4)))
Für Luxus-Segment festzulegender Preis $10e^{-0.5 \cdot 0.8657123} = 6.4865$). Überprüfung, dass dort Maximum: $\frac{d}{dx}\left(10e^{-0.5x} - 5xe^{-0.5x} - 3.6788\right) = e^{-0.5x}2.5x - e^{-0.5x}10$
$e^{-0.5 \cdot 0.8657123}2.5 \cdot 0.8657123 - e^{-0.5 \cdot 0.8657123}10 = -5.0827 < 0$ (also Maximum)

15.2.6 Partielle Integration

Die Partielle Integration ist eine oft verwendete Integrationsregel.

Satz 15.2.22. *Sei I ein Intervall mit den Grenzen $c, d \in \mathbb{R}$, so dass $c \neq d$. Seien F und G differenzierbar auf I mit stetigen Ableitungen f und g. Dann gilt für alle $a, b \in I$:*

$$\int_a^b g(x)F(x)dx = G(x)F(x)\Big|_a^b - \int_a^b G(x)f(x)dx$$

Beweis. $\frac{d}{dx}(G(x)F(x)) = g(x)F(x) + G(x)f(x)$.
$G(x)F(x)$ ist somit eine Stammfunktion von $g(x)F(x) + G(x)f(x)$.
Somit ist

$$\begin{aligned}\int_a^b [g(x)F(x) + G(x)f(x)]\,dx &= \int_a^b g(x)F(x) + \int_a^b G(x)f(x)dx \\ &= G(x)F(x)\Big|_a^b\end{aligned}$$

Daraus folgt durch Subtraktion:

$$\int_a^b g(x)F(x)dx = G(x)F(x)\Big|_a^b - \int_a^b G(x)f(x)dx$$

□

Anwendungsbeispiele:

Beispiel 15.2.23.

$$\begin{aligned}\int_2^5 [(5x)\cdot x]\,dx &= \frac{5x^2}{2}x\Big|_2^5 - \int_2^5 \frac{5x^2}{2}dx = \frac{5x^3}{2}\Big|_2^5 - \frac{5x^3}{2\cdot 3}\Big|_2^5 \\ &= \frac{5\cdot 5^3}{2} - \frac{5\cdot 2^3}{2} - \left(\frac{5\cdot 5^3}{2\cdot 3} - \frac{5\cdot 2^3}{2\cdot 3}\right) \\ &= 195\end{aligned}$$

Im konkreten Fall hätten wir das Resultat auch billiger haben können:

$$\begin{aligned}\int_2^5 [(5x)\cdot x]\,dx &= \int_2^5 5x^2dx \\ &= \frac{5x^3}{3}\Big|_2^5 \\ &= \frac{5\cdot 5^3}{3} - \frac{5\cdot 2^3}{3} \\ &= 195.\end{aligned}$$

Darum kommen nun interessantere Beispiele: ◊

Beispiel 15.2.24.

$$\begin{aligned}\int_2^5 (e^x x)\,dx &= e^x x\Big|_2^5 - \int_2^5 e^x dx \\ &= e^x x\Big|_2^5 - e^x\Big|_2^5 \\ &= e^5 5 - e^2 2 - \left(e^5 - e^2\right) \\ &= 586.26\end{aligned}$$

Der Definitionsbereich der Funktion ist $\mathbb{R}$. ◊

Beispiel 15.2.25.

$$\begin{aligned}\int_1^d \ln x dx &= \int_1^d (1 \cdot \ln x)\,dx \\ &= x\ln x\Big|_1^d - \int_1^d x\frac{1}{x}dx \\ &= d\ln d - \ln 1 - \int_1^d 1dx \\ &= d\ln d - x\Big|_1^d \\ &= d\ln d - d + 1\end{aligned}$$

Somit wäre z.B.

$$\int_1^5 \ln x dx = 5\ln 5 - 5 + 1 = 4.0472$$

Der Definitionsbereich der Funktion $x > 0$. ◊

Beispiel 15.2.26. *Der Definitionsbereich der Funktion* $x > 0$.

$$\begin{aligned}\int_2^8 x\ln\left(x^2\right)dx &= \frac{x^2}{2}\ln\left(x^2\right)\Big|_2^8 - \int_2^8 \left(\frac{x^2}{2}\frac{1}{x^2}2x\right)dx \\ &= \frac{8^2}{2}\ln\left(8^2\right) - \frac{2^2}{2}\ln\left(2^2\right) - \int_2^8 x dx \\ &= 130.31 - \frac{x^2}{2}\Big|_2^8 \\ &= 130.31 - \left(\frac{8^2}{2} - \frac{2^2}{2}\right) = 100.31\end{aligned}$$

◊

Beispiel 15.2.27. *Der Definitionsbereich der Funktion* $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\int_3^4 xe^{2x}dx &= x\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_3^4 - \int_3^4 \frac{1}{2}e^{2x}dx \\ &= \frac{4}{2}e^{2\cdot 4} - \frac{3}{2}e^{2\cdot 3} - \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_3^4 \\ &= \frac{4}{2}e^{2\cdot 4} - \frac{3}{2}e^{2\cdot 3} - \left(\frac{1}{4}e^{2\cdot 4} - \frac{1}{4}e^{2\cdot 3}\right) \\ &= 4712.\,4\end{aligned}$$

◊

Beispiel 15.2.28.

$$\begin{aligned}\int_4^5 \frac{2x}{e^x}dx &= -2xe^{-x}\big|_4^5 - \int_4^5 -2e^{-x}dx \\ &= -2\cdot 5e^{-5} - \left(-2\cdot 4e^{-4}\right) - 2e^{-x}\big|_4^5 \\ &= -2\cdot 5e^{-5} - \left(-2\cdot 4e^{-4}\right) - \left(2e^{-5} - 2e^{-4}\right) \\ &= 0.102\,3\end{aligned}$$

◊

Beispiel 15.2.29.

$$\begin{aligned}\int_0^d \left(\lambda e^{-\lambda x}x\right)dx &= -e^{-\lambda x}x\,\Big|_0^d - \int_0^d \left(-e^{-\lambda x}\right)\cdot 1dx \\ &= -e^{-\lambda d}d - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\,\Big|_0^d \\ &= -e^{-\lambda d}d - \frac{e^{-\lambda d}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\end{aligned}$$

Definitionsbereich: $x \geq 0$, $\lambda > 0$. ◊

15.2.7 Substitutionsregel

Auch die Substitionsregel stellt eine Integrationsregel dar.

Definition 15.2.30. *Eine Funktion ist stetig differenzierbar genau dann, wenn sie ableitbar ist und die Ableitung stetig ist.* ◊

Satz 15.2.31. *Sei* I *eine Intervall mit den Grenze* $c, d \in \mathbb{R}$, *so das* $c \neq d$. *Sei* J *ein Intervall mit den Grenzen* $e, h \in \mathbb{R}$, *so dass* $e \neq h$. *Seien* $f : I \to \mathbb{R}$ *stetig und* $g : J \to I$ *stetig differenzierbar auf* J. *Sei* $Bild(J) \subset I$. *Dann gilt:*

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)dt$$

Beweis. Sei $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$. Damit ist F eine Stammfunktion von f und es gilt:

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = F(g(d)) - F(g(c))$$

Gemäss Kettenregel gilt $\frac{d}{dt}F(g(t)) = f(g(t))g'(t)$. Damit ist $F(g(t))$ eine Stammfunktion von $f(g(t))g'(t)$ und es gilt:

$$\int_{c}^{d} f(g(t))g'(t)dt = F(g(d)) - F(g(c))$$

Damit gilt

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = \int_{c}^{d} f(g(t))g'(t)dt$$

□

Eine manchmal nützliche Variante der Substitutionsregel besteht im Satz:

Satz 15.2.32. *Sei I eine Intervall mit den Grenze $c, d \in \mathbb{R}$, so das $c \neq d$. Sei J ein Intervall mit den Grenzen $e, h \in \mathbb{R}$, so dass $e \neq h$. Seien $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $g : J \to I$ stetig differenzierbar auf J. Sei $g(J) = I$. Dann gilt:Wenn g eine injektive (und damit umkehrbare) Abbildung ist, gilt:*

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t)dt$$

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum vorangegangenen: Sei $F'(x) = f(x)$. $F(g(t))$ ist eine Stammfunktion von $f(g(t)g'(t)$.
Somit ist dann

$$\begin{aligned}\int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t)dt &= F(g(g^{-1}(b)) - F(g(g^{-1}(a)) \\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

Da $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist gilt:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Damit gilt:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t)dt.$$

□

Die Anwendung der Substitutionsregel ist bedeutend schwieriger als der Nachvollzug des einfachen Beweises. Darum folgen ein paar Beispiele. Wir betrachten zuerst Beispiele der ersten Variante der Regel.

Beispiel 15.2.33. $\int_1^5 2x\sqrt{1+x^2}dx$ *(Definitionsbereich* $1+x^2 \geq 0$*, also* $\mathbb{R}$*)*
Wir setzen $f(x) = \sqrt{x}$ *und* $x = g(t) = 1+t^2$*, d.h.* $f(g(t)) = \sqrt{1+t^2}$*. Es gilt* $g'(t) = 2t$*. Damit gilt* $f(g(t)) \cdot g'(t) = 2t\sqrt{1+t^2}$.
Laut Substitionsregel gilt damit:

$$\int_{g(1)}^{g(5)} \sqrt{x}dx = \int_1^5 2t\sqrt{1+t^2}dt$$

Wobei $g(5) = 1+5^2 = 26$ *und* $g(1) = 1+1 = 2$:

$$\begin{aligned}\int_2^{26} \sqrt{x}dx = \int_2^{26} x^{\frac{1}{2}}dx &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_2^{26} = \frac{2}{3}(26)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(2)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{52}{3}\sqrt{26} - \frac{4}{3}\sqrt{2} \\ &= 86.497\end{aligned}$$

◊

Beispiel 15.2.34. $\int_3^7 \sqrt{x-1}dx$ *(Definitionsbereich* $x-1 \geq 0 : [1,\infty[$*)*
Wir setzen: $f(x) := \sqrt{x}$ *und* $x = g(t) := t-1$*. Damit ist* $f(g(t)) = \sqrt{t-1}$ *und* $g'(t) = 1$*. Damit ist* $f(g(t)) \cdot g'(t) = \sqrt{t-1} \cdot 1 = \sqrt{t-1}$.
Wir erhalten somit mit der Substitutionsregel:

$$\int_{g(3)}^{g(7)} \sqrt{x}dx = \int_3^7 \sqrt{t-1}dt$$

und damit mit $g(3) = 3-1 = 2$ *und* $g(7) = 7-1 = 6$:

$$\begin{aligned}\int_2^6 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_2^6 &= \frac{2}{3}6^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}2^{\frac{3}{2}} \\ &= 4\sqrt{6} - \frac{4}{3}\sqrt{2} \\ &= 7.912\,3\end{aligned}$$

◊

Beispiel 15.2.35. $\int_{-3}^2 (x+4)^2dx$ *(Definitionsbereich* $\mathbb{R}$*)*
Wir setzen $f(x) = x^2$ *und* $g(t) = t+4$*. Damit* $f(g(t)) \cdot g'(t) = (t+4)^2 \cdot 1$
Laut Substutionsregel gilt damit

$$\int_{g(-3)}^{g(2)} x^2dx = \int_{-3}^2 (t+4)^2dt$$

Da $g(2) = 2 + 4 = 6$ *und* $g(-3) = -3 + 4 = 1$ *erhält man:*

$$\begin{aligned}\int_1^6 x^2 dx &= \frac{1}{3}x^3\Big|_1^6 \\ &= \frac{1}{3}6^3 - \frac{1}{3}1^3 \\ &\quad 71.667\end{aligned}$$

◊

Beispiel 15.2.36. $\int_{1.5}^{2} \frac{x^3+x}{x^4+2x^2} dx$ *(Definitionsbereich* $x^4 + 2x^2 \neq 0 : \mathbb{R}\backslash\{0\}$*)*
Wir setzen: $f(x) = \frac{1}{x}$ *und* $x = g(t) = t^4 + 2t^2$*. Damit gilt*

$$f(g(t)) = \frac{1}{t^4 + 2t^2}$$

und

$$g'(t) = 4t^3 + 4t = 4(t^3 + t).$$

Entsprechend ist

$$f(g(t)) \cdot g'(t) = \frac{4(t^3 + t)}{(t^4 + 2t^2)}.$$

Um die obige Formel zu haben, müssten wir noch durch 4 teilen und erhalten:

$$\frac{1}{4} f(g(t)) \cdot g'(t) = \frac{(t^3 + t)}{(t^4 + 2t^2)}.$$

Entsprechend gilt laut der Substitutionsregel:

$$\int_{g(1.5)}^{g(2)} \frac{1}{4x} dx = \int_{1.5}^{2} \frac{t^3 + t}{(t^4 + 2t^2)} dt$$

Mit $g(2) = (2)^4 + 2(2)^2 = 24; g(1.5) = (1.5)^4 + 2(1.5)^2 = 9.562\,5$ *erhalten wir:*

$$\begin{aligned}\int_{g(1.5)}^{g(2)} \frac{1}{4x} dx &= \frac{1}{4} \int_{9.5625}^{24} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{4} \ln x \Big|_{9.5625}^{24} \\ &= \frac{1}{4} (\ln 24 - \ln 9.5625) \\ &= 0.230\,05\end{aligned}$$

◊

Beispiel 15.2.37. $\int_0^1 (3x^2 - 3x^2 e^{-x^3}) dx = 0.367\,88$ *(Definitionsbereich* $\mathbb{R}$*)*
Zuerst vereinfachen wir:

$$\int_0^1 (3x^2 - \left(3x^2 e^{-x^3}\right)) dx = \int_0^1 3x^2 dx - \int_0^1 \left(3x^2 e^{-x^3}\right) dx$$

Und berechnen die einfachere Hälfte:

$$\int_0^1 3x^2 dx = x^3\big|_0^1 = 1$$

Für die Berechnung der zweiten Hälfte setzen wir:
$f(x) = e^x$ *und* $x = g(t) = -t^3$. *Damit gilt:* $f(g(t))g'(t) = -3t^2 e^{-t^3}$
Somit gilt laut Substitutionsregel:

$$-\int_{g(0)}^{g(1)} e^x dx = \int_0^1 e^{-t^3} \cdot 3t^2 dt$$

Mit $g(1) = -1$ *und* $g(0) = 0$ *erhalten wir:*

$$\begin{aligned} -\int_{g(0)}^{g(1)} e^x dx = -\int_0^{-1} e^x dx &= -e^x \Big|_0^{-1} \\ &= -\left(e^{-1} - e^0\right) \\ &= -\frac{1}{e} + 1 \end{aligned}$$

Wir fassen die beiden Ergebnisse zusammen:

$$\begin{aligned} \int_0^1 3t^2 dt - \int_0^1 \left(3t^2 e^{-t^3}\right) dt &= 1 + \frac{1}{e} - 1 \\ &= \frac{1}{e} = 0.367\,88 \end{aligned}$$

◊

Als nächstes noch ein Beispiel für die zweite Fassung der Regel:

Beispiel 15.2.38. $\int_1^2 \ln x dx$ *(Definitionsbereich* $x > 0$*)*
Wir setzen: $x = g(t) = e^t$. *Diese Funktion ist injektiv und damit umkehrbar. Die Umkehrfunktion von* e^t *ist* $\ln t$. *Wir erhalten somit (da* $\ln(e^t) = t$ *und* $\frac{d}{dt}e^t = e^t$*):*

$$\begin{aligned} \int_1^2 \ln x dx &= \int_{g^{-1}(1)}^{g^{-1}(2)} \ln(e^t) e^t dt \\ &= \int_{\ln 1}^{\ln 2} t e^t dt \end{aligned}$$

Mit Hilfe partieller Integration erhalten wir:

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2} te^t dt &= e^t t\big|_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} e^t \cdot 1 dt \\ &= e^t t\big|_0^{\ln 2} - e^t\big|_0^{\ln 2} \\ &= e^{\ln 2}\ln 2 - 0 - \left(e^{\ln 2} - e^0\right) \\ &= 2\ln 2 - (2-1) \\ &= 2\ln 2 - 1 = 0.386\,29\end{aligned}$$

(s. Beispiel 15.2.25 für einen alternativen Lösungsweg) ◊

Bemerkung 15.2.39. *Die Integrationsgrenzen müssen innerhalb eines Intervalls liegen, das zum Definitionsbereich gehört.* ◊

15.2.8 Übungen

1. $\int_{-1}^{3} \frac{x}{\sqrt{36-3x^2}} dx$ (Definitionsbereich?)
2. $\int_{4}^{5} \frac{x}{x^2+1} dx$ (Definitionsbereich?)
3. $\int_{-2}^{-10} \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$ (Definitionsbereich?)
4. $\int_{0}^{5} (x^2+x+1)e^x dx$ (Definitionsbereich?)
5. $\int_{1}^{5} (x\ln x) dx$ (Definitionsbereich?)

15.2.9 Lösungen

1. Der Definitionsbereich ist

$$\begin{aligned}&\{x \mid 36 - 3x^2 > 0\} \\ &=]-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}[\\ &=]-3.4641, 3.4641[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sqrt{36-3x^2} &= \frac{d}{dx}\left(36-3x^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 0.5\left(36-3x^2\right)^{-0.5} \cdot -6x \\ &= \frac{-3x}{\sqrt{36-3x^2}}\end{aligned}$$

Damit ist $-\frac{1}{3}\sqrt{36-3x^2}$ eine Stammfunktion von $\frac{x}{\sqrt{36-3x^2}}$. Entsprechend gilt:

$$\int_{-1}^{3} \frac{x}{\sqrt{36-3x^2}} dx = -\frac{1}{3}\sqrt{36-3x^2}\Big|_{-1}^{3} = 0.914\,85$$

Sieht man den obigen Zusammenhang nicht, kann man es mit Substitution versuchen: Wir setzen $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ und $g(t) = 36 - 3t^2$. Damit ist dann

$$f(g(t))g'(t) = \frac{1}{\sqrt{36 - 3t^2}}(-6t).$$

Entsprechend ist dann

$$\frac{1}{-6}f(g(t))g'(t) = \frac{t}{\sqrt{36 - 3t^2}}$$

und es gilt mit der Substitution und mit $g(3) = 36 - 3 \cdot 3^2 = 9$ und $g(-1) = 36 - 3 = 33$:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{6}\int_{g(-1)}^{g(3)} \frac{1}{\sqrt{x}}dx &= -\frac{1}{6}\int_{33}^{9} \frac{1}{\sqrt{x}}dx \\ &= \frac{1}{6}\int_{9}^{33} x^{-0.5}dx \\ &= \frac{1}{3}x^{0.5}\Big|_{9}^{33} = 0.91485 \end{aligned}$$

2. $\int_{4}^{5} \frac{x}{x^2+1}dx = 0.212\,44$
Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R}$.
Wir setzen $f(x) = \frac{1}{x}$ und $g(t) = t^2 + 1$. Damit ist

$$f(g(t))g'(t) = \frac{1}{t^2+1}2t.$$

Entsprechend ist dann

$$\begin{aligned} \int_{g(4)}^{g(5)} \frac{1}{2x}dx &= \frac{1}{2}\int_{17}^{26} \frac{1}{x}dx \\ &= \frac{1}{2}\ln x\Big|_{17}^{26} \end{aligned}$$

3. $\int_{-2}^{-10} \frac{x}{(x^2+1)^2}dx = 0.095\,050$
Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R}$.
Wir setzen $f(x) = \frac{1}{x^2}$ und $g(t) = t^2 + 1$. Damit ist

$$f(g(t))g'(t) = \frac{1}{(t^2+1)^2}2t$$

Wir erhalten also mit $g(-10) = 101$ und $g(-2) = 5$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{g(-2)}^{g(-10)} \frac{1}{x^2}dx &= \frac{1}{2}\int_{5}^{101} \frac{1}{x^2}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{5}^{101} x^{-2}dx \\ &= \frac{1}{2}\left.-x^{-1}\right|_5^{101} \\ &= 0.095050\end{aligned}$$

4. $\int_0^5 (x^2+x+1)e^x dx = 3263.1$
Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R}$.
Wir versuchen es mit der partiellen Integration mit $F(x) = x^2+x+1$ und $G(x) = e^x$.

$$\int_0^5 (x^2+x+1)e^x dx = \left(x^2+x+1\right)e^x\big|_0^5 - \int_0^5 e^x(2x+1)dx$$

Wir wenden die partielle Integration nochmals an:

$$\int_0^5 e^x(2x+1)dx = (2x+1)\,e^x\big|_0^5 - \int_0^5 (e^x\cdot 2)\,dx$$

Es gilt $\int_0^5 (e^x\cdot 2)\,dx = 2e^x\big|_0^5 = 2e^5 - 2e^0 = 294.83$
Zudem gilt $(2x+1)\,e^x\big|_0^5 = 1631.5$
entsprechend ist $\int_0^5 e^x(2x+1)dx = 1631.5 - 294.83 = 1336.7$
Zudem ist $\left(x^2+x+1\right)e^x\big|_0^5 = 4599.8$ und damit das Schlussresultat:

$$\int_0^5 (x^2+x+1)e^x dx = 4599.8 - 1336.7 = 3263.1$$

5. $\int_1^5 (x\ln x)dx$ (Definitionsbereich: $x > 0$)
Wir versuchen es mit der partiellen Integration mit $f(x) = x$ und $G(x) = \ln x$. Damit gilt:

$$\begin{aligned}\int_1^5 (x\ln x)dx &= \left.\frac{x^2}{2}\ln x\right|_1^5 - \int_1^5 (\frac{x^2}{2}\frac{1}{x})dx \\ &= 20.118 - \frac{1}{2}\int_1^5 xdx\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\int_1^5 xdx = \left.\frac{1}{4}x^2\right|_1^5 = 6$$

Damit gilt dann

$$\int_1^5 (x \ln x) dx = 20.118 - 6 = 14.118$$

15.3 Uneigentliche Integrale

Oft sind wir an Integralen der Art

$$\int_c^\infty f(x)dx, \int_{-\infty}^c f(x)dx \text{ oder } \int_{-\infty}^\infty f(x)dx$$

interessiert. So berechnen wir etwa in der Statistik den Erwartungswert einer stetigen verteilten Zufallsvariable laut der Formel

$$\int_{-\infty}^\infty xf(x)dx,$$

wobei wir $f(x)$ die Dichtefunktion der Verteilung ist. Im Falle einer Exponentialverteilung würde man erhalten:

$$\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx.$$

Diese Integrale können gegen unendlich gehen, gegen eine reelle Zahl streben oder undefiniert sein (wenn es auf einer Seite gegen $-\infty$ und auf der anderen gegen ∞ geht). Die Uneigentlichen Intergrale können sinnvollerweise wie folgt definiert werden:

Definition 15.3.1.

$$\int_c^\infty f(x)dx := \lim_{d\to\infty} \int_c^d f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^d f(x)dx := \lim_{c\to-\infty} \int_c^d f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx := \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{d\to\infty} \int_c^d f(x)dx$$

◊

Beispiel 15.3.2.

$$\begin{aligned}\int_c^\infty (ax+b)\,dx &= \lim_{d\to\infty} \int_c^d (ax+b)dx \\ &= \lim_{d\to\infty} \left(\frac{a}{2}d^2 + bd - \left(\frac{a}{2}c^2 + bc\right)\right) \\ &= \infty \ wenn\ a > 0 \\ &= -\infty \ wenn\ a < 0.\end{aligned}$$

◊

Beispiel 15.3.3. *Definitionsbereich:* $\mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$\begin{aligned}\int_5^\infty \frac{1}{x}dx &= \lim_{d\to\infty}\int_5^d \frac{1}{x}dx\\ &= \lim_{d\to\infty}(\ln d - \ln 5)\\ &= \infty\end{aligned}$$

◊

Beispiel 15.3.4. *Definitionsbereich:* $\mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$\begin{aligned}\int_5^\infty \frac{1}{x^2}dx &= \lim_{d\to\infty}\int_5^d \frac{1}{x^2}dx = \lim_{d\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\Big|_5^d\right)\\ &= \lim_{d\to\infty}(-\frac{1}{d}+\frac{1}{5})\\ &= \frac{1}{5}\end{aligned}$$

Während also im Fall $\frac{1}{x}$ die Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse im Intervall $[5,\infty[$ gegen Unendlich strebt, strebt die Fläche im Fall $\frac{1}{x^2}$ gegen die Zahl $\frac{1}{5}$, wobei beide Kurven nie mit der x-Achse zusammenfallen. (s. Abbildung 15.3.21)

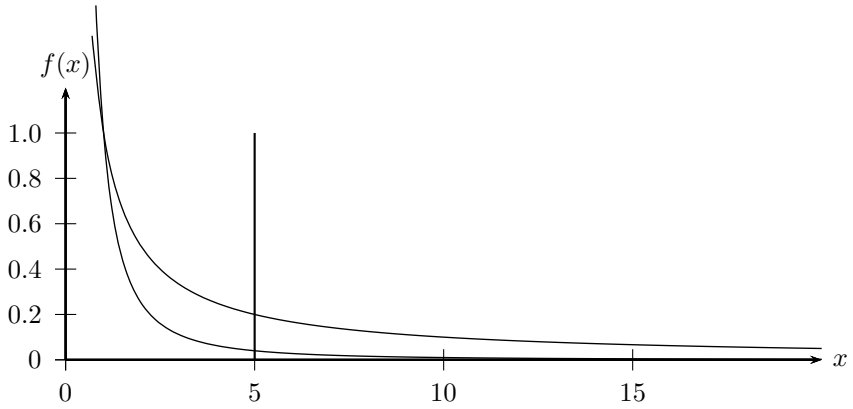


Abbildung 15.3.21: Integral der Funktionen $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{x^2}$ im Intervall $[5,\infty[$

◊

Beispiel 15.3.5. *Definitionsbereich:* $\mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$\int_{-\infty}^{-5} \frac{1}{x^3}dx = \lim_{d\to-\infty} \int_{d}^{-5} \frac{1}{x^3}dx$$

$$\int_{d}^{-5} \frac{1}{x^3}dx = -\frac{1}{2x^2}\Big|_{d}^{-5}$$

$$= -\frac{1}{2(-5)^2} + \frac{1}{2d^2}$$

$$= -\frac{1}{50} + \frac{1}{2d^2}$$

$$\Longrightarrow \lim_{d\to-\infty}\left(-\frac{1}{50} + \frac{1}{2d^2}\right)$$

$$= -\lim_{d\to-\infty}\frac{1}{50} + \lim_{d\to-\infty}\left(\frac{1}{2d^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{50} = -0.02$$

$\Diamond$

Beispiel 15.3.6. *Definitionsbereich:* $\mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \text{ mit } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^4} & \text{für } x > 1 \\ 1 & \text{für } -1 \le x \le 1 \\ \frac{1}{x^4} & \text{für } x < -1 \end{cases}$$

Wir zeichnen die Funktion, um einen Überblick über die Situation zu haben (s. Abbildung 15.3.22):

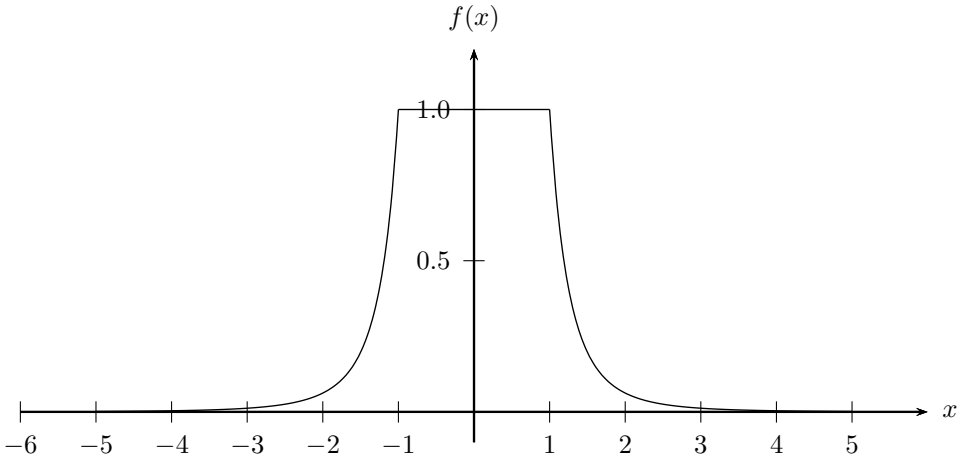


Abbildung 15.3.22: Graphik zur Berechnung der Fläche des Beispiels

Die Fläche ist aus drei Flächen zusammengesetzt. In der Mitte liegt ein Rechteck: $2 \cdot 1 = 2$
Die Flächen für $x < -1$ *und* $x > 1$ *sind jeweils gleich gross. Somit genügt es, eine der beiden*

Flächen zu berechnen:

$$\begin{aligned}\int_1^d \frac{1}{x^4}dx &= -\frac{1}{3x^3}\Big|_1^d = -\frac{1}{3d^3} - \left(-\frac{1}{3\cdot 1^3}\right)\\ &= -\frac{1}{3d^3} + \frac{1}{3}\\ &\Longrightarrow \lim_{d\to\infty}\left(-\frac{1}{3d^3}+\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

◊

Wir erhalten somit die Gesamtfläche: $2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$

Beispiel 15.3.7. *Sei eine Verteilungsfunktion*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0\\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{für } 0 \le x\end{cases}$$

gegeben mit $\lambda > 0$. Die Dichtefunktion ist dann:

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0\\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{für } 0 \le x\end{cases}$$

$$E(X) = \int_0^\infty x f(x)dx = \int_0^\infty \left(x\lambda e^{-\lambda x}\right)dx$$

Mit partieller Integration erhalten wir:

$$\begin{aligned}\int_0^d \left(x\lambda e^{-\lambda x}\right)dx &= -xe^{-\lambda x}\Big|_0^d - \int_0^d -e^{-\lambda x}dx\\ &= -e^{-\lambda d}d - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^d\\ &= -e^{-\lambda d}d - \frac{e^{-\lambda d}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\end{aligned}$$

Wir bilden den Grenzwert:

$$\begin{aligned}\lim_{d\to\infty}\left(-e^{-\lambda d}d - \frac{e^{-\lambda d}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\right) &= \lim_{d\to\infty}\left(-\frac{d}{e^{\lambda d}} - \frac{1}{e^{\lambda d}\lambda} + \frac{1}{\lambda}\right)\\ &= \lim_{d\to\infty}\left(-\frac{d}{e^{\lambda d}}\right) - \lim_{d\to\infty}\frac{1}{e^{\lambda d}\lambda} + \lim_{d\to\infty}\frac{1}{\lambda}\\ &= 0 - 0 + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\end{aligned}$$

wobei wir noch $\lim_{d\to\infty}\left(-\frac{d}{e^{\lambda d}}\right) = 0$ beweisen müssten. Wir verzichten darauf. Man kann allerdings folgendes bedenken: $e^{\lambda d}$ mit $\lambda > 0$ wächst für $d \to \infty$ viel schneller als d. Somit wird der Ausdruck $\left(\frac{d}{e^{\lambda d}}\right)$ mit steigendem d immer kleiner und nähert sich 0. Entsprechend gilt dann: $\lim_{d\to\infty}\left(-\frac{d}{e^{\lambda d}}\right) = 0$.
◊

15.3.1 Übung

Berechnen Sie a) den Erwartungswert einer stetig uniform verteilten Zufallsvariable X mit den Parametern a und b. Der Erwartungswert einer stetig verteilten Zufallsvariable X ist definiert durch

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx,$$

wobei f die Dichtefunktion von X ist. Die Dichtefunktion einer stetig uniform verteilten Zufallsvariable X mit den Parametern a und b ist definiert durch:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{1}{b-a} & x \in]a,b] \\ 0 & x > b \end{cases}$$

b) die Varianz einer solchen Zufallsvariable, definiert durch

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[(x - E(X))^2 f(x)\right] dx$$

15.3.2 Lösung

a)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx &= \int_{-\infty}^{a} (0 \cdot x)\, dx + \int_{a}^{b} \left(\frac{1}{b-a}x\right) dx + \int_{b}^{\infty} (0 \cdot x)\, dx \\ &= \int_{a}^{b} \left(\frac{1}{b-a}x\right) dx = \frac{1}{2}\frac{1}{b-a}x^2\Big|_a^b \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{b-a}b^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{b-a}a^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{b-a}\left(b^2 - a^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{b-a}(b-a)(b+a) = \frac{b+a}{2} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx &= \int_{-\infty}^{a} (x - E(X))^2 0dx + \int_{a}^{b} (x - E(X))^2 \frac{1}{b-a}dx + \int_{b}^{\infty} (x - E(X))^2 0dx \\ &= \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} \left(x^2 - 2x\frac{(a+b)}{2} + \frac{(a+b)^2}{4}\right) dx \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \left(x^2 - 2x\frac{(a+b)}{2} + \frac{(a+b)^2}{4} \right) dx \\
&= \int_a^b x^2 dx - \int_a^b x\,(a+b)\,dx + \int_a^b \frac{(a+b)^2}{4} dx \\
&= \frac{1}{3}x^3\Big|_a^b - \frac{1}{2}x^2\,(a+b)\Big|_a^b + \frac{1}{4}x\,(a+b)^2\Big|_a^b \\
&= \left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right) - \left(\frac{b^2\,(a+b)}{2} - \frac{a^2\,(a+b)}{2}\right) + \left(\frac{1}{4}b\,(a+b)^2 - \frac{1}{4}a\,(a+b)^2\right) \\
&= \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} - \frac{b^2a+b^3}{2} + \frac{a^3a+a^2b}{2} + \frac{(b-a)\,(a+b)^2}{4}
\end{aligned}$$

mit $\frac{(b-a)(a+b)^2}{4} = \frac{-a^3-a^2b+ab^2+b^3}{4}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} - \frac{b^2a+b^3}{2} + \frac{a^3+a^2b}{2} + \frac{-a^3-a^2b+ab^2+b^3}{4} \\
&= \frac{4b^3 - 4a^3 - 6b^2a - 6b^3 + 6a^3 + 6a^2b - 3a^3 - 3a^2b + 3ab^2 + 3b^3}{12} \\
&= \frac{b^3 - a^3 - 3ab^2 + 3a^2b}{12} \\
&= \frac{(b-a)^2\,(b-a)}{12}.
\end{aligned}$$

(letzter Schritt mit $(b-a)^2\,(b-a) = -a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3$)

Man erhält also

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \left(x^2 - 2x\frac{(a+b)}{2} + \frac{(a+b)^2}{4} \right) dx = \frac{(b-a)^2}{12}$$

15.4 Finanzmathematische Anwendungen

15.4.1 End- und Barwert eines Kapitals

Wie im Kapitel „Weitere reelle Funktionen“, S. 138 , Beispiel 4.3.9, gesehen, kann man in

$$K(n) = K_0(1+i)^n$$

(Kapital $K(n)$ zum Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$, K_0= Kapital zum Zeitpunkt 0; i = Zinssatz) n durch $t \in \mathbb{R}^+$ ersetzen. Man erhält eine an allen Stellen ableitbare stetige Funktion (Endwertformel):

$$\begin{aligned}
K &: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\
K(t) &= K_0(1+i)^t
\end{aligned}$$

Bemerkung 15.4.1. *Wie bereits im erwähnten Kapitel gesehen, ergeben sich innerhalb der Jahre bei der Verwendung der Formel $K\,(t) = K_0(1+i)^t$ Abweichungen von der üblichen Berechnungsform: Dies liegt daran, dass innerhalb der Jahre bei jährlicher Verzinsung linear gerechnet wird, bei $K\,(t) = K_0(1+i)^t$ jedoch nicht. Entsprechend sind die Endwerte bei jährlicher Verzinsung innerhalb der Jahre grösser als bei der Formel $K\,(t) = K_0(1+i)^t$, da $K(t)$ eine konvexe Funktion ohne Knickstellen ist. Das folgende Bespiel illustriert die Aussagen: stetige Formel:* $2000(1+0.05)^{20.5} =$

5437. 6
übliche Berechnung: $2000(1+0.05)^{20} = 5306.6$
$5306.6 + \frac{1}{2} \cdot 5306.6 \cdot 0.05 = 5439.3$ ◊

Als an allen Stellen ableitbare stetige Funktion können wir $K(t)$ nach der Zeit t ableiten und wir erhalten:

$$\frac{d}{dt} K_0(1+i)^t = K_0(1+i)^t \ln(1+i)$$

Offensichtlich ist damit $K_0(1+i)^t$ eine Stammfunktion von $K_0(1+i)^t \ln(1+i)$.
Damit gilt

$$K_0 \ln(1+i) \int_a^b (1+i)^t dt = K_0(1+i)^b - K_0(1+i)^a.$$

Die Fläche zwischen $K_0(1+i)^t \ln(1+i)$ und der $x-$Achse im Intervall $[a,b]$ drückt damit die Differenz $K_0(1+i)^b - K_0(1+i)^a$ aus. Es handelt sich um den Zuwachs, den das Kapital vom Zeitpunkt a bis zum Zeitpunkt b erhält. Die Fläche zwischen $K_0(1+i)^t \ln(1+i)$ und der $x-$Achse kann deshalb als durch das Anfangskapital ausgelöster nominaler Einkommenfluss betrachtet werden (s. Abbildungen 15.4.23 und 15.4.24).

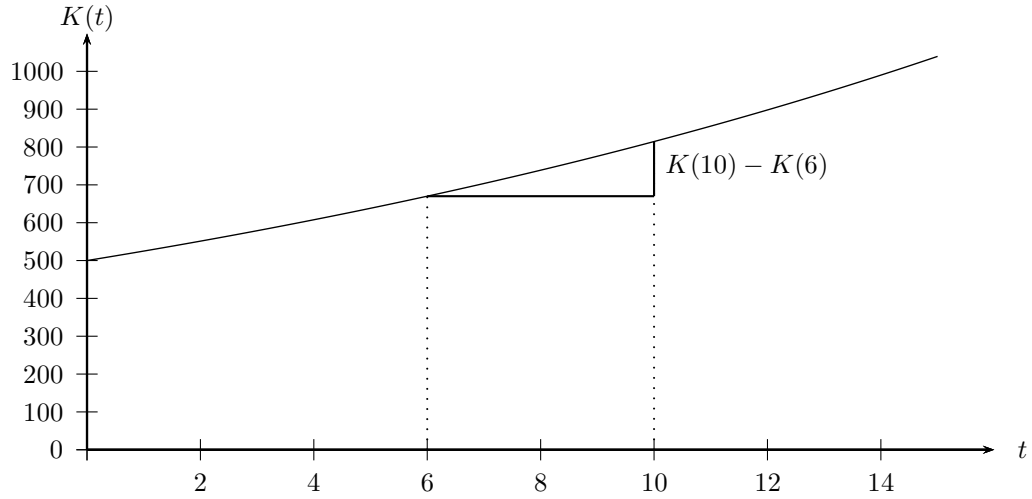


Abbildung 15.4.23: Entwicklung eines Kapitals von 500 Franken bei einem Zinssatz von 0.05 in 15 Jahren; $K(10) - K(6)$ ist Zuwachs während der Zeit von 6 bis 10 Jahren

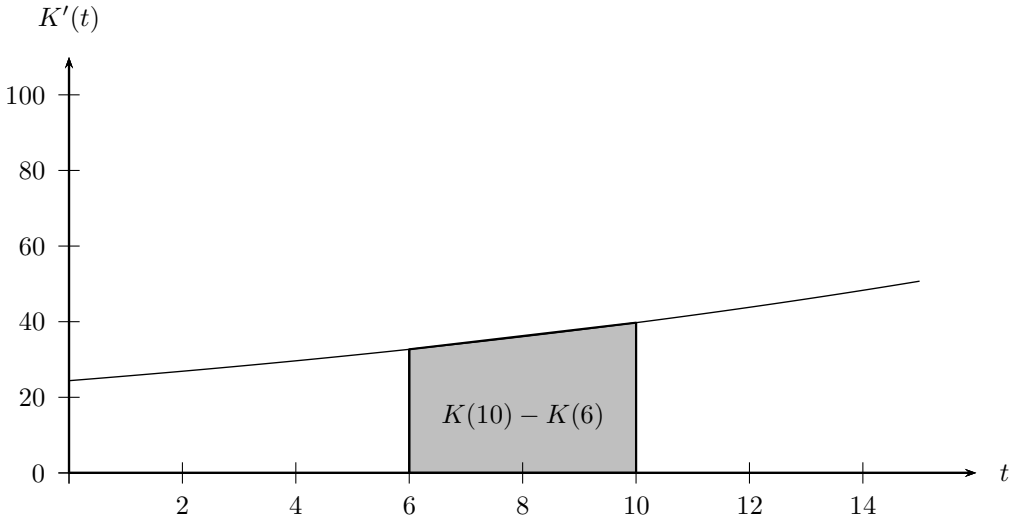


Abbildung 15.4.24: Ableitung von K(t); Fläche zwischen Kurve und x-Achse im Intervall $[6, 10]$ ist mit $K(10) - K(6)$ identisch

Für das Intervall $[0, b]$ erhält man das gesamte, bis zum Zeitpunkt b durch die Kapitalanlage ausgelöste nominale Einkommen:

$$\int_0^b K_0(1+i)^t \ln(1+i)dt = K_0(1+i)^b - K_0(1+i)^0$$
$$= K_0(1+i)^b - K_0$$

Für den Barwert K_B des Kapitals K erhalten wir, wie im Kapitel „Folgen und Reihen“ gesehen, im diskreten Fall aus der Endwertformel, indem wir nach K_0 auflösen und dann K_n durch K und K_0 durch K_B ersetzen:

$$K_B(n) = \frac{K}{(1+i)^n}$$

und für den stetigen Fall

$$K(t) = \frac{K}{(1+i)^t}$$

Damit ist der Barwert K_B eine stetige Funktion der Zeit t (s. Abbildung 15.4.25)

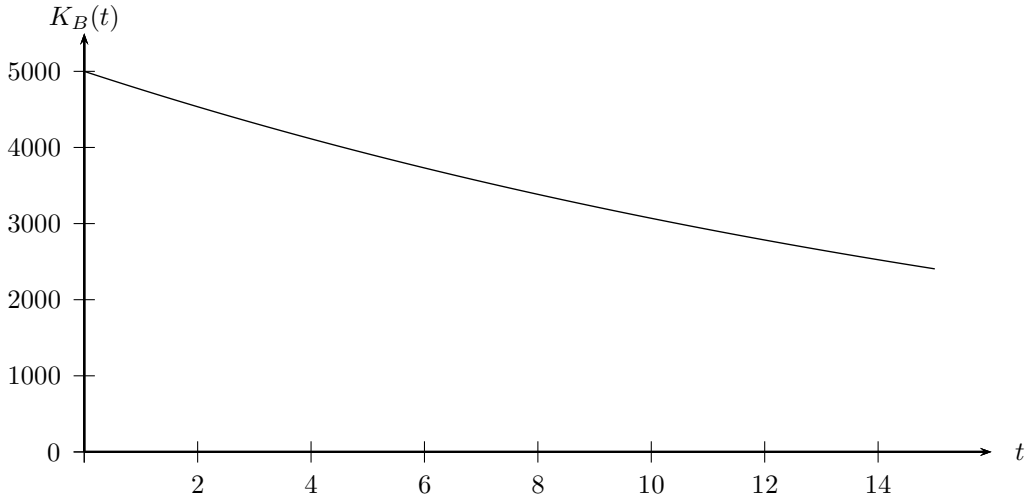


Abbildung 15.4.25: Barwert eines Kapitals von 5000: je weiter weg der Realisierungszeitpunkt des Kapitals ist, desto geringer ist der Barwert

Durch Ableiten nach der Zeit erhält man mit der Quotientenregel:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{K}{(1+i)^t} &= K\frac{-(1+i)^t\ln(1+i)}{(1+i)^{2t}}\\ &= -K\frac{\ln(1+i)}{(1+i)^t}\end{aligned}$$

Damit ist $K_B(t)$ eine Stammfunktion von

$$K_B'(t) = -K\frac{\ln(1+i)}{(1+i)^t}$$

und es gilt

$$-\int_a^b K\frac{\ln(1+i)}{(1+i)^t}dt = K_B(b) - K_B(a).$$

Damit ist die mit einem negativen Vorzeichen versehene Fläche zwischen $K_B'(t)$ und der x-Achse im Intervall $[a,b]$ mit dem Verlust identisch, den man durch die Verschiebung der Realisation von K vom Zeitpunkt a zum Zeitpunkt b erleidet, $b > a$ (s. Abbildungen 15.4.26 und 15.4.27).

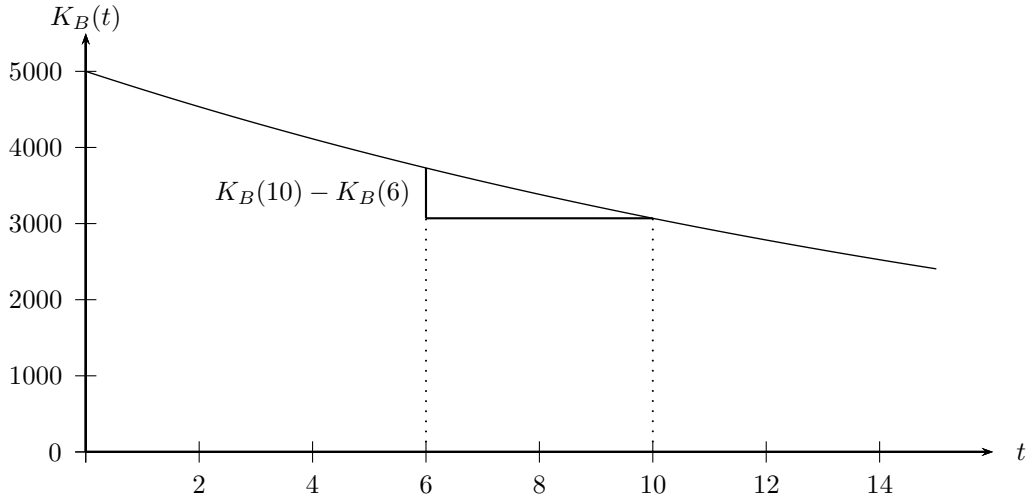


Abbildung 15.4.26: Barwert eines Kapitals von 5000 bei einem Diskontierungssatz von 5%: je weiter weg der Realisierungszeitpunkt des Kapitals ist, desto geringer ist der Barwert

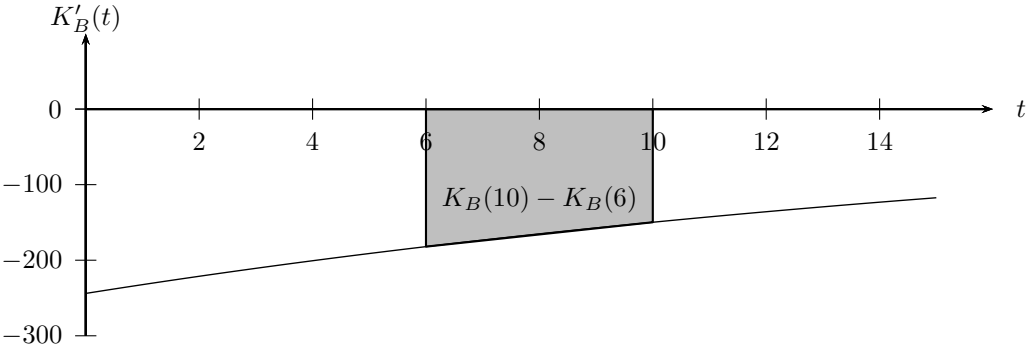


Abbildung 15.4.27: Mit negativem Vorzeichen versehene Fläche zwischen $K'_B(t)$ und der $x-$Achse im Intervall $[6, 10]$: Verlust an Barwert durch die Verschiebung des Realisierungszeitspunkts von 6 nach 10

15.4.2 Rentenend- und Barwert

Als nächstes betrachten wir den Endwert von n Renteneinzahlungen in n Jahren (mit Zinseszinsen; nachschüssig; s. Kapitel „Folgen und Reihen“). Für den Endwert einer Rente erhielten wir:

$$K(n) = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Eine stetige Funktion ergibt sich, indem indem wir n durch $t \in \mathbb{R}^+$ ersetzen:

$$K(t) = R\frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

Für die graphische Darstellung eines Beispiels s. Abbildung 15.4.28

Durch Ableiten nach der Zeit erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}K(t) &= \frac{d}{dt}\left(R\frac{(1+i)^t - 1}{i}\right)\\ &= \frac{R}{i}\ln(1+i)(1+i)^t\end{aligned}$$

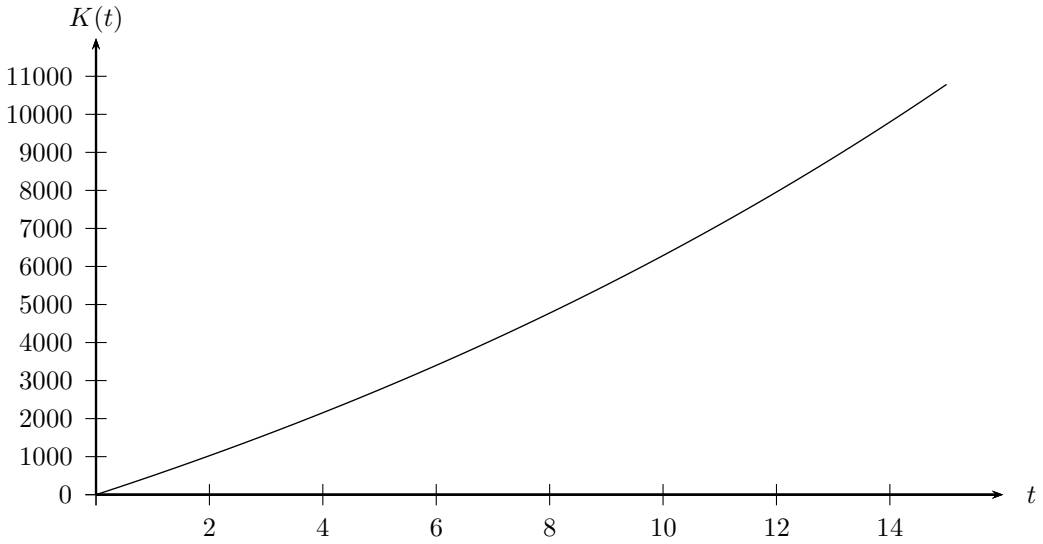


Abbildung 15.4.28: Entwicklung einer jährlichen Renteneinzahlen von 500 Franken bei einem Zinssatz von 0.05 in 15 Jahren

Damit ist $R\frac{(1+i)^t-1}{i}$ eine Stammfunktion von $\frac{R}{i}\ln(1+i)(1+i)^t$, d.h. es gilt

$$\int_a^b \frac{R}{i}\ln(1+i)(1+i)^t\,dt = R\frac{(1+i)^b-1}{i} - R\frac{(1+i)^a-1}{i}$$

und man kann die Fläche zwischen $\frac{R}{i}\ln(1+i)(1+i)^t$ und der $x-$Achse im Intervall $[a,b]$ als den Zuwachs an Endwert betrachten, der durch die Einzahlungen und Zinseszinsen in der Zeit $[a,b]$ entsteht (s. für die graphische Darstellung eines Beispiels Abbildung 15.4.29).

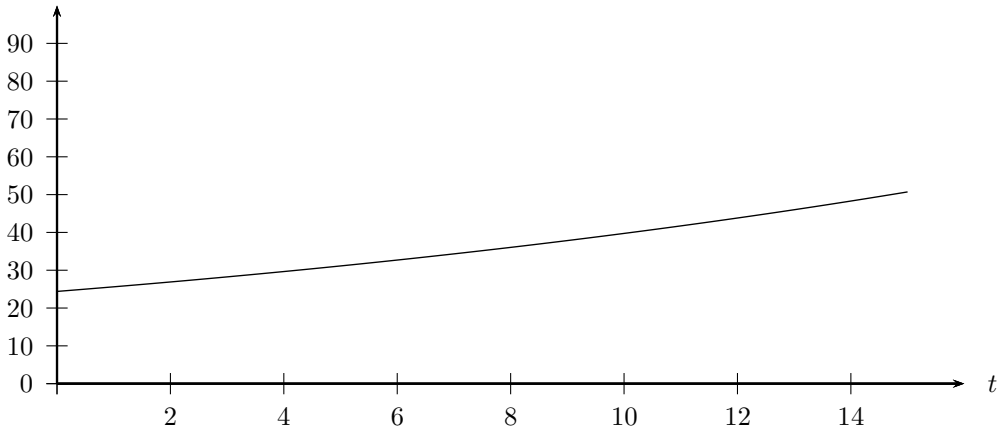


Abbildung 15.4.29: Ableitung von $K(t)$ (Wachstum des Kapitals als Fläche zwischen der Ableitung und der x-Achse bei Rentenzahlungen R = 500; i = 0.05)

Entsprechend ist dann

$$K(b) = \int_0^b \frac{R}{i} \ln(1+i)\,(1+i)^t\,dt \tag{15.4.2}$$

der Endwert einer Rente, die während einer Zeit von b läuft. Dabei ist $\frac{\ln(1+i)}{i}$ ein Faktor, der fast 1 ist. Unter dem Integral von (15.4.2) stellt R eine konstante Funktion dar. Jedes Jahr wird derselbe Betrag eingezahlt. Die Basis der entsprechenden Rechtecke ist 1 (ein Jahr) und die Höhe R. Die Formel kann erweitert werden, indem wir nicht nur konstante Funktionen, sondern beliebige stetige und im Intervall $[0, b]$ beschränkte Funktionen zulassen. Man erhält entsprechend für den Finanzfluss, der durch die Fläche zwischen $f(x)$ und der $x-$Achse ausgedrückt wird und der zu einem Zinssatz von $\ln(1+i)$ stetig verzinst wird, den Endwert:

$$K(b) = \frac{\ln(1+i)}{i} \int_0^b f(t)\,(1+i)^t\,dt \tag{15.4.3}$$

Für den Barwert einer Rente erhält man, wie gesehen,

$$K_B(t) = R\frac{(1+i)^t - 1}{i(1+i)^t}.$$

Die Ableitung ergibt dann (Quotientenregel):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{R}{i}\frac{(1+i)^t-1}{(1+i)^t}\right) &= \frac{R}{i}\frac{(1+i)^t \ln(1+i)\,(1+i)^t - ((1+i)^t-1)\,(1+i)^t \ln(1+i))}{((1+i)^t)^2} \\
&= \frac{R}{i}\frac{(1+i)^t \ln(1+i) - ((1+i)^t-1)\ln(1+i))}{(1+i)^t} \\
&= \frac{R}{i}\ln(1+i)\left(\frac{(1+i)^t - ((1+i)^t-1)}{(1+i)^t}\right) \\
&= \frac{R}{i}\ln(1+i)\left(\frac{1}{(1+i)^t}\right) \\
&= \frac{R}{i}\frac{\ln(1+i)}{(1+i)^t}
\end{aligned}$$

Die Fläche zwischen der Ableitung und der x-Achse drückt das Wachsen des Barwertes durch die längere Auszahlung einer Rente aus. Der Flächeninhalt wird nicht mit einen negativen Vorzeichen versehen, da die Ableitung positiv ist. Da

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R}{i}\frac{\ln(1+i)}{(1+i)^t} = 0$$

wird diese Fläche in weiter weg liegenden Intervallen jedoch immer kleiner.

Mit den obigen Ausführung gilt: $K_B(t)$ ist eine Stammfunktion von

$$\frac{R}{i}\frac{\ln(1+i)}{(1+i)^t} = \frac{R}{(1+i)^t}\frac{\ln(1+i)}{i}.$$

Entsprechend gilt:

$$\frac{\ln(1+i)}{i}\int_0^b \frac{R}{(1+i)^t}dt$$

ist der Barwert der Rente R. Ersetzen wir wiederum die Konstante R durch eine beliebige stetige und im betrachteten Intervall beschränkte Funktion f, so erhält man den Barwert eines Finanzflusses, der durch die Fläche zwischen f und der $x-$Achse ausgedrückt wird, durch die Formel

$$K_B(b) = \frac{\ln(1+i)}{i} \int_0^b \frac{f(t)}{(1+i)^t} dt \tag{15.4.4}$$

15.4.3 Optimale Dauer einer Investition

Der Vorteil der stetigen Betrachtungsweise besteht u.a. darin, dass die Berechnungsmethoden für Extrema von stetigen Funktionen verwendet werden können. So ist es z.B. interessant zu wissen, wann der Barwert künftiger Finanzflüsse einer Investition maximal wird.

Der Barwert einer Investition sei K_0. Wir gehen dabei davon aus, dass die Investition I zum Zeitpunkt 0 erfolgt und dass diese einen Auszahlungsfluss $r(t)$ auslöst (z.B. Dividenden). r ist eine Funktion, deren Integral den Auszahlungsfluss im Zeitintervall $[a, b]$ ausdrückt. Zu einer Funktion r kann man z.B. gelangen, indem man den bis zu Zeitpunkten t_i angefallene Gesamtauszahlung R_i schätzt, durch die Punkte (t_i, R_i) eine stetige Funktion R berechnet und diese dann ableitet.

Zudem gehen wir davon aus, dass zum Unterhalt der Investition ein Kostenfluss $k(t)$ nötig ist (Unterhaltskosten; Löhne, etc.). k ist wie r eine Funktion, deren Integral die Kosten, die im Zeitintervall $[a, b]$ anfallen, ausdrückt. Zu einer Funktion k kann man analog zum für k erläuterten Verfahren gelangen.

Beim Verkauf der Investition ergibt sich ein Erlös $L(T)$ (L für „Liquidation“), wobei T den Verkaufszeitpunkt angibt (= Ende der Investition). Der Diskontierungssatz zur Berechnung des Barwerts sei i. Damit ergibt sich bei Diskontierung zum Satz i (was einer stetigen Diskontierung zum Satz $\ln(1+i)$ entspricht) der folgende Barwert der Investition (nach Abzug der Investition):

$$K_0(T) = -I + \frac{\ln(1+i)}{i} \int_0^T \frac{r(t) - k(t)}{(1+i)^t} dt + \frac{L(T)}{(1+i)^T}. \tag{15.4.5}$$

Die optimale Investitionsdauer ist die, welche den Barwert maximiert. Wir leiten also K_0 nach T ab und setzen mit 0 gleich. Dabei ist zu beachten, dass $-I$ eine Konstante ist. Zudem gilt

$$\frac{d}{dT} \int_0^T f(t) dt = f(T)$$

(s. Satz 15.2.13). Damit gilt (u.a. mit der Quotientenregel), wenn wir

$$c := \frac{\ln(1+i)}{i}$$

setzen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dT} K_0(T) &= c \frac{r(T) - k(T)}{(1+i)^T} + \frac{L'(T)(1+i)^T - L(T)(1+i)^T \ln(1+i)}{\left((1+i)^T\right)^2} \\ &= c \frac{r(T) - k(T)}{(1+i)^T} + \frac{L'(T) - L(T)\ln(1+i)}{(1+i)^T} \end{aligned} \tag{15.4.6}$$

Durch Nullsetzen (Extremumstelle!) gilt:

$$\begin{aligned} &c \frac{r(T) - k(T)}{(1+i)^T} + \frac{L'(T) - L(T)\ln(1+i)}{(1+i)^T} = 0 \iff \\ &cr(T) - ck(T) + L'(T) - L(T)\ln(1+i) = 0 \end{aligned}$$

Im Extremum gilt also:

$$cr(T) = ck(T) - L'(T) + L(T)\ln(1+i) \tag{15.4.7}$$

Der durch die Investition generierte Einkommenfluss (gewichtet mit c) muss identisch sein mit den Kosten (gewichtet mit c), von denen der Grenzerlös der Investition zum Zeitpunkt T abgezählt wird ($= L'(T)$) und zu denen man die Zinsen hinzuzählt, die man verliert, wenn man $L(T)$ nicht zu T realisiert (und dann z.B. das Geld auf die Bank legt). Zu überprüfen ist jeweils noch, ob dort ein Maximum vorliegt.

Beispiel 15.4.2. *Wie lange sollte eine Investition von* 2000 *GE laufen, wenn*
$r(t) = 1000 + 50t$ *(Ertrag der Investition)*
$k(t) = 500 + 90t$ *(Kosten der Investition)*
$L(t) = 1600 - 100t$ *(Verkaufserlös der Investition)*
$i = 0.105170918$ *(Diskontierungssatz)*

$\frac{d}{dt}L\left(t\right) = \frac{d}{dt}\left(1600 - 100t\right) = -100.$

$\ln(1.105170918) = 0.1$

$c = \frac{\ln(1.105170918)}{0.105170918} = 0.950\,83$

Damit wird (s. (15.4.7))

$$cr(T) = ck(T) - L'(T) + L(T)\ln(1+i)$$

mit

$$0.950\,83\left(1000 + 50T\right) = 47.542T + 950.83$$

und

$$0.950\,83\left(500 + 90T\right) + 100 + \left(1600 - 100T\right)\ln(1.105170918) = 75.575T + 735.41$$

zu:

$$47.542T + 950.83 = 75.575T + 735.41$$

$\Longrightarrow T = 7.6843.$

Zu überprüfen ist, ob in $T = 7.6834$ *überhaupt ein Maximum vorliegt. Dazu setzen wir in*

$$\frac{d}{dT}K_0(T) = c\frac{r(T) - k(T)}{(1+i)^T} + \frac{L'(T) - L\left(T\right)\ln(1+i)}{(1+i)^T}$$

(s. (15.4.6) auf Seite 462) ein und leiten ab $(-100 - (1600 - 100T)\ln(1.105170918) = 10T - 260)$*:*

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dT}\left(c\frac{500 - 40T}{(1.105170918)^T} + \frac{-100 - (1600 - 100T)\ln(1.105170918)}{(1.105170918)^T}\right)\\
&= c\frac{-40\cdot(1.105170918)^T - (500 - 40T)\,(1.105170918)^T\ln\left(1.105170918\right)}{(1.105170918)^{2T}}\\
&+ \frac{10\cdot(1.105170918)^T - (10T - 260)\,(1.105170918)^T\ln\left(1.105170918\right)}{(1.105170918)^{2T}}\\
&= c\frac{-40 - (500 - 40T)\cdot 0.1}{(1.105170918)^T} + \frac{10 - (10T - 260)\cdot 0.1}{(1.105170918)^T}\\
&= c\frac{4T - 90}{(1.105170918)^T} + \frac{36 - T}{(1.105170918)^T}
\end{aligned}$$

Eingesetzt ergibt sich:

$$0.95083 \cdot \frac{4 \cdot 7.6843 - 90}{(1.105170918)^{7.6843}} + \frac{36 - 7.6843}{(1.105170918)^{7.6843}}$$
$$= -13 < 0$$

Also liegt dort ein Maximum vor.

Wir müssen noch den Barwert der Finanzflüsse der Investition berechnen. Nur so können wir überprüfen, ob die Investition, etwa im Verhältnis zu anderen Investitionen, rentabel ist:
Der Barwert der Investition mit dieser Dauer − nach Abzug der Investition − ist dann - mit $r(t) - k(t) = 1000 + 50t - 500 - 90t = 500 - 40t$*:*

$$K_0(7.6834) = -2000 + 0.95083 \int_0^{7.6834} \frac{500 - 40t}{(1.105170918)^t} dt + \frac{831.66}{(1.105170918)^{7.6834}}$$
$$= 250.8456154$$

Dabei ist

$$\frac{831.66}{(1.105170918)^{7.6834}} = 385.7091947$$

Das Integral berechnen wir mit partieller Integration, wobei wir folgende Ergebnisse verwenden:

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{(1+i)^t} = -\frac{\ln(i+1)}{(i+1)^t}$$
$$\Longrightarrow$$
$$\frac{d}{dt}\frac{1}{(1+i)^t \ln(1+i)} = -\frac{1}{(1+i)^t}.$$

Damit ist $\frac{-1}{(1+i)^t \ln(1+i)}$ *eine Stammfunktion von* $\frac{1}{(1+i)^t}$.
Mit partieller Integration und $F(t) = 500 - 40t$ *sowie* $g(t) = \frac{1}{(1.105170918)^t}$ *erhält man gemäss* $\int_0^{7.6834} F(t)g(t)dt = F(t)G(t)|_0^{7.6834} - \int_0^{7.6834} f(t)G(t)dt$ *:*

$$\int_0^{7.6834} \frac{500 - 40t}{(1.105170918)^t} dt = -\left.\frac{(500 - 40t)}{1.105170918^t 0.1}\right|_0^{7.6834} - \int_0^{7.6834} -\frac{-40}{(1.105170918)^t 0.1} dt$$
$$= -\left.\frac{(500 - 40t)}{1.105170918^t 0.1}\right|_0^{7.6834} - \int_0^{7.6834} \frac{40}{(1.105170918)^t 0.1} dt$$

mit

$$-\left.\frac{(500 - 40t)}{1.105170918^t 0.1}\right|_0^{7.6834} = 4106.707$$

und

$$\int_0^{7.6834} \frac{40}{(1.105170918)^t 0.1} dt = -\left.\frac{40}{1.105170918^t 0.1^2}\right|_0^{7.6834} = 2145.038$$

Dies ergibt insgesamt $-2000 + 0.950\,83\,(4106.707 - 2145.038) + 385.7091947 = 250.8519$
Nach Abzug der Investition ergibt sich also ein Barwert von 250.84519 *der durch die Investition ausgelösten Finanzflüsse.* ◊

15.4.4 Übungen

1. Eine Investition beinhalte eine Anfangsausgabe von 200000 ohne künftige Ausgaben. Der Auszahlungsfluss ist: $r(t) = 50000(1 - 0.08t)$. Zudem gilt: $L(t) = 200000(1 - 0.1t)$ und $i = 0.105170918$. Berechnen Sie die optimale Investitionsdauer und den Barwert der Investition zum optimalen Zeitpunkt. Berechnen Sie den Jahreszins bei jährlicher Verzinsung.

2. Ein Musikinstrumentehändler besitzt eine Violine höchster Qualität von einem alten italienischen Meister. Der Verkaufspreis wird durch die folgende Funktion bestimmt: $p(t) = 200000(1 + 0.2t)$. Die Lagerhaltungskosten betragen 4800 pro Jahr; $\ln(1 + i) = 0.08$. Auszahlungen erfolgen während der Lagerzeit keine. Wann sollte der Händler die Violine verkaufen? Welches ist der Verkaufspreis. Erklären Sie die Bedeutung von $p'(t) = \frac{d}{dt}(200000(1 + 0.2t))$

3. Berechnen Sie den Barwert der folgende Rente: Jedes Jahr werden 800 GE einbezahlt: $n = 15$. $i = 0.05$ (i = Jahreszinssatz, Zinseszins).

4. Berechnen Sie den Endwert der folgenen Rentenzahlungen: 1800 GE pro Jahr. $n = 20$. $i = 0.045$.

5. Berechnen Sie den Barwert der Rentenzahlungen zum Zeitpunkt $t = 8$ und $t = 18$. Man überweist 2000 GE pro Jahr. $n = 20$; $i = 0.04602786$.

6. Der Wert eines alten Schrankes steige jedes Jahr um 160 GE. Der Kauf ist bereits betätigt und der Kaufpreis betrug 2000. Da der Besitzer den Schrank im Wohnzimmer hat, zieht er aus dem Besitz einen gewissen esthetischen Wert ($u(t) = 50$ (Nutzen pro Jahr)). Er gibt jährlich 20 GE aus, um den Schrank zu pflegen. $\ln(1+i) = 0.05$. Berechnen Sie den optimalen Verkaufszeitpunkt und den Verkaufspreis.

7. Berechnen Sie den Endwert eines Finanzflusses (Dauer 10.8 Jahre), der durch die folgende Funktion gegeben ist: $f(t) = 2t + 3$ (Integral der Funktion drückt Finanzfluss aus, $i = 0.045$)

8. Berechnen Sie den Barwert eines 5.2 Jahre dauernden Finanzflusses, der durch die folgende Funktion gegeben ist: $f(t) = 0.5t+2$ (Integral der Funktion drückt Finanzfluss aus, $i = 0.033$)

9. Geben Sie die Formel 15.4.5 bei stetiger Verzinsung an und rechnen Sie das Beispiel 15.4.2 mit dieser Formel durch (mit angepasstem i', d.h. $i' = \ln(1 + i)$).

15.4.5 Lösungen

1. $r(t) = 50000(1 - 0.08t) = 50000 - 4000t$
   $L(t) = 200000(1 - 0.1t) = 200000 - 20000t$
   $i = 0.105170918$
   $\ln(1 + 0.105170918) = 0.1$ und $c = \frac{\ln(1+i)}{i} = \frac{0.1}{0.105170918} = 0.95083$
   Im Extremum gilt gemäss Formel (15.4.7):

   $$cr(T) = ck(T) - L'(T) + L(T)\ln(1 + i)$$

   Da $k(T) = 0$, ergibt sich mit $L'(t) = \frac{d}{dt}(200000 - 20000t) = -20000$
   $0.95083\,(50000 - 4000T) = 20000 + (200000 - 20000T)\,0.1 \Longrightarrow T = 4.182$.

   Überprüfung, ob ein Maximum vorliegt (s. Formel (15.4.6) auf Seite 462):
   $\frac{d}{dT}\left(c\frac{r(T)-k(T)}{(1+i)^T} + \frac{L'(T)-L(T)\ln(1+i)}{(1+i)^T}\right) = \frac{d}{dT}\left(c\frac{50000-4000T}{(1.105170918)^T} + \frac{-20000-(200000-20000T)0.1}{(1.105170918)^T}\right)$

Mit $-20000-(200000-20000T)\,0.1 = 2000.0T-40000$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dT}\left(c\frac{50000-4000T}{(1.105170918)^T}+\frac{2000.0T-40000}{(1.105170918)^T}\right)\\
&=c\frac{-4000\,(1.105170918)^T-(50000-4000T)\,(1.105170918)^T\,0.1}{(1.105170918)^{2T}}+\\
&\frac{2000\,(1.105170918)^T-(2000.0T-40000)\,(1.105170918)^T\,0.1}{(1.105170918)^{2T}}\\
&=c\frac{-4000-(50000-4000T)\,0.1}{(1.105170918)^T}+\frac{2000-(2000.0T-40000)\,0.1}{(1.105170918)^T}\\
&=c\frac{400T-9000}{(1.105170918)^T}+\frac{6000-200T}{(1.105170918)^T}
\end{aligned}$$

In $T = 4.182$:

$$0.95083\cdot\frac{400\cdot 4.182-9000}{(1.105170918)^{4.182}}+\frac{6000-200\cdot 4.182}{(1.105170918)^{4.182}} = -1187.0 < 0.$$

Damit liegt dort ein Maximum vor.

Zu berechnen ist noch der Barwert der durch die Investition ausgelösten Finanzflüsse (abzüglich der Investition):
$K_0(4.182) = -200000+0.95083\int_0^{4.182}\frac{50000(1-0.08t)}{(1.105170918)^t}dt+\frac{200000(1-0.1\cdot 4.182)}{(1.105170918)^{4.182}} = 13783$
wobei $\int_0^{4.182}\frac{50000(1-0.08t)}{(1.105170918)^t}dt \approx 144290$ (für Lösungsweg s. Beispiel 15.4.2).

2. Da $\ln(1+i) = 0.08$, gilt $\exp(\ln(1+i) = 1+i = \exp(0.08) = 1.083287068$. Damit ist $i = 0.083287068$. Entsprechend ist $c = \frac{0.08}{0.083287068} = 0.96053$.
$k(t) = 4800$ (konstante Funktion). $r(t) = 0$ (keine Auszahlungen während der Lagerungszeit).
$L(t) = p(t) = 200000\,(1+0.2t) = 40000t+200000$
$\frac{d}{dt}p\,(t) = \frac{d}{dt}\,(40000t+200000) = 40000$
$\ln 1.083287068 = 0.08$

Extremum: $cr(T) = ck(T)-L'(T)+L(T)\ln(1+i)$ (s. Formel (15.4.7)) wird zu:
$0 = 0.96053\cdot 4800-40000+(40000T+200000)0.08 \Longrightarrow T = 6.0592$

Zweite Ableitung in $T = 6.0592$ ist negativ :

$\frac{d}{dT}c\frac{r(T)-k(T)}{(1+i)^T}+\frac{L'(T)-L(T)\ln(1+i)}{(1+i)^T}$ (s. Formel (15.4.6)) wird zu

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dT}\left(c\frac{-4800}{(1.083287068)^T}+\frac{40000-(40000T+200000)\,0.08}{(1.083287068)^T}\right)\\
&=\frac{d}{dT}\left(c\frac{-4800}{(1.083287068)^T}+\frac{24000-3200T}{(1.083287068)^T}\right)\\
&=c\frac{-\left(-4800\cdot(1.083287068)^T\,0.08\right)}{(1.083287068)^{2T}}+\\
&\frac{-3200\cdot(1.083287068)^T-(24000-3200T)\,(1.083287068)^T\,0.08}{(1.083287068)^{2T}}\\
&=\frac{384}{1.083287068^T}c+\frac{256T-5120}{1.083287068^T}
\end{aligned}$$

Eingesetzt ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&0.96053\cdot\frac{384}{(1.083287068)^{6.0592}}+\frac{256\cdot 6.0592-5120}{(1.083287068)^{6.0592}}\\
&=-1970.\,8<0
\end{aligned}$$

Damit ist das Extremum ein Maximum.

Verkaufspreis: $p(6.0592)=200000(1+0.2\cdot 6.0592)=442370$
Bedeutung der Ableitung der Verkaufspreisfunktion: Die Violine nimmt jedes Jahr um einen Wert von 40000 zu.

Den Barwert brauchen wir nicht zu berechnen, da der Händler die Violine bereits besitzt und es damit keinen Sinn macht, den Barwert der Violine mit dem Barwert anderer Investitionsmöglichkeiten zu vergleichen.

3. $K_B=\frac{800}{(1.05)^{15}}\frac{1.05^{15}-1}{0.05}=8303.7$

4. $K_{20}=1800\frac{1.045^{20}-1}{0.045}=56469.$

5. $i=0.04602786$; $K_B=\frac{2000}{1.04602786^{20}}\frac{1.04602786^{20}-1}{0.04602786}=25785.70201$
Dann zinsen wir den Barwert um 8 Jahre auf: $25785.70201\,(1.04602786)^8=36959.40519$;
um 18 Jahre auf: $25785.70201\,(1.04602786)^{18}=57963.88557$

6. Gemäss Formel (15.4.7)

$$cr(T)=ck(T)-L'(T)+L(T)\ln(1+i)$$

und mit
$\ln(1+i)=0.05\Longrightarrow i=\exp(0.05)-1=0.051271$
$c=\frac{0.05}{0.051271}=0.975\,21$
$L(t)=2000+160t$
$\frac{d}{dt}L(t)=160$
$r(t)=u(t)=50$
$k(t)=20$ gilt:

$0.975\,21 \cdot 50 = 0.975\,21 \cdot 20 - 160 + (2000 + 160T) \cdot 0.05 \Longrightarrow T = 11.157$
Der Verkaufspreis ist: $p(11.157) = 2000 + 160 \cdot 11.157 = 3785.1$

Zweite Ableitung in $T = 11.157$ ist negativ :
$\frac{d}{dT} c \frac{r(T)-k(T)}{(1+i)^T} + \frac{L'(T)-L(T)\ln(1+i)}{(1+i)^T}$ (s. Formel (15.4.6)) wird zu

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dT} c \frac{30}{(1.05127\,1)^T} + \frac{160 - (2000 + 160T)\,0.05}{(1.05127\,1)^T} \\
&= \frac{d}{dT} c \frac{30}{(1.05127\,1)^T} + \frac{60 - 8T}{(1.05127\,1)^T} \\
&= c \frac{-30(1.05127\,1)^T 0.05}{(1.05127\,1)^{2T}} + \frac{-8(1.05127\,1)^T - (60 - 8T)\,(1.05127\,1)^T 0.05}{(1.05127\,1)^{2T}} \\
&= c \frac{-30 \cdot 0.05}{(1.05127\,1)^T} + \frac{-8 - (60 - 8T)\,0.05}{(1.05127\,1)^T} \\
&= c \frac{-1.5}{(1.05127\,1)^T} + \frac{4T - 11}{(1.05127\,1)^T}
\end{aligned}$$

Eingesetzt ergibt sich:

$$0.975\,21 \cdot \frac{-1.5}{(1.05127\,1)^{11.157}} + \frac{0.4 \cdot 11.157 - 11}{(1.05127\,1)^{11.157}} = -4.578\,1 < 0.$$

7. $K(10.8) = \frac{\ln(1.045)}{0.045} \int_0^{10.8} (2t+3) 1.045^t dt = 198.18$ (s. Formel (15.4.3))
denn
a) mit $F(t) = 2t + 3$ und $g(t) = 1.045^t$ erhält man durch partielle Integration, da $\frac{d}{dt} a^t = (\ln a)\, a^t$ und somit $\frac{d}{dt} \frac{a^t}{\ln a} = a^t$, und mit $a = 1.045$:
$\int_0^{10.8} (2t+3) 1.045^t dt = (2t+3) \frac{1.045^t}{\ln 1.045}\Big|_0^{10.8} - \int_0^{10.8} \left(2 \cdot \frac{1.045^t}{\ln 1.045}\right) dt$
b) Dabei ist $\int_0^{10.8} 2 \cdot \frac{1.045^t}{\ln 1.045} dt = 2 \cdot \frac{1.045^t}{(\ln 1.045)^2}\Big|_0^{10.8} =$
$2\left(\frac{1.045^{10.8}}{(\ln 1.045)^2} - \frac{1.045^0}{(\ln 1.045)^2}\right) = 2\left(\frac{1.045^{10.8}}{(\ln 1.045)^2} - \frac{1}{(\ln 1.045)^2}\right) = 628.27,$
denn $\frac{d}{dt} \frac{1.045^t}{\ln 1.045} = \frac{1.045^t \ln(1.045)}{\ln 1.045} = 1.045^t$. Um $\frac{1.045^t}{\ln 1.045}$ zu erhalten, müssen wir offensichtlich als Stammfunktion $\frac{1.045^t}{\ln^2 1.045}$ wählen, denn es gilt wie erwünscht $\frac{d}{dt} \frac{1.045^t}{(\ln 1.045)^2} = \frac{1.045^t \ln(1.045)}{(\ln 1.045)^2} = \frac{1.045^t}{\ln 1.045}$.
c) Zudem gilt: $(2t+3) \frac{1.045^t}{\ln 1.045}\Big|_0^{10.8} = (2 \cdot 10.8 + 3) \frac{1.045^{10.8}}{\ln 1.045} - (2 \cdot 0 + 3) \frac{1.045^0}{\ln 1.045}$
$= 899.02 - 3 \frac{1}{\ln 1.045} = 830.87$
Entsprechend gilt also
d) $K(10.8) = \frac{\ln(1.045)}{0.045} (830.87 - 628.27) = 198.18$

8. $K_B(5.2) = \frac{\ln(1+0.033)}{0.033} \int_0^{5.2} \frac{0.5t+2}{(1+0.033)^t} dt = 15.363$ (s. Formel (15.4.4))
$\int_0^{5.2} \frac{0.5t+2}{(1+0.033)^t} dt = 15.615$ denn:
$\frac{d}{dt} a^{-t} = -\frac{\ln a}{a^t}$ und entsprechend $\frac{d}{dt} \frac{1}{-a^t \ln a} = \frac{1}{a^t}$. Mit partieller Integration erhält man also:
$\int_0^{5.2} \frac{0.5t+2}{(1+0.033)^t} dt = \frac{0.5t+2}{-1.033^t \ln(1.033)}\Big|_0^{5.2} - \int_0^{5.2} \frac{0.5}{-1.033^t \ln(1.033)} dt$
wobei $\int_0^{5.2} \frac{0.5}{-1.033^t \ln(1.033)} dt = -\frac{0.5}{\ln(1.033)} \int_0^{5.2} \frac{1}{1.033^t} dt = -\frac{0.5}{\ln(1.033)} \cdot \frac{1}{1.033^t \ln 1.033}\Big|_0^{5.2}$.

9. Die stetige Rentenformel abgeleitet ergibt (Bei der Ableitung mit Hilfe von Programmen ist darauf zu achten, dass i gewöhnlich die imaginäre Zahl bezeichet. Man müsste entsprechend vorgängig i durch einen anderen Buchstaben ersetzen):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{R}{i}\frac{e^{it}-1}{e^{it}}\right) &= \frac{R}{i}\frac{e^{it}ie^{it}-\left(e^{it}-1\right)e^{it}i}{e^{2it}}\\ &= \frac{R}{i}\frac{e^{it}i-\left(e^{it}-1\right)i}{e^{it}}\\ &= R\frac{e^{it}-e^{it}+1}{e^{it}}\\ &= \frac{R}{e^{it}}.\end{aligned}$$

Entsprechend ist $\frac{R}{i}\frac{e^{it}-1}{e^{it}}$ eine Stammfunktion von $\frac{R}{e^{it}}$ und es gilt:

$$\frac{R}{i}\frac{e^{iT}-1}{e^{iT}} = \int_0^T \frac{R}{e^{it}}dt$$

Man kann nun die Konstante R wiederum durch eine integrierbare Funktion f ersetzen und erhält für den Barwert eines entsprechenden Finanzflusses

$$\int_0^T \frac{f\left(t\right)}{e^{it}}dt.$$

Zu ersetzen sind in 15.4.5 also nur die Teile der Formel, welche die Diskontierung betreffen:

$$K_0(T) = -I + \frac{\ln\left(1+i\right)}{i}\int_0^T \frac{r(t)-k(t)}{e^{t\ln(1+i)}}dt + \frac{L(T)}{e^{T\ln(1+i)}}.$$

Ableiten ergibt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dT}\left(K_0\left(T\right)\right) &= \frac{\ln\left(1+i\right)}{i}\frac{r\left(T\right)-k\left(T\right)}{e^{T\ln(1+i)}} + \frac{L'\left(T\right)e^{T\ln(1+i)}-L\left(T\right)e^{T\ln(1+i)}\ln\left(1+i\right)}{e^{2T\ln(1+i)}}\\ &= \frac{\ln\left(1+i\right)}{i}\frac{r\left(T\right)-k\left(T\right)}{e^{T\ln(1+i)}} + \frac{L'\left(T\right)-L\left(T\right)\ln\left(1+i\right)}{e^{T\ln(1+i)}}\end{aligned}$$

Eine Extremum liegt vor bei

$$\begin{aligned}\frac{\ln\left(1+i\right)}{i}\frac{r\left(T\right)-k\left(T\right)}{e^{T\ln(1+i)}} + \frac{L'\left(T\right)-L\left(T\right)\ln\left(1+i\right)}{e^{T\ln(1+i)}} &= 0\\ \frac{\ln\left(1+i\right)}{i}\left(r\left(T\right)-k\left(T\right)\right) + L'\left(T\right)-L\left(T\right)\ln\left(1+i\right) &= 0\end{aligned}$$

Man erhält also dieselbe Formel wie oben und entsprechend durch Einsetzen dieselbe optimale Dauer von 7.6834 Jahren. Die Berechnung des Barwertes ergibt damit

$$\begin{aligned}&-I + \frac{0.1}{0.105170918}\int_0^{7.6834}\frac{r(t)-k(t)}{e^{t0.1}}dt + \frac{L(7.6834)}{e^{7.6834\cdot 0.1}}\\ &= -2000 + 0.950\,83\int_0^{7.6834}\frac{500-40t}{e^{t0.1}}dt + \frac{1600-100\cdot 7.6834}{e^{7.6834\cdot 0.1}}\end{aligned}$$

$$\int_0^{7.6834}\frac{500-40t}{e^{t0.1}}dt = \left(500-40t\right)\left(-\frac{e^{-t0.1}}{0.1}\right)\Big|_0^{7.6834} - \int_0^{7.6834} -40\left(-\frac{e^{-t0.1}}{0.1}\right)dt$$

denn $\frac{1}{e^{t0.1}} = e^{-t0.1}$ und $\frac{d}{dt}\left(-\frac{e^{-t0.1}}{0.1}\right) = e^{-0.1t}$.

$$\int_0^{7.6834} -40\left(-\frac{e^{-t0.1}}{0.1}\right)dt = 400\int_0^{7.6834} e^{-0.1t}dt = 400\left(-\frac{e^{-t0.1}}{0.1}\right)\Bigg|_0^{7.6834}$$

Man erhält dasselbe Resultat wie oben - die Berechnung wird etwas vereinfacht.

15.4.6 Lernziele

- Den Begriff des unbestimmten Integrals kennen und unbestimmte Integrale für die behandelten Funktionen berechnen können.
- Den Begriff des bestimmten Integrals kennen und seinen Bezug zum unbestimmten Integral angeben können (Hauptsatz). Mit Hilfe des Hauptsatzes bestimmte Integrale berechnen können.
- Flächen und Integrale zwischen der x-Achse und Funktionen berechnen können (für die behandelten Funktionen - siehe Aufgaben und Beispiele).
- Flächen und Integrale zwischen zwei Funktionen berechnen können (für die behandelten Funktionen - siehe Aufgaben und Beispiele)
- Das unbestimmte Integral für einfache Fälle berechnen können
- die finanzmathematischen Beispiele kennen und Berechnungen wie in den Übungen durchführen können.

Kapitel 16

Lineare Funktionen, Matrizen und lineare Gleichungssysteme

Beim Berechnen von Polynomen durch Punkte mussten Gleichungssysteme ersten Grades aufgelöst werden, in denen mehrere Variablen vorkamen. In diesem Kapitel geht es darum, hierfür effiziente Lösungsmöglichkeiten bereitzustellen. Dazu sind ein paar Vorarbeiten nötig, die eine eigenständige Bedeutung haben - oft auch für die unmittelbare ökonomische Anwendung.

16.1 Lineare Abbildungen

Den Ausdruck

$$5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 17x_4,$$

kann man verwenden, um einem 4-Tupel von Zahlen genau eine Zahl zuzuordnen. Setzen wir nämlich z.B.

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1.2, 3, 4.5, 0.5)$$

so gilt

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 17x_4 &= 5 \cdot 1.2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4.5 + 17 \cdot 0.5 \\ &= 41.5 \end{aligned}$$

Der obige Ausdruck ordnet damit dem $4-Tupel$ $(1.2, 3, 4.5, 0.5)$ die Zahl 41.5 zu. Anderen $4-$Tupeln wird ebenfalls derart eine Zahl zugeordnet. Damit wird durch den Ausdruck eine Abbildung von $\mathbb{R}^4$ nach $\mathbb{R}$ definiert:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \\ f((x_1, x_2, x_3, x_4)) &:= 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 17x_4 \end{aligned} \tag{16.1.1}$$

Wir nennen $5, 3, 4$ und 17 die Koeffizienten des Ausdrucks $5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 17x_4$. Wir beziehen uns auf den Koeffizienten des Faktors x_i mit a_i.

Beispiel 16.1.1. *Funktionen der Art (16.1.1) finden ökonomische Interpretationen. So braucht man z.B. fürs Brotbacken Mehl. Ebenso fürs Backen von Wegglis und Nussgipfeln. Wir nehmen an, man brauche für 1 Kg Brot 800 g Mehl, für ein Weggli 80 g und für einen Nussgipfel 70 g. Wir nehmen nun an, wir möchten 70 Brote, 120 Wegglis und 17 Nussgipfel backen und möchten dazu die benötigte Menge Mehl berechnen. Wir multiplizieren die gewünschte Anzahl Brote, Anzahl Wegglis und Anzahl Nussgipfel mit der jeweils pro Stück nötigen Menge und addieren diese Produkte, d.h. wir berechnen*

$$f((70, 120, 17)) = 800 \cdot 70 + 80 \cdot 120 + 70 \cdot 17 = 66790.$$

Die Funktion $f((x_1, x_2, x_3)) = 800x_1+80x_2+70x_3$ *ordnet die benötigte Menge Mehl jeder gewünschten Outputkombination* (x_1, x_2, x_3) *zu.* ◊

Bemerkung 16.1.2. *Auf die inneren Klammern bei* $f((x_1, x_2, x_3, x_4))$ *wird künftig verzichtet, so dass nur mehr* $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ *geschrieben wird.* ◊

Bemerkung 16.1.3. *Allgemein kann man eine Funktion der Art (16.1.1) ausdrücken durch*

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, ..., x_n) := \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

wobei $a_i \in \mathbb{R}$ *die Koeffizienten sind und* $\mathbf{x} := (x_1, ..., x_n)$. ◊

Betrachten wir m Ausdrücke der Art

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

zusammen - wir nennen solche Ansammlungen von Ausdrücken künftig „System von Ausdrücken“, so können wir Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ definieren. So definieren die Ausdrücke

$$1.2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 12x_4$$
$$3x_1 + 12x_2 - x_3 + 7x_4$$
$$15x_1 + 200x_2 + 4.3x_3 + 2x_4$$

eine Funktion von $\mathbb{R}^4$ nach $\mathbb{R}^3$, wenn wir die Tripel betrachten, die durch diese drei Ausdrücke in ihrer Reihenfolge beim Einsetzen von Zahlen für x_1, x_2, x_3 und x_4 bestimmt sind. Diese Funktion würde z.B. dem $4-Tupel$ (1.2, 3, 4.5, 0.5) das $Tripel$ (55.44, 38.6, 638.35) zuordnen. Schreiben wir $n-$Tupel statt auf einer Zeile als Spalte hin - dies machen wir aus praktischen Gründen - so gilt damit:

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \tag{16.1.2}$$
$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1.2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 12x_4 \\ 3x_1 + 12x_2 - x_3 + 7x_4 \\ 15x_1 + 200x_2 + 4.3x_3 + 2x_4 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 16.1.4. *Es ist üblich,* $n-Tupel$ *in diesem Zusammenhang als „Vektoren“ zu bezeichnen. Wir werden uns hier an diese Sprachregelung halten. Es ist zu beachten, dass ein Vektor hier genau dasselbe wie ein* $n-Tupel$ *ist, unabhängig davon, wie es auf dem Papier dargestellt wird. Der Vektorbegriff der linearen Algebra ist allerdings weiter als der des* $n-Tupels$. *Ein Vektor ist Element eines sogenannten Vektorraumes - eine mathematische Struktur, das wir aus Zeitgründen nicht einführen können. Je nach betrachtetem Vektorraum sind Vektoren Funktionen,* $n-Tupel$ *oder andere mathematische Objekte.* ◊

Bemerkung 16.1.5. *Allgemein kann man eine Funktion der Art* (16.1.2) *ausdrücken durch*

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn-1}x_{n-1} + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{pmatrix}$$

Wir brauchen nun für die Koeffizienten zwei Indizes, da diese in jeder Zeile verschieden sein können. Der erste Index drückt jeweils die Zeile i aus, in der der Koeffizient a_{ij} auftaucht. Der zweite Index drückt jeweils aus, mit welchem x_j der Koeffizient a_{ij} zu multiplizieren ist. ◊

Beispiel 16.1.6. *Auch Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ können ökonomisch interpretiert werden. Fürs Brotbacken braucht man ja nicht nur Mehl, sondern auch Salz, Wasser und eventuell weitere Zutaten wie Butter, Nüsse, etc. So brauche man - nehmen wir an - für ein normales Brot 800 g Mehl, 300 g Wasser, 25 g Hefe und 30 g Salz. Für ein Weggli brauche man 80 g Mehl, 30 g Wasser, 3 g Hefe, 3 g Salz und 20 g Butter. Für einen Nussgipfel brauche man 70 g Mehl, 3 g Salz, 3 g Hefe, 30 g Wasser, 10 g Butter und 30 g Nüsse (frei erfundene Zahlen; zum Nachbacken verwende man ein Kochbuch!). Wir möchten wissen, wieviel von diesen Zutaten wir brauchen, wenn wir 50 Brote, 27 Wegglis und 30 Nussgipfel backen wollen. Wir können das folgende System von Ausdrücken aufstellen:*

$$\begin{aligned} Mehl &: 800x_1 + 80x_2 + 70x_3 \\ Wasser &: 300x_1 + 30x_2 + 30x_3 \\ Hefe &: 25x_1 + 3x_2 + 3x_3 \\ Salz &: 30x_1 + 3x_2 + 3x_3 \\ Butter &: 20x_2 + 10x_3 \\ Nüsse &: 30x_3 \end{aligned}$$

Durch dieses System ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6$$
$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 800x_1 + 80x_2 + 70x_3 \\ 300x_1 + 30x_2 + 30x_3 \\ 25x_1 + 3x_2 + 3x_3 \\ 30x_1 + 3x_2 + 3x_3 \\ 20x_2 + 10x_3 \\ 30x_3 \end{pmatrix}$$

festgelegt. Jeder Mengenkombination an gewünschtem Output wird die nötige Inputmengenkombination der Rohstoffe zugordnet. Wollen wir z.B. die Einkaufsmengen für den angestrebten Output-Vektor $(50, 27, 30)$ berechnen, so berechnen wir $f(x_1, x_2, x_3)$ für $(x_1, x_2, x_3) = (50, 27, 30)$. Man erhält:

$$f\begin{pmatrix} 50 \\ 27 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 800 \cdot 50 + 80 \cdot 27 + 70 \cdot 30 \\ 300 \cdot 50 + 30 \cdot 27 + 30 \cdot 30 \\ 25 \cdot 50 + 3 \cdot 27 + 3 \cdot 30 \\ 30 \cdot 50 + 3 \cdot 27 + 3 \cdot 30 \\ 20 \cdot 27 + 10 \cdot 30 \\ 30 \cdot 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44260 \\ 16710 \\ 1421 \\ 1671 \\ 840 \\ 900 \end{pmatrix}$$

◊

Als nächstes definieren wir ein paar Operationen auf $n - Tupel$.

Definition 16.1.7. *(Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl) Sei* $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ *und* $a \in \mathbb{R}$, *dann ist*

$$a\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix}$$

Beispiel 16.1.8. *a)*

$$5\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 3 \\ 5 \cdot 2 \\ 5 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 40 \end{pmatrix}$$

b) ökonomisches Beispiel: Eine Unternehmung produziere von 4 verschiedene Produkte und pro Monat folgende Mengen

$$\begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 50 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Dann produziert Sie in 12 Monaten:

$$12\begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 50 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \cdot 40 \\ 12 \cdot 30 \\ 12 \cdot 50 \\ 12 \cdot 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 480 \\ 360 \\ 600 \\ 1200 \end{pmatrix}$$

◊

◊

Definition 16.1.9. *: Sei* $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$*, dann ist*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

◊

Beispiel 16.1.10. *a)*

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ 3 \\ 1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 17 \\ 8 \\ 7.5 \end{pmatrix}$$

b) ökonomisches Beispiel: Eine Unternehmung habe zwei Standorte, an denen dieselben Produkte erzeugt werden. Die produzierte Menge pro Standort sei durch die folgenden zwei Vektoren gegeben:

$$\begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 500 \\ 80 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 \\ 80 \\ 100 \\ 250 \end{pmatrix}$$

Dann ist die Gesamtproduktion des Betriebes gegeben durch:

$$\begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 500 \\ 80 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 80 \\ 100 \\ 250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 120 \\ 600 \\ 330 \end{pmatrix}$$

◊

Definition 16.1.11. *Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ für $n, m \in \mathbb{N}^*$ heisst „linear“ genau dann, wenn*

$$f(ax) = af(x)$$
$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

für $a \in \mathbb{R}$ *(s. auch Seite 81)*

$\Diamond$

Praktisch bedeutet die Linearität folgendes. Kennen wir $f(x)$, und möchten wir wissen, wieviel $f(ax)$ ist, genügt es, $f(x)$ mit a zu multiplizieren. Kennen wir $f(x)$ und $f(y)$, und möchten wir $f(x+y)$ kennen, so genügt es, $f(x)$ und $f(y)$ zu addieren.

Satz 16.1.12. *Funktionen*

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{pmatrix}$$

mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$ sind linear.

Beweis. a) Sei $a_{ij}, a \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, dann gilt mit den obigen Operationen:

$$f(a\mathbf{x}) = f\left(a\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} ax_1 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}ax_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}ax_j \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ a\sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{pmatrix} = af\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = af(\mathbf{x})$$

b) Sei $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ dann gilt mit den obigen Operationen:

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(x_j+y_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}(x_j+y_j) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j + \sum_{j=1}^{n} a_{1j}y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j + \sum_{j=1}^{n} a_{mj}y_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}y_j \end{pmatrix}$$

$$= f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$$

□

Als nächstes führen wir eine übersichtlichere Schreibweise für lineare Abbildungen ein. Wir ordnen die Koeffizienten a_{ij} als Tabelle an, die wir mit einer Klammer umschliessen:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

So würden die Koeffizienten des Systems

$$\begin{aligned} &1.2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 12x_4 \\ &3x_1 + 12x_2 - x_3 + 7x_4 \\ &15x_1 + 200x_2 + 4.3x_3 + 2x_4 \end{aligned}$$

dargestellt durch

$$\begin{pmatrix} 1.2 & 4 & 8 & 12 \\ 3 & 12 & -1 & 7 \\ 15 & 200 & 4.3 & 2 \end{pmatrix} \tag{16.1.3}$$

Solche Tabellen werden wir künftig „Matrizen“ (Einzahl „Matrix“) nennen. Eine Matrix, die m Zeilen und n Spalten aufweist, wird $(m,n) - Matrix$ genannt (Sprich: m mal n Matrix).

Bemerkung 16.1.13. *Matrizen werden in der Mathematik nicht nur als tabellarische Darstellung von Zahlen auf Papier betrachtet sondern als mathematische Objekte (wie Zahlen, Mengen, Funktionen, etc.). Eine $(m,n) - Matrix$ wird definiert als Funktion $N_m^* \times N_n^* \to \mathbb{R}$. So wäre der Graph der obigen Matrix (16.1.3)*

$$\begin{aligned} &\{(1,1,1.2),(1,2,4),(1,3,8),(1,4,12), \\ &(2,1,3),(2,2,12),(2,3,-1),(2,4,7), \\ &(3,1,15),(3,2,200),(3,3,4.3),(3,4,2)\}. \end{aligned}$$

Diese Darstellung ist nicht üblich, ist aber manchmal hilfreich fürs Verständnis. ◊

Wir verwenden als Variablen für Matrizen die fetten Grossbuchstaben $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots$. Da der Zusammenhang klar macht, was gemeint ist, kann man handschriftlich normale Grossbuchstaben verwenden. Die Zahlen in einer Matrix $\mathbf{A}$ nennen wir „Komponenten der Matrix“. Komponenten der Matrix $\mathbf{A}$ werden allgemein bezeichnet durch a_{ij}, wobei i die Zeile der Matrix angibt und j die Spalte der Matrix, in der sich die Komponente befindet. So ist in der obigen Matrix (16.1.3) $a_{23} = -1; a_{31} = 15; a_{13} = 8$.

Wir definieren die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektoren wie folgt:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{pmatrix}$$

An einem Beispiel:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 + 2x_2 \\ 3 \cdot x_1 + 5x_2 \\ 4 \cdot x_1 + 6x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{2} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{2} a_{2j}x_j \\ \sum_{j=1}^{2} a_{3j}x_j \end{pmatrix}$$

Man sieht, dass das Resultat der Matrixmultiplikation mit der rechten Seite von

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{pmatrix}$$

identisch ist (s. Bemerkung 16.1.5). Wir können lineare Abbildungen also künftig mit

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

definieren. Kürzen wir $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ durch $\mathbf{x}$ ab, so entsteht die handliche Darstellung:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$f(\mathbf{x}) := \mathbf{A}\mathbf{x}$$

mit einer (m, n) −Matrix $\mathbf{A}$.

Beispiel 16.1.14. *Für die obige Zusammenstellung*

$$\begin{aligned} Mehl &: 800x_1 + 80x_2 + 70x_3 \\ Wasser &: 300x_1 + 30x_2 + 30x_3 \\ Hefe &: 25x_1 + 3x_2 + 3x_3 \\ Salz &: 30x_1 + 3x_2 + 3x_3 \\ Butter &: 20x_2 + 10x_3 \\ Nüsse &: 30x_3 \end{aligned}$$

erhält man die Matrix

$$\begin{pmatrix} 800 & 80 & 70 \\ 300 & 30 & 30 \\ 25 & 3 & 3 \\ 30 & 3 & 3 \\ 0 & 20 & 10 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

Diese nennen wir „Produktionsmatrix". Will man die nötige Menge an Rohstoffen berechnen, so multipliziert man die Produktionsmatrix mit dem Vektor der gewünschten Output-Mengen. So erhält man z.B. für $\begin{pmatrix} 50 \\ 27 \\ 30 \end{pmatrix}$*:*

$$\begin{pmatrix} 800 & 80 & 70 \\ 300 & 30 & 30 \\ 25 & 3 & 3 \\ 30 & 3 & 3 \\ 0 & 20 & 10 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 27 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44\,260 \\ 16\,710 \\ 1421 \\ 1671 \\ 840 \\ 900 \end{pmatrix}$$

Der letzte Vektor ist der Input-Vektor.

◊

Beispiel 16.1.15. *Für das Brotbackbeispiel 16.1.1 mit der Funktion*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$f((x_1, x_2, x_3)) = 800x_1 + 80x_2 + 70x_3$$

erhält man die einzeilige Matrix

$$\begin{pmatrix} 800 & 80 & 70 \end{pmatrix},$$

womit

$$f(70, 120, 17) = \begin{pmatrix} 800 & 80 & 70 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 70 \\ 120 \\ 17 \end{pmatrix} = 66\,790$$

◊

Bemerkung 16.1.16.

- *Im vorangegangenen Beispiel 16.1.15 zeigt sich, dass einer linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine einzeilige Matrix mit n Spalten entspricht. Diese unterscheidet sich äusserlich von einem $n-$Tupel dadurch, dass die Zahlen nicht durch Kommas abgetrennt werden. Eine einzeilige Matrix ist gemäss Bemerkung 16.1.13 eine Funktion $A : \{1\} \times \{1, ..., n\} \to \mathbb{R}$. Damit ist eine einzeilige Matrix mit n Spalten von einem $n-$Tupel verschieden. Fürs obige Beispiel würden wir als Graphen der Matrix erhalten:*

$$\{(1, 1, 800), (1, 2, 80), (1, 3, 70)\} \neq (800, 80, 70).$$

- *Es gibt auch einspaltige Matrizen. Diese sind zu verstehen als Minifunktionen*

$$\{1, ..., n\} \times \{1\} \to \mathbb{R}$$

So gilt z.B. für die folgende einspaltige Matrix

$$\begin{pmatrix} 660 \\ 626 \\ 40 \\ 22 \end{pmatrix}$$

der Graph

$$\{(1,1,660),(2,1,626),(3,1,40),(4,1,22)\}$$

Dieser ist vom Graphen

$$\{(1,1,660),(1,2,626),(1,3,40),(1,4,22)\}$$

der entsprechenden einzeiligen Matrix

$$\begin{pmatrix} 660 & 626 & 40 & 22 \end{pmatrix}$$

verschieden.
Die einspaltige Matrix ist aber auch vom 4-Tupel $(660,626,40,22)$ *verschieden. Als Spalte geschrieben ist der Vektor von der einspaltigen Matrix mit der bisherigen Notation nicht zu unterscheiden. Allerdings werden wir keine Schreibweise einführen, um Vektoren von einspaltigen Matrizen zu unterscheiden, da Vektoren und einspaltige Matrizen bezüglich der mathematischen Operationen der Addition und der Multiplikation mit einer Konstanten genau gleich behandelt werden. Die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor und einer Matrix mit einer einspaltigen Matrix unterscheidet sich äusserlich ebenfalls nicht. Entsprechend lohnt sich eine Unterscheidung der beiden Objektarten nicht. Da Vektoren und einspaltige Matrizen aber verschieden sind, darf man sie nicht gleichsetzen, selbst wenn man sie gleich behandelt!*

- *Die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor mit n Komponenten ist nur definiert, falls die Matrix n Spalten hat.*
- *Die Multiplikation einer* $(m,n)-$*Matrix und eines Vektors mit n Komponenten ergibt einen Vektor mit m Komponenten.*

$\Diamond$

Mit Excel gibt man zwecks Multiplikation der Matrix mit einem Vektor die Zahlen der Matrix in eine Tabelle ein (z.B. eine (m,n)-Matrix in $A1:Xm$ (X sei der n-te Buchstabe des Alphabets). Dann gibt man den Vektor als Spalte in die Tabelle ein (z.B. $A\,(m+1):A(m+1+n)$). Dann wird eine von Zahlen freie Spalte mit m Zellen beleuchtet und in die erste „$=mmult(A1:Xm;A\,(m+1):A(m+1+n))$“ geschrieben. Es wird mit „ctrl+shift+enter“ bestätigt.

In R wird eine Matrix eingegeben und unter A abgespeichert durch

$$A = matrix(c(a_{11},a_{12},a_{13},...,a_{1n},a_{21},...,a_{mn}),byrow=T,ncol=n)$$

(`byrow=T` gibt an, dass die Komponenten zeilenweise im Vektor $c(a_{11},a_{12},a_{13},...,a_{1n},a_{21},...,a_{mn})$ aufgeschrieben sind, fehlt die Angabe geht R davon aus, dass die Komponenten spaltenweise eingegeben sind; `ncol` gibt die Anzahl der Spalten der Matrix an). So wird für die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 8 & 11 \\ 12 & 12 & 10 \end{pmatrix}$$

geschrieben: $A = matrix(c(4,3,1,5,8,11,12,12,10),byrow=T,ncol=3)$.
Die Multiplikation mit einem Vektor $\mathbf{x}$ erfolgt durch
$A\%*\%c(x_1,x_2,...x_n)$ oder z.B. durch $A\%*\%x$, wenn man vorgängig $x=c(x_1,...,x_n)$ definiert.

Definition 16.1.17. *Vektoren, die bis auf eine Zelle i nur Nullen aufweisen und die in der* $i-$*ten Zelle eine* 1 *aufweisen, werden Einheitsvektoren genannt. Wir kürzen sie ab durch* $\mathbf{e}_i$*. Wenn die Anzahl n der Komponenten des Vektors erwähnt werden soll, schreibt man* $\mathbf{e}_i^n$ $\Diamond$

Beispiel 16.1.18.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \textit{ ist der Vektor } \mathbf{e}_2^3$$
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \textit{ ist der Vektor } \mathbf{e}_1^4$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \textit{ ist der Vektor } \mathbf{e}_3^4$$

$\Diamond$

Satz 16.1.19. *Multipliziert man eine $(m,n)-$Matrix mit dem Vektor e_i^n, so erhält man die $i-$te Spalte der Matrix als Resultat.*

Beispiel 16.1.20.

$$\begin{pmatrix} 1.2 & 4 & 8 & 12 \\ 3 & 12 & -1 & 7 \\ 15 & 200 & 4.3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 200 \end{pmatrix}$$

$\Diamond$

Übungen

1. Sei

$$f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$$
$$f(\mathbf{x}) = 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 14x_4 + 1.5x_5$$

   Berechnen Sie $f(7, 8.9, 10, 11, 12)$ mit Hilfe der Gleichung und mit Hilfe der Matrixmultiplikation.

2. Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 + 3.3x_2 \\ 4x_1 - 2x_2 \\ 15x_1 + \sqrt{5}x_2 \end{pmatrix}$$

   Berechnen Sie $f(7, 8.9)$ a) durch Einsetzung in die obige Gleichung.
   b) Mit Hilfe der Matrixmultiplikation (von Hand und mit Excel).

3. Eine Baufertigelementefirma produziert Zementplatten, Zementdeckel und Zementziegel. Für eine Platte braucht es 500 kg Zement, für einen Deckel 30 kg und für einen Ziegel 60 kg.
   a) Geben Sie die Produktionsmatrix an.
   b) Berechnen Sie die Menge Zement, die es für die Produktion von 60 Platten, 100 Deckeln und 40 Ziegeln braucht.

4. Eine Baufertigelementefirma produziert Zementplatten, Zementdeckel und Zementziegel. Für eine Platte braucht es 500 kg Zement, 200 kg Sand und 50 kg Stahl, für einen Deckel 30 kg Zement, 15 kg Sand und 3 kg Stahl und für einen Ziegel 60 kg Zement und 30 kg Sand.
a) Geben Sie die Produktionsmatrix an.
b) Berechnen Sie den Zement, den Sand und den Stahl, den es für die Produktion von 60 Platten, 100 Deckeln und 40 Ziegeln braucht.

5. Bei der Produktion von Kunststein brauche man pro 100 kg 75 kg Zement, 20 kg Marmorkies und 5 kg Spezialleim.
a) Geben Sie die Funktion an, welche einem gewünschten Output den erforderlichen Input zuordnet. Berechnen sie den nötigen Input für einen Output von 1780.
b) Geben Sie die Funktion mit Hilfe der Matrixmultiplikation an.

Lösungen

1. Wir erhalten

$$\begin{aligned} f(7, 8.9, 10, 11, 12) &= 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 14x_4 + 1.5x_5 \\ &= 5 \cdot 7 + 3 \cdot 8.9 - 2 \cdot 10 + 14 \cdot 11 + 1.5 \cdot 12 \\ &= 213.\,7 \end{aligned}$$

oder mit Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 & 14 & 1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8.9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} = 213.7$$

2.

$$f\begin{pmatrix} 7 \\ 8.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 7 + 3.3 \cdot 8.9 \\ 4 \cdot 7 - 2 \cdot 8.9 \\ 15 \cdot 7 + \sqrt{5} \cdot 8.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64.37 \\ 10.2 \\ 124.9 \end{pmatrix}$$

Mit Matrixmultiplikation:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3.3 \\ 4 & -2 \\ 15 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64.\,37 \\ 10.\,2 \\ 8.\,9\sqrt{5} + 105 \end{pmatrix}$$

$8.9\sqrt{5} + 105 = 124.\,9.$

3. a) $\begin{pmatrix} 500 & 30 & 60 \end{pmatrix}$ b) $f(60, 100, 40) = \begin{pmatrix} 500 & 30 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 60 \\ 100 \\ 40 \end{pmatrix} = 35400$

4. a)

$$\begin{pmatrix} 500 & 30 & 60 \\ 200 & 15 & 30 \\ 50 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $f(60, 100, 40) = \begin{pmatrix} 500 & 30 & 60 \\ 200 & 15 & 30 \\ 50 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 60 \\ 100 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35\,400 \\ 14\,700 \\ 3300 \end{pmatrix}$

5. a)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$
$$f(x) = \begin{pmatrix} 75x \\ 20x \\ 5x \end{pmatrix}$$
$$f(1780) = \begin{pmatrix} 75 \cdot 1780 \\ 20 \cdot 1780 \\ 5 \cdot 1780 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 133\,500 \\ 35\,600 \\ 8900 \end{pmatrix}$$

b) Der Vektor, mit dem die Matrix multipliziert wird, besteht nur aus einer Zahl. Die Multiplikation kann man sich als Multiplikation der Matrix mit dem einstelligen Vektor $\mathbf{x}$ vorstellen:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \begin{pmatrix} 75 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix} x$$
$$f\,(1780) = \begin{pmatrix} 75 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix} 1780 = \begin{pmatrix} 133\,500 \\ 35\,600 \\ 8900 \end{pmatrix}$$

16.2 Operationen auf lineare Abbildungen und Matrizen

Mit der Definition 1.8.31 bezüglich der (punktweisen) Addition von Funktionen ergibt sich auch eine punktweise Addition von linearen Funktionen f und g, sofern diese denselben Definitions- und Wertebereich aufweisen. Die Summe linearer Funktionen ist wiederum eine lineare Funktion. Es stellt sich die Frage, ob sich die Addition von f und g mit Hilfe der zugehörigen Matrizen darstellen lässt. In der Tat können wir zwei $(m, n) - Matrizen$ $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$, welche zwei lineare Funktionen f und g definieren, gemäss Definition 1.8.31 punktweise addieren und wir erhalten eine Matrix, die der Addition $f + g$ entspricht. Wir halten dies noch formeller und ohne Beweis fest:

Satz 16.2.1. *Seien* $\mathbf{A}$ *und* $\mathbf{B}$ *zwei* $(m, n) - Matrizen$*, welche die linearen Abbildungen* f *und* g *definieren. Dann gilt:*

$$f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B})\,\mathbf{x}$$

wobei $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ *definiert ist durch* $a_{ij} + b_{ij}$ *für* $1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n$.

Beispiel 16.2.2. *Sei*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

dann ist

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 7 \\ 11 & 14 \end{pmatrix}$$

Sei nun der Vektor $(20, 22)$ *gegeben. Dann gilt*

$$f\begin{pmatrix} 20 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 232 \\ 358 \end{pmatrix}$$

$$g\begin{pmatrix} 20 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 242 \\ 170 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 20 \\ 22 \end{pmatrix} + g\begin{pmatrix} 20 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 474 \\ 528 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\begin{pmatrix} 20 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 7 \\ 11 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 474 \\ 528 \end{pmatrix}$$

◊

Die punktweise Multiplikation gemäss Definition 1.8.33 führt ausser im Fall der Multiplikation mit einer Konstanten nicht auf lineare Funktionen und ist deshalb nicht im Rahmen linearer Funktionen zu behandeln. Im Falle der Multiplikation mit einer Konstanten gilt hingegen wie bei der Addition, dass wiederum eine lineare Funktion entsteht. Die punktweise Multiplikation der $(m, n)-$Matrix $\mathbf{A}$ mit einer reellen Konstanten b entspricht dabei der punktweisen Multiplikation der durch $\mathbf{A}$ bestimmten Funktion f mit einer Konstanten b, wobei $b\mathbf{A}$ gemäss Definition 1.8.33 festgelegt ist durch ba_{ij} für alle $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$. Es gilt also, wie wir etwas formeller und ebenfalls ohne Beweis festhalten:

Satz 16.2.3. *Für eine Matrix* $\mathbf{A}$*, welche die lineare Funktion* f *festlegt, und eine reelle Zahl* b *gilt:*

$$bf(\mathbf{x}) = (b\mathbf{A})\,\mathbf{x}$$

wobei $b\mathbf{A}$ *durch* ba_{ij} *für alle* $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ *festgelegt ist.*

Beispiel 16.2.4. *Für* $b = 4$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

und den Vektor $(20, 22)$ *gilt:*

$$4f\begin{pmatrix} 20 \\ 22 \end{pmatrix} = 4\left(\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 22 \end{pmatrix}\right) = 4\begin{pmatrix} 232 \\ 358 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 928 \\ 1432 \end{pmatrix}$$

$$\left(4\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 20 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 24 \\ 32 & 36 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 928 \\ 1432 \end{pmatrix}$$

◊

Definition 16.2.5. *Eine Matrix, die als Komponenten nur* 0 *enthält, heisst Nullmatrix. Sie wird durch* $\mathbf{O}$ *abgekürzt. Wird die Nullmatrix mit einer* $(m, n)-$ *Matrix addiert, gehen wir gewöhnlich stillschweigend davon aus, dass* $\mathbf{O}$ *eine* $(m, n)-$ *Matrix ist.* ◊

Wir halten in Bezug auf die zwei eingeführten Operationen noch ein paar offensichtliche Regeln fest:

Satz 16.2.6. *Für* $k, r \in \mathbb{R}$ *und* $(m, n) - Matrizen$ $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{O}$ *gilt:*

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$
$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$$
$$k(r\mathbf{A}) = (kr)\mathbf{A}$$
$$k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$$
$$(k + r)\mathbf{A} = k\mathbf{A} + r\mathbf{A}$$
$$\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A} = \mathbf{O} + \mathbf{A}$$

Mit Excel: In einer leeren Zelle die Zellen a_{11} und b_{11} addieren. Über die entsprechend Anzahl Spalten und Zeilen ziehen.
Mit R: A+B.

Neben der eingeführten Addition linearer Funktionen und der Multiplikation mit einer reellen Zahl, spielt die Berechnung der Verkettungen von linearen Funktionen eine wichtige Rolle. In Bezug auf lineare ökonomische Funktionen wird die Verkettung etwa verwendet, wenn eine Firma zuerst Zwischenprodukte herstellt und diese dann für eine Endproduktion von Gütern verwendet. Hat man eine Produktionsmatrix, welche dem Vektor der Zwischenprodukte einen spezifischen Rohstoff-Input-Vektor zuordnet - wir nennen diese Produktionsmatrix künftig „Rohstoffmatrix“ - und eine Produktionsmatrix, welche einem Vektor von Endprodukten den Inputvektor der Zwischenprodukte zuordnet - wir nennen diese Matrix künftig kurz „Produktionsmatrix“- so möchten wir für einen Vektor von Endprodukten unmittelbar den Rohstoffinputvektor berechnen können. Wenn $\mathbf{B}$ die Rohstoffmatrix ist und $\mathbf{A}$ die Produktionsmatrix, so möchten wir

$$h(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{x})$$

berechnen. Es stellt sich die Frage, ob wir eine Matrix berechnen können, so dass

$$h(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

In der Tat gilt:

Satz 16.2.7. *Sei* $\mathbf{B}$ *eine* $(n,k)-$*Matrix und* $\mathbf{A}$ *eine* $(k,m)-$*Matrix so dass*

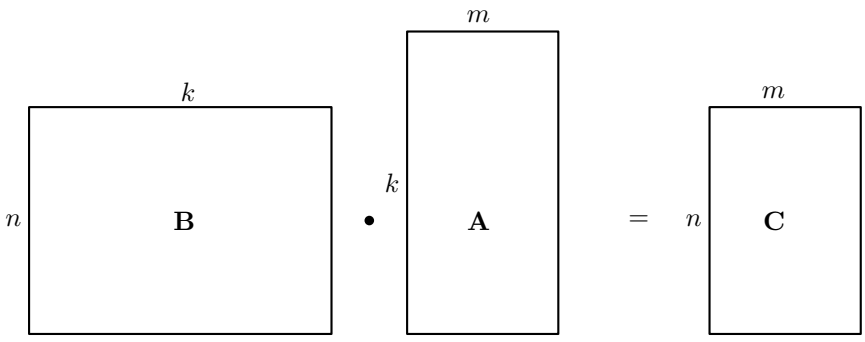
$$h(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{x}).$$

Dann gibt es eine $(n,m)-$*Matrix* $\mathbf{C}$*, so dass*

$$h(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\mathbf{x}.$$

Diese Matrix ist bestimmt durch

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} b_{il} a_{lj}$$



Beweis. Sei $\mathbf{B}$ eine (n,k)-Matrix und $\mathbf{A}$ eine (k,m)-Matrix und und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. Damit gilt

$$\mathbf{A}x = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m} a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} a_{kj} x_j \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{B}(\mathbf{A}x)) = \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^{k} b_{1l} \sum_{j=1}^{m} a_{lj} x_j \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^{k} b_{il} \sum_{j=1}^{m} a_{lj} x_j \\ \vdots \\ \sum_{n=1}^{k} b_{nl} \sum_{j=1}^{m} a_{lj} x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{l=1}^{k} b_{1l} a_{lj} \right) x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{l=1}^{k} b_{il} a_{lj} \right) x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{n=1}^{k} b_{nl} a_{lj} \right) x_j \end{pmatrix}$$

d.h. es gilt

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} b_{il} a_{lj}$$

□

Zusätzlich zum Beweis, ein illustratives Beispiel:

Beispiel 16.2.8. *Sei*

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =: \mathbf{Ax}$$

und

$$g \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =: \mathbf{Bx}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} g(f(\mathbf{x})) = \mathbf{B}(\mathbf{A}x) &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_{11}(x_1 a_{11} + x_2 a_{12}) + b_{12}(x_1 a_{21} + x_2 a_{22}) \\ b_{21}(x_1 a_{11} + x_2 a_{12}) + b_{22}(x_1 a_{21} + x_2 a_{22}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_{11} x_1 a_{11} + b_{11} x_2 a_{12} + b_{12} x_1 a_{21} + b_{12} x_2 a_{22} \\ b_{21} x_1 a_{11} + b_{21} x_2 a_{12} + b_{22} x_1 a_{21} + b_{22} x_2 a_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_{11} x_1 a_{11} + b_{11} x_2 a_{12} + b_{12} x_1 a_{21} + b_{12} x_2 a_{22} \\ b_{21} x_1 a_{11} + b_{21} x_2 a_{12} + b_{22} x_1 a_{21} + b_{22} x_2 a_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (b_{11} a_{11} + b_{12} a_{21}) x_1 + (b_{11} a_{12} + b_{12} a_{22}) x_2 \\ (b_{21} a_{11} + b_{22} a_{21}) x_1 + (b_{21} a_{12} + b_{22} a_{22}) x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_{11} a_{11} + b_{12} a_{21} & b_{11} a_{12} + b_{12} a_{22} \\ b_{21} a_{11} + b_{22} a_{21} & b_{21} a_{12} + b_{22} a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^{2} b_{1l} a_{l1} & \sum_{l=1}^{2} b_{1l} a_{l2} \\ \sum_{l=1}^{2} b_{2l} a_{l1} & \sum_{l=1}^{2} b_{2l} a_{l2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es gibt also eine Matrix

$$\mathbf{C} := \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{2} b_{1k} a_{k1} & \sum_{k=1}^{2} b_{1k} a_{k2} \\ \sum_{k=1}^{2} b_{2k} a_{k1} & \sum_{k=1}^{2} b_{2k} a_{k2} \end{pmatrix},$$

so dass $\mathbf{Cx} = \mathbf{A}(\mathbf{Bx})$*, wobei* $c_{ij} = \sum_{l=1}^{2} b_{il} a_{lj}$*.* ◊

Bemerkung 16.2.9. *Man muss für* c_{ij} *berechnen:*

$$a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + a_{i3} b_{3j} + ... + a_{im-1} b_{m-1j} + a_{im} b_{mj}$$

Hierzu noch ein konkretes Beispiel: Sei eine $(4,3)-$*Matrix* $\mathbf{A}$

$$\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ 4 & 5 & 6 \\ & & \end{pmatrix}$$

und eine $(3,3)-$*Matrix* $\mathbf{B}$

$$\begin{pmatrix} & 4 & \\ & 7 & \\ & 8 & \end{pmatrix}$$

Dann ist $c_{3,2} = \sum_{l=1}^{3} b_{3l}a_{l2} = 4 \cdot 4 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 8$ *oder in Matrixdarstellung*

$$\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ 4 & 5 & 6 \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 4 & \\ & 7 & \\ & 8 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & 4 \cdot 4 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 8 & \\ & & \end{pmatrix}$$

$\Diamond$

Beispiel 16.2.10. *Sei*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 14 & 8 \\ 1 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

dann ist

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 14 & 8 \\ 1 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 & 106 & 116 \\ 17 & 35 & 46 \\ 33 & 71 & 87 \end{pmatrix}$$

Wir können am Beispiel und für $\mathbf{x} = (14, 20, 5)$ *nachprüfen, dass*

$$\mathbf{B}(\mathbf{Ax}) = \mathbf{Cx}$$

denn

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84 \\ 271 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{B} \begin{pmatrix} 84 \\ 271 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 8 \\ 1 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 84 \\ 271 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3344 \\ 1168 \\ 2317 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{C} \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 & 106 & 116 \\ 17 & 35 & 46 \\ 33 & 71 & 87 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3344 \\ 1168 \\ 2317 \end{pmatrix}$$

$\Diamond$

Definition 16.2.11. *Für die $(k,n)-$Matrix $\mathbf{C}$, so dass*

$$\mathbf{Cx} = \mathbf{B}(\mathbf{Ax})$$

mit einer $(k,m)-$Matrix $\mathbf{B}$ und einer $(m,n)-$Matrix $\mathbf{A}$, schreiben wir

$$\mathbf{C} = \mathbf{BA}.$$

Wir nennen $\mathbf{C}$ das Produkt der Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ (in dieser Reihenfolge). Wir sagen, dass $\mathbf{C}$ mittels Matrixmultiplikation von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ resultiert. ◊

Bemerkung 16.2.12.

- *Die Matrixmultiplikation hat mit der punktweisen Multiplikation von Funktionen nichts zu tun!*
- *Die Matrixmultiplikation hat mit der Multiplikation, die auf reelle Zahlen definiert ist, wenig zu tun. Man könnte die Matrixmultiplikation auch „Matrixverkettung“ oder sonst wie nennen. Betrachtet man aber die Eigenschaften der Matrixmultiplikation im Satz, so ergeben sich gewisse Strukturähnlichkeiten mit der Multiplikation in den reellen Zahlen (Geltung der Assoziativ- und Distributivgesetze; Kommutativgesetz gilt aber nicht!). Es handelt sich um die Eigenschaften, die auch für die Verkettung gelten.*
- *Die Matrixmultiplikation $\mathbf{BA}$ ist nur definiert, wenn die Anzahl der Spalten von $\mathbf{B}$ mit der Anzahl der Zeilen von $\mathbf{A}$ übereinstimmt. Das Produkt einer $(m,n)-$Matrix und einer $(n,k)-$Matrix ist eine $(m,k)-$Matrix*

$$\begin{array}{ccc} \overset{B}{m,n} & \longleftarrow & \overset{A}{n,k} \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \underset{C=BA}{m,k} & \end{array}$$

- *Wenn $\mathbf{BA}$ definiert ist, ist somit $\mathbf{AB}$ nur definiert, wenn $\mathbf{A}$ eine $(m,n)-$Matrix und $\mathbf{B}$ eine $(n,m)-$Matrix ist.*
- *Sind sowohl $\mathbf{AB}$ als auch $\mathbf{BA}$ definiert, so ist im allgemeinen $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, wie folgendes Beispiel zeigt:*

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73 & 35 \\ 115 & 53 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63 & 75 \\ 55 & 63 \end{pmatrix}$$

- *Die Matrix $\mathbf{BA}$ hat so viele Zeilen wie $\mathbf{B}$ Zeilen hat und so viele Spalten wie $\mathbf{A}$ Spalten hat.*

◊

Definition 16.2.13. *Eine $(n,n)-$Matrix $\mathbf{A}$ wird „quadratisch“ genannt. Wir verwenden dafür oft das Symbol $\mathbf{A}_n$ oder $\mathbf{A}_{nn}$*
Eine quadratische Matrix mit $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$ wird „Diagonalmatrix“ genannt.
Eine $(n,n)-$Diagonalmatrix mit $a_{ii} = 1$ für alle $1 \leq i \leq n$, wird „Einheitsmatrix“ genannt. Wir kürzen sie ab durch $\mathbf{E}$ (oder durch $\mathbf{E}_n$). ◊

Beispiel 16.2.14. *Beispiel für eine quadratische Matrix $\mathbf{A}_3$*

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1.5 & 6 \\ 7 & 7.5 & 8 \end{pmatrix}$$

Beispiel für eine Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Beispiel für eine Einheitsmatrix:

$$\mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

◊

Definition 16.2.15. *Sei* $\mathbf{a}$ *ein Vektor. Dann ist* $\mathbf{diag}(\mathbf{a})$ *die Diagonalmatrix* $\mathbf{A}$ *mit* $a_{ii} := a_i$ *und* $a_{ij} = 0$ *für* $i \neq j$. ◊

Beispiel 16.2.16. *Mit* $\mathbf{a} = (1, 4, 5, 2, 3)$ *ist*

$$\mathbf{diag}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

◊

Machen Sie sich an Beispielen klar, wie sich die Multiplikation einer Diagonalmatrix mit einem Vektor (mit einer Matrix) auswirkt.

Multiplizieren wir eine quadratische $(n, n)-$Matrix $\mathbf{A}$ mit $\mathbf{E}_n$ schreiben wir einfach $\mathbf{AE}$. $\mathbf{E}$ ist immer passend zu $\mathbf{A}$ zu wählen, muss also gleichviele Spalten und Zeilen wie $\mathbf{A}$ haben. Ohne Beweis halten wir fest:

Satz 16.2.17.

$$\mathbf{AE} = \mathbf{A} = \mathbf{EA}$$

Beispiel 16.2.18. *Sei*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1.5 & 6 \\ 7 & 7.5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\mathbf{AE} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1.5 & 6 \\ 7 & 7.5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1.5 & 6 \\ 7 & 7.5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{EA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1.5 & 6 \\ 7 & 7.5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1.5 & 6 \\ 7 & 7.5 & 8 \end{pmatrix}$$

◊

Bemerkung 16.2.19.

- *Die Eigenschaft* $\mathbf{AE} = \mathbf{A}$ *macht klar, wieso* $\mathbf{E}$ *„Einheitsmatrix“ genannt wird. Die Einheitsmatrix ist das neutrale Element bezüglich der Matrixmultiplikation in der Menge der quadratischen Matrizen.*
- $\mathbf{AE}$ *entspricht der Verkettung der durch* $\mathbf{A}$ *definierten linearen Funktion und der Funktion, welche einem Vektor diesen selber zuordnet.*

- *Durch die Multiplikation von* $\mathbf{E}$ *und einem Vektor* $\mathbf{x}$ *mit passender Anzahl Komponenten wird dem Vektor* $\mathbf{x}$ *dieser selber zugeordnet, d.h.* $f(\mathbf{x}) = \mathbf{E}\mathbf{x} = \mathbf{x}$. *Rechnen Sie das an einem Beispiel selber nach. Entsprechend kann man umgekehrt im Rechengang* $\mathbf{x}$ *durch* $\mathbf{E}\mathbf{x}$ *ersetzen.*

$\Diamond$

Bemerkung 16.2.20. *Durch Diagonalmatrizen, die auf der Diagonalen nur* 1 *oder* 0 *enthalten, erfolgen senkrechte Projektionen auf Teile des Koordinatennetzes. Es handelt sich um eine Abbildung, welche der* $i-$*ten Koordinate eines Punktes diese zuordnet, wenn* $a_{ii} = 1$ *und welche der* i*-te Koordinate* 0 *zuordnet, wenn* $a_{ii} = 0$. *So wird z.B. der Punkt* $(5, 3, 6)$ *im dreidimensionalen Raum* $\mathbb{R}^3$ *durch die Matrix*

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

in den Punkt $(5, 3, 0)$ *im zweidimensionalen Raum* $\mathbb{R}^2$ *abgebildet. Die Gerade* $\{z \mid z = (x_1, x_2, x_3)\,\lambda + (y_1, y_2, y_3)\,, \lambda \in \mathbb{R}\ \}$ *im* $\mathbb{R}^3$ *wird durch* A *in die Gerade* $\{z' \mid z' = (x_1, x_2, 0)\,\lambda + (y_1, y_2, 0)\,, \lambda \in \mathbb{R}\}$ *im* $\mathbb{R}^2$ *abgebildet. Wir betrachten als Beispiel die Gerade, die durch die Punkte* $(0, 2, 3)$ *und* $(4, 0, 2)$ *geht. Deren Projektion auf die* (x_1, x_2)*-Ebene ist die Gerade durch die Punkte* $(0, 2, 0)$ *und* $(4, 0, 0)$ *(s. Abbildung 16.2.1).*

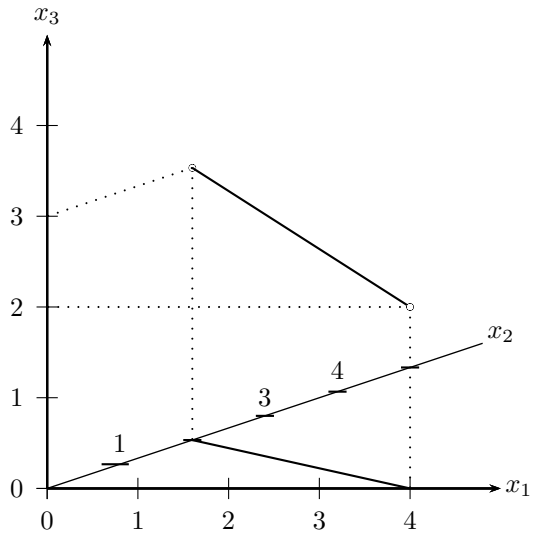


Abbildung 16.2.1: Projektion der Gerade durch die Punkte $(0, 2, 3)$ und $(4, 0, 2)$ auf die $x_1 - x_2$-Ebene

$\Diamond$

Bezüglich der Matrixmultiplikation gelten folgende Gesetze, die wir ohne Beweis festhalten, die Sie aber an einfachen Beispielen exemplarisch durchrechnen sollten:

Satz 16.2.21. *Für* $a \in \mathbb{R}$ *und für geeignete Spalten- und Zeilenanzahlen aufweisende Matrizen* $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ *und* $\mathbf{C}$ *gilt:*

$$\begin{aligned} (\mathbf{AB})\mathbf{C} &= \mathbf{A}(\mathbf{BC}) \\ a(\mathbf{AB}) &= (a\mathbf{A})\,\mathbf{B} = \mathbf{A}(a\mathbf{B}) \\ \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= \mathbf{AB} + \mathbf{AC} \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} &= \mathbf{AC} + \mathbf{BC} \end{aligned}$$

Da das Kommutativgesetz für die Matrixmultiplikation nicht gilt, muss die in den Gesetzen festgehaltene Reihenfolge der Matrizen immer strikt eingehalten werden.

Als nächstes folgt ein ökonomisches Beispiel für die Matrixmultiplikation:

Beispiel 16.2.22. *Eine Unternehmung produziere die Zwischenprodukte* 1, 2 *und* 3, *wobei für die Produktion der Zwischenprodukte die Rohstoffe* 1, 2, 3 *und* 4 *verwendet werden. Für eine Einheit des Zwischenproduktes 1 werden* 40, 20, 4 *und* 6 *Einheiten der Rohstoffe* 1, 2, 3 *und* 4 *verwendet.*
Für eine Einheit des Zwischenproduktes 2 *werden* 20, 30, 0 *und* 6 *Einheiten der Rohstoffe* 1, 2, 3 *und* 4 *verwendet.*
Für eine Einheit des Zwischenproduktes 3 *werden* 0, 3, 0 *und* 7 *Einheiten der Rohstoffe* 1, 2, 3 *und* 4 *verwendet.*
Für die 5 *Endprodukte werden pro Einheit Endprodukt jeweils die folgenden Zwischenprodukte verwendet (erstes, zweites und drittes Zwischenprodukt in dieser Reihenfolge):*
$1 : 5, 6, 3$
$2 : 0, 7, 1$
$3 : 4, 8, 3$
$4 : 0, 1, 2$
$5 : 10, 13, 12$
Zu berechnen ist der benötigte Rohstoffvektor für einen Endproduktvektor von $(50, 200, 30, 150, 40)$.
Rohstoffmatrix:

$$\begin{pmatrix} 40 & 20 & 0 \\ 20 & 30 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Produktionsmatrix:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 & 0 & 10 \\ 6 & 7 & 8 & 1 & 13 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

Das Produkt der beiden Matrizen ist:

$$\begin{pmatrix} 40 & 20 & 0 \\ 20 & 30 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 & 0 & 10 \\ 6 & 7 & 8 & 1 & 13 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 320 & 140 & 320 & 20 & 660 \\ 289 & 213 & 329 & 36 & 626 \\ 20 & 0 & 16 & 0 & 40 \\ 87 & 49 & 93 & 20 & 222 \end{pmatrix}$$

Der Vektor der benötigten Rohstoffe ist: $\begin{pmatrix} 320 & 140 & 320 & 20 & 660 \\ 289 & 213 & 329 & 36 & 626 \\ 20 & 0 & 16 & 0 & 40 \\ 87 & 49 & 93 & 20 & 222 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 200 \\ 30 \\ 150 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 83000 \\ 97360 \\ 3080 \\ 28820 \end{pmatrix}$

$\Diamond$

Multiplizieren wir eine $(n, 1)-$Matrix mit einer $(1, m)-$Matrix, erhält man eine $(n, m)-$Matrix.

Beispiel 16.2.23.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ 17 \\ 28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 24 & 28 & 80 \\ 80 & 96 & 112 & 320 \\ 85 & 102 & 119 & 340 \\ 140 & 168 & 196 & 560 \end{pmatrix}$$

$\Diamond$

Multiplizieren wir eine $(1, n)-$Matrix mit einem $n-$Vektor oder einer $(n, 1)-$Matrix, erhält man eine $(1, 1)-$Matrix (= reelle Zahl).

Beispiel 16.2.24.

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ 17 \\ 28 \end{pmatrix} = 795$$

$\Diamond$

Die Matrixmultiplikation von Hand ist mühsam und fehleranfällig. Mit Excel ist diese hingegen einfach zu berechnen. Sie erfolgt mit den gleichen Befehlen wie die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor (=mmult(;)). Statt des Vektors gibt man die zweite Matrix ein. Statt einer Spalte wird ein Tabellenabschnitt mit den Spalten- und Zeilenzahlen von **C** beleuchtet. Entsprechend muss man wissen, wie viele Spalten und Zeilen die Matrix **C** hat, wenn man die Spalten- und Zeilenanzahlen der Matrizen **A** und **B** kennt. Es wird mit „ctrl+shift+enter“ bestätigt. Für $diag(\mathbf{a})$ gibt es keinen speziellen Befehl.

Mit R: $A\% * \%B$. Für (n,n)-Einheitsmatrix $diag(n)$. Für Diagonalmatrix mit der Diagonale $\mathbf{a} = c(a_1, ..., a_n)$: $diag(\mathbf{a})$.

Die Zeilensumme einer (n×m)-Matrix **A** können wir durch die Multiplikation

$$\mathbf{A1}$$

erreichen, wobei $\mathbf{1} := (1, ..., 1) \in \{1\}^m$ ist. So ist

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 8 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Die Spaltensumme einer (n×m)-Matrix **A** können wir durch die die Multiplikation

$$\mathbf{1}^T\mathbf{A}$$

erreichen, wobei $\mathbf{1}^T$ die (1×n)-Zeilenmatrix ist, die nur Einen enthält. So ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 8 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 12 & 18 \end{pmatrix}.$$

Mit R für $(1,1,1,1,1)$: $rep(1,5)$, für $\mathbf{1}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} : t(rep(1,4))$

Übungen

1. Seien f und g durch die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 8 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 13 & 0 \\ 2 & 12 & 3 \\ 3 & 12 & 0 \\ 4 & 15 & 5 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie $(f+g)(5,2,3)$.

2. Sei f durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie $5f(5,2,3)$.

3. Berechnen Sie folgende Matrixmultiplikationen (von Hand und mit Excel):

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 8 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 13 \\ 7 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 13 \\ 7 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 13 \\ 7 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Seien f und g durch die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 8 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 13 & 0 & 14 \\ 2 & 12 & 3 & 0 \\ 3 & 12 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie $f(g(5, 2, 3, 4))$.

5. Seien die folgende Rohstoff- und Produktionsmatrix gegeben (Zwischenprodukte (ZP); Endprodukt (EP)):

	$ZP\ 1$	$ZP\ 2$	$ZP\ 3$	$ZP\ 4$
$Rohstoff\ 1$	5	3	6	4
$Rohstoff\ 2$	8	2	3	3
$Rohstoff\ 3$	1	2	0	3
$Rohstoff\ 4$	4	5	6	1

	$EP\ 1$	$EP\ 2$	$EP\ 3$
$ZP\ 1$	16	12	25
$ZP\ 2$	228	12	31
$ZP\ 3$	2.5	0	3
$ZP\ 4$	4	18	0.5

a) Berechnen Sie für den Outputvektor der Endprodukte $(20, 400, 50)$ den Inputvektor der Rohstoffe.
b) Wenn die Rohstoffpreise pro Einheit durch die folgende Preismatrix gegeben ist (für RS 1 ... RS 4 in dieser Reihenfolge)

$$\begin{pmatrix} 30 & 3 & 40 & 50 \end{pmatrix},$$

wieviel betragen dann die Warenkosten für den Outputvektor $(20, 400, 50)$.

Lösungen

1.

$$
\begin{aligned}
(f+g)(5,2,3) = (A+B)\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \\
&= \left(\begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 8 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 13 & 0 \\ 2 & 12 & 3 \\ 3 & 12 & 0 \\ 4 & 15 & 5 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6 & 16 & 6 \\ 10 & 14 & 6 \\ 4 & 14 & 3 \\ 8 & 20 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 96 \\ 57 \\ 113 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
5f(5,2,3) = (5A)\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \left(5\begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 25 & 15 & 30 \\ 40 & 10 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 245 \\ 265 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 & 31 \\ 58 & 27 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 8 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 16 & 30 \\ 43 & 23 & 45 \\ 44 & 18 & 33 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 4 & 2 & 13 \\ 7 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 13 \\ 7 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82 & 49 & 138 \\ 51 & 27 & 119 \\ 61 & 29 & 100 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 13 \\ 7 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 & 27 & 119 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 5 & 20 \\ 56 & 8 & 32 \end{pmatrix}
$$

4.

$$f(g(5,2,3,4)) = (AB)\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 8 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 13 & 0 & 14 \\ 2 & 12 & 3 & 0 \\ 3 & 12 & 0 & 8 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 29 & 173 & 9 & 118 \\ 21 & 164 & 6 & 136 \\ 14 & 73 & 6 & 38 \\ 32 & 184 & 15 & 104 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 990 \\ 995 \\ 386 \\ 989 \end{pmatrix}$$

5. a)

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 & 4 \\ 8 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 & 12 & 25 \\ 228 & 12 & 31 \\ 2.5 & 0 & 3 \\ 4 & 18 & 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 795 & 168 & 238 \\ 603.5 & 174 & 272.5 \\ 484 & 90 & 88.5 \\ 1223 & 126 & 273.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 795 & 168 & 238 \\ 603.5 & 174 & 272.5 \\ 484 & 90 & 88.5 \\ 1223 & 126 & 273.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 400 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 95000 \\ 95295 \\ 50105 \\ 88535 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 30 & 3 & 40 & 50 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 95000 \\ 95295 \\ 50105 \\ 88535 \end{pmatrix} = 9566\,835$$

16.3 Umkehrfunktionen linearer Abbildungen und Matrizen

Wir haben oben mit Hilfe der Multiplikation einer Produktionsmatrix $\mathbf{A}$ mit dem Outputvektor $\mathbf{x}$ den Inputvektor $\mathbf{y}$ berechnet:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

Manchmal ist es nützlich, für einen gegebenen Inputvektor $\mathbf{y}$ den Outputvektor $\mathbf{x}$ zu berechnen, wobei es nicht unbedingt eine sinnvolle Lösung gibt - es ist nicht sicher, dass es für einen gegebenen Inputvektor eine Produktion gibt, die fertige Endprodukte liefert und alle Rohstoffe aufbraucht. Rechnerisch entspricht das Problem der Berechnung der Umkehrfunktion von f :

$$f^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}.$$

Die Umkehrfunktion ist nur definiert, wenn die lineare Funktion f bijektiv ist. Ohne Beweis halten wir fest: Lineare Funktionen sind nur bijektiv, wenn sie durch eine quadratische Matrix bestimmt sind. Allerdings legen nicht alle quadratischen Matrizen bijektive Funktionen fest. Welche Teilmenge der quadratischen Matrizen bijektive Funktionen entsprechen, wird später zu diskutieren sein.

Auf Grund des Zusammenhangs von linearen Funktionen und Matrizen, suchen wir für eine bijektive lineare Funktion f, die durch die Matrix $\mathbf{A}$ bestimmt ist, eine Matrix $\mathbf{B}$, welche die Umkehrfunktion von f bestimmt. Für $\mathbf{B}$ gilt also:

$$f^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{x}$$

Rein formal ist das Problem einfach zu lösen. Gibt es eine Matrix $\mathbf{B}$, für die

$$\mathbf{BA} = \mathbf{E},$$

gilt:

$$\mathbf{BAx} = \mathbf{Ex} = \mathbf{x}$$

und damit durch Multiplikation beider Seiten der Gleichung $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ von links her mit $\mathbf{B}$

$$\begin{aligned}\mathbf{BAx} &= \mathbf{By} \Longrightarrow \\ \mathbf{x} &= \mathbf{By}\end{aligned}$$

Wir halten diese Überlegungen noch formaler fest:

Satz 16.3.1. *Sei die lineare Abbildung f bijektiv und $\mathbf{A}$ die Matrix mit $f(x) = \mathbf{Ax}$. Dann gibt es eine Matrix $\mathbf{B}$, welche die Umkehrfunktion f^{-1} von f definiert, d.h. es gilt $f^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{Bx}$.*

Analysieren wir die Bedingung $\mathbf{BA} = \mathbf{E}$, muss gelten:

$$\sum_{l=1}^{n} b_{il} a_{lj} = 0$$

für $i \neq j$ sowie $1 \leq i, j \leq n$ und

$$\sum_{l=1}^{n} b_{il} a_{li} = 1$$

für $1 \leq i \leq n$, wobei b_{il} unbekannt ist. Dies führt auf ein Gleichungssystem von n^2 Gleichungen und n^2 Unbekannten. Dieses Gleichungssystem besteht aus n Untergleichungssystemen mit je n Unbekannten, die von Untergleichungssystem zu Untergleichungssystem verschieden sind.

Definition 16.3.2. *Eine Matrix $\mathbf{B}$ mit $\mathbf{BA} = \mathbf{E}$ wird „inverse Matrix von $\mathbf{A}$“ oder „die Inverse von $\mathbf{A}$“ oder „Umkehrmatrix von $\mathbf{A}$“ genannt. Wir kürzen sie ab durch $\mathbf{A}^{-1}$.* ◊

Beispiel 16.3.3. *Zu bestimmen sei die Umkehrmatrix von*

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Für die Inverse muss gelten:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Durch Ausmultiplizieren von

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

erhält man

$$\begin{pmatrix} 4b_{11} + 3b_{12} & 5b_{11} + 2b_{12} \\ 4b_{21} + 3b_{22} & 5b_{21} + 2b_{22} \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{pmatrix} 4b_{11} + 3b_{12} & 5b_{11} + 2b_{12} \\ 4b_{21} + 3b_{22} & 5b_{21} + 2b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dies führt auf folgendes Gleichungssystem - das eigentlich aus zwei Gleichungssystemen mit je zwei Unbekannten besteht:

$$\begin{aligned} 4b_{11} + 3b_{12} &= 1 \\ 5b_{11} + 2b_{12} &= 0 \end{aligned}$$

$$4b_{21} + 3b_{22} = 0$$
$$5b_{21} + 2b_{22} = 1$$

Dessen Auflösung führt zu $b_{11} = -\frac{2}{7}, b_{12} = \frac{5}{7}, b_{21} = \frac{3}{7}, b_{22} = -\frac{4}{7}$
Damit ist die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$*von* $\mathbf{A}$:

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

Zur Kontrolle multiplizieren wir $\mathbf{A}^{-1}$ *und* $\mathbf{A}$:

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{4}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

◊

Beispiel 16.3.4. *Zu bestimmen sei die Umkehrmatrix von*

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 16 & 7 \end{pmatrix}.$$

Für die Inverse muss gelten:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 16 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Durch Ausmultiplizieren von

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 16 & 7 \end{pmatrix}$$

erhält man

$$\begin{pmatrix} 2b_{11} + 2b_{12} + 3b_{13} & 5b_{11} + b_{12} + 16b_{13} & 3b_{11} + 4b_{12} + 7b_{13} \\ 2b_{21} + 2b_{22} + 3b_{23} & 5b_{21} + b_{22} + 16b_{23} & 3b_{21} + 4b_{22} + 7b_{23} \\ 2b_{31} + 2b_{32} + 3b_{33} & 5b_{31} + b_{32} + 16b_{33} & 3b_{31} + 4b_{32} + 7b_{33} \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{pmatrix} 2b_{11} + 2b_{12} + 3b_{13} & 5b_{11} + b_{12} + 16b_{13} & 3b_{11} + 4b_{12} + 7b_{13} \\ 2b_{21} + 2b_{22} + 3b_{23} & 5b_{21} + b_{22} + 16b_{23} & 3b_{21} + 4b_{22} + 7b_{23} \\ 2b_{31} + 2b_{32} + 3b_{33} & 5b_{31} + b_{32} + 16b_{33} & 3b_{31} + 4b_{32} + 7b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dies führt auf das Gleichungssystem - das eigentlich aus drei Gleichungssystemen mit je drei Unbekannten besteht:

$$2b_{11} + 2b_{12} + 3b_{13} = 1$$
$$5b_{11} + b_{12} + 16b_{13} = 0$$
$$3b_{11} + 4b_{12} + 7b_{13} = 0$$

$$2b_{21} + 2b_{22} + 3b_{23} = 0$$
$$5b_{21} + b_{22} + 16b_{23} = 1$$
$$3b_{21} + 4b_{22} + 7b_{23} = 0$$

$$2b_{31}+2b_{32}+3b_{33}=0$$
$$5b_{31}+b_{32}+16b_{33}=0$$
$$3b_{31}+4b_{32}+7b_{33}=1$$

Dessen Auflösung führt zu $b_{11}=\frac{57}{37}, b_{12}=-\frac{13}{37}, b_{21}=\frac{2}{37}, b_{13}=-\frac{17}{37}$, $b_{22}=-\frac{5}{37}, b_{31}=-\frac{29}{37}, b_{23}=\frac{2}{37}, b_{32}=\frac{17}{37}, b_{33}=\frac{8}{37}$
Damit ist die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ *von* $\mathbf{A}$:

$$\begin{pmatrix} \frac{57}{37} & -\frac{13}{37} & -\frac{17}{37} \\ \frac{2}{37} & -\frac{5}{37} & \frac{2}{37} \\ -\frac{29}{37} & \frac{17}{37} & \frac{8}{37} \end{pmatrix}$$

Zur Kontrolle multiplizieren wir $\mathbf{A}^{-1}$ *und* $\mathbf{A}$:

$$\begin{pmatrix} \frac{57}{37} & -\frac{13}{37} & -\frac{17}{37} \\ \frac{2}{37} & -\frac{5}{37} & \frac{2}{37} \\ -\frac{29}{37} & \frac{17}{37} & \frac{8}{37} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 16 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

◊

Man sieht, dass die Berechnung der Inversen ziemlich mühsam ist. Mit Excel erfolgt sie wie folgt: Man gibt die zu invertierende Matrix ein. Dann beleuchtet man einen Tabellenabschnitt mit gleichviel Spalten und Zeilen wie die zu invertierende Matrix. Dann wird in die erste Zelle der beleuchteten Teilmatrix „minv()“ eingegeben und mit „ctrl+shift+enter“ bestätigt, wobei wir im Beispiel 16.3.4 mit Excel (gerundete) Dezimalbrüche erhalten. Man erhält

$$\mathbf{A}^{-1} := \begin{pmatrix} 1.540540541 & -0.351351351 & -0.459459459 \\ 0.054054054 & -0.135135135 & 0.054054054 \\ -0.783783784 & 0.459459459 & 0.216216216 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 16 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1\times 10^{-8} & 6\times 10^{-9} \\ -1.3553\times 10^{-20} & 1 & -5.421\times 10^{-20} \\ -2\times 10^{-9} & -5\times 10^{-9} & 1 \end{pmatrix}$$

.

Wegen Rundungsfehlern führt die Multiplikation $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$ nicht genau auf die Einheitsmatrix.
Mit R: solve(A)

Satz 16.3.1. *Die Umkehrmatrix* $\mathbf{B}$ *einer Diagonalmatrix* $\mathbf{diag}\,(\mathbf{a})$ *mit* $a=(a_1,...a_n)$ *ist* $\mathbf{diag}\left((\frac{1}{a_1},...,\frac{1}{a_n})\right)$.

Beweis. Es muss gelten

$$\mathbf{Bdiag}\,(\mathbf{a})=\mathbf{E}$$

und man erhält das Gleichungssystem:

$$b_{11}a_1=1$$
$$b_{22}a_2=1$$
$$\vdots$$
$$b_{nn}a_n=1$$

Entsprechend gilt $b_{11}=\frac{1}{a_1}; b_{22}=\frac{1}{a_2}; ...; b_{nn}=\frac{1}{a_n}$. □

Beispiel 16.3.5. $\mathbf{diag}\,((5,3,2))=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5b_{11} & 5b_{12} & 5b_{13} \\ 3b_{21} & 3b_{22} & 3b_{23} \\ 2b_{31} & 2b_{32} & 2b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für $5b_{12} = 0$ *z.B. ist* $b_{12} = 0$. *Dies gilt für alle Koeffizienten* b_{ij} *mit* $i \neq j$. *Für* $5b_{11} = 1$ *erhält man* $b_{11} = \frac{1}{5}$. *Es gilt also* $b_{11} = \frac{1}{5}, b_{22} = \frac{1}{3}$ *und* $b_{33} = \frac{1}{2}$. *Die Inverse von* $\mathbf{diag}\,((5,3,2))$ *ist damit*

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und es gilt

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

◊

Beispiel 16.3.6. *Input-Output-Analyse (Wassily Leontief, Deutscher Ökonom, Nobelpreisträger, 1905-1999): Volkswirtschaften, Regionalwirtschaften oder grössere Unternehmen können als Netz von Sektoren oder Teilunternehmungen betrachtet werden, die*

- *sich gegenseitig beliefern,*
- *Güter von Ausserhalb des Verflechtungssystems wie Arbeit, Rohstoffe und Zwischenprodukte brauchen, um produzieren zu können und die*
- *Produkte für Wirtschaftssubjekte ausserhalb des Verflechtungsnetzes bereitstellen.*

Wir nennen Inputs, die von Aussen in ein solches Verflechtungssystem gelangen, „exogene Inputs". Inputs in das Verflechtungssystem, die innerhalb dieses produziert werden, nennen wir „endogene" Inputs. Produkte und Dienstleistungen, die vom System produziert werden und die ausserhalb des Verflechtungssystems verwendet oder konsumiert werden, nennen wir Outputs (s. Abbildung 16.3.2). Die Summe der Outputs und der endogenen Inputs ist die Gesamtproduktion des Verflechtungssystems („exo" griechisch für „ausserhalb", „endo" griechisch für „innerhalb"; „gen" griechisch für „produziert")
Ziel der Input-Output-Analyse ist

- *die Berechnung der Gesamtproduktion pro Sektor bei gegebenem Output-Vektor und gegebenem Verflechtungssystem,*
- *Berechnung der Liefermengen der Sektoren an die Sektoren bei gegebenem Output-Vektor.*
- *die Berechnung des Output-Vektors bei gegebener Gesamtproduktion,*
- *die Bestimmung des Rohstoffvektors bei gegebenem Output-Vektor und gegebener Rohstoffmatrix.*
- *zu gegebenen Rohstoffvektor Bestimmung des Output-Vektors (falls definiert).*

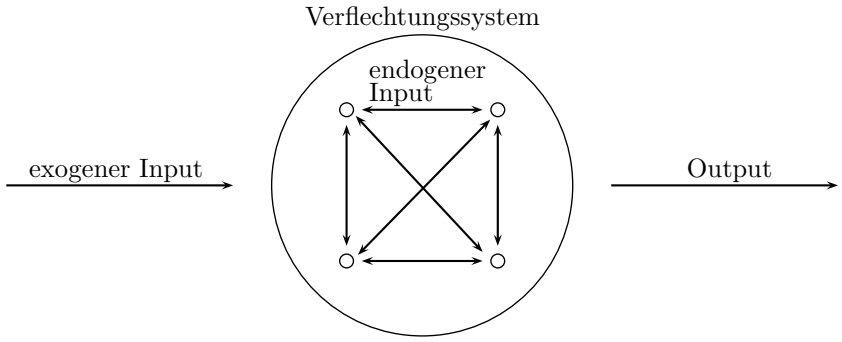


Abbildung 16.3.2: Graphische Erläuterung einiger Begriffe der Input-Output-Analyse

Die obige Situation kann mathematisch durch die folgenden Objekte dargestellt werden:

- *Das Geflecht der Lieferbeziehungen im System durch eine Matrix* $\mathbf{X}_{nn}$*:* x_{ij} *gibt die Güter und Dienstleistungen an, die aus dem Sektor* i *an den Sektor* j *geliefert werden.*
- *Die Outputs können wir durch einen Vektor* $\mathbf{y}_n$ *ausdrücken: für jeden Sektor* i *gibt er den Output* y_i *an, der im Spezialfall auch* 0 *sein kann.*
- $\mathbf{x}$ *sei der Vektor der Gesamtproduktion der* n *Sektoren, wobei offensichtlich gilt:*

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i$$

oder in Matrixschreibweise

$$\mathbf{x} = \mathbf{X1} + \mathbf{y}$$

mit $\mathbf{1} := (1, 1, ..., 1, 1) \in \{1\}^n$.

- *Den Zusammenhang von exogenem Input und Gesamtproduktion* $\mathbf{x}$ *des Verflechungssystems können wir durch eine Rohstoffmatrix oder Produktionsmatrix* $\mathbf{R}_{mn}$ *mit den Komponenten* r_{ij} *darstellen, welche angeben, wieviel externen Input oder Rohstoff* i *man für die Produktion einer Einheit des Sektors* j *braucht.*

Wir können $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ *mit Hilfe von* $\mathbf{x}$ *darstellen, indem wir geeignete Koeffizienten* a_{ij} *wählen. Mit*

$$a_{ij} := \frac{x_{ij}}{x_j}$$

gilt nämlich

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_{ij}}{x_j} x_j = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}.$$

Damit erhält man:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i$$

oder in Matrixschreibweise mit $\mathbf{A} := (a_{ij})$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{X1} + \mathbf{y} \\ &= \mathbf{Ax} + \mathbf{y}. \end{aligned} \tag{16.3.4}$$

Damit gilt auch

$$\mathbf{X1} = \mathbf{Ax}.$$

Die Matrix $\mathbf{A}$ *wird Technologie- oder Inputmatrix genannt wird. Sie ist von der produzierten Menge* $\mathbf{x}$ *unabhängig, da wir die vom Teilbetrieb* j *erhaltenen endogenen Inputs durch die von* j *produzierte Gesamtmenge dividieren. Sie gibt damit den Stand der Technologie bezüglich des nötigen endogenen Inputs pro Einheit Gesamtproduktion wieder. Rechnerisch erhalten wir* $\mathbf{A}$*, indem wir die Spalte* j *von* $\mathbf{X}$ *mit* $\frac{1}{x_j}$ *multiplizieren. Mit Matrixmultiplikation erhält man* $\mathbf{A}$ *aus* $\mathbf{X}$ *durch*

$$\mathbf{A} = \mathbf{X} \cdot \left(\mathbf{diag}\left(\mathbf{x}\right)\right)^{-1}. \tag{16.3.5}$$

Dies sieht man, wenn man ein einfaches Beispiel betrachtet:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1}x_{11} & \frac{1}{x_2}x_{12} \\ \frac{1}{x_1}x_{21} & \frac{1}{x_2}x_{22} \end{pmatrix}$$

Die Technologiematrix liefert die Möglichkeit, für eine beliebige Gesamtproduktion $\mathbf{x}$ *die von* i *an* j *zu liefernden Mengen zu berechnen, d.h.* $\mathbf{X}$ *zu berechnen. Man erhält* $\mathbf{X}$ *aus* $\mathbf{A}$ *für beliebige* $\mathbf{x}$ *durch Multiplikation der* j*-ten Spalte mit* x_j *oder durch Matrixmultiplikation mittels*

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{diag}\left(\mathbf{x}\right).$$

$\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{diag}\left(\mathbf{x}\right)$ *erhält man aus (16.3.5), indem man beide Seiten von rechts her mit* $\mathbf{diag}\left(\mathbf{x}\right)$ *multipliziert.*
Gemäss (16.3.4) gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{x} \\ &= \mathbf{E}\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{x} \\ &= \left(\mathbf{E} - \mathbf{A}\right)\mathbf{x} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{E} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{y} &= \mathbf{E}\mathbf{x} \\ &= \mathbf{x} \end{aligned}$$

sofern die Inverse von $\left(\mathbf{E} - \mathbf{A}\right)$ *existiert.*

Geht man von einer bestehenden Produktion mit entsprechender Matrix $\mathbf{X}$ *und Outputvektor* $\mathbf{y}$ *aus, besteht der Nutzen der Berechnung der Technologiematrix darin, dass man damit für alternative Outputs* $\mathbf{y}'$ *die benötigte Gesamtleistung der Sektoren sowie die benötigten Lieferungen der Sektoren an die anderen Sektoren berechnen kann.*
— Der erste Schritt besteht in der Berechnung der Technologiematrix: $\mathbf{A} = \mathbf{X} \cdot \left(\mathbf{diag}\left(\mathbf{x}\right)\right)^{-1}$
— Für gegebenen alternativen Output $\mathbf{y}'$ *berechnet man dann die benötigte, von den Sektoren zu erbringende Gesamtproduktion:* $\mathbf{x}' = \left(\mathbf{E} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{y}'$
— Man berechnet die Lieferungen der Sektoren an die anderen Sektoren: $\mathbf{X}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{diag}\left(\mathbf{x}'\right)$

Bemerkung*: (1) Liegt noch eine Rohstoffmatrix vor, so gilt für den Vektor* $\mathbf{r}$ *der benötigten Rohstoffe:*

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}\mathbf{x}$$

und mit $\mathbf{x} = \left(\mathbf{E} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{y}$ *erhält man für die benötigten Rohstoffe:*

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}\left(\mathbf{E} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{y}$$

(2) Umgekehrt erhält man unter der Voraussetzung der Invertierbarkeit der Rohstoffmatrix aus $\mathbf{r} = \mathbf{R}\left(\mathbf{E} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{y}$*:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r} &= \mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}\left(\mathbf{E} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{y} \\
\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r} &= \left(\mathbf{E} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{y} \\
\left(\mathbf{E} - \mathbf{A}\right)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r} &= \left(\mathbf{E} - \mathbf{A}\right)\left(\mathbf{E} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{y} \\
\left(\mathbf{E} - \mathbf{A}\right)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r} &= \mathbf{y}
\end{aligned}$$

Man kann also für gegebenen Rohstoffvektor den Outputvektor berechnen, wobei diese eher selten vernünftige Resultate ergeben wird. Es ist oft nicht möglich, für gegebenen Rohstoffvektor einen Output zu produzieren, so dass alle Rohstoffe aufgebraucht werden. ◊

Übungen

1. Berechnen Sie die Umkehrmatrix von

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

   von Hand und mit Excel. Kontrollieren Sie, ob $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$.

2. Berechnen Sie, die Umkehrmatrix von $\begin{pmatrix} 4 & 15 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ von Hand und mit Excel. Kontrollieren Sie, ob $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$.

3. Sei die folgende Produktionsmatrix $\mathbf{A}$ gegeben, welche den nötigen Input $\mathbf{y}$ als Funktion $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ des Outputs $\mathbf{x}$ ausdrückt. Suchen Sie die Matrix, welche den Output als Funktion des Inputs ausdrückt.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 35 \\ 28 & 11 & 12 \\ 1.5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

   Berechnen Sie den Output für den Inputvektor $(15, 20, 2)$

4. In einer Volkswirtschaft werden die drei Sektoren 1, 2 und 3 unterschieden: Es ist die folgende Verflechtungsmatrix gegeben, welche die Flüsse der in den Sektoren produzierten Produkte und Dienstleistungen (in Geldeinheiten) angibt:

$$\mathbf{X} = \left(\begin{array}{c|ccc} & S_1 & S_2 & S_3 \\ \hline S_1 & 500 & 200 & 0 \\ S_2 & 1000 & 7000 & 15000 \\ S_3 & 600 & 700 & 5000 \end{array}\right)$$

   Die drei Sektoren produzieren auch für den Konsum und den Export, wobei der Outputvektor der drei Sektoren gegeben ist durch

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 500 \\ 2000 \\ 3000 \end{pmatrix}$$

Zudem sei die folgende Rohstoffmatrix gegeben, welche die benötigen Rohstoffeinheiten angibt, die für die Produktion einer Einheit des Sektors S_i benötigt werden.

$$\mathbf{R} = \left(\begin{array}{c|ccc} & S_1 & S_2 & S_3 \\ \hline R_1 & 3 & 1 & 0 \\ R_2 & 5 & 0.3 & 5 \\ R_3 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

a) Berechnen Sie die Gesamtproduktion $\mathbf{x}$
b) Berechnen Sie die Technologiematrix $\mathbf{A}$
c) Berechnen Sie für den Outputvektor $\begin{pmatrix} 2650 \\ 10600 \\ 15900 \end{pmatrix}$ die Gesamtproduktion $\mathbf{x}'$.
d) Berechnen Sie für den Outputvektor von c) die Verflechtungsmatrix $\mathbf{X}'$ (Lieferungen der Sektoren an die Sektoren)
e) Berechnen Sie für den Outputvektor von c) den Rohstoffvektor.
f) Berechnen Sie für den Outputvektor $(3500, 8000, 12000)$ den Rohstoffvektor.
g) Berechnen Sie den Outputvektor, wenn für die Sektoren folgender Rohstoffvektor vorliegen würde $(500, 600, 1200)$:
h) Output für den Rohstoffvektor $(700, 3000, 4120)$

5. Gegeben sei die folgende Matrix, welche die Leistungen angibt, welche Teilbetriebe für andere Teilbetriebe einer Firma beim spezifischen, gegebenen Output erbringen:

Teilbetriebe	S1	S2	S3	S4	S5	Output	
S1	40	30	50	20	60	500	
S2	30	40	40	0	30	450	
S3	50	60	70	90	10	400	
S4	40	110	120	25	3	60	
S5	4	5	13	43	15	700	

Tabelle 16.3.1: Daten der Aufgabe 3

a) Berechnen Sie die Technologiematrix.
b) Berechnen Sie die Leistungen, welche die Teilbetriebe für die Teilbetriebe erbringen müssen, um den Output (59,65, 73, 200, 30) zu produzieren.

Lösungen

1.
$$\begin{pmatrix} \frac{4}{17} & -\frac{3}{17} \\ -\frac{1}{17} & \frac{5}{17} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.
$$\begin{pmatrix} -\frac{4}{13} & \frac{23}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{2}{13} & -\frac{5}{13} & -\frac{1}{13} \\ -\frac{1}{26} & -\frac{17}{26} & \frac{7}{26} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 15 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.
$$\begin{pmatrix} -1.734\,9 \times 10^{-2} & 5.060\,0 \times 10^{-2} & -0.104\,38 \\ 5.204\,6 \times 10^{-3} & -1.518\,0 \times 10^{-2} & 0.231\,31 \\ 3.570\,9 \times 10^{-2} & -2.081\,8 \times 10^{-2} & 3.151\,7 \times 10^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.543\,01 \\ 0.237\,09 \\ 0.182\,31 \end{pmatrix}$$

Da in der Matrix negative Zahlen auftauchen, ist es möglich, einen Outputvektor mit negativen Zahlen zu erhalten, was dann wenig Sinn macht!

4. a) Gesamtproduktion $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x} = \mathbf{X1} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 500+200+0 \\ 1000+7000+15000 \\ 600+700+5000 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 500 \\ 2000 \\ 3000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1200 \\ 25\,000 \\ 9300 \end{pmatrix}$$

Mit R:
X=matrix(c(500,200,0,1000,7000,15000,600,700,5000),ncol=3,byrow=T)
y=c(500,2000,3000)
R=matrix(c(3,1,0,5,0.3,5,4,2,3),ncol=3,byrow=T)
x=rowSums(X)+y

b) Technologiematrix:

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}(\mathbf{diag}(\mathbf{x})^{-1}) = \begin{pmatrix} 500 & 200 & 0 \\ 1000 & 7000 & 15000 \\ 600 & 700 & 5000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{1200} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{25000} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9300} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{125} & 0 \\ \frac{5}{6} & \frac{7}{25} & \frac{50}{31} \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{250} & \frac{50}{93} \end{pmatrix}$$

Mit R:
A=X%*%solve(diag(x))

c) Gesamtproduktion $\mathbf{x}'$ für den Outputvektor $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 2650 \\ 10600 \\ 15900 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{x}' = (\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{y}' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{125} & 0 \\ \frac{5}{6} & \frac{7}{25} & \frac{50}{31} \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{250} & \frac{50}{93} \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 2650 \\ 10600 \\ 15900 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6360 \\ 132\,500 \\ 49\,290 \end{pmatrix}$$

mit R:
yp=c(2650,10600,15900)
xp=solve(diag(3)-A)%*%yp

d) neue Verflechtungsmatrix $\mathbf{X}'$ für den Outputvektor von *c)*

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{diag}\,(\mathbf{x}') = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{125} & 0 \\ \frac{5}{6} & \frac{7}{25} & \frac{50}{31} \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{250} & \frac{50}{93} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6360 & 0 & 0 \\ 0 & 132500 & 0 \\ 0 & 0 & 49290 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2650 & 1060 & 0 \\ 5300 & 37\,100 & 79\,500 \\ 3180 & 3710 & 26\,500 \end{pmatrix}$$

mit R:
Xp=A%*%diag(as.vector(xp))

e) Rohstoffvektor für den Outputvektor von *c)*

$$\mathbf{r}' = \mathbf{R}\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 0.3 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6360 \\ 132\,500 \\ 49\,290 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 151580 \\ 318000 \\ 438310 \end{pmatrix}$$

Mit R: R%*%xp

f) Rohstoffvektor für den Outputvektor $(3500, 8000, 12000)$:

$$\mathbf{r}'' = \mathbf{R}\,(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{y}'' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 0.3 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{125} & 0 \\ \frac{5}{6} & \frac{7}{25} & \frac{50}{31} \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{250} & \frac{50}{93} \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 3500 \\ 8000 \\ 12000 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 133870.5 \\ 275178.9 \\ 375184.3 \end{pmatrix}$$

Mit R: ys=c(3500,8000,12000)
R%*%solve(diag(3)-A)%*%ys

g) Outputvektor für Rohstoffvektor $(500, 600, 1200)$:

$$\mathbf{y}=(\mathbf{E}-\mathbf{A})\,\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}=\left(\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)-\left(\begin{array}{ccc}\frac{5}{12}&\frac{1}{125}&0\\\frac{5}{6}&\frac{7}{25}&\frac{50}{31}\\\frac{1}{2}&\frac{7}{250}&\frac{50}{93}\end{array}\right)\right)\left(\begin{array}{ccc}3&1&0\\5&0.3&5\\4&2&3\end{array}\right)^{-1}\left(\begin{array}{c}500\\600\\1200\end{array}\right)$$
$$=\left(\begin{array}{c}5.532\,1\\188.62\\15.133\end{array}\right)$$

Mit R: rt=c(500,600,1200)
(diag(3)-A)%*%solve(R)%*%rt

h) Output für den Rohstoffvektor $(700, 3000, 4120)$

$$\left(\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)-\left(\begin{array}{ccc}\frac{5}{12}&\frac{1}{125}&0\\\frac{5}{6}&\frac{7}{25}&\frac{50}{31}\\\frac{1}{2}&\frac{7}{250}&\frac{50}{93}\end{array}\right)\right)\left(\begin{array}{ccc}3&1&0\\5&0.3&5\\4&2&3\end{array}\right)^{-1}\left(\begin{array}{c}700\\3000\\4120\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}-148.04\\-4.159\,8\\424.88\end{array}\right)$$

Ein negativer Output ist nicht möglich ist! Es ist nicht möglich, so zu produzieren, dass alle Rohstoffe aufgebraucht werden.
Mit R: r4=c(700,3000,4120)
(diag(3)-A)%*%solve(R)%*%r4

5. Mit R: X=matrix(c(40,30,50,20,60,30,40,40,0,30,50,60,70,90,10, 40,110,
120,25,3,4,5,13,43,15),ncol=5,byrow=T)
y=c(500,450,400,60,700)
x=X%*%rep(1,5)+y
A= X%*%solve(diag(as.vector(x)))
für a) A
für b) y2=c(59,65,73,200,30)
A%*%diag(y2)

16.4 Lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem hat die Form

$$\left\{\begin{array}{c}a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n-1}x_{n-1}+a_{1n}x_n=b_1\\\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn-1}x_{n-1}+a_{mn}x_n=b_m\end{array}\right.$$

Fassen wir die Variablen x_i, die Konstanten b_i in den Vektoren

$$\mathbf{x}:=(x_1,...,x_n)$$
$$\mathbf{b}:=(b_1,...,b_m)$$

und die Koeffizienten in der Matrix $\mathbf{A}$ zusammen, so kann man das Gleichungssystem kompakt wie folgt ausdrücken:

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$$

Die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist dann die Menge aller Vektoren $\mathbf{x}$, so dass die Aussage „$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$“ wahr wird. Im Falle eines Gleichungssystems mit $n=m$ ist die Anzahl der Gleichungen mit der Anzahl der Unbekannten identisch und wir erhalten eine quadratische Matrix. Ist

diese invertierbar, haben wir das Problem des Auffindens der Lösungsmenge oben bereits gelöst: wir suchen das Argument einer bijektiven Abbildung, dessen Funktionswert unter der Abbildung bekannt ist, d.h. wir berechnen die Umkehrmatrix und multiplizieren diese mit **b:**

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Wir erhalten das einzige Element $\mathbf{x}$ der Lösungsmenge. Allerdings ist diese Berechnungsmethode nur schneller als die Anwendung der vermutlich bekannten Methoden der Auflösung linearer Gleichungssysteme (Substitution und Gleichsetzen, Addition), wenn man mit Computern arbeitet. Die Berechnung einer (n,n)-Umkehrmatrix führt ja auf jeweils n Gleichungssysteme, welche jedes n Unbekannte hat - jedes gleich viele wie das ursprünglich zu lösende Gleichungssystem. Zudem haben wir mit dem Verfahren das Problem des Auffindens der Lösungsmenge nur für invertierbare Matrizen von Gleichungssystemen gelöst, die gleichviele Unbekannte wie Gleichungen aufweisen. Deshalb führen wir noch ein allgemeineres Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme ein.

Offensichtlich gelten folgende Regeln für die Umwandlung von Gleichungssystemen, ohne das die Lösungsmenge verändert wird:

- Wird eine Gleichung eines Gleichungssystems durchgängig mit einer von Null verschiedenen reellen Konstanten multipliziert, verändert sich die Lösungsmenge nicht. So ist für

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 5 \\ 3x_1 + 15x_2 &= 7 \end{aligned} \tag{16.4.6}$$

  $L = \left\{(\frac{18}{7}, -\frac{1}{21})\right\}$, ebenso für das Gleichungssystems, in dem wir die ersten Zeile durchgehend mit 5 multipliziert haben:

$$\begin{aligned} 10x_1 + 15x_2 &= 25 \\ 3x_1 + 15x_2 &= 7 \end{aligned}$$

- Wird die linke und die rechte Seite einer der Gleichungen zur linken respektive rechten Seite einer anderen Gleichung hinzugezählt - wir sagen künftig kurz, dass „eine Gleichung zur anderen addiert wurde“ - verändert sich die Lösungsmenge nicht. So ist für

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 5 \\ 5x_1 + 18x_2 &= 12 \end{aligned}$$

  die Lösungsmenge wiederum $L = \left\{(\frac{18}{7}, -\frac{1}{21})\right\}$, wobei das Gleichungssystem aus dem System (16.4.6) durch die Addition der ersten zur zweiten Gleichung entstand, denn $2x_1 + 3x_2 + 3x_1 + 15x_2 = 5x_1 + 18x_2$ und $5 + 7 = 12$.
  Die erste und die zweite Regel zusammen ergeben die Möglichkeit, die addierte Gleichung z vorgängig mit einer von Null verschiedenen reellen Konstanten a zu multiplizieren, wobei im Gleichungssystem die Zeile z unverändert bleibt - man kann ja eine Zeile z mit einer Konstanten multiplizieren, diese dann zu einer anderen Zeile addieren und dann z wieder mit der Inversen $\frac{1}{a}$ der Konstanten multiplizieren. So kann man z.B. in (16.4.6) die erste Zeile mit 5 multiplizieren und diese zur zweiten dazuzählen, wobei die erste Zeile ins neue System unverändert übernommen wird, und man erhält:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 5 \\ 13x_1 + 30x_2 &= 32 \end{aligned}$$

- Vertauschen wir zwei Zeilen eines Gleichungssystems, so verändert sich die Lösungsmenge nicht.

Jedem Gleichungssystem entspricht eine Matrix $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, wenn wir die Matrix $\mathbf{A}$ der Koeffizienten bilden und zu dieser die Spalte der Konstanten $\mathbf{b}$ hinzufügen. Die Matrix $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ nennen wir die „erweiterte Matrix“. Im Beispiel des Gleichungssystems (16.4.6) erhalten wir:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 15 & 7 \end{array}\right)$$

Die Abtrennung des Vektors $\mathbf{b}$ von der Matrix $\mathbf{A}$ durch einen Trennstrich ist fakultativ. Gleichungssystem und erweiterte Matrix entsprechen sich eineindeutig. Offensichtlich entspricht die Multiplikation einer Zeile der erweiterten Matrix mit einer Konstanten ($\neq 0$) der obigen Operation der Multiplikation einer Zeile des Gleichungssystems mit einer Konstanten ($\neq 0$). Multiplizieren wir also die Zeile einer erweiterten Matrix mit einer von Null verschiedenen reellen Konstanten, verändert sich die Lösungsmenge des der Matrix entsprechenden Gleichungssystems nicht. Dies gilt ebenso für die Addition einer - eventuell mit einer von Null verschiedenen reellen Konstanten multiplizierten - Zeile zu einer anderen Zeile. Zudem können Zeilen der Matrix ausgetauscht werden, ohne dass sich die Lösungsmenge des entsprechenden Gleichungssystems ändert. Mit Hilfe dieser Operationen versuchen wir die erweiterte Matrix so umzuwandeln, das wir die Lösungsmenge unmittelbar aus der Matrix ablesen können. Wir führen dies nun ohne lange Erläuterungen an ein paar Beispielen vor, um die verschiedenen dabei möglichen Ergebnisse aufzuzeigen. Das Verfahren wird „Gausssches Eliminationsverfahren“ genannt (Johann Carl Friedrich Gauß, 1777 - 1855, deutscher Mathematiker).

Beispiel 16.4.1. *Wir lösen mit dem Eliminationsverfahren das Gleichungssystem (16.4.6). Wir multiplizieren die erste Zeile mit $\frac{1}{2}$ und erhalten:*

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 3 & 15 & 7 \end{array}\right)$$

Als nächstes addieren wir die erste mit -3 multiplizierte Zeile zur zweiten Zeile und erhalten (rechnen Sie das nach!):

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{21}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Nun multiplizieren wir die zweite Zeile mit $\frac{2}{21}$ und erhalten:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{21} \end{array}\right) \tag{16.4.7}$$

Wir addieren die mit $-\frac{3}{2}$ multiplizierte zweite Zeile der Matrix (16.4.7) zur ersten und erhalten:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{18}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{21} \end{array}\right)$$

Diese Matrix entspricht dem Gleichungssytem

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{18}{7} \\ x_2 &= -\frac{1}{21}, \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge $\left\{\left(\frac{18}{7}, -\frac{1}{21}\right)\right\}$ kann direkt abgelesen werden. ◊

Beispiel 16.4.2. *Gegeben sei das Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} 15x_1 + 2x_2 + 35x_3 &= 5 \\ 28x_1 + 11x_2 + 12x_3 &= 12 \\ 1.5x_1 + 5x_2 &= 14 \end{aligned}$$

Künftig verwenden wir folgende Abkürzungen: Steht zwischen zwei Matrizen aZ_i, so wird die Zeile i der vorausgehenden Matrix mit a multipliziert und man erhält die nachfolgende Matrix. Steht $Z_i + (aZ_j)$, so wird zur $i-$ten Zeile der vorausgehenden Matrix das $a-$fache der $j-$ten Zeile hinzugezählt, um die nachfolgende Matrix zu erhalten. Steht $Z_i \leftrightarrow Z_j$ so werden die Zeilen i und j der vorausgehenden Matrix vertauscht und man erhält die nachfolgende Matrix. Wir gehen von der erweiterten Matrix aus:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 15 & 2 & 35 & 5 \\ 28 & 11 & 12 & 12 \\ 1.5 & 5 & 0 & 14 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{15}Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{15} & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ 28 & 11 & 12 & 12 \\ 1.5 & 5 & 0 & 14 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2 + (-28Z_1)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{15} & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{109}{15} & -\frac{160}{3} & \frac{8}{3} \\ 1.5 & 5 & 0 & 14 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 + (-1.5Z_1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{15} & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{109}{15} & -\frac{160}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 4.8 & -3.5 & 13.5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{15}{109}Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{15} & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{800}{109} & \frac{40}{109} \\ 0 & 4.8 & -3.5 & 13.5 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 + \left(-\frac{2}{15}Z_2\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{361}{109} & \frac{31}{109} \\ 0 & 1 & -\frac{800}{109} & \frac{40}{109} \\ 0 & 4.8 & -3.5 & 13.5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 + (-4.8Z_2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{361}{109} & \frac{31}{109} \\ 0 & 1 & -\frac{800}{109} & \frac{40}{109} \\ 0 & 0 & 31.729 & 11.739 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{31.729}Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{361}{109} & \frac{31}{109} \\ 0 & 1 & -\frac{800}{109} & \frac{40}{109} \\ 0 & 0 & 1 & 0.369\,98 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1 + \left(-\frac{361}{109}Z_3\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -0.940\,94 \\ 0 & 1 & -\frac{800}{109} & \frac{40}{109} \\ 0 & 0 & 1 & 0.369\,98 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2 + \left(\frac{800}{109}Z_3\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -0.940\,94 \\ 0 & 1 & 0 & 3.\,082\,4 \\ 0 & 0 & 1 & 0.369\,98 \end{array}\right)$$

Damit erhält man die Lösungsmenge $\{(-0.940\,94, 3.0824, 0.36998)\}$ ◊

Die Transformationen kann man auch mittels Matrixmultiplikation erreichen - womit man diese mit Excel oder R durchführen kann, um Fehler zu vermeiden. Wir führen die folgenden drei Elementarmatrizen ein und erläutern deren Effekte jeweils mit einem Beispiel.

Typ I: Elementarmatrizen $\mathbf{E}_{\lambda i}$ vom Typ I erhält man durch Ersetzen der Komponente e_{ii} in der Einheitsmatrix $\mathbf{E}$ durch eine Konstante λ. $\mathbf{E}_{\lambda i}\mathbf{A}$ bewirkt die Multiplikation der Zeile i der Matrix $\mathbf{A}$ mit der Konstanten λ (im Beispiel wird die zweite Zeile mit 5 multipliziert).

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 8 & 5 \\ 3 & 9 & 12 & 12 \\ 5 & 2 & 2 & 14 \\ 4 & 12 & 11 & 14 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc} 2 & 6 & 8 & 5 \\ 15 & 45 & 60 & 60 \\ 5 & 2 & 2 & 14 \\ 4 & 12 & 11 & 14 \end{array}\right)$$

Typ II: Elementarmatrizen $\mathbf{E}_{i+\lambda j}$ vom Typ II erhält man durch Ersetzen der Komponente e_{ij} in der Einheitsmatrix $\mathbf{E}$ durch eine Konstante λ. $\mathbf{E}_{i+\lambda j}\mathbf{A}$ bewirkt die Addition einer mit λ multiplizierten Zeile j der Matrix $\mathbf{A}$ zur Zeile i ($i \neq j$) der Matrix $\mathbf{A}$ (im Beispiel wird die 4. Zeile mit 3 multipliziert und zur 2. Zeile hinzugezählt):

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 8 & 5 \\ 3 & 9 & 12 & 12 \\ 5 & 2 & 2 & 14 \\ 4 & 12 & 11 & 14 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc} 2 & 6 & 8 & 5 \\ 15 & 45 & 45 & 54 \\ 5 & 2 & 2 & 14 \\ 4 & 12 & 11 & 14 \end{array}\right)$$

Typ III: Elementarmatrizen $\mathbf{E}_{ij}$ vom Typ III erhält man aus der Einheitsmatrix $\mathbf{E}$ durch Nullsetzen der Diagonalkomponenten e_{ii} und e_{jj} und durch Ersetzung der Komponenten e_{ij} und e_{ji} durch 1. $\mathbf{E}_{ij}\mathbf{A}$ vertauscht die Zeilen i und j von $\mathbf{A}$ (im folgenden Beispiel werden die zweite und die vierte Zeile vertauscht - Vertauschungsmatrizen sind immer symmetrisch). Diese Matrizen verwendet man etwa, wenn auf der Diagonalen eine Null auftaucht und man die entsprechende

Zeile durch eine tiefere Zeile ersetzen möchte, deren unter der Null liegende Komponente von Null verschieden ist.

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 8 & 5 \\ 3 & 9 & 12 & 12 \\ 5 & 2 & 2 & 14 \\ 4 & 12 & 11 & 14 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc} 2 & 6 & 8 & 5 \\ 4 & 12 & 11 & 14 \\ 5 & 2 & 2 & 14 \\ 3 & 9 & 12 & 12 \end{array}\right)$$

Wie das folgenden Beispiel zeigt, kann man die Operationen des Typs II gleichzeitig auf mehrere Zeilen anwenden, um ein Gleichungssystem effizient zu lösen.

Beispiel 16.4.3.

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{1}{15} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc|c} 15 & 2 & 35 & 5 \\ 28 & 11 & 12 & 12 \\ 1.5 & 5 & 0 & 14 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0.133\,33 & 2.333\,3 & 0.333\,33 \\ 28 & 11 & 12 & 12 \\ 1.5 & 5 & 0 & 14 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -28 & 1 & 0 \\ -1.5 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0.133 & 2.33 & 0.333 \\ 28 & 11 & 12 & 12 \\ 1.5 & 5 & 0 & 14 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0.133 & 2.333 & 0.333 \\ 0 & 7.266 & -53.332 & 2.666 \\ 0 & 4.8 & -3.500 & 13.5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7.2668} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0.133 & 2.33 & 0.333 \\ 0 & 7.266 & -53.33 & 2.66 \\ 0 & 4.8 & -3.50 & 13.5 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0.133 & 2.33 & 0.33 \\ 0 & 1 & -7.339 & 0.366 \\ 0 & 4.8 & -3.5 & 13.5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & -0.133 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4.8 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0.133 & 2.33 & 0.333 \\ 0 & 1 & -7.33 & 0.366 \\ 0 & 4.8 & -3.5 & 13.5 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc} 1.0 & 0 & 3.31 & 0.284 \\ 0 & 1.0 & -7.33 & 0.366\,98 \\ 0 & 0 & 31.72 & 11.738 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{31.728} \end{array}\right)\left(\begin{array}{cccc} 1.0 & 0 & 3.31 & 0.284 \\ 0 & 1.0 & -7.33 & 0.366\,98 \\ 0 & 0 & 31.72 & 11.738 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc} 1.0 & 0 & 3.31 & 0.284 \\ 0 & 1.0 & -7.33 & 0.366\,98 \\ 0 & 0 & 1 & 11.738 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -3.311\,8 \\ 0 & 1 & 7.339\,1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cccc} 1.0 & 0 & 3.311\,8 & 0.284\,4 \\ 0 & 1.0 & -7.339\,1 & 0.366\,98 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0.369\,96 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -0.940\,83 \\ 0 & 1 & 0 & 3.082\,2 \\ 0 & 0 & 1 & 0.369\,96 \end{array}\right)$$

Vollziehen Sie das Beispiel und die folgenden mittels Multiplikation mit Elementarmatrizen mit Excel nach. ◊

Beispiel 16.4.4.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 12 & 3 & 9 \\ 28 & 11 & 12 & 12 \\ 5.6 & 2.2 & 2.4 & 14 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{5}Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{12}{5} & \frac{3}{5} & \frac{9}{5} \\ 28 & 11 & 12 & 12 \\ 5.6 & 2.2 & 2.4 & 14 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2+(-28Z_1)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{12}{5} & \frac{3}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & -\frac{281}{5} & -\frac{24}{5} & -\frac{192}{5} \\ 5.6 & 2.2 & 2.4 & 14 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3+(-5.6Z_1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{12}{5} & \frac{3}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & -\frac{281}{5} & -\frac{24}{5} & -\frac{192}{5} \\ 0 & -11.24 & -0.96 & 3.92 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{5}{281}Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{12}{5} & \frac{3}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & 1 & \frac{24}{281} & \frac{192}{281} \\ 0 & -11.24 & -0.96 & 3.92 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1+\left(-\frac{12}{5}Z_2\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{111}{281} & \frac{45}{281} \\ 0 & 1 & \frac{24}{281} & \frac{192}{281} \\ 0 & -11.24 & -0.96 & 3.92 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3+(11.24Z_2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{111}{281} & \frac{45}{281} \\ 0 & 1 & \frac{24}{281} & \frac{192}{281} \\ 0 & 0 & 0 & 11.6 \end{array}\right)$$

Die letzte Zeile der Matrix entspricht im zur Matrix gehörenden Gleichungssystem der Gleichung

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 11.6 \Longrightarrow$$
$$0 = 11.6$$

Man erhält einen Widerspruch. Das Gleichungssystem ist nicht lösbar. ◊

Beispiel 16.4.5.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 8 & 5 \\ 3 & 9 & 12 & 12 \\ 5 & 2 & 2 & 14 \end{array}\right) \underrightarrow{\frac{1}{2}Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & \frac{5}{2} \\ 3 & 9 & 12 & 12 \\ 5 & 2 & 2 & 14 \end{array}\right) \underrightarrow{Z_2 + -3Z_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{2} \\ 5 & 2 & 2 & 14 \end{array}\right) \underrightarrow{Z_3 + -5Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{2} \\ 0 & -13 & -18 & 1.5 \end{array}\right)$$

Da die Zeile 2 an zweiter Stelle eine 0 enthält, vertauschen wir Zeilen so, dass dort eine von 0 verschiedene Zahl steht. Die Zeile 1 fällt dabei als Kandidatin ausser Betracht:

$$\underrightarrow{Z_3 \leftrightarrow Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & \frac{5}{2} \\ 0 & -13 & -18 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{2} \end{array}\right) \underrightarrow{-\frac{1}{13}Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{18}{13} & -0.115\,38 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{2} \end{array}\right)$$

$$\underrightarrow{Z_1 + (-3Z_2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{13} & 2.846\,1 \\ 0 & 1 & \frac{18}{13} & -0.115\,38 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{2} \end{array}\right)$$

Auch dieses System ist nicht lösbar. Das hätte man schon oben sehen können, wo die zweite Zeile zuerst drei Nullen aufweist und dann eine von Null verschiedene Zahl b_2 auftaucht. Allerdings wollten wir ein mechanisches Verfahren vorführen, das sich noch als nützlich erweisen wird. ◊

Beispiel 16.4.6. *Gegeben sei das Gleichungssystem*

$$5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15$$
$$2x_1 + 8x_2 + 7x_3 = 14$$

Die entsprechende erweiterte Matrix ist

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 4 & 15 \\ 2 & 8 & 7 & 14 \end{array}\right)$$

Wir wandeln diese um:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 4 & 15 \\ 2 & 8 & 7 & 14 \end{array}\right) \underrightarrow{\frac{1}{5}Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 3 \\ 2 & 8 & 7 & 14 \end{array}\right) \underrightarrow{Z_2 + -2Z_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 3 \\ 0 & \frac{34}{5} & \frac{27}{5} & 8 \end{array}\right) \underrightarrow{\frac{5}{34}Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 3 \\ 0 & 1 & \frac{27}{34} & \frac{20}{17} \end{array}\right) \underrightarrow{Z_1 + -\frac{3}{5}Z_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{11}{34} & \frac{39}{17} \\ 0 & 1 & \frac{27}{34} & \frac{20}{17} \end{array}\right)$$

Das Verfahren stoppt. Es ergibt sich weder ein Widerspruch noch eine eindeutige Lösung. In diesem Fall gibt es unendlich viele Lösungen. Fürs obige Beispiel erhält man das folgende der Matrix entsprechende Gleichungssystem

$$x_1 + \frac{11}{34}x_3 = \frac{39}{17}$$
$$x_2 + \frac{27}{34}x_3 = \frac{20}{17}$$

Eine der unendlich vielen konkreten Lösungen erhält man wie folgt. Wir setzen für x_i mit $i = 1$ anfangend solange Zahlen ein, bis ein eindeutig lösbares Gleichungssystem entsteht. Dieses lösen wir dann auf. Die willkürlich gewählten Werte zusammen mit den berechneten ergeben dann eine Lösung. Setzen wir z.B. $x_1 = 1$, gilt

$$1 + \frac{11}{34}x_3 = \frac{39}{17}$$

und damit $x_3 = 4$. Wir können nun x_2 ausrechnen:

$$x_2 + \frac{27}{34} \cdot 4 = \frac{20}{17}$$

Man erhält: $x_2 = -2$. Ein Element der Lösungsmenge ist damit $(1, -2, 4)$. Wir kontrollieren:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 8 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Allgemeiner können wir die Gleichungen

$$x_1 + \frac{11}{34}x_3 = \frac{39}{17}$$
$$x_2 + \frac{27}{34}x_3 = \frac{20}{17}$$

nach zwei der Variablen auflösen. Dabei wählt man mit Vorteil die Variablen, die bereits isoliert (konstantenfrei) sind, wodurch sich das oben entwickelte Verfahren der Zeilennormalform als nützlich erweist:

$$x_1 = \frac{39}{17} - \frac{11}{34}x_3$$
$$x_2 = \frac{20}{17} - \frac{27}{34}x_3$$

Damit ist der Lösungsvektor allgemein ausgedrückt:

$$\begin{pmatrix} \frac{39}{17} - \frac{11}{34}x_3 \\ \frac{20}{17} - \frac{27}{34}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

und die Lösungsmenge

$$\left\{ \mathbf{x} : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{39}{17} - \frac{11}{34}x_3 \\ \frac{20}{17} - \frac{27}{34}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ mit } x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Man könnte auch nach anderen Variablen auflösen - die Lösungsmenge verändert sich nicht. $\Diamond$

Beispiel 16.4.7. *Gegeben sei das Gleichungssystem*

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 4 \\ 8 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 44 \end{pmatrix}.$$

Die entsprechende erweiterte Matrix ist

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 4 & 20 \\ 8 & 2 & 1 & 4 & 44 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 4 & 20 \\ 8 & 2 & 1 & 4 & 44 \end{pmatrix} \underrightarrow{\frac{1}{5}Z_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & 4 \\ 8 & 2 & 1 & 4 & 44 \end{pmatrix} \underrightarrow{Z_2 + -8Z_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & 4 \\ 0 & \frac{-14}{5} & -\frac{11}{5} & \frac{-12}{5} & 12 \end{pmatrix} \underrightarrow{\frac{-5}{14}Z_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & 4 \\ 0 & 1 & \frac{11}{14} & \frac{6}{7} & -\frac{30}{7} \end{pmatrix} \underrightarrow{Z_1 + -\frac{3}{5}Z_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{14} & \frac{2}{7} & \frac{46}{7} \\ 0 & 1 & \frac{11}{14} & \frac{6}{7} & -\frac{30}{7} \end{pmatrix}$$

Das entspricht dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{1}{14}x_3 + \frac{2}{7}x_4 &= \frac{46}{7} \\ x_2 + \frac{11}{14}x_3 + \frac{6}{7}x_4 &= -\frac{30}{7} \end{aligned}$$

Wir können jeweils zwei Variablen willkürlich festlegen und erhalten ein lösbares Gleichungssystem. Allgemein erhält man also als Lösungsmenge mit

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{46}{7} + \frac{1}{14}x_3 - \frac{2}{7}x_4 \\ x_2 &= -\frac{30}{7} - \frac{11}{14}x_3 - \frac{6}{7}x_4 \end{aligned}$$

$$L = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 | \begin{pmatrix} \frac{46}{7} + \frac{1}{14}x_3 - \frac{2}{7}x_4 \\ -\frac{30}{7} - \frac{11}{14}x_3 - \frac{6}{7}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right\}$$

So gilt etwa mit $x_3 = 8$ und $x_4 = 5$:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{46}{7} + \frac{1}{14} \cdot 8 - \frac{2}{7} \cdot 5 = \frac{40}{7} \\ x_2 &= -\frac{30}{7} - \frac{11}{14} \cdot 8 - \frac{6}{7} \cdot 5 = -\frac{104}{7} \end{aligned}$$

Und damit

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 4 \\ 8 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{40}{7} \\ -\frac{104}{7} \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 44 \end{pmatrix}$$

◊

Das Gausssche Eliminationsverfahren sollte durch die obigen Beispiele 16.4.1 ff. deutlich geworden sein.

Definition 16.4.8. *Eine Matrix* **B**, *die aus* **A** *mit dem Gaussschen Eliminationsverfahren gewonnen wurde, so*

- *dass* **B** *pro Zeile entweder mit einer* 1 *anfängt oder nur Nullen aufweist und*
- *in Zeilen, die mit 1 anfangen spaltenweise aus Einheitsvektoren besteht,*

wird „Matrix in Zeilennormalform“ von **A** *genannt.*

◊

Wir können die bisher gewonnen Erkenntnisse - ohne Beweis - wie folgt zusammenfassen:

Satz 16.4.9. *Sei* $(\mathbf{A}', \mathbf{b}')$ *die Zeilennormalform der erweiterten Matrix* $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, *wobei* $\mathbf{A}$ *eine* $(m, n)-$*Matrix sei:*

- *Besteht* $\mathbf{A}'$ *nur mehr aus paarweise verschiedenen Einheitsvektoren (*$\mathbf{A}'$ *ist also quadratisch), so weist das der Matrix entsprechende Gleichungssystem genau eine Lösung auf.*
- *Gibt es eine Zeile* i *von* $\mathbf{A}'$, *so dass* $a_{ij} = 0$ *für* $1 \leq j \leq n$ *und ist* $b_i \neq 0$, *dann hat das der Matrix* $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ *entsprechende Gleichungssystem keine Lösung.*
- *Tritt keiner der beiden obigen Fälle ein, gibt es unendlich viele Lösungen.*

Bemerkung 16.4.10. *Man kann beweisen, dass die Bedingung „*$\mathbf{A}'$ *besteht nur mehr aus paarweise verschiedenen Einheitsvektoren“ des ersten Teilsatzes von 16.4.9 mit der Invertierbarkeit von quadratischen Matrizen äquivalent ist. Damit haben wir ein Verfahren zu Hand, um die Invertierbarkeit zu prüfen. Bevor man Gleichungssysteme mit der Inversen löst, sollte man die Invertierbarkeit nämlich abklären. Beim obigen Nachweis der Invertierbarkeit haben wir das Gleichungssystem aber bereits gelöst. Allerdings ist es manchmal nützlich, für oft wiederholte Rechnungen die Inverse zu haben. Entsprechend kann die Verwendung von Inversen für die Berechnung von Gleichungssystemen trotzdem nützlich sein, solange die Matrix der Koeffizienten unverändert bleibt.*

Wollen wir für die einmalige Lösung einer vermutlich eindeutig lösbaren Gleichung das Lösungsverfahren mit der Inversen (etwa mit Excel) verwenden, gibt es weitere Verfahren, um die Invertierbarkeit quadratischer Matrizen zu überprüfen. Diese sind allerdings von Hand mindestens so rechenintensiv wie das eben eingeführte. Mit Excel kann man die Invertierbarkeit mit einem der alternativen Verfahren leicht überprüfen. Man gibt für eine quadratische Matrix ein: „mdet()“ - $\det \mathbf{A}$ *ist eine Funktion, die Matrizen reelle Zahlen zuordnet und die genau dann von Null verschiedene Werte annimmt, wenn die Matrix invertierbar ist. Die zugeordneten Zahlen werden „Determinanten“ genannt. Allerdings ist zu beachten, dass bei Resultaten sehr nahe bei 0, z.B.* $3.4639E-14$, *die Matrix vermutlich nicht invertierbar ist. Es ist anzunehmen, dass eine solche Abweichung von* 0 *durch Rundungsfehler entsteht. Will man dies ausschliessen, hilft nur eine Rechnung, die auf Rundung verzichtet. Dazu ist das obige Verfahren - wenigstens bei kleinen Matrizen - recht geeignet, da man bei einem Ausgangsgleichungssystem, das nur rationale Zahlen aufweist, durchgehend mit Brüchen rechnen kann.*
◊

Definition 16.4.11. *Weist die Zeilennormalform einer quadratischen* $n \times n$*-Matrix in jeder Zeile von links her eine* 1 *auf, so sagt man, dass die ursprüngliche Matrix den Rang* n *hat. Der Rang einer Matrix besteht allgemeiner aus der Anzahl der mit* 1 *anfangenden Zeilen der Zeilennormalform der Matrix.* ◊

Quadratische (n, n)-Matrizen $\mathbf{M}$ mit dem Rang n legen entsprechend bijektive Abbildungen $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ fest, die sie unter anderem mittels $\mathbf{Mx}$ für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ definieren. $\mathbf{M}^{-1}$ legt die entsprechende Umkehrfunktion fest.

Ohne deren Bedeutung für lineare Abbildungen zu erläutern, führen wir noch die Transposition von Matrizen ein, da sich diese oft als nützlich erweist.

Definition 16.4.12. *Seien* (i, j, x) *die Elemente des Graphen einer Matrix* $\mathbf{A}$ *(s. Bemerkung 16.1.13), dann enthält der Graph der Transponierten der Matrix* $\mathbf{A}$ *die Elemente* (j, i, x) *. Für die Transponierte von* $\mathbf{A}$ *schreibt man* $\mathbf{A}^T$*.* ◊

In der Literatur findet man statt $\mathbf{A}^T$ unter anderem auch $\mathbf{A}'$, $\mathbf{A}^t$ oder ${}^t\mathbf{A}$. Aus einer $(m, n)-$Matrix wird eine (n, m) $-$Matrix. Die Komponente der i-ten Zeile und j-ten Spalte wird in die j-te Zeile und die i-te Spalte gesetzt. Bei einer (n, n) $-$Matrix erhält man die Transponierte, indem man die Matrix an der Hauptdiagonalen spiegelt. Wenn die (m, n)-Matrix $\mathbf{A}$ eine Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$, so definiert die transponierte Matrix unter anderem eine Abbildung von $\mathbb{R}^m$ nach

$\mathbb{R}^n$, wobei die entsprechende Abbildung i.A. keineswegs die Umkehrfunktion ist. Diese Abbildung ist durch die Matrix $\mathbf{A}$ aber eindeutig bestimmt.

Mit Excel erhält man die Transponierte einer $(m,n)-$Matrix, indem man $n \times m$ freie Zellen beleuchtet und dann „=mtrans(Referenz auf zu transponierende Matrix)“ fortfährt oder durch Kopieren der Matrix, Anwählen einer Zelle mit genügend freiem Raum rechts sowie unten, dann Inhalte einfügen und transponieren.

Mit R: $t(\mathbf{A})$

Beispiel 16.4.13.

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 15 & 1 & 2 \\ 16 & 6 & 18 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 5 & 15 & 16 \\ 3 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 18 \end{pmatrix}$$

$\Diamond$

Beispiel 16.4.14.

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 15 & 1 & 2 \\ 16 & 6 & 18 \\ 14 & 22 & 100 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 5 & 15 & 16 & 14 \\ 3 & 1 & 6 & 22 \\ 4 & 2 & 18 & 100 \end{pmatrix}$$

$\Diamond$

Es folgen ein paar nützlich Rechenregeln für Matrizen.

Offensichtlich gilt:

Satz 16.4.15. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

Satz 16.4.16. $\left(\mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}$

Weniger offensichtlich sind:

Satz 16.4.17. $\mathbf{A}^T\mathbf{B}^T = (\mathbf{BA})^T$

Beweis. Für $\mathbf{C} = \mathbf{BA}$ gilt: $c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} b_{il}a_{lj}$. Ist a_{lj} die Eintrag in die entsprechende Zelle von $\mathbf{A}$, ist a'_{jl} der Eintrag in der j-ten Zeile und der l-ten Spalte von $\mathbf{A}^T$, wobei gilt $a_{lj} = a'_{jl}$. Analog für $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$. Damit gilt:

$$c'_{ji} = c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} b_{il}a_{lj} = \sum_{l=1}^{k} a_{lj}b_{il} = \sum_{l=1}^{k} a'_{jl}b'_{li}$$

Also gilt der Satz. □

Satz 16.4.18. $\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T$

Beweis. Es gilt $\mathbf{E} = \mathbf{E}^T$ und damit $\mathbf{E} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\right)^T = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T \mathbf{A}^T$. Durch Multiplikation durch $\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1}$ von rechts her, erhält man $\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T$ □

Satz 16.4.19. $(\mathbf{BA})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$

Beweis. $(\mathbf{BA})(\mathbf{BA})^{-1} = \mathbf{E} \iff \mathbf{A}(\mathbf{BA})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \iff (\mathbf{BA})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$ (durch jeweilige Multiplikation von links her). □

Satz 16.4.20. *Für* $\mathbf{b}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ *gilt*

$$\mathbf{diag}(\mathbf{a})\,\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1b_1 \\ \vdots \\ a_nb_n \end{pmatrix}$$

Mit $\mathbf{diag}\,(\mathbf{x})\,\mathbf{p}$ kann man z.B. einen Kostenvektor $\mathbf{k}$ berechnen, wenn der Vektor der Gütermenge (Leistungen) $\mathbf{x}$ und der Vektor der Preise $\mathbf{p}$ dieser Güter bekannt ist. Es gilt nämlich $\mathbf{k} = \mathbf{diag}\,(\mathbf{x})\,\mathbf{p}$, wie etwa das folgende Beispiel zeigt: $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)\,; \mathbf{x} = (300, 400, 50)$

$$\mathbf{diag}\,(\mathbf{x})\,\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 300 & 0 & 0 \\ 0 & 400 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300p_1 \\ 400p_2 \\ 50p_3 \end{pmatrix}$$

Beispiel 16.4.21. *Innerbetriebliche Leistungsverrechnung. In Betrieben gibt es oft Unternehmensbereiche, welche für die übrigen Betriebseinheiten und sich selbst Leistungen erbringen. Will man überprüfen, ob z.B. diese Leistungen im Betrieb billiger erbracht werden als von auswärtigen Produzenten, muss man die innerbetrieblichen Verrechnungskosten berechnen. Zudem braucht man bei der Produktion verschiedener Güter und Dienstleistungen für die Preiskalkulation die genauen internen Preise. Dazu kann man nicht einfach die sogenannten Primärkosten (Löhne, Material - also Input von ausserhalb des Verflechtungssystems, Abschreibungen, etc.) durch die an die Hauptproduktion gelieferte Anzahl Produkte dividieren, denn in die Zwischenprodukte sind unterschiedlich viele Leistungen der verschiedenen Betriebseinheiten geflossen - deren Kosten „Sekundärkosten" genannt werden. Um die effektiven Kosten zu berechnen müsste man entsprechend bereits die Kosten der Leistungen, welche die Unterbetriebseinheiten anderen Unterbetriebseinheiten gegenüber erbringen, kennen. Das Problem führt auf ein Gleichungssystem, wie wir am folgenden Beispiel zeigen wollen:*

Hilfsbetriebe	H	F	P	D	Leistungen an Hauptbetrieb ($= \mathbf{l}_{HB}$)	Gesamtleistung der Hilfsbetriebe ($= \mathbf{l}_g$)	Primärkosten GE
Heizung (H)	0	500	0	600	1000	2100	5123
Finanzen (F)	100	1000	100	5000	20000	26200	4006
Putzdienst (P)	1000	1200	0	2000	8000	12200	8015
Druckerei (D)	0	2000	0	500	12000	14500	12212
Summe							29356

Der Hilfsbetrieb Heizung liefert z.B. an die Druckerei 600 Einheiten Heizdienstleistungen (z.B. in kwh). Die Druckerei liefert an den Hauptbetrieb 12000 Einheiten Druckdienstleistungen. Offenbar muss für die Produktion eines Hilfsbetriebs gelten:

$$\textit{Gesamtleistung mal effektive Preise } (\mathbf{k}_g) = \textit{Primärkosten } (\mathbf{k}_p) + \textit{Sekundärkosten } (\mathbf{k}_s) \tag{16.4.8}$$

$$\mathbf{k}_g = \mathbf{k}_p + \mathbf{k}_s \tag{16.4.9}$$

wobei die sekundären Kosten k_{si} die von den Hilfsbetrieben i empfangenen Leistungen sind, die mit dem (unbekannten) Verrechnungspreis p_i dieser Leistungen multipliziert werden.
Die Gesamtleistung mal effektive Preise pro Hilfsbetreib k_{gi} sind die Gesamtleistung der Hilfsbetriebe i, die mit dem (unbekannten) Verrechnungspreis p_i dieser Leistungen multipliziert werden.

Der Zusammenhang (16.4.8) führt auf das folgende Gleichungssystem mit den gesuchten Verrechnungspreisen p_i der Leistungen von Hilfsbetrieb i pro Zeile:

$$\begin{aligned} k_p + (k_{s1} + k_{s2} + k_{s3} + k_{s4}) &= k_g \\ 5123 + 0p_1 + 100p_2 + 1000p_3 + 0p_4 &= 2100p_1 \\ 4006 + 500p_1 + 1000p_2 + 1200p_3 + 2000p_4 &= 26200p_2 \\ 8015 + 0p_1 + 100p_2 + 0p_3 + 0p_4 &= 12200p_3 \\ 12212 + 600p_1 + 5000p_2 + 2000p_3 + 500p_4 &= 14500p_4 \end{aligned}$$

Dies kann umgeformt werden in:

$$\begin{aligned} 2100p_1 - 100p_2 - 1000p_3 &= 5123 \\ -500p_1 + 25200p_2 - 1200p_3 - 2000p_4 &= 4006 \\ -100p_2 + 12200p_3 &= 8015 \\ -600p_1 - 5000p_2 - 2000p_3 + 14000p_4 &= 12212 \end{aligned}$$

Mit Excel gelangen aus der ursprünglichen Tabelle der Leistungen der Hilfsbetriebe an die Hilfsbetriebe wie folgt möglichst effizient zur Matrixdarstellung dieses Gleichungssystems: wir berechnen die Transponierte der Matrix. Wir erhalten damit

$$\mathbf{L}^T := \begin{pmatrix} 0 & 500 & 0 & 600 \\ 100 & 1000 & 100 & 5000 \\ 1000 & 1200 & 0 & 2000 \\ 0 & 2000 & 0 & 500 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 1000 & 0 \\ 500 & 1000 & 1200 & 2000 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 600 & 5000 & 2000 & 500 \end{pmatrix}$$

Die linke Seite des obigen Gleichungssystems in Matrixform erhalten wir dann mit

$$\mathbf{l}_g = \mathbf{L1} + \mathbf{l}_{HB} = \begin{pmatrix} 0 & 500 & 0 & 600 \\ 100 & 1000 & 100 & 5000 \\ 1000 & 1200 & 0 & 2000 \\ 0 & 2000 & 0 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1000 \\ 20000 \\ 8000 \\ 12000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2100 \\ 26\,200 \\ 12\,200 \\ 14\,500 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} diag\,(\mathbf{l}_g) - \mathbf{L}^T &= \begin{pmatrix} 2100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 26200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 14500 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 100 & 1000 & 0 \\ 500 & 1000 & 1200 & 2000 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 600 & 5000 & 2000 & 500 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2100 & -100 & -1000 & 0 \\ -500 & 25\,200 & -1200 & -2000 \\ 0 & -100 & 12\,200 & 0 \\ -600 & -5000 & -2000 & 14\,000 \end{pmatrix} =: \mathbf{A} \end{aligned}$$

Mit R:
L=matrix(c(0,100,1000,0,500,1000,1200,2000,0,100,0,0,600,5000,2000,500),ncol=4)
lHB=c(1000,20000,8000,12000)
lg=rowSums(L)+lHB #oder L%%c(1,1,1,1)+lHB oder L%*%rep(1,4)+lHB*
A=diag(lg)-t(L)

Mit Excel kontrollieren wir, ob $\mathbf{A}$ *invertierbar ist:* $\det(\mathbf{A}) = 8.76734E + 15 > 0$. *Die Matrix ist invertierbar. Wir berechnen die Inverse:*
Mit R:
det(A)

Wir berechnen die Inverse:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.000476778 & 3.93369E-05 & 2.10782E-06 & 3.01117E-07 \\ 1.14105E-05 & 4.09109E-05 & 5.91741E-06 & 5.84442E-06 \\ 9.35289E-08 & 3.35335E-07 & 8.20157E-05 & 4.7905E-08 \\ 2.45219E-05 & 1.47493E-05 & 1.55158E-05 & 7.35356E-05 \end{pmatrix}$$

Mit $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{k}_p = \mathbf{p}$ *mit* $\mathbf{k}_p$ *für die Primärkosten erhält man den Vektor* $\mathbf{p}$ *der Verrechnungspreise*

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{k}_p = \mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix} 5123 \\ 4006 \\ 8015 \\ 12212 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.769941912 \\ 0.341145286 \\ 0.659763486 \\ 1.207087039 \end{pmatrix} = \mathbf{p}$$

Mit R:
kp=c(5123,4006,8015,12212)
solve(A)%%kp*

Insgesamt geht man also wie folgt vor: Sei $\mathbf{L}$ *die Leistungsmatrix (Leistungen der Teilbetriebe an die Teilbetriebe),* $\mathbf{l}_g = \mathbf{L1} + \mathbf{l}_{HB}$ *der Vektor der Gesamtleistungen und* $\mathbf{k}_p$ *der Vektor der Primärkosten. Gesucht sei der Vektor der effektiven Preise* $\mathbf{p}$*: Man rechnet:*

$$\mathbf{p} = \left(\mathbf{diag}\left(\mathbf{l}_g\right) - \mathbf{L}^T\right)^{-1}\mathbf{k}_p$$

Mit R alles in einem Zug:
L=matrix(c(0,100,1000,0,500,1000,1200,2000,0,100,0,0,600,5000,2000,500),ncol=4)
lHB=c(1000,20000,8000,12000)
lg=rowSums(L)+lHB
solve(diag(lg)-t(L))%%kp*

Bemerkungen*: (1) Summiert man die Kosten für die Lieferungen an den Hauptbetrieb pro Teilbetrieb, so erhält man:*

$$\sum_{i=1}^{4}\mathbf{k}_{g_i} = \mathbf{l}_{HB}^T\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1000 & 20000 & 8000 & 12000 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2.769941912 \\ 0.341145286 \\ 0.659763486 \\ 1.207087039 \end{pmatrix} = 29356.$$

Dies ist identisch mit der Summe der Primärkosten, d.h. $\left(\mathbf{l}_{HB}^T\mathbf{p}\right)\mathbf{1} = \mathbf{k}_p^T\mathbf{1} = \sum_{i=1}^{4}\mathbf{k}_{p_i}$*. Mit den korrekten Preisen für die Lieferung an den Hauptbetrieb deckt man also genau die Primärkosten.*

(2) Vergleicht man den Vektor der Verrechnungspreise mit den falschen Preisen, die aus der Division der Primärkosten durch die Leistung der Teilbetriebe an den Hauptbetrieb entstehen:

$$\left(\mathbf{diag}\left(\mathbf{l}_{HB}\right)\right)^{-1}\mathbf{k}_p = \begin{pmatrix} \frac{5123}{1000} \\ \frac{4006}{20000} \\ \frac{8015}{8000} \\ \frac{12212}{12000} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.123 \\ 0.2003 \\ 1.0019 \\ 1.0177 \end{pmatrix}$$

sieht man, dass für manche Leistungen zuviel, für manche zu wenig verrechnet würde, was die Preiskalkulation der Endprodukte verfälschen würde, da in deren Produktion im Allgemeinen unterschiedlich viele Zwischenleistungen fliessen!

(3) Die Sekundärkosten $\mathbf{k}_s$ *kann man berechnen durch* $\mathbf{L}^T\mathbf{p}$ *Im Beispiel:*

$$\mathbf{k}_s = \mathbf{L}^T\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 & 500 & 0 & 600 \\ 100 & 1000 & 100 & 5000 \\ 1000 & 1200 & 0 & 2000 \\ 0 & 2000 & 0 & 500 \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} 2.769941912 \\ 0.341145286 \\ 0.659763486 \\ 1.207087039 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 693.88 \\ 4932.0 \\ 34.115 \\ 5290.8 \end{pmatrix}$$

◊

Wir behandeln nun die Grundideen des Beispiels 16.4.21 etwas allgemeiner.

Definition 16.4.22. *1.* $\mathbf{L} : (n,n) -$*Matrix der Leistungen der Teilbetriebe* i *an Teilbetriebe* j *- pro Zeile* i *stehen die Leistungen des Teilbetriebes* i *an die Teilbetriebe* $1,...,n$*.*

2. $\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_h, \mathbf{l}_t \in \mathbb{R}^n : \mathbf{l}_g$ *Vektor der Gesamtleistungen der Teilbetriebe* i *an an die anderen Teilbetriebe und an den Hauptbetrieb,* $\mathbf{l}_h$ *Vektor der Leistungen der Teilbetriebe an den Hauptbetrieb;* $\mathbf{l}_t$ *Vektor der Gesamtleistungen der Teilbetriebe an die anderen Teilbetriebe, d.h.* $\mathbf{l}_t = \mathbf{L1}$*).*

3. $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$*: Vektor der Verrechnungspreise (= effektive Preise) der von den Teilbetrieben* i *produzierten Güter.*

4. $\mathbf{k}_g, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}_p \in \mathbb{R}^n :$ $\mathbf{k}_g$ *Vektor der Gesamtkosten pro Teilbetrieb;* $\mathbf{k}_s$ *Vektor der Sekundärkosten (Kosten, die für die Teilbetriebe anfallen);* $\mathbf{k}_p$ *Vektor der Primärkosten pro Teilbetrieb).*

◊

Es gilt:

Satz 16.4.23. *Mit den Bezeichnungen der Definition 16.4.22 und mit*

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_g &:= \mathbf{k}_s + \mathbf{k}_p\\ \mathbf{k}_g &:= \mathbf{diag}\,(\mathbf{l}_g)\,\mathbf{p}\\ \mathbf{k}_s &:= \left(\mathbf{L}^T\right)\mathbf{p}\end{aligned}$$

gilt:

$$\mathbf{p} = \left[\mathbf{diag}\,(\mathbf{l}_g) - \left(\mathbf{L}^T\right)\right]^{-1}\mathbf{k}_p$$

Beweis. Mit den Voraussetzungen gilt

$$\mathbf{diag}\,(\mathbf{l}_g)\,\mathbf{p} = \left(\mathbf{L}^T\right)\mathbf{p} + \mathbf{k}_p$$

sowie

$$\begin{aligned}-\mathbf{k}_p &= \left(\mathbf{L}^T\right)\mathbf{p} - \mathbf{diag}\,(\mathbf{l}_g)\,\mathbf{p}\\ &= \left[\left(\mathbf{L}^T\right) - \mathbf{diag}\,(\mathbf{l}_g)\right]\mathbf{p}\end{aligned}$$

oder auch

$$\left[\mathbf{diag}\,(\mathbf{l}_g) - \left(\mathbf{L}^T\right)\right]\mathbf{p} = \mathbf{k}_p \tag{16.4.10}$$

Dieses Gleichungssystem löst man auf durch

$$\mathbf{p} = \left[\mathbf{diag}\,(\mathbf{l}_g) - \left(\mathbf{L}^T\right)\right]^{-1}\mathbf{k}_p$$

□

Damit ist das allgemeine Lösungsverfahren für die Berechnung der effektiven Kosten beschrieben. Liefert ein Teilbetrieb verschiedene Produkte an andere Teilbetriebe, so behandelt man jedes der Produkte als von einer eigenen Teilunternehmung hergestellt.

Im Beispiel galt: Die Summe der Leistungen an Hauptbetrieb multipliziert mit ihren Preisen $\left(\mathbf{l}_h^T\mathbf{p}\right)$ ergibt die Summe der Primärkosten ($\sum_{i=1}^{n} k_{p_i} = \mathbf{1}^T\mathbf{k}_p$ mit $\mathbf{k}_p = (k_{p_1},...,k_{p_n})$). Allgemein gilt:

Satz 16.4.24. *Wenn die Voraussetzungen des Satzes 16.4.23 gelten, gilt mit den Bezeichnungen der Definition 16.4.22:*

$$\mathbf{l}_h^T\mathbf{p} = \mathbf{1}^T\mathbf{k}_p$$

Beweis. Wir nehmen an, es gilt:

$$\mathbf{l}_h^T \mathbf{p} = \mathbf{1}^T \mathbf{k}_p \tag{16.4.11}$$

Mit obiger Gleichung (16.4.10) gilt dies genau dann, wenn

$$\mathbf{l}_h^T \mathbf{p} = \mathbf{1}^T \left[\mathbf{diag}\left(\mathbf{l}_g\right) - \left(\mathbf{L}^T\right) \right] \mathbf{p}$$

genau dann, wenn

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_h^T &= \mathbf{1}^T \left[\mathbf{diag}\left(\mathbf{l}_g\right) - \left(\mathbf{L}^T\right) \right] \\ &= \mathbf{1}^T \mathbf{diag}\left(\mathbf{l}_g\right) - \mathbf{1}^T \left(\mathbf{L}^T\right). \end{aligned} \tag{16.4.12}$$

Nun ist $\mathbf{1}^T \left(\mathbf{L}^T\right) = (\mathbf{L1})^T$, wobei $\mathbf{L1} = \mathbf{l}_t$ ist. Zudem ist $\mathbf{1}^T \mathbf{diag}\left(\mathbf{l}_g\right)$ die als Zeilenmatrix angeordneten Gesamtleistungen der Teilbereiche i, d.h. $\mathbf{1}^T \mathbf{diag}\left(\mathbf{l}_g\right) = \mathbf{l}_g^T$. Nun gilt $\mathbf{l}_g = \mathbf{l}_h + \mathbf{l}_t$ und damit $\mathbf{l}_h = \mathbf{l}_h - \mathbf{l}_t$. Zudem gilt $\mathbf{l}_h = \mathbf{l}_h - \mathbf{l}_t$ genau dann, wenn $\mathbf{l}_h^T = \left(\mathbf{l}_h - \mathbf{l}_t\right)^T = \mathbf{l}_h^T - \mathbf{l}_t^T$. Damit gilt (16.4.12) und entsprechend (16.4.11). □

16.4.1 Übungen

1. Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme von Hand (Gausssche Eliminationsmethode) und mit Excel
   a)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 5 \\ 14x_1 - 2x_2 &= 18 \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 5 \\ 14x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 18 \\ 3x_1 + 12x_2 + 3x_3 &= -2 \end{aligned}$$

2. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem von Hand (Gausssche Eliminationsmethode) und mit Excel

$$\begin{aligned} -3x_1 + 0.3x_2 - 1.2x_3 &= -5.4 \\ 50x_1 - 5x_2 + 20x_3 &= 90 \\ 10x_1 - x_2 + 4x_3 &= 18 \end{aligned}$$

3. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem von Hand (Gausssche Eliminationsmethode) und mit Excel

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 15x_4 &= 16 \\ x_1 + 0.6x_2 + 0.8x_3 + 3x_4 &= 6 \\ 20x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4 &= 5 \end{aligned}$$

4. Lösen Sie das Gleichungssystem der Übung 2 auf der Seite 106 mit Excel.

5. In einer Firma gebe es 5 Unterbetriebe UB_i, die für diese selber und an die Endproduktion (EP) folgende Leistungen erbringen (UB_2 erbringt z.B. 600 Einheiten Leistung an UB_5).

	UB_1	UB_2	UB_3	UB_4	UB_5	EP	Primärkosten
UB_1	50	200	300	100	0	20000	5000
UB_2	150	350	0	700	600	15000	4500
UB_3	300	7500	800	0	300	22000	12000
UB_4	1300	4900	80	700	140	10000	2000
UB_5	400	550	7630	380	50	12580	4000

Berechnen Sie
a) die Gesamtleistung der Unterbetriebe
b) die korrekten internen Verrechnungskosten.

16.4.2 Lösungen

1. a) Wir erhalten die erweiterte Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 14 & -2 & 18 \end{pmatrix}$$

und daraus mit Zeilenumformungen:

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}z_1} \begin{pmatrix} 1 & 1.5 & 2.5 \\ 14 & -2 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow{z_2+(-14z_1)} \begin{pmatrix} 1 & 1.5 & 2.5 \\ 0 & -23 & -17 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{23}z_2} \begin{pmatrix} 1 & 1.5 & 2.5 \\ 0 & 1 & \frac{17}{23} \end{pmatrix} \xrightarrow{z_1+(-1.5z_2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1.3913 \\ 0 & 1 & \frac{17}{23} \end{pmatrix}$$

Damit ist $x_1 = 1.3913$, $x_2 = \frac{17}{23}$ und die Lösungsmenge: $\left\{\left(1.3913, \frac{17}{23}\right)\right\}$ wobei $\frac{17}{23} = 0.739\,13$
Mit Excel überprüfen wir, ob die Matrix

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 14 & -2 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist. $\det(\mathbf{A}) = -46 \neq 0$ und berechnen dann die inverse Matrix:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{23} & \frac{3}{46} \\ \frac{7}{23} & -\frac{1}{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.347\,8 \times 10^{-2} & 6.521\,7 \times 10^{-2} \\ 0.304\,35 & -4.347\,8 \times 10^{-2} \end{pmatrix}$$

Die Lösung ist dann:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{23} & \frac{3}{46} \\ \frac{7}{23} & -\frac{1}{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{32}{23} \\ \frac{17}{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.391\,3 \\ 0.739\,13 \end{pmatrix}$$

Mittels Multiplikation mit Elementarmatrizen erhalten wir alternativ:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 14 & -2 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 14 & -2 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -14 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 14 & -2 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -23 & -17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -23 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{17}{23} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{17}{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{32}{23} \\ 0 & 1 & \frac{17}{23} \end{pmatrix}$$

$x_1 = \frac{32}{23} = 3.608\,7; \quad x_2 = \frac{17}{23} = 0.739\,13$
Multipliziert man die Elementarmatrizen, erhält man übrigens die Inverse:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -14 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{23} & \frac{3}{46} \\ \frac{7}{23} & -\frac{1}{23} \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation der Matrix von links her mit Elementarmatrizen ist also schliesslich dasselbe wie die entsprechende Multiplikation mit der Umkehrmatrix.

b) Wir erhalten die erweiterte Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 14 & -2 & 2 & 18 \\ 3 & 12 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

und mit den bekannten Zeilenumwandlungen:

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}z_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} \\ 14 & -2 & 2 & 18 \\ 3 & 12 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{z_2 + (-14z_1)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & -23 & -26 & -17 \\ 3 & 12 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{z_3 + (-3z_1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & -23 & -26 & -17 \\ 0 & \frac{15}{2} & -3 & -\frac{19}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{23}z_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{26}{23} & \frac{17}{23} \\ 0 & \frac{15}{2} & -3 & -\frac{19}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{z_1 + \left(-\frac{3}{2}z_2\right)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{23} & \frac{32}{23} \\ 0 & 1 & \frac{26}{23} & \frac{17}{23} \\ 0 & \frac{15}{2} & -3 & -\frac{19}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{z_3 + \left(-\frac{15}{2}z_2\right)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{23} & \frac{32}{23} \\ 0 & 1 & \frac{26}{23} & \frac{17}{23} \\ 0 & 0 & -\frac{264}{23} & -\frac{346}{23} \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{23}{264}z_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{23} & \frac{32}{23} \\ 0 & 1 & \frac{26}{23} & \frac{17}{23} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{173}{132} \end{pmatrix} \xrightarrow{z_1 + \left(-\frac{7}{23}z_3\right)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{131}{132} \\ 0 & 1 & \frac{26}{23} & \frac{17}{23} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{173}{132} \end{pmatrix} \xrightarrow{z_2 + \left(\frac{26}{23}z_3\right)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{131}{132} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{49}{66} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{173}{132} \end{pmatrix}$$

Damit ist $x_1 = \frac{131}{132} = 0.992\,42; x_2 = -\frac{49}{66} = -0.742\,42, x_3 = \frac{173}{132} = 1.310\,6$ und die Lösungsmenge

$$\left\{\left(\frac{131}{132}, -\frac{49}{66}, \frac{173}{132}\right)\right\}$$

Mit Excel prüfen wir, ob die Matrix

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 14 & -2 & 2 \\ 3 & 12 & 3 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist: $\det(\mathbf{A}) = 528 \neq 0$. Damit ist die Matrix invertierbar. Wir berechnen die Inverse:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -0.056818182 & 0.073863636 & 0.026515152 \\ -0.068181818 & -0.011363636 & 0.098484848 \\ 0.329545455 & -0.028409091 & -0.087121212 \end{pmatrix}$$

Damit ist dann mit

$$\mathbf{b} := \begin{pmatrix} 5 \\ 18 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0.992\,42 \\ -0.742\,42 \\ 1.310\,6 \end{pmatrix}$$

Auch hier kann man mit den Elementarmatrizen arbeiten. Tun Sie das mit Excel!

2. Man erhält die erweiterte Matrix

$$\begin{pmatrix} -3 & 0.3 & -1.2 & -5.4 \\ 50 & -5 & 20 & 90 \\ 10 & -1 & 4 & 18 \end{pmatrix}$$

und mit den bekannten Zeilenumwandlungen:

$$\xrightarrow{-\frac{1}{3}z_1} \begin{pmatrix} 1 & -0.1 & 0.4 & 1.8 \\ 50 & -5 & 20 & 90 \\ 10 & -1 & 4 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow{z_2+(-50z_1)} \begin{pmatrix} 1 & -0.1 & 0.4 & 1.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & -1 & 4 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{z_3+(-10z_1)} \begin{pmatrix} 1 & -0.1 & 0.4 & 1.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit gibt es unendlich viele Lösungen. Die Lösung kann man allgemein ausdrücken durch

$$\begin{pmatrix} 1.8 + 0.1x_2 - 0.4x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Die Lösungsmenge ist damit:

$$\left\{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1.8 + 0.1x_2 - 0.4x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ mit } x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Eine konkrete Lösung wäre z.B. mit $x_2 = 3$ und $x_3 = 4$

$$\begin{pmatrix} 0.5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Wir kontrollieren:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0.3 & -1.2 \\ 50 & -5 & 20 \\ 10 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5.4 \\ 90 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Mit Excel überprüfen wir die Invertierbarkeit: $\det A = 0$. Damit ist die Matrix nicht invertierbar. Wir müssen die Lösungsmenge mit dem Eliminationsverfahren suchen - am besten mit Excel und mit Hilfe von Elementarmatrizen.

3. Wir erhalten die erweiterte Matrix

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 15 & 16 \\ 1 & 0.6 & 0.8 & 3 & 6 \\ 20 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

und mit den bekannten Zeilenumwandlungen:

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}z_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 3 & \frac{16}{5} \\ 1 & 0.6 & 0.8 & 3 & 6 \\ 20 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{z_2+(-z_1)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 3 & \frac{16}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{14}{5} \\ 20 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Damit ist das Gleichungssystem nicht lösbar. Die Zeilentransformationen können abgebrochen werden, bevor die Zeilennormalform erreicht ist.
Mit der Inverse kommt man so oder so nicht weiter, da nicht eine quadratische Matrix vorliegt. Kontrollieren Sie die Berechnung mit der Multiplikation von Elementarmatrizen.

4. Man erhält in Matrixdarstellung

$$\mathbf{Aa} = \begin{pmatrix} 5^5 & 5^4 & 5^3 & 5^2 & 5 & 1 \\ 6^5 & 6^4 & 6^3 & 6^2 & 6 & 1 \\ 7^5 & 7^4 & 7^3 & 7^2 & 7 & 1 \\ 8^5 & 8^4 & 8^3 & 8^2 & 8 & 1 \\ 9^5 & 9^4 & 9^3 & 9^2 & 9 & 1 \\ 10^5 & 10^4 & 10^3 & 10^2 & 10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_5 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 5 \\ 3 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix} =: \mathbf{b}$$

Invertierbarkeit? $\det A = -34\,560 \neq 0$. Wir berechnen die Inverse:

$$\begin{pmatrix} -8.333\,3E-3 & 4.166\,7E-2 & -8.333\,3E-2 & 8.333\,3E-2 & -4.166\,7E-2 & 8.333\,3E-3 \\ 0.333\,33 & -1.625 & 3.166\,7 & -3.083\,3 & 1.5 & -0.291\,67 \\ -5.291\,7 & 25.042 & -47.417 & 44.917 & -21.292 & 4.041\,7 \\ 41.667 & -190.38 & 349.33 & -321.92 & 149.0 & -27.708 \\ -162.7 & 712.92 & -1265.0 & 1135.0 & -514.17 & 93.95 \\ 252.0 & -1050.0 & 1800.0 & -1575.0 & 700.0 & -126.0 \end{pmatrix}$$

und damit $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$

$$\begin{pmatrix} -0.166\,67 \\ 5.833\,4 \\ -78.502 \\ 507.6 \\ -1577.9 \\ 1895.0 \end{pmatrix}$$

5. a) Man muss die Leistungen zeilenweise zusammenzählen und erhält:

$$\begin{pmatrix} 20650 \\ 16800 \\ 30900 \\ 17120 \\ 21590 \end{pmatrix}$$

b) Wir erhalten das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 5000 + 50p_1 + 150p_2 + 300p_3 + 1300p_4 + 400p_5 &= 20650p_1 \\ 4500 + 200p_1 + 350p_2 + 7500p_3 + 4900p_4 + 550p_5 &= 16800p_2 \\ 12000 + 300p_1 + 800p_3 + 80p_4 + 7630p_5 &= 30900p_3 \\ 2000 + 100p_1 + 700p_2 + 700p_4 + 380p_5 &= 17120p_4 \\ 4000 + 600p_2 + 300p_3 + 140p_4 + 50p_5 &= 21590p_5 \end{aligned}$$

oder in Standardform:

$$\begin{aligned} 20600p_1 - 150p_2 - 300p_3 - 1300p_4 - 400p_5 &= 5000 \\ -200p_1 + 16450p_2 - 7500p_3 - 4900p_4 - 550p_5 &= 4500 \\ -300p_1 + 30100p_3 - 80p_4 - 7630p_5 &= 12000 \\ -100p_1 - 700p_2 + 16420p_4 - 380p_5 &= 2000 \\ -600p_2 - 300p_3 - 140p_4 + 21540p_5 &= 4000 \end{aligned}$$

Wir kontrollieren die Invertierbarkeit von

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 20600 & -150 & -300 & -1300 & -400 \\ -200 & 16450 & -7500 & -4900 & -550 \\ -300 & 0 & 30100 & -80 & -7630 \\ -100 & -700 & 0 & 16420 & -380 \\ 0 & -600 & -300 & -140 & 21540 \end{pmatrix}$$

$\det \mathbf{A} = 3530065\,867850400\,000\,000 \neq 0$. Wir können also die Inverse berechnen:

$$\begin{pmatrix} 4.85794E-05 & 6.60906E-07 & 1.22466E-06 & 6.60272E-07 & 4.05682E-06 \\ 9.16955E-07 & 6.18637E-05 & 1.54976E-05 & 1.86725E-05 & 7.41569E-06 \\ 4.93844E-07 & 4.56555E-07 & 3.34597E-05 & 4.3966E-07 & 1.18808E-05 \\ 3.35747E-07 & 2.68176E-06 & 6.8558E-07 & 6.17435E-05 & 1.40681E-06 \\ 3.46022E-08 & 1.74701E-06 & 9.02156E-07 & 9.27553E-07 & 4.68064E-05 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\mathbf{k}_p := \begin{pmatrix} 5000 \\ 4500 \\ 12000 \\ 2000 \\ 4000 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{k}_p = \begin{pmatrix} 0.266811463 \\ 0.535950179 \\ 0.454442606 \\ 0.151087939 \\ 0.207941281 \end{pmatrix} = \mathbf{p}$$

Wir kontrollieren, ob die an die Endproduktion gelieferten Leistungen zu diesen Preisen die Summe der Primärkosten ergeben:

$$\mathbf{l}_{HB}^T p = \begin{pmatrix} 20000 & 15000 & 22000 & 10000 & 12580 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.266811463 \\ 0.535950179 \\ 0.454442606 \\ 0.151087939 \\ 0.207941281 \end{pmatrix} = 27500$$

Summe der Primärkosten: $5000 + 4500 + 12000 + 2000 + 4000 = 27\,500$
Mit R:

```
L=matrix(c(50,200,300,100,0,150,350,0,700,600,300,7500,800,0,300,
1300,4900,80,700,140,400,550,7630,380,50),ncol=5,byrow=T)
lHB=c(20000,15000,22000,10000,12580) #Lieferungen an Hauptbetrieb
kp=c(5000,4500,12000,2000,4000) #Primaerkosten
lt=L%*%rep(1,5) # (Summe der Leistungen an Teilbetriebe pro Teilbetrieb)
lg=lt+lHB #(Gesamtleistung pro Teilbetrieb)
A=diag(as.vector(lg))-t(L) #diag() funktioniert korrekt nur für R-Vektoren, nicht für R-
Matrizen
det(A) # (Ueberprüfung auf Invertierbarkeit)
p=solve(A)%*%kp # (effektive Preise)
p
diag(as.vector(lHB))%*%p # (Gesamtkosten pro Teilbetrieb)
t(L)%*%p # (Sekundaerkosten pro Teilbetrieb)
```

16.5 Lernziele

- Die allgemeine Definition linearer Abbildungen hinschreiben können. Wissen, wie man mit Systemen von Ausdrücken lineare Abbildungen definieren kann. Werte von linearen Abbildung, die mit Systemen von Ausdrücken definiert sind, berechnen können. Die ökonomischen Beispiele (Produktionsmatrix) kennen und entsprechende Berechnungen vornehmen können.
- Den Ausdruck „Vektor“ kennen und den Zusammenhang mit n-Tupeln erklären können. Die Multiplikation einer Konstanten mit einem Vektor und die Addition zweier Vektoren durchführen können. Den Begriff des Einheitsvektors kennen.
- Den Zusammenhang von Matrizen und linearen Abbildungen kennen. Lineare Abbildungen mit Hilfe von Matrizen definieren können. Die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor durchführen können und erklären können, was diese repräsentiert. Die Addition von Matrizen und die Multiplikation von Matrizen mit Konstanten durchführen können. Erklären können, was diese Operationen bezüglich der entsprechenden linearen Abbildungen bedeuten. Die Begriffe der Einheitsmatrix und der Nullmatrix kennen und verstehen.
- Den Begriff der „Verkettung“ von Funktionen erläutern können. Erklären können, was die Verkettung linearer Funktionen mit der sogenannten Matrixmultiplikation zu tun hat. Die Multiplikation von Matrizen durchführen können. Die entsprechende ökonomische Anwendung kennen und berechnen können (Produktionsmatrix bezüglich Zwischenprodukten; Produktionsmatrix bezüglich Endprodukten; Berechnung des Rohstoffvektors unter Angabe eines Outputvektors).
- Den Begriff der Umkehrfunktion auf lineare Abbildungen anwenden können und erläutern können, was dieser mit der inversen Matrix zu tun hat. Die Inverse von Matrizen berechnen können. Die ökonomische Anwendung (Input-Output-Analyse) verstehen und entsprechenden Berechnungen durchführen können.
- Die Definition der linearen Gleichungssysteme kennen. Lineare Gleichungssysteme mit Hilfe von Matrizen und Vektoren darstellen können. Die allgemeine Lösung von linearen Gleichungssystemen mit Hilfe der Inversen einer invertierbaren Matrix vorführen können. Den Gaussschen Algorithmus anwenden können. Entscheiden können, ob ein Gleichungssystem genau eine Lösung, keine Lösung oder unendlich viele Lösungen hat. Im Falle genau einer Lösung dies berechnen können. Im Falle unendlich vieler Lösungen die Lösungsmenge angeben können. Den Begriff der Zeilennormalform kennen und solche für Matrizen berechnen können. Die eingeführten Methoden der innerbetrieblichen Leistungsverrechnung verstehen und berechnen können.
- Die Begriffe „Transponierte Matrix“, „Diagonalmatrix“ und „Elementarmatrix“ kennen. Matrizen transponieren können. Die Umkehrmatrix einer Diagonalmatrix angeben können. Die Elementarmatrizen verwenden können, um Gleichungssysteme aufzulösen.

Kapitel 17

Lineare Optimierung

17.1 Ungleichungen ersten Grades

Da im Rahmen der Linearen Optimierung Ungleichungen ersten Grades eine Rolle spielen, werden diese kurz besprochen. Aus einer Gleichung ersten Grades erhält man eine Ungleichung ersten Grades, indem man das Gleichheitszeichen durch $>$, $<$, $\leq$ oder $\geq$ ersetzt. Die Lösungsmenge einer Ungleichung ist die Menge aller Zahlen, welche die Ungleichung wahr werden lässt. So ist z.B. für

$$x < 5$$

die Lösungsmenge

$$\{x \mid x < 5 \text{ und } x \in \mathbb{R}\}$$

Kommen in einer Ungleichung ersten Grades n verschiedene Variablen vor, so ist die Lösungsmenge die Menge der n-Tupel, welche die Ungleichung zu einem wahren Satz machen. So ist z.B. für

$$5x_1 + 3x_2 < 50$$

die Lösungsmenge

$$\begin{aligned}&\{(x_1, x_2) \mid 5x_1 + 3x_2 < 50 \text{ und } x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}\\ &\quad = \{(x_1, x_2) \mid x_2 < \frac{50 - 5x_1}{3} \text{ und } x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Man kann also $5x_1 + 3x_2 < 50$ nach x_2 auflösen und man erhält $x_2 < \frac{50}{3} - \frac{5}{3}x_1$. x_2 ist entsprechend kleiner als $\frac{50}{3} - \frac{5}{3}x_1$ in Abhängigkeit von x_1. Dies können wir ausdrücken durch $x_2\,(x_1) < \frac{50}{3} - \frac{5}{3}x_1$. So ist z.B. $x_2\,(4) < \frac{50}{3} - \frac{5}{3} \cdot 4 = 10$, d.h. für $x_1 = 4$ ist x_2 kleiner als $\frac{5}{3} - \frac{5}{3}x_1$ genau dann, wenn $x_2 < 10$ ist. Sammeln wir derart alle x_2, so dass für $x_1 = 4$ $x_2 < \frac{50}{3} - \frac{5}{3} \cdot 4$, erhält man die Menge $\{(4, x_2) \mid x_2 < \frac{50-5\cdot 4}{3} \text{ und } x_2 \in \mathbb{R}\}$. Es handelt sich um eine zur y-Achse parallele Strecke, die von 10 (ohne) bis $-\infty$ reicht. (s. Abbildung 17.1.1).

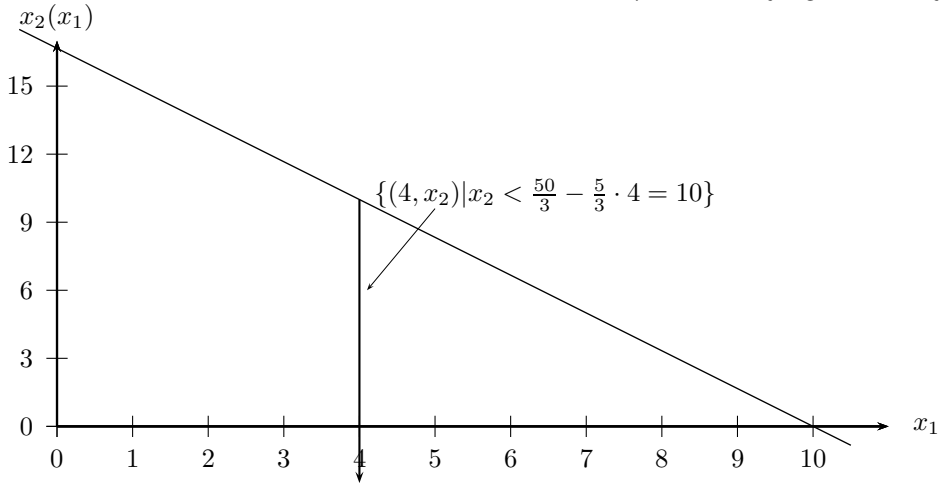


Abbildung 17.1.1: Menge der Punkte $\{(4, x_2)|x_2 < \frac{50}{3} - \frac{5}{3} \cdot 4 = 10\}$

Bildet man

$$\{(x_1, x_2) \mid x_2\,(x_1) < \frac{50}{3} - \frac{5}{3}x_1 \text{ und } x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \{(x_1, x_2) \mid 5x_1 + 3x_2 < 50 \text{ und } x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

erhält man die Fläche unter der Geraden $x_2\,(x_1) = \frac{50}{3} - \frac{5}{3}x_1$

Bei Ungleichungen ist zu beachten, dass sich durch die Multiplikation mit einer Zahl $a < 0$ das Ungleichheitszeichen ändert. Aus

$$5 < 8$$

wird durch Multiplikation mit -2

$$-10 > -16$$

17.2 Problemstellung und Lösungsweg

Die *Lineare Optimierung*, *Lineares Planungsrechnen* oder *Lineare Programmierung* - „Programmierung“ als Planung, nicht als Herstellung von Computerprogrammen verstanden - beschäftigt sich mit der Optimierung linearer Zielfunktionen Z unter der Bedingung, dass nur spezifische Punkte des $n-$dimensionalen Raumes als Argumente der Zielfunktion zulässig sind. Die Lineare Optimierung ist ein Verfahren der sogenannten *Operations Research,* deren Ziel die Optimierung bestimmter Prozesse oder Verfahren ist. Bei der linearen Optimierung wird die Menge der zulässigen Punkte i.A. durch affine Gleichungen und Ungleichungen gegeben (s. allerdings Kapitel „Extrema - Spezialfälle“, letztes Unterkapitel). Diese Gleichungen und Ungleichungen werden „Restriktionssystem“ genannt, die Menge der zulässigen Punkte nennen wir „Restriktionsmenge“. Als Lösungsmenge betrachten wir die Menge der Punkte $(x_1, ..., x_n)$, die Teilmenge der Restriktionsmenge sind und welche die Zielfunktion maximieren, d.h. einen grösstmöglichen Wert $Z(x_1, ..., x_n)$ ergeben. Wir werden uns auf zweidimensionale Mengen mit Punkten (x_1, x_2) beschränken. Die Problemlage wird an einem Beispiel erläutert:

Beispiel 17.2.1. *Zwei verschiedene Kunststoffprodukte I und II werden aus demselben Rohgranulat erstellt. Drei Vorgänge bestimmen die Produktion: Warmpressen, Spritzguss, Verpackung. Produkt I entsteht durch Warmpressen, Produkt II durch Spritzguss. Beide werden verpackt. Die Warmpresse steht für maximal 10h zur Verfügung. Pro Tonne des Produktes I wird 1h gebraucht. Die Spritzguss-Maschine steht für maximal 6h zur Verfügung. Pro Tonne des Produktes II wird 1h gebraucht. Pro t von Produkt I werden 2h, pro t des Produktes II 4h von einer Person in der Verpackungsabteilung benötigt. Dort arbeiten 4 Personen à 8h. Der (gesicherte) Absatz der beiden Güter ergibt für Gut I einen Preis von 30 GE/t, für Gut II 20 GE/t. Wieviel von jedem Gut sollte die Unternehmung produzieren, um den Erlös zu maximieren? (Bemerkung: betriebswirtschaftlich wäre es*

wohl unsinnig, wegen Verpackungsengpässen die übrigen Produktionsmittel nicht voll auszulasten).

Die zu maximierende Zielfunktion ist hier die Erlösfunktion:

$$E(x_1, x_2) = 30x_1 + 20x_2$$

wobei x_1 die Menge des produzierten Produktes I ist und x_2 die Menge des produzierten Produktes II ist. Um die Menge der zulässigen Punkte zu finden, die durch die obigen Bedingungen gegeben sind, geht man am besten von der Zielfunktion aus. An ihr kann man ablesen, mit Hilfe welcher Einheiten man das Restriktionssystem aufstellen kann. Aus der obigen Situationsbeschreibung ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 10 \\ x_2 &\leq 6 \\ 2x_1 + 4x_2 &\leq 32 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ (Nichtnegativitätsbedingungen)} \end{aligned}$$

Jede der Ungleichungen legt eine Menge von Punkten (eine Menge von Punkten ist eine Relation) fest:

$$\begin{aligned} &\{(x_1, x_2) \mid x_1 \leq 10\} \\ &\{(x_1, x_2) \mid x_2 \leq 6\} \\ &\{(x_1, x_2) \mid 2x_1 + 4x_2 \leq 32\} \\ &\{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \geq 0\} \end{aligned}$$

Die Menge der zulässigen Punkte ist dann die Schnittmenge all dieser Mengen. Diese Schnittmenge kann in ein kartesisches Koordinatensystem gezeichnet werden. Es entsteht - ausser in unten zu behandelnden Spezialfällen - ein Polyeder (Vieleck, das in der Ebene durch Geraden gebildet wird - im dreidimensionalen Raum durch Ebenen). Praktisch gehen wir dabei wie folgt vor: wir lösen die Ungleichungen der Form $ax_1 + bx_2 \geq c$ oder $ax_1 + bx_2 \leq c$ nach x_2 auf und können direkt ablesen, oberhalb oder unterhalb welcher Geraden die x_2-Werte dann sein müssen. Im Beispiel:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 \leq 32 &\Longrightarrow \\ x_2(x_1) \leq -\frac{1}{2}x_1 + 8 & \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von Restriktionen der Form $x_1 \geq c$, $x_1 \leq c$, $x_2 \geq c$ oder $x_2 \leq c$ kann man die Restriktionsmenge unmittelbar einzeichnen. Im Beispiel ergibt sich die folgende Restriktionsmenge (s. Abbildung 17.2.2).

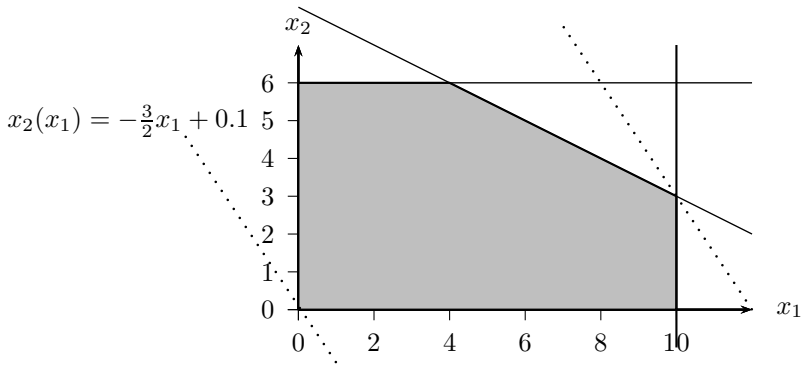


Abbildung 17.2.2: Schnittmenge der durch das Restriktionssystem bestimmten Punktmengen und konstant gesetzten Zielfunktion $x_2(x_1) = -\frac{3}{2}x_1 + 0.1$ mit frei gewähltem Ordinatenabschnitt

In der grauen Fläche ist eine Mengenkombination (x_1, x_2) zu finden, die $E(x_1, x_2) = 30x_1+20x_2$ maximiert. Wir setzen $30x_1 + 20x_2 = c$ konstant. Wir rechnen diese Funktionsgleichung nach x_2 um und erhalten

$$x_2(x_1) = -\frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{20}c. \tag{17.2.1}$$

Diese Gleichung beschreibt die Menge aller (x_1, x_2), so dass $E(x_1, x_2) = c$. (17.2.1) beschreibt dabei eine Gerade in der $x_1 - x_2$-Ebene. Setzen wir für c eine andere Konstante $c_1 > c$, erhalten wir

$$x_2(x_1) = -\frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{20}c_1. \tag{17.2.2}$$

Man sieht, dass die durch (17.2.1) und (17.2.2) beschriebenen Geraden parallel sind, dass (17.2.2) rechts von (17.2.1) die x-Achse schneidet und dass (17.2.2) einen grösseren Ordinatenabschnitt hat als (17.2.1). Offensichtlich werden also bei grösserem c grössere Funktionswerte von E erreicht, da die Funktion $E(x_1, x_2) = 30x_1 + 20x_2$ in die Richtung x_1 und die Richtung x_2 ansteigt. Damit erhalten wir ein Maximum von E unter Berücksichtigung der Restriktionsmenge, wenn wir c möglichst gross wählen, d.h. eine zu (17.2.1) parallele Gerade finden, die möglichst weit rechts steht (einen möglichst grossen Ordinatenabschnitt aufweist), aber immer noch einen Punkt mit der Restriktionsmenge gemeinsam hat. Man sieht an der Graphik: die gesuchte Gerade läuft durch den Schnittpunkt der Geraden $\{(y, x) \mid x = 10$ und $y \in \mathbb{R}\}$ und $2x_1 + 4x_2 = 32$, also durch den Punkt $(10, 3)$. Diese Gerade hat den grössten Ordinatenabschnitt und hat noch einen Punkt mit der grauen Fläche gemeinsam. Der Erlös an diesem Punkt ist: $E(10, 3) = 30 \cdot 10+20 \cdot 3 = 360GE$. ◊

Bemerkung 17.2.2. *Rein rechnerisch könnte man auch für alle Eckpunkte der obigen Restriktionsfläche $E(x_1, x_2) = 30x_1 + 20x_2$ durchrechnen. Die gesuchte Lösung ist der Eckpunkt (x_1, x_2) mit dem maximalen Erlös $E(x_1, x_2)$.* ◊

Bemerkung 17.2.3. *Die Zielfunktion ist eine lineare Funktion im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Jedem Punkt (x_1, x_2) wird genau eine reelle Zahl zugeordnet. Die Punkte $(x_1, x_2, 30x_1+20x_2)$ bilden dabei eine Ebene im dreidimensionalen Raum, die durch den Nullpunkt geht und in die positiven x_1- und x_2-Richtungen strikt monoton ansteigt. Mit dem obigen Verfahren bestimmen wir den höchsten Punkt dieser Ebene über der Restriktionsmenge. Durch die Festlegung von Z wird in der Ebene (im Bild der Zielfunktion) eine Gerade g fixiert, die man auch als Schnitt der Bilder der konstanten, dreidimensionalen Funktion (x_1, x_2, c) mit der Zielfunktion $(x_1, x_2, 30x_1 + 20x_2)$ verstehen kann. Zeichnen wir die Gerade $x_2(x_1) = -\frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{20}c$ im zweidimensionalen Raum, so handelt es sich um die senkrechte Projektion von g auf die Ebene (x_1, x_2). Da die Ebene $(x_1, x_2, 30x_1 + 20x_2)$ strikt monoton steigt, findet man durch Verschiebung der Projektion den maximalen Punkt (s. die folgende Abbildung 17.2.3)*

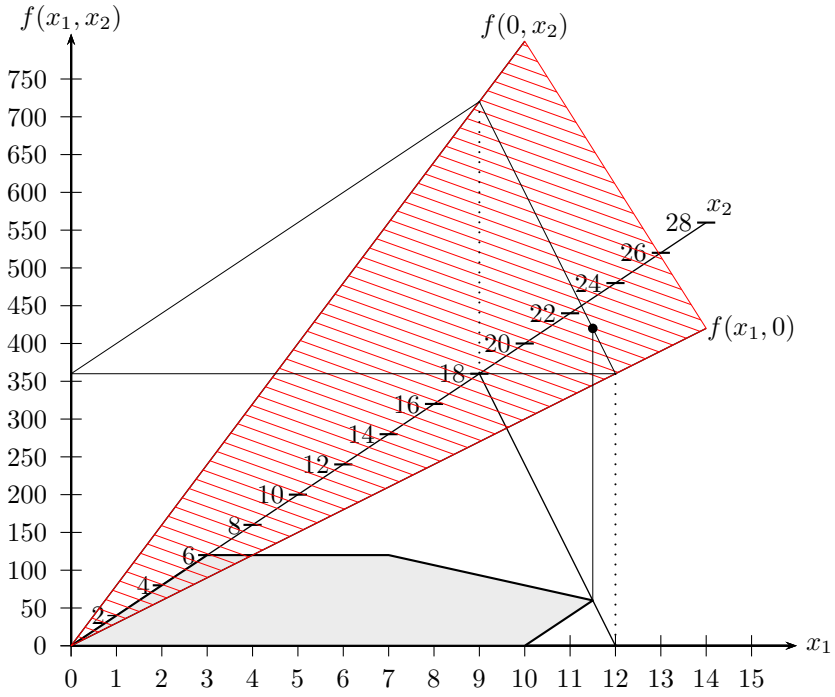


Abbildung 17.2.3: Lineare Optimierung und Projektion einer Schnittmenge auf die Ebene fürs Beispiel 17.2.1. In $(10, 3)$ nimmt f das Maximum an, und zwar 360.

◊

Bemerkung 17.2.4. *Lineare Optimierungsprobleme können mit dem Solver von Excel gelöst werden. Siehe für die Lösung des obigen Beispiels und der folgenden Beispiele die Exceltabelle „LineareOptimierungMitSolver“ auf „http://math.logik.ch“.*

◊

Bemerkung 17.2.5. *Nicht nur Maxima, auch Minima - etwa bei Kosten - können mit linearer Optimierung gesucht werden, wie das folgende Beispiel zeigt. Gegeben sei das folgende Restriktionssystem:*

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{8}x_1 + x_2 &\leq 8 \quad \left(\Longrightarrow x_2(x_1) \leq \frac{1}{8}x_1 + 8\right) \\
2x_1 + x_2 &\leq 25 \quad (\Longrightarrow x_2(x_1) \leq -2x_1 + 25) \\
-1.25x_1 + x_2 &\geq -7.5 \quad (\Longrightarrow x_2(x_1) \geq 1.25x_1 - 7.5) \\
0.6x_1 + x_2 &\geq 3.6 \quad (\Longrightarrow x_2(x_1) \geq -0.6x_1 + 3.6) \\
2x_1 + x_2 &\geq 5 \quad (\Longrightarrow x_2(x_1) \geq -2x_1 + 5) \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

mit der zu minimierenden Zielfunktion

$$Z(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

Wir zeichnen die Restriktionsmenge (s. Abbildung 17.2.4):

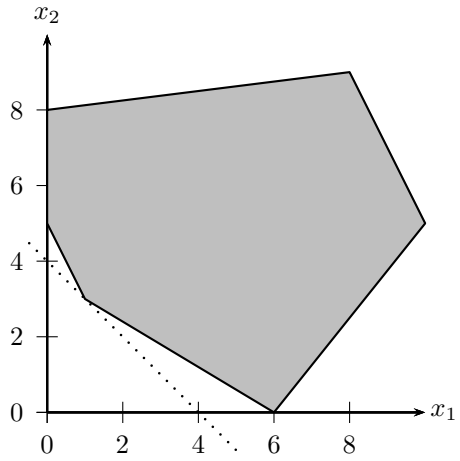


Abbildung 17.2.4: Restriktionsmenge mit der Projektion der konstant gesetzten Zielfunktion auf die $x_1 - x_2$-Ebene

Der Punkt, der die Zielfunktion minimiert, ist der Schnittpunkt der Geraden

$$0.6x_1 + x_2 = 3.6 \Longrightarrow x_2(x_1) = 3.6 - 0.6x_1$$
$$2x_1 + x_2 = 5 \Longrightarrow x_2(x_1) = 5 - 2x_1.$$

Die Lösung des Gleichungssystems ergibt den Punkt $(1, 3)$. ◊

17.3 Spezialfälle

17.3.1 Eindeutigkeit

Die Lösung muss nicht eindeutig sein. Fällt die Steigung der Zielfunktion mit der Steigung einer Kante des Polyeders zusammen, so kann es unendlich viele optimierende Lösungen geben. Mit dem Restriktionssystem des Beispiels 17.2.1 und der Zielfunktion $E(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1 + x_2$, die parallel zur durch $2x_1 + 4x_2 = 32$ $\left(x_2(x_1) = -\frac{1}{2}x_1 + 8\right)$ gegebenen Gerade verläuft, ergeben sich unendlich viele Lösungen (s. Abbildung 17.3.5).

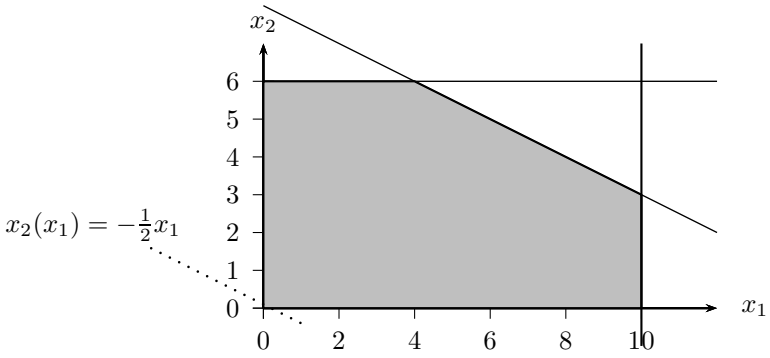


Abbildung 17.3.5: Restriktionssystem des Beispiels 17.2.1 und der zu $2x_1 + 4x_2 = 32$ Projektion der konstant gesetzter Zielfunktion $x_2(x_1) = -\frac{1}{2}x_1$ mit frei gewähltem Ordinatenabschnitt 0 (Spezialfall: Projektion = Schnittmenge der Funktionsfläche mit der x_1-x_2-Ebene).

Die Punkte auf der Strecke zwischen den Punkte $(4, 6)$ und $(10, 3)$ gehören alle zur Lösungsmenge. In die Zielfunktion eingesetzt ergeben sie alle dasselbe Maximum, nämlich 32.

17.3.2 Leere Restriktionsmenge

Es ist möglich, dass es keinen Punkt gibt, der alle Bedingungen des Restriktionssystems erfüllt. In diesem Fall gibt es keine Lösung. z.B.

$$\begin{aligned} \frac{6}{5}x_1 + x_2 &\leq 6 \quad \left(\Longrightarrow x_2(x_1) \leq -\frac{6}{5}x_1 + 6\right) \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 &\leq 10 \quad (\Longrightarrow x_2(x_1) \leq -x_1 + 10) \\ \frac{6.5}{7}x_1 + x_2 &\geq 6.5 \quad (\Longrightarrow x_2(x_1) \geq -0.92857x_1 + 6.5) \end{aligned}$$

Die ersten zwei Ungleichungen bestimmen das graue Dreieck der Abbildung 17.3.6, während die zweite, dritte und vierte Ungleichung das schraffierte Polyeder bestimmen. Die Schnittmenge der beiden Relationen ist leer (s. Abbildung 17.3.6). Es gibt keinen Punkt, der alle Restriktionen

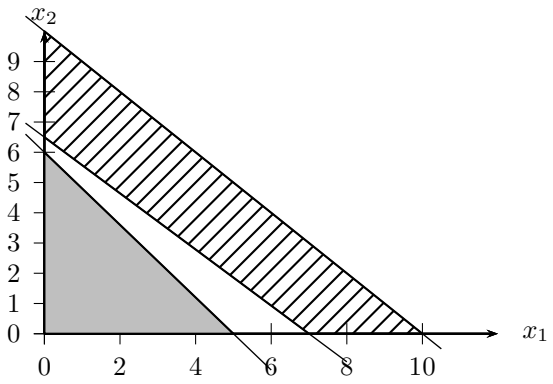


Abbildung 17.3.6: Restriktionssystem mit leerer Restriktionsmenge

erfüllt.

17.3.3 Unbeschränktes Restriktionssystem

Das Restriktionssystem kann eine unbeschränkte Menge von Punkten sein. Wir nennen eine Menge $M \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ beschränkt, wenn man um einen Punkt von M derart einen Kreis ziehen kann, dass M Teilmenge der Punkte der Kreisebene ist. Als Beispiel für eine unbeschränkte Restriktionsmenge betrachten wir das folgende System:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\geq 3 \quad (\Longrightarrow x_2(x_1) \leq x_1 - 3) \\ -0.5x_1 + 4.5x_2 &\leq 4 \quad (\Longrightarrow x_2(x_1) \leq 0.111\,11x_1 + 0.888\,89) \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

mit der Zielfunktion $Z(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 \quad (\Longrightarrow x_2(x_1) = \frac{1}{4}Z - \frac{1}{2}x_1)$. Wir zeichnen die Restriktionsmenge (s. Abbildung 17.3.7):

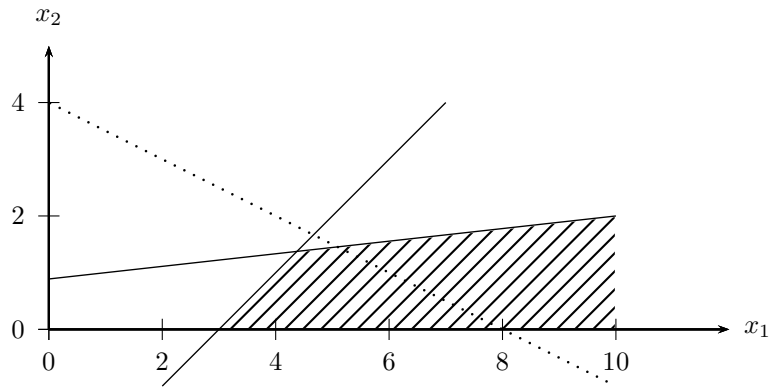


Abbildung 17.3.7: Unbeschränkte Restriktionsmenge; Projektionen der konstant gesetzten Zielfunktion können bis ins Unendliche parallel verschoben werden

17.3.4 Affine Zielfunktionen

Statt linearer Zielfunktionen ist es auch möglich, bei der Lösung von Optimierungsproblemen mit Restriktionssystem auf affine Zielfunktionen zu treffen, z.B.

$$Z(x_1, x_2) = 5x_1 + 4x_2 + 400 \tag{17.3.3}$$

Die Funktion läuft nicht durch den (0,0,0)-Punkt des Koordinatensystems. Bei der obigen Zielfunktion (17.3.3) findet man ein Maximum, indem man die Projektion möglichst weit nach rechts schiebt und ein Minimum, wenn man sie möglichst weit nach links schiebt, Z steigt ja in die x_1- und die x_2-Richtung an. Liegt hingegen

$$Z(x_1, x_2) = 400 - 5x_1 - 4x_2$$

vor, so findet man ein Maximum, wenn man die Projektion möglichst weit nach links schiebt, und ein Minimum, wenn man sie möglichst weit nach rechts schiebt. Die Funktionswerte sinken ja in Richtung der x_1- wie der x_2-Achse. Zuletzt ist es auch möglich, dass die Funktion in eine Richtung steigt, in die andere aber sinkt, wie bei folgenden Zielfunktionen

$$Z(x_1, x_2) = 400 - 5x_1 + 4x_2$$

$$Z(x_1, x_2) = 400 + 5x_1 - 4x_2.$$

Das Maximum findet sich dann in Richtung der ansteigenden Werte und das Minimum in Richtung sinkender Werte. Am besten berechnet man in diesem Fall die Werte der Zielfunktion an den Eckpunkten der Restriktionsmenge, um Minima und Maxima zu bestimmen.

Übungen

1. Gegeben sei das folgende Restriktionssystem

$$\begin{aligned} -x_1 + 4x_2 &\leq 24 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 30 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 30 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 12 \\ x_1 &\geq 2 \\ x_2 &\geq 4 \end{aligned}$$

(a) Zeichnen Sie die entsprechende Restriktionsmenge.

(b) Ermitteln Sie die optimalen Lösungen für folgende Zielfunktionen

i. $Z_1(x_1, x_2) = 3x_1 + 3x_2$ (Max)
ii. $Z_1(x_1, x_2) = 3x_1 + 3x_2$ (Min)
iii. $Z_2(x_1, x_2) = 7x_1 + 14x_2$ (Max)
iv. $Z_2(x_1, x_2) = 7x_1 + 14x_2$ (Min)

2. Eine Unternehmung stellt auf 2 Fertigungsstellen zwei Produkte her. Die Produktionskoeffizienten, die angeben, wie viele Stunden von einer Fertigungsstelle für die Produktion einer Einheit eines Produktes aufgewendet werden müssen, sind aus der folgenden Tabelle ersichtlich.

	Produkt I	Produkt II
Fertigungsstelle A	4	3
Fertigungsstelle B	6	2

Wegen periodischer Unterhaltsarbeiten steht die Fertigungsstelle A höchstens 6000h zur Verfügung, B höchstens 4000h. Von Produkt II müssen aufgrund fester Lieferverpflichtungen mindestens 100 ME produziert werden. Folgende Deckungsbeiträge werden erzielt: Produkt I 40 GE/ME; Produkt II 50 GE/ME - der Deckungsbeitrag ist definiert als Erlös abzüglich der variablen Kosten des Produktes. Ziel ist die Maximierung der Deckungsbeitrages. Ermitteln Sie den optimalen Einsatz der Produktionsstätten,

(a) wenn insgesamt genau 1100 Produktionseinheiten hergestellt werden sollen.

(b) wenn insgesamt mindestens 1100 Produktionseinheiten hergestellt werden sollen.

(c) wenn insgesamt höchstens 1100 Produktionseinheiten hergestellt werden sollen.

3. Ein Geflügelfarmer kann Enten und Gänse liefern, und zwar innerhalb eines bestimmten Zeitraums entweder bis zu 180 Enten oder bis zu 100 Gänsen, von beiden Tieren zusammen jedoch nur bis zu 220 Stück. Sein Gewinn beträgt 6 GE je Ente und 10 GE je Gans. Bei welchen Verkaufszahlen erzielt er den grössten Gewinn.

4. In einer Bekleidungsfabrik werden täglich mindestens 15, höchstens 50 Anzüge eines Modells A und mindestens 10, höchstens 60 Anzüge eines Modells B angefertigt. Von beiden Modellen können täglich nicht mehr als 100 Anzüge hergestellt werden. Der Gewinn bei Modell A beträgt 40 GE, bei Modell B 60. Nur ein Gewinn von 1600 GE pro Tag wird als angemessen betrachtet. Wo liegt die untere Grenze der Rentabilität? Wann ist der Gewinn maximal? Wieviel beträgt der maximale Gewinn?

5. Der Betreiber zweier Kiesgruben hat als einzigen Abnehmer seiner Produkte eine grosse Baustofffabrik. Laut Liefervertrag müssen wöchentlich mindestens geliefert werden: 120 Tonnen Kies, 240 Tonnen mittelfeiner Sand, 80 Tonnen Quarzsand. Die täglichen Förderleistungen in den beiden Kiesgruben sind:
Kiesgrube I: 60t Kies, 40 t mittelfeiner Sand, 20t Quarzsand
Kiesgrube II: 20t Kies, 120 t mittelfeiner Sand, 20t Quarzsand
Pro Fördertag entstehen folgende Betriebskosten:
Kiesgrube I: 2000 GE/Tag;
Kiesgrube II: 1600 GE/Tag.
Gesucht ist die Anzahl der Fördertage in jeder der beiden Gruben, die zu minimalen wöchentlichen Förderkosten führt.

6. Eine Fabrik stellt die beiden Produkte P1 und P2 her. Dazu werden 3 Produktionsautomaten A1, A2 und A3 benötigt. Das Produkt P1 durchläuft im Produktionsprozess alle 3 Automaten, das Produkt P2 nur die Automaten A1 und A2. In der folgenden Tabelle ist angegeben, wieviel Minuten jeder Automat für die Herstellung eines der Produkte benötigt

wird.

	P1	P2
A1	3	6
A2	5	4
A3	6	-

Der Automat A1 kann täglich höchstens 420 Minuten, der Automat A2 höchstens 400 Minuten und der Automat A3 höchstens 360 Minuten zur Herstellung der beiden Produkte P1 und P2 eingesetzt werden. Der Gewinn beträgt bei P1 6 GE, bei P2 8 GE je Stück. Wieviel Produkte P1 und P2 sind täglich herzustellen, damit der Gesamtgewinn möglichst gross wird? Bestimmen Sie den maximalen Gewinn.

7. Ein Landwirt plant, höchstens 22 Hektaren seines Landes mit Weizen und Gemüse zu bebauen. Der Arbeitsaufwand pro Hektare Weizen beträgt 4 Tage, der pro Hektare Gemüse 24 Tage. Insgesamt stehen ihm nicht mehr als 240 Arbeitstage zur Bewirtschaftung dieses Landes zur Verfügung. An Kapital können höchstens 11'200 GE eingesetzt werden. Dabei beträgt der Kapitalaufwand pro Hektare Weizen 400 GE, pro Hektare Gemüse 800 GE. Der Landwirt möchte unter den genannten Anbaubedingungen maximalen Gewinn erzielen, wobei er pro Hektare Weizen mit einem Gewinn von 500 GE, pro Hektare Gemüse mit einem Gewinn von 1250 GE rechnet.

8. (Aus der kaufmännischen Berufsmaturaprüfung 2015, Brig) In einer Stadt wird ein neues Theater gebaut. Es sind maximal 800 Sitzplätze vorgesehen. Dabei sollen teurere Plätze der Kategorie A und billigere Plätze der Kategorie B angeboten werden. Es sollen höchstens 550 Sitze der Kategorie A und mindestens 150 Sitze der Kategorie B eingebaut werden. Ein bequemer Sitze (Kategorie A) kostet beim Bau CHF 216.-, ein billigerer kostet CHF 120.- Im Budget sind für die Anschaffung maximal CHF 144000.- vorgesehen. Marktforschungen haben gezeigt, dass von den Besuchenden höchstens 60% mehr billigere Plätze als teurere verlangt werden. Die Plätze der Kategorie A sollen für CHF 60.-, diejenigen der Kategorie B für CHF 48.- angeboten werden. Die Einnahmen sollen maximal sein.

   (a) Geben Sie die Zielfunktion an

   (b) Stellen Sie das Restriktionssystem auf

   (c) Berechnen Sie die Kombination von Sitzarten, welche die Zielfunktion maximiert (auch mit Excel)

   (d) Berechnen Sie die maximalen Einnahmen

9. Beim Neubau einer Schule soll eine Bodenfläche von 10'000m2 mit Kunststoff-Bodenbelag ausgelegt werden. Es stehen zwei Sorten A und B zur Wahl, die von zwei verschiedenen heimischen Betrieben angeboten werden, die beide aus politischen Gründen berücksichtigt werden müssen. Sorte A kostet 15 GE pro m2, Sorte B 10 GE pro m2. Die jährlichen Reinigungskosten betragen für A 3 GE pro m2, für B 4 GE pro m2. Die Auswahl soll so erfolgen, dass die gesamten Anschaffungskosten zwischen 110'000 und 120'000 GE liegen und die jährlichen Reinigungskosten minimal werden.

10. (Aus kaufmännische Berufsmatura 2011, Brig) Eine Abfallentsorgungsfirma besitzt zwei Kehrrichtverbrennungsanlagen (KVA), die nicht vollumfänglich ausgelastet sind. Aus zwei peripheren Entsorgungszentren (EZ) soll deshalb Abfall hertransportiert werden, um die KVA voll auszulasten. Die KVA_1 hat noch Kapazitäten zur Verbrennung von 50t Abfall, bei der KVA_2 beträgt die freie Kapazität 40t. Im EZ_1 stehen 60t Abfall zum Abtransport bereit, im EZ_2 sind es 80 t.
    Die Distanz von EZ_1 zur KVA_1 beträgt 40km und zur KVA_2 30 km. Die Strecke vom EZ_2 zur KVA_1 beträgt 30 km und zur KVA_2 25 km. Die Transportkosten pro Tonne und Kilometer

betragen 50 Rappen.
a) Stellen Sie das lineare Ungleichungssystem und die Zielfunktion dar.
b) Zeichnen Sie das Restriktionssystem und ein paar Elemente der Projektionen der Schnittmenge der Zielfunktion mit Parallelebenen zu $\mathbb{R}^2$.
c) Stellen Sie einen Transportplan dar, wie die Lieferungen erfolgen müssen, so dass die Transportkosten minimal werden.
d) Wie hoch sind die minimalen Transportkosten in CHF?

11. Eine Reederei betreibt auf dem Rhein Warentransporte. Es stehen verschiedene kleinere Lastkähne zur Verfügung, die entsprechend dem schwankenden Treibstoffpreis einem Kostentarif unterliegen. Momentan betragen die Kosten je Kilometer und Tonne Frachtgut CHF 4.- Die Firma pflegt seit langem eine Geschäftsbeziehung mit einem Möbelfabrikanten, der an zwei Produktionsorten P1 und P2 Spanplatten für seine Möbel produziert. Die Holzrohstoffe bezieht der Fabrikant aus zwei Sägewerken S1 und S2 entlang des Rheins. Im Sägewerk S1 sind 120 t, in S2 40t Holzspäne vorrätig. Am Produktionsort P1 werden 90 t, in P2 40 t benötigt. Die Distanzen zwischen den Sägewerken und den Produktionsorten sind in der nachstehenden Tabelle ersichtlich.

Km	P1	P2
S1	50	50
S2	80	60

Geben sie mit Hilfe von Ungleichungen und Gleichungen das Restriktionssystem an.
Zeichnen Sie die Restriktionsmenge und eine Projektion der Zielfunktion.
Wie müssen die Transporte erfolgen, damit die Transportkosten minimal gehalten werden?
Wie hoch sind die minimalen Transportkosten?

12. Eine Spielzeugwarenfabrik erstellt zwei Dreiradtypen her: A und B. Drei verschiedene Arbeiten sind zu ihrer Anfertigung nötig : Montage der Struktur, Anbringen der Räder, Bemalen. Die Zeit, die für jede dieser Arbeiten nötig ist, wir in folgender Tabelle in *Minuten* angegeben:

	Montage	Räder	Bemalen
A	20	10	5
B	10	15	10

Tabelle 17.3.1: Benötigte Zeit pro Dreiradtyp und Arbeitsschritte

Täglich werden maximal 40 *Std* für die Montage, 30 Std für die Räder und 25 *Std* für das Bemalen vorgesehen. Der Gewinn ist respektive Fr. 5 und Fr. 7 für Modell A und B. Wie muss die tägliche Produktion verteilt werden, um den Gewinn zu maximieren? Finden Sie die Lösung graphisch. Excel sollte verwendet werden, um die Lösung zu kontrollieren. (4 Punkte: 1 Punkt für Restriktionssystem; 1 Punkt für Projektion der Zielfunktion auf $\mathbb{R}^2$; 1 Punkt für (x_1, x_2) mit maximalem Gewinn; 1 Punkt für den maximalen Gewinn).

13. Ein kleines Elektrounternehmen stellt u. a. zwei Staubsaugermodelle her, Allclean und Dustfree. Die Fabrikationsabteilung kann pro Woche 150 Stück des Modells Allclean oder 120 Stück des Modells Dustfree oder eine entsprechende Kombination von beiden Modellen zusammenbauen. Aufgrund einer Markanalyse ist davon auszugehen, dass pro Woche höchstens 1 00 Modelle Allclean und höchstens 70 Modelle Dustfree verkauft werden können. Das Unternehmen möchte höchstens doppelt so viele Stück des Modells Dustfree wie vom Modell Allclean produzieren. Der Gewinn für ein Modell Allclean betragt CHF 90.-, derjenige für ein Modell Dustfree CHF 100.-.
a) Stellen Sie das Restriktionssystem auf und zeichnen Sie die Restriktionsmenge. Zeichnen Sie eine Projektion der konstant gesetzten Zielfunktion auf die (x_1, x_2)-Ebene.

b) Wie viele Staubsauger vom Modell Allclean und vom Modell Dustfree müssen produziert und verkauft werden, so dass der Gewinn maximal wird?
c) Wie gross ist die Auslastung der Fabrikationsabteilung bei der Herstellung dieser Stückzahlen?

Lösungen

1. Man erhält:

   (a) Mit

$$\begin{aligned} -x_1 + 4x_2 \leq 24 &\Longrightarrow x_2(x_1) \leq \frac{1}{4}x_1 + 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 30 &\Longrightarrow x_2(x_1) \leq -\frac{1}{2}x_1 + 15 \\ 2x_1 + x_2 \leq 30 &\Longrightarrow x_2(x_1) \leq -2x_1 + 30 \\ x_1 + 2x_2 \geq 12 &\Longrightarrow x_2(x_1) \geq -\frac{1}{2}x_1 + 6 \\ x_1 \geq 2 & \\ x_2 \geq 4 & \end{aligned}$$

   ergibt sich die graphische Darstellung der Restriktionsmenge:

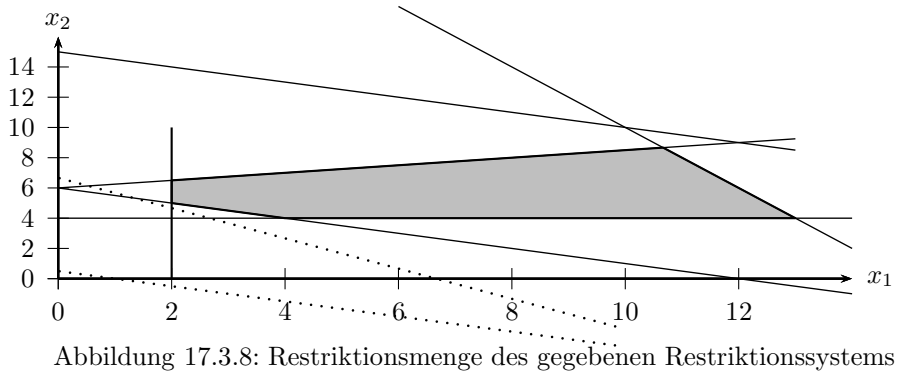


   Abbildung 17.3.8: Restriktionsmenge des gegebenen Restriktionssystems

   Eine der Restriktionen ist überflüssig.

   (b) (i) $Z_1(x_1, x_2) = 3x_1 + 3x_2 \Longrightarrow x_2(x_1) = \frac{1}{3}Z - x_1$. Durch graphische Parallelverschiebung sieht man: das Maximum wird in $(10.667, 8.6667)$ erreicht
   (ii) Das Minimum wird in $(2, 5)$ erreicht.

   Rein rechnerisch erhält man für die Menge der Eckpunkte

$$\{(10.667, 8.6667), (13, 4), (4, 4), (2, 5), (2, 6.5)\}:$$

$$\begin{aligned} 3 \cdot 10.667 + 3 \cdot 8.6667 &= 58.001 \\ 3 \cdot 13 + 3 \cdot 4 &= 51 \\ 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 &= 24 \\ 3 \cdot 2 + 3 \cdot 5 &= 21 \\ 3 \cdot 2 + 3 \cdot 6.5 &= 25.5 \end{aligned}$$

   Also wird das Maximum in $(10,667, 8.6667)$ angenommen und das Minimum in $(2, 5)$.
   (iii) $Z_2(x_1, x_2) = 7x_1 + 14x_2 \Longrightarrow x_2(x_1) = \frac{1}{14}Z - \frac{1}{2}x_1$; Durch graphische Parallelverschiebung sieht man: das Maximum wird in $(10.667, 8.6667)$ angenommen.

(iv) Die Gerade hat dieselbe Steigung wie die durch $f(x) = 15 - 0.5x$ gegebene Gerade und fällt damit mit einer Kante der Restriktionsmenge zusammen. Entsprechend ist die Lösungsmenge für das Minimum $\{(x_1, x_2) \mid x_2 = 15 - 0.5x_1 \text{ und } 2 \leq x_1 \leq 4\}$
Rein rechnerisch erhält man für die Menge der Eckpunkte:

$$\begin{aligned} 7 \cdot 10.667 + 14 \cdot 8.6667 &= 196 \\ 7 \cdot 13 + 14 \cdot 4 &= 147 \\ 7 \cdot 4 + 14 \cdot 4 &= 84 \\ 7 \cdot 2 + 14 \cdot 5 &= 84 \\ 7 \cdot 2 + 14 \cdot 6.5 &= 105 \end{aligned}$$

Man kann das Maximum ablesen. Das Minimum wird in zwei Eckpunkten erreicht. Da diese benachbart sind, zeigt dies, dass die Lösungsmenge die Menge der Punkte auf der Strecke zwischen diesen beiden Punkten ist.

2. Zielfunktion:
$$Z := D(x_1, x_2) = 40x_1 + 50x_2 \Longrightarrow x_2(x_1) = \frac{1}{50}Z - \frac{4}{5}x_1$$
(x_1 Anzahl Produkte der Fertigungsstelle A, x_2 Anzahl Produkte der Fertigungsstelle B). Die Problemstellung führt auf das folgende Restriktionssystem

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 100 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 6000 &\Longrightarrow x_2(x_1) \leq -\frac{4}{3}x_1 + 2000 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 4000 &\Longrightarrow x_2(x_1) \leq -3x_1 + 2000 \\ a)\quad x_1 + x_2 = 1100 &\Longrightarrow x_2(x_1) = -x_1 + 1100 \\ b)\quad x_1 + x_2 \geq 1100 &\Longrightarrow x_2(x_1) \geq -x_1 + 1100 \\ c)\quad x_1 + x_2 \leq 1100 &\Longrightarrow x_2(x_1) \leq -x_1 + 1100 \end{aligned}$$

(a) Die Restriktionsmenge ist die Menge der Punkte einer Strecke (s. Abbildung 17.3.9, fette Strecke).

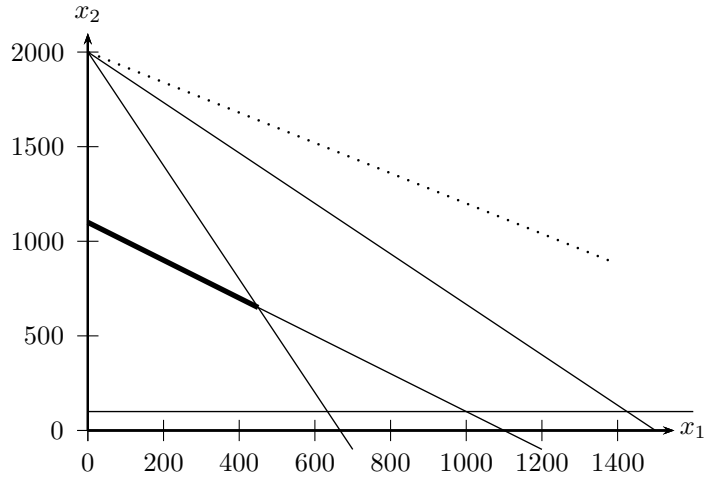


Abbildung 17.3.9: Restriktionsmenge ist eine Strecke

Es kommen zwei Punkte in Frage:
$(0, 1100)$.

$D(0, 1100) = 40 \cdot 0 + 50 \cdot 1100 = 55000$
$2000 - 3x_1 = 1100 - x_1 \Longrightarrow (450, 650)$
$D(450, 650) = 40 \cdot 450 + 50 \cdot 650 = 50500$
Das Maximum ergibt sich also bei $(0, 1100)$, was man auch durch Parallelverschiebung sehen kann.

(b) Wir erhalten als Restriktionsmenge (s. Abbildung 17.3.10).

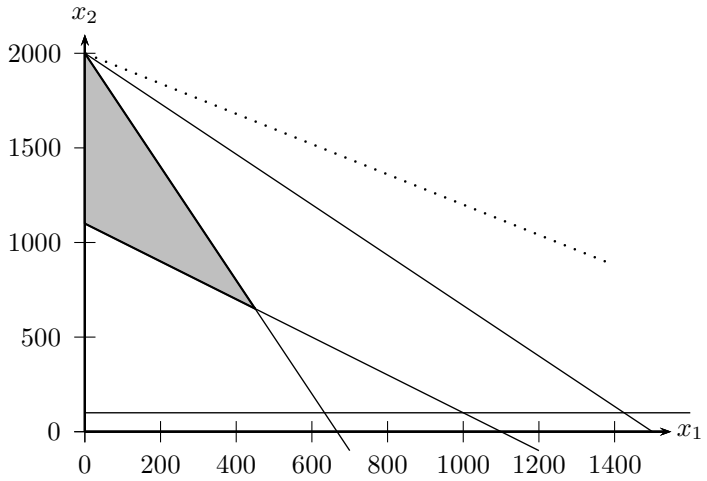


Abbildung 17.3.10: Restriktionsmenge ist ein Dreieck

Das Maximum wird in $x_1 = 0$ ($x_2 = 2000$) erreicht. $D(0, 2000) = 40 \cdot 0 + 50 \cdot 2000 = 100'000$

(c) Wir erhalten als Restriktionsmenge (s. Abbildung 17.3.11).

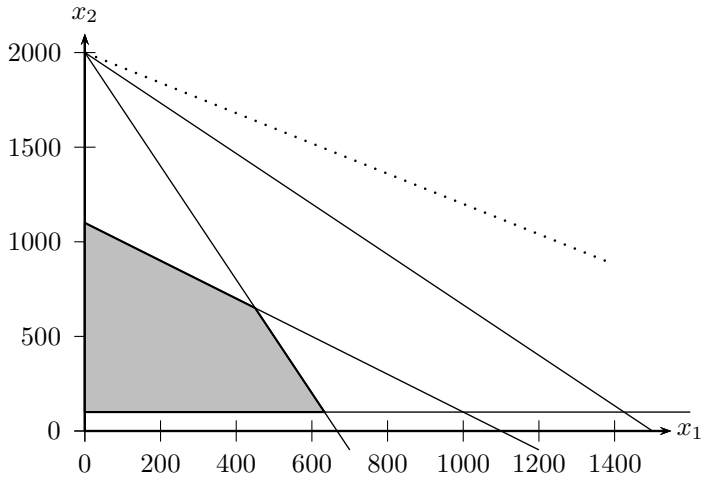


Abbildung 17.3.11: Restriktionsmenge ist ein Polygon

Gleiche Lösungsmenge wie bei a).

3. Die Zielfunktion:

$$Z := G(x_1, x_2) = 6x_1 + 10x_2 \Longrightarrow x_2(x_1) = \frac{1}{10}Z - \frac{3}{5}x_1$$

(x_1 für Anzahl Enten; x_2 für Anzahl Gänse). Es ergibt sich das folgende Restriktionssystem

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 180 \\ x_2 &\leq 100 \\ x_1 + x_2 \leq 220 &\Longrightarrow x_2(x_1) \leq -x_1 + 220 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Das ergibt die Graphik (s. Abbildung 17.3.12):

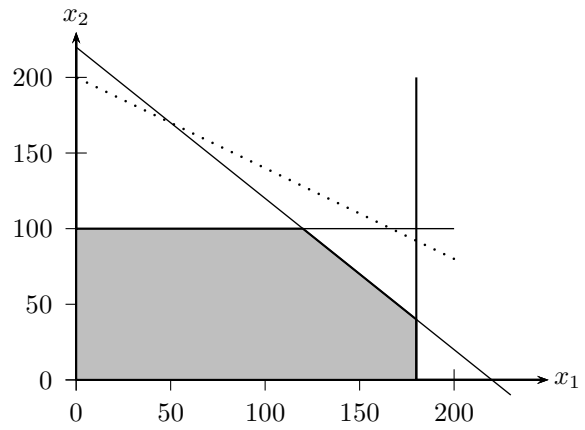


Abbildung 17.3.12: Graphische Darstellung der Restriktionsmenge des Enten-Gänse-Beispiels

Damit wird das Maximum des Ordinatenabschnitts der Zielfunktion in (120,100) erreicht. Der maximale Gewinn ist

$$\begin{aligned} G(120, 100) &= 6 \cdot 120 + 10 \cdot 100 \\ &= 1720 \end{aligned}$$

4. Die Zielfunktion ist

$$Z := G(x_1, x_2) = 40x_1 + 60x_2 \Longrightarrow x_2(x_1) = \frac{1}{60}Z - \frac{2}{3}x_1$$

(x_1 für Anzahl Anzüge Modell A; x_2 für Anzahl Anzüge Modell B). Es ergibt sich das folgende Restriktionssystem

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 50 \\ x_1 &\geq 15 \\ x_2 &\leq 60 \\ x_2 &\geq 10 \\ x_1 + x_2 \leq 100 &\Longrightarrow x_2(x_1) \leq -x_1 + 100 \\ 40x_1 + 60x_2 \geq 1600 &\Longrightarrow x_2(x_1) \geq -\frac{2}{3}x_1 + \frac{80}{3} \end{aligned}$$

Dies ergibt die folgende Restriktionsmenge (s. Abbildung 17.3.13):

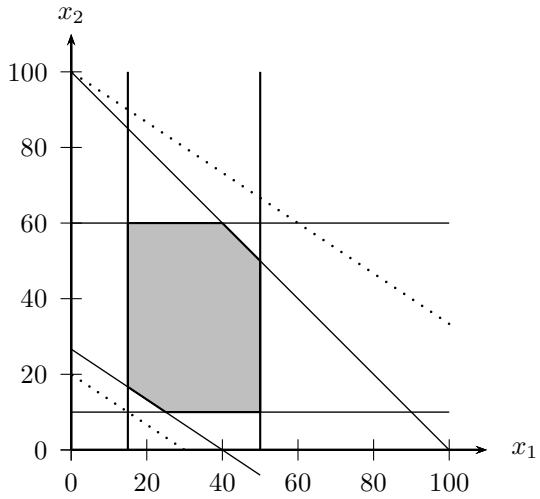


Abbildung 17.3.13: Graphische Darstellung der Restriktionsmenge des Kleidermodellbeispiels

Für die untere Grenze der Rentabilität ist das Minimum bezüglich der Restriktionsmenge zu berechnen. Man sieht, dass die Kante der Restriktion

$$x_2(x_1) \geq -\frac{2}{3}x_1 + \frac{80}{3}$$

dieselbe Steigung hat wie die Zielgerade. Entsprechend gibt es unendlich viele Lösungen. Jeder Punkt auf der Strecke zwischen $(15, 16\frac{2}{3})$ und $(25, 10)$ ist eine Lösung. Wir überprüfen

$$\begin{aligned} 40 \cdot 25 + 60 \cdot 10 &= 1600 \\ 40 \cdot 15 + 60 \cdot 16\frac{2}{3} &= 1600 \end{aligned}$$

Der Gewinn ist maximal in $(40, 60)$. Der maximale Gewinn ist

$$\begin{aligned} G(40, 60) &= 40 \cdot 40 + 60 \cdot 60 \\ &= 5200 \end{aligned}$$

5. Die Zielfunktion ist

$$Z := K(x_1, x_2) = 2000x_1 + 1600x_2 \Longrightarrow x_2(x_1) = \frac{1}{1600}Z - \frac{5}{4}x_1$$

mit x_1 für Anzahl Tage Kiesgrube 1; x_2 für Anzahl Tage Kiesgrube 2. Dies führt auf das folgende Restriktionssystem :

$$\begin{aligned} 60x_1 + 20x_2 \geq 120 &\Longrightarrow x_2(x_1) \geq -3x_1 + 6 \\ 40x_1 + 120x_2 \geq 240 &\Longrightarrow x_2(x_1) \geq -\frac{1}{3}x_1 + 2 \\ 20x_1 + 20x_2 \geq 80 &\Longrightarrow x_2(x_1) \geq -x_1 + 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 & \end{aligned}$$

Dies ergibt die folgende graphische Darstellung des (unbeschränkten) Restriktionssystems (s. Abbildung 17.3.14):

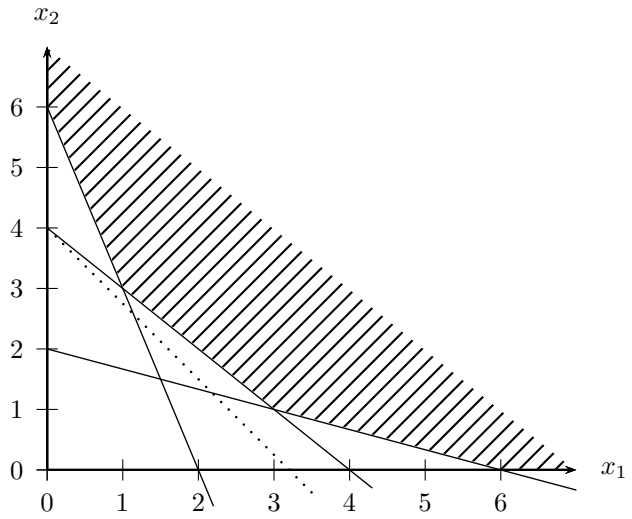


Abbildung 17.3.14: Graphische Darstellung der unbeschränkten Restriktionsmenge der Übung

Die minimalen Kosten entstehen im Punkt $(1, 3)$ und sie betragen

$$\begin{aligned} K(1,3) &= 2000 \cdot 1 + 1600 \cdot 3 \\ &= 6800 \end{aligned}$$

6. Die Zielfunktion ist

$$Z := G(x_1, x_2) = 6x_1 + 8x_2 \Longrightarrow x_2(x_1) = \frac{1}{8}Z - \frac{3}{4}x_1$$

mit x_1 für Anzahl Einheiten *Produkt 1* und x_2 für Anzahl Einheiten *Produkt 2*. Man erhält das folgende Restriktionssystem:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 \leq 420 &\Longrightarrow x_2(x_1) \leq -\frac{1}{2}x_1 + 70 \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 400 &\Longrightarrow x_2(x_1) \leq -\frac{5}{4}x_1 + 100 \\ 6x_1 \leq 360 & \\ x_1, x_2 \geq 0 & \end{aligned}$$

Dies ergibt die folgende Restriktionsmenge (s. Abbildung 17.3.15):

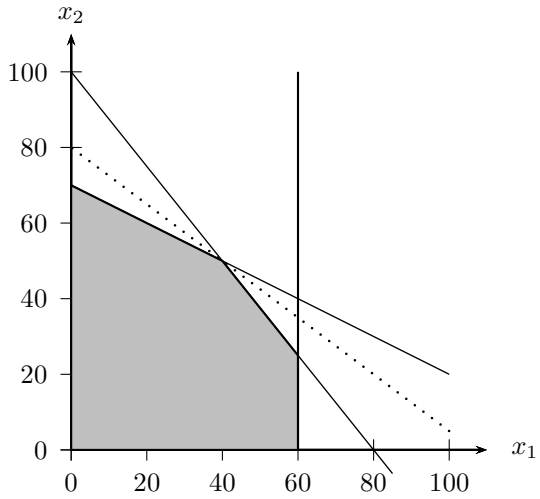


Abbildung 17.3.15: Graphische Darstellung der Restriktionsmenge des Maschinenbeispiels

Das Gewinnmaximum wird offensichtlich im Punkt (40,50) erreicht. Der maximale Gewinn ist

$$\begin{aligned} G(40,50) &= 6 \cdot 40 + 8 \cdot 50 \\ &= 640 \end{aligned}$$

7. Die Zielfunktion ist

$$Z := G(x_1, x_2) = 500x_1 + 1250x_2 \Longrightarrow x_2(x_1) = \frac{1}{1250}Z - \frac{2}{5}x_1$$

(x_1 für Anzahl Hektaren Weizen; x_2 für Anzahl Hektaren Gemüse). Es ergibt sich das folgende Restriktionssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \leq 22 &\Longrightarrow x_2(x_1) \leq -x_1 + 22 \\ 4x_1 + 24x_2 \leq 240 &\Longrightarrow x_2(x_1) \leq -\frac{1}{6}x_1 + 10 \\ 400x_1 + 800x_2 \leq 11200 &\Longrightarrow x_2(x_1) \leq -\frac{1}{2}x_1 + 14 \\ x_1, x_2 \geq 0 & \end{aligned}$$

Die graphische Darstellung der Restriktionsmenge ist damit (s. Abbildung 17.3.16:

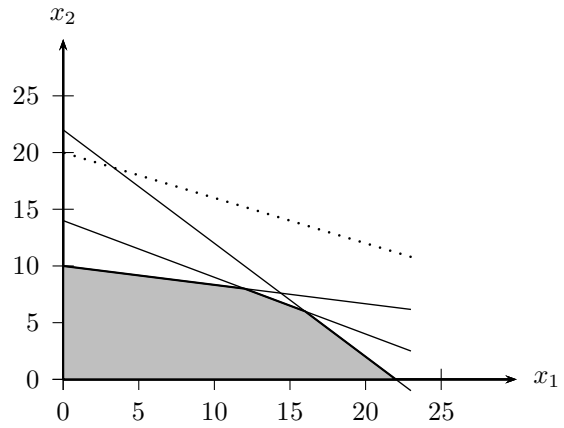


Abbildung 17.3.16: Graphische Darstellung der Restriktionsmenge des Weizen-Gemüse-Beispiels

Den maximalen Gewinn ergibt es im Punkt $(12, 8)$ und er beträgt

$$\begin{aligned} G(12,8) &= 500 \cdot 12 + 1250 \cdot 8 \\ &= 16000 \end{aligned}$$

8. a) Zielfunktion: $E(x_1, x_2) = 60x_1 + 48x_2$ (x_1 Anzahl Sitze der Kategorie A, x_2 Anzahl Sitze der Kategorie B). Auflösung nach x_2: $60x_1 + 48x_2 = 0$; ergibt: $x_2(x_1) = -\frac{5}{4}x_1$
   b) Restriktionssystem:
   $x_1 + x_2 \leq 800 \quad (x_1 + x_2 = 800,\ x_2(x_1) = 800 - x_1)$
   $x_1 \leq 550$
   $x_2 \geq 150$
   $216x_1 + 120x_2 \leq 144000 \quad (216x_1 + 120x_2 = 144000,\ x_2(x_1) = 1200 - \frac{9}{5}x_1 = 1200.0 - 1.8x_1)$
   $x_2 \leq 1.6x_1$
   $x_1, x_2 \geq 0$
   c) Kombination von Sitzarten, welche die Zielfunktion maximiert ($x_1 = 500, x_2 = 300$)

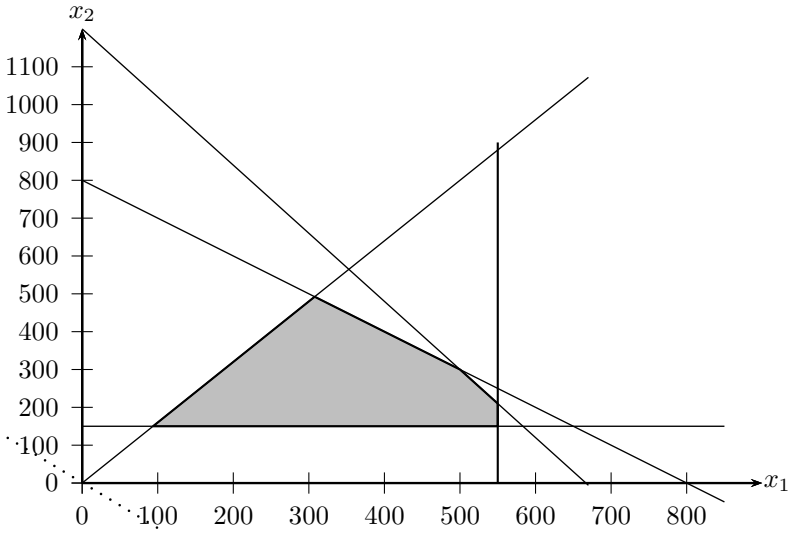


Abbildung 17.3.17: Restriktionsmenge zur Aufgabe

   d) maximale Einnahmen: $E(500, 300) = 44400$
   mir R: r1=function(x) 800 - x
   plot(r1,xlim=c(0,1250),ylim=c(0,1250))

```
abline(v=550); abline(h=150)
r2=function(x) 1200-1.8*x
curve(r2,add=T)
r3=function(x) 1.6*x
curve(r3,add=T)
#Berechnung Schnittpunkte
r4=function(x)1.6*x-150
uniroot(r4,c(0,200))
r5=function(x) 1.6*x-(800 - x)
uniroot(r5,c(200,500))
r3(307.6923)
r6=function(x) 800 - x-(1200-1.8*x)
uniroot(r6,c(400,600))
r2(500)
r2(550)
polygon(c(93.75,307.6923,500,550,550),c(150,492.3077,300,210,150),col=2)
z=function(x)-5/4*x+80 #dann Zahlen erhoehen - statt 80
curve(z,add=T,col=3)
```

9. Die Zielfunktion ist

$$Z := K(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2 \Longrightarrow x_2(x_1) = \frac{1}{4}Z - \frac{3}{4}x_1$$

mit x_1 für ME Sorte 1 und x_2 ME Sorte 2. Die Aufgabenstellung ergibt das folgende Restriktionssystem :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 = 10000 &\Longrightarrow x_2(x_1) = 10000 - x_1 \\ 15x_1 + 10x_2 \geq 110000 &\Longrightarrow x_2(x_1) \geq -\frac{3}{2}x_1 + 11000 \\ 15x_1 + 10x_2 \leq 120000 &\Longrightarrow x_2(x_1) \leq -\frac{3}{2}x_1 + 12000 \\ x_1, x_2 \geq 0 & \end{aligned}$$

Die graphische Darstellung der Restriktionsmenge (s. Abbildung 17.3.18):

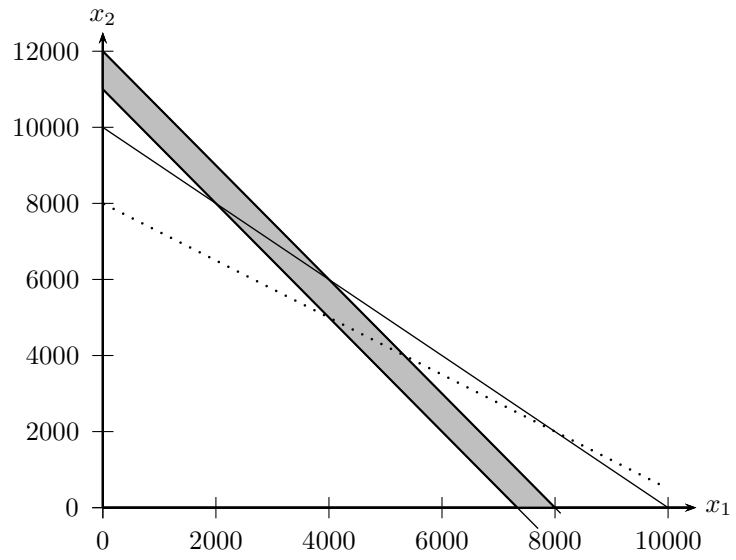


Abbildung 17.3.18: Graphische Darstellung der Restriktionsmenge des Bodenbelagbeispiels

Die minimalen Reinigungskosten ergeben sich in $(4000, 6000)$ und sie betragen

$$K(4000, 6000) = 3 \cdot 4000 + 4 \cdot 6000$$
$$36000$$

10. Probleme der Art löst man am besten, wenn man x_i definiert als die Menge, die von EZ_1 an KVA_i geliefert wird (also: x_1 ist die Menge die EZ_1 an KVA_1 liefert und x_2 ist die Menge, die EZ_1 an KVA_2 liefert):

	KVA_1	KVA_2	Summen
EZ_1	x_1	x_2	$x_1 + x_2 \leq 60t$ (= Lager von EZ_1)
EZ_2	$50 - x_1$	$40 - x_2$	$(50 - x_1) + (40 - x_2) \leq 80t$ (= Lager von EZ_2)
Summe	50	40	

Da KVA_1 die Menge 50 benötigt, und x_1 die von EZ_1 an KVA_1 gelieferte Menge ist, ist die von EZ_2 an KVA_1 gelieferte Menge $50 - x_1$. Da KVA_2 die Menge 40 benötigt, und x_2 die von EZ_1 an KVA_2 gelieferte Menge ist, ist die von EZ_2 an KVA_2 gelieferte Menge $40 - x_2$.

(a) Zielfunktion:$\frac{1}{2}$ ist der Preis pro Kilometertonne. Strecke von EZ_1 nach KVA_1 mal Menge x_1 ergibt die Kilometertonnen für EZ_1 nach KVA_1 (analog für die anderen Strecken):

$$\begin{aligned} Z(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}(40x_1 + 30x_2 + 30(50 - x_1) + 25(40 - x_2)) \\ &= 5x_1 + \frac{5}{2}x_2 + 1250 \end{aligned}$$

Die Zielfunktion ist nicht mehr eine lineare Funktion, da sie nicht durch den 0-Punkt des Koordinatensystems verläuft - es handelt sich um eine affine Funktion, die in die x_1 und x_2 Richtung ansteigt.

(b) Es ergibt sich das folgende Restriktionssystem:

$$\begin{aligned} x_1, x_2 &\geq 0 \\ 50 - x_1 \geq 0 &\Longrightarrow x_1 \leq 50 \\ 40 - x_2 \geq 0 &\Longrightarrow x_2 \leq 40 \\ x_1 + x_2 \leq 60 &\Longrightarrow x_2(x_1) \leq 60 - x_1 \\ 50 - x_1 + 40 - x_2 \leq 80 &\Longrightarrow x_2(x_1) \geq 10 - x_1 \end{aligned}$$

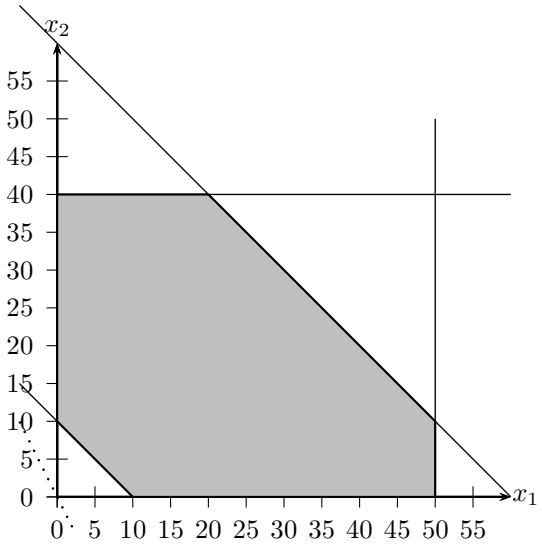


Abbildung 17.3.19: Restriktionssystem der Aufgabe - Lösungsvariante 2

Man setzte den Ordinatenabschnitt der Zielfunktion auf 0 und isoliert x_2 in der verbleibenden Funktion. Das Minimum wird damit erreicht, wenn man diese Projektion $x_2(x_1) = -2x_1$ auf die (x_1, x_2) −Ebene möglichst weit nach links verschiebt. Man erhält damit $x_1 = 0$ und $x_2 = 10$ (Lieferungen von EZ_1 an KVA_1 und EZ_1 an KVA_2). Es ergibt sich weiterhin $50 - 0 = 50$ (Lieferung von EZ_2 an KVA_1) und $40 - 10 = 30$ (Lieferung EZ_2 an KVA_2).

(c) Transportplan für die Lieferungen, so dass die Transportkosten minimal werden.

	KVA_1	KVA_2	Summen
EZ_1	$x_1 = 0$	$x_2 = 10$	10
EZ_2	$50 - x_1 = 50$	$40 - x_2 = 30$	80
Summe	50	40	

(d) Wie hoch sind die minimalen Transportkosten in CHF?

$$Z(x_1, x_2) = 5x_1 + \frac{5}{2}x_2 + 1250$$

$$Z(0, 10) = 5 \cdot 0 + 2.5 \cdot 10 + 1250 = 1275$$

11. Lieferung von S_i an P_i : (x_1 Lieferungen von S_1 an P_1; x_2 Lieferungen von S_2 an P_2). Man erhält eine in beide Richtungen monoton sinkende Zielfunktion, indem man wie folgt vorgeht:

	P_1	P_2	Summe
S_1	x_1	x_2	$x_1 + x_2 \leq 120$
S_2	$90 - x_1$	$40 - x_2$	$130 - x_1 - x_2 \leq 40$
Summe	90	40	

(a) Die Zielfunktion ist:

$$Z(x_1, x_2) = 4(50x_1 + 50x_2 + 80(90 - x_1) + 60(40 - x_2)) = 4(9600 - 10x_2 - 30x_1)$$

(sinkt in x_2 und x_2 Richtung; wird minimal, wenn Projektion möglichst weit nach rechts geschoben wird) $9600 - 10x_2 - 30x_1 = 0 \Longrightarrow x_2(x_1) = 960 - 3x_1$; also $x_2(x_1) = -3x_1$ einzeichnen)

(b) Das Restriktionssystem ist:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \leq 120 &\Longrightarrow x_2(x_1) \leq 120 - x_1 \\ 130 - x_1 - x_2 \leq 40 &\Longrightarrow x_2(x_1) \geq -x_1 + 90 \\ 90 - x_1 \geq 0 &\Longrightarrow x_1 \leq 90 \\ 40 - x_2 \geq 0 &\Longrightarrow x_2 \leq 40 \\ x_1 \geq 0 & \\ x_2 \geq 0 & \end{aligned}$$

Dies ergibt graphisch:

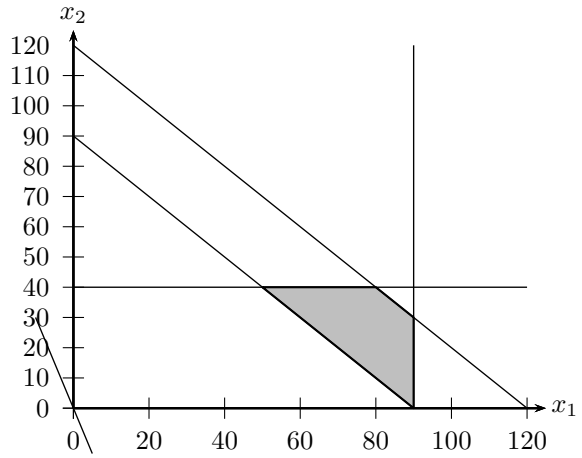


Abbildung 17.3.20: Restriktionsmenge des Beispiels

(c) Minimum ist also in $(x_1 = 90, x_2 = 30)$.

(d) Minimale Kosten: $Z(90, 30) = 4(9600 - 10 \cdot 30 - 30 \cdot 90) = 26\,400$
Transportplan:

	P_1	P_2	Summe
S_1	90	30	120
S_2	$90 - 90 = 0$	$40 - 30 = 10$	10
Summe	90	40	

12. Zielfunktion: $Z(x_1, x_2) = 5x_1 + 7x_2$ (x_1 = Anzahl Dreiradtyp A, x_2 = Anzahl Dreiradtyp B)
Zielfunktion Projektion: $5x_1 + 7x_2 = 0 \Longrightarrow x_2(x_1) = -\frac{5}{7}x_1$
Restriktionssystem:

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{6}x_2 &\leq 40 \\ \frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{4}x_2 &\leq 30 \\ \frac{1}{12}x_1 + \frac{1}{6}x_2 &\leq 25 \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_2(x_1) &\leq 240 - 2x_1 \\ x_2(x_1) &\leq 120 - \frac{2}{3}x_1 \\ x_2(x_1) &\leq 150 - \frac{1}{2}x_1 \end{aligned}$$

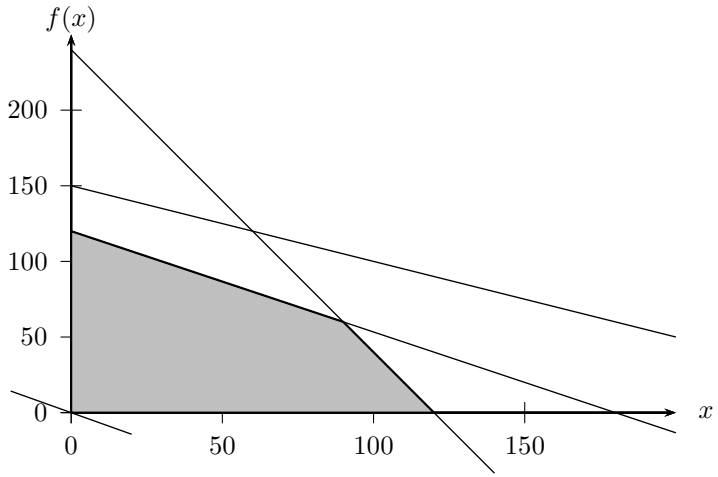


Abbildung 17.3.21: Restriktionsmenge der Übung

Graphisch sieht man nicht unbedingt sofort den maximierenden Punkt. Entsprechend kann man die Steigung der Zielfunktion mit der Steigung der Funktion $x_2(x_1) = 120 - \frac{2}{3}x_1$ vergleichen, da der maximierende Punkte entweder $(0, 120)$ oder der Schnittpunkt von $x_2(x_1) = 240 - 2x_1$ und $x_2(x_1) = 120 - \frac{2}{3}x_1$ ist - also $(90, 60)$. Da $-\frac{5}{7} = -0.714\,29 < -\frac{2}{3} = -0.666\,67$, ist der Punkt mit dem maximalen Wert der Zielfunktion in $(90, 60)$. (Alternativ kann man die beiden Punkte in die Zielfunktion einsetzen und die Werte der Zielfunktion vergleichen: so ist $5 \cdot 0 + 7 \cdot 120 = 840.0 < 5 \cdot 90 + 7 \cdot 60 = 870$)
Maximaler Gewinn: 870

13.

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 150 \ (x_1 \text{ für Allclean}) \\ x_2 &\leq 120 \ (x_2 \text{ für Dustfree}) \\ x_2 &\leq -\frac{4}{5}x_1 + 120 \\ x_1 &\leq 100 \\ x_2 &\leq 70 \\ x_2 &\leq 2x_1 \end{aligned}$$

Dritte Ungleichung: da Kombination der beiden Gerade durch $(150, 0)$ und $(0, 120)$ laufen:

$$\begin{aligned} 0 &= a150 + b \\ 120 &= a0 + b \end{aligned}$$

$\Longrightarrow a = -\frac{4}{5}, b = 120$
Projektion der Zielfunktion für $Z(x_1, x_2) = 0$: $Z(x_1, x_2) = 90x_1 + 100x_2$
$x_2(x_1) = -\frac{90}{100}x_1 = -\frac{9}{10}x_1$

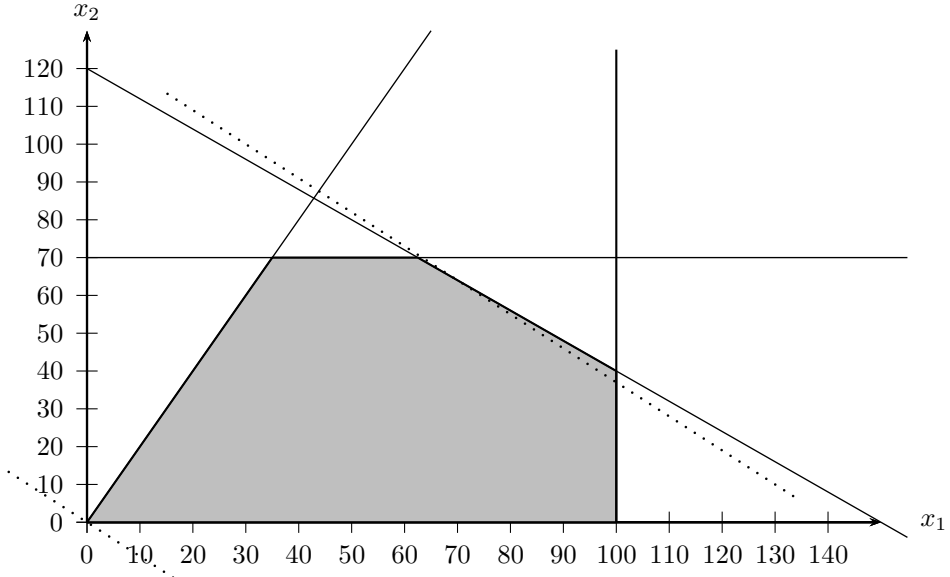


Abbildung 17.3.22: Abbildung zur Aufgabe

Da die Steigung der Projektion der Zielfunktion negativer ist als die von $x_2(x_1) = -\frac{4}{5}x_1 + 120$, liegt das Maximum im Schnitt von $x_2(x_1) = -\frac{4}{5}x_1 + 120$ und der Parallelen zur x_2-Achse durch 100. Man erhält:
$x_2(100) = -\frac{4}{5} \cdot 100 + 120 = 40$ Dustfree und 100 Allclean.
Maximum der Zielfunktion: $Z(100, 40) = 90 \cdot 100 + 100 \cdot 40 = 13\,000$
Auslastung: $\frac{100}{150} + \frac{40}{120} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$ (100% Auslastung)

17.4 Lernziele

1. Lösungsmengen linearer Ungleichungen berechnen können.
2. Die Problemstellung der linearen Optimierung erklären können (Restriktionssystem; Restriktionsmenge; Zielfunktion; graphische Darstellung)
3. Die Spezialfälle der leeren und der unbeschränkten Restriktionsmenge sowie der nicht nur ein Element enthaltenden Lösungsmenge beschreiben können. Im konkreten Beispiel diese Fälle aufdecken und damit hinsichtlich des Optimierungsproblems umgehen können.
4. Übungen der obigen Art lösen können - auch mit dem Solver von Excel.

Anhang A

Liste der Symbole

$\in$	ist Element von, S. 1
$\emptyset$	$:= \{\}$, die leere Menge, S. 1
$=$	ist identisch mit, ist dasselbe wie, ist das gleiche, S. 1
$:=$	identisch per Definition, der rechte Term definiert den linken, S. 1
$=:$	identisch per Definition, der linke Terem definiert den rechten, S. 1
$\notin$	ist nicht Element von, S. 2
$\square$	was zu beweisen war, q.e.d. (quod erat demonstrandum), S. 2
$\Diamond$	schliesst Bemerkungen und Beispiele ab, S. 2
$\{a, b\}$	Menge mit den Elementen a und b, S. 2
$\{x \mid x \text{ ist ein } \phi\}$	die Menge aller x, die ein ϕ sind, ϕ ist eine Eingenschaft, wie z.B. eine natürliche Zahl zu sein, S. 3
$\mathbb{N}$	die Menge der natürlichen Zahlen mit der Null, S. 3
$\mathbb{N}^*$	die Menge der natürlichen Zahlen ohne die Null, S. 3
$<$	ist kleiner als für Zahlen, S. 3
$>$	ist grösser als für Zahlen, S. 3
$\leq$	ist kleiner-gleich für Zahlen, S. 3
$\geq$	ist grösser-gleich für Zahlen, S. 3
$\neq$	ist nicht identisch mit, ist nicht dasselbe wie, S. 5
$\subset$	ist Teilmenge von ... und ..., S. 6
$\setminus$	ist Differenzmenge von ... und ..., S. 7
A_B^c	ist Differenzmenge von B und A, wenn A Teilmenge von B ist, auch Komplement von A (in B) genannt, S. 8
$\cap$	ist Schnittmenge von ... und ..., S. 8
$\cup$	ist Vereinigungsmenge von ... und ..., S. 10
$\mathcal{P}(A)$	Potenzmenge der Menge A, S. 11
(x, y)	geordnetes Paar mit den Komponenten x und y, S. 15
(y, z, x)	Tripel, S. 15
$(x_1, ..., x_n)$	n-Tupel, S. 16
$\times$	kartesisches Produkt von ... und ..., S. 17
$\|A\|$	die Anzahl der Elemente von A (bei endlichen Mengen A), S. 11
$\bigtimes_{i=1}^{n} A_i$	das kartesiche Produkt der Mengen A_i, S. 18
A^n	das $n-$fache kartesische Produkt der Menge A, S. 18
$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$	die Vereinigungsmenge der n Mengen A_i, S. 21
$f(x)$	Funktionswert von x unter der Funktion f, S. 25
s $f : A \to B$	Abbildung f von A nach B, S. 25
f^{-1}	Umkehrfunktion von f, S. 28

$\mathbb{N}_n^*$	Menge der natürlichen Zahlen bis und mit n ohne die Null, S. 41
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen, S. 41
$\mathbb{Z}^+$	Menge der positiven ganzen Zahlen (mit der Null), S. 41
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen, S. 41
$\mathbb{Q}^+$	Menge der positiven rationalen Zahlen (mit der Null), S. 41
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen, S. 41
$\mathbb{R}^+$	Menge der positiven reellen Zahlen (mit der Null), S. 41
$[a, b]$	abgeschlossenes Intervall, S. 29
$]a, b]$	linksseitig offenes Intervall = rechtseitig abgeschlossenes Intervall, S. 29
$[a, b[$	rechtsseitig offenes Intervall = linkseitig abgeschlossenes Intervall, S. 29
$]a, b[$	offenes Intervall, S. 29
$]a, \infty[$	nach oben unbeschränktes Intervall ohne ∞, S. 29
$]-\infty, a[$	nach unten unbeschränktes Intervall - ohne $-\infty$, S. 29
$]-\infty, \infty[$	nach beiden Seiten unbeschränktes Intervall ohne ∞ und $-\infty$, S. 29
∞	Unendlich, S. 29
$-\infty$	Minus Unendlich, S. 29
$x^{\frac{1}{n}}$	n-te Wurzel aus x, S. 117
e	Eulersche Zahl, S. 137
$\exp(x)$	e^x, S. 137
$\exp_a(x)$	a^x, S. 137
$\log_a(y)$	Logarithmus von y zur Basis a, 139
$\ln x$	$\log_e x$, 139
$\sum_{i=1}^{n} x_i$	Summe der x_i (von $i = 1$ bis $i = n$), S. 30
$\mathbf{x}$	n-Tupel von Zahlen (Vektor; fette kleine Buchstaben), S. 15
$\mathbf{A}$	Matrix (fette Grossbuchstaben), S. 477
$(m, n) - Matrix$	Matrix mit m Zeilen und n Spalten, S. 476
$\mathbf{e}_i^n$	Einheitsvektor mit n Komponenten, die mit 0 identisch sind, ausser der $i-$ten Komponente, die mit 1 identisch ist, S. 479
$\mathbf{E}$	Einheitsmatrix, S. 488
$\mathbf{A}^{-1}$	Umkehrmatrix, S. 495
$\mathbf{A}^T$	transponierte Matrix von $\mathbf{A}$, S. 512
a_n	n-tes Glied der Folge (a_n), S. 325
(a_n)	Folge, S. 325
$\prod_{i=1}^{n} x_i$	Produkt der Zahlen x_i von $i = 1$ bis $i = n$, S. 338
$\lim_{n\to\infty} a_n$	Grenzwert der Folge (a_n) für n gegen Unendlich, S. 353
$\lim_{x\to\infty} f(x)$	Grenzwert der Funktion f für x gegen Unendlich, S. 162
$\lim_{x\to-\infty} f(x)$	Grenzwert der Funktion f für x gegen Minus Unendlich, S. 171
$\lim_{x\to x_0} f(x)$	Grenzwert der Funktion f für x gegen x_0, S. 174
$\lim_{x\to x_0^+} f(x)$	rechtsseitiger Grenzwert der Funktion f für x gegen gegen x_0, S. 180
$\lim_{x\to x_0^-} f(x)$	linksseitiger Grenzwert der Funktion f für x gegen gegen x_0, S. 180
f'	erste Ableitung der Funktion f, S. 213
$\frac{d}{dx} f(x)$	erste Ableitung der Funktion f, S. 213
$\int f(x)dx$	unbestimmtes Integral der Funktion f, S. 409
$\int_a^b f(x)dx$	bestimmtes Integral der Funktion f über dem Intervall mit den Grenzen a und b, S. 417
$F(x)\|_a^b$	bestimmtes Integral der Funktion f über dem Intervall mit den Grenzen a und b, S. 423

Index

Äquivalenzklasse, 22
Äquivalenzrelation, 20

Abbildung, 25
abgeschlossenes Intervall, 29
Ableitung, 211
    höhere, 219
Ableitungen
    Masseinheiten, 277
Ableitungsregeln, 243
    Zusammenfassung, 253
Abzinsungssatz, 341
Addition
    von Matrizen, 480
    zweier Vektoren, 472
Affines Polynom, 63
Anfangskapital, 136
Annutität, 346
Arbitrage, 341
Argument, 24
arithmetische Folge, 324
arithmetisches Mittel, 98
Assoziativgesetz, 10
Asymmetrie, 19
Auszahlungsdiagramm, 152
Auszahlungsfunktion, 152
Axiome, 1

Barwert, 340
    Rente, 342
Barwert eines Kapitals, 455
Basis, 134
Basiswert, 151, 365
beschränkte Funktion, 411
beschränktes
    Intervall, 410
bestimmtes Integral, 407, 410
    Definition, 415
Bijektion, 25
Bild, 24
Budgetlinie, 74

Call-Option, 152
Cash and Carry, 370
charakterisierende Eigenschaft, 3

Deckungsbeitrag, 279, 531
Definition
    rekursive, 324
Definitionen, 1
Definitionsbereich, 23
det, 510
Diagonalmatrix, 485
Differenzmenge, 7
Diskontierungssatz, 341
diskunkt
    Mengen, 9
Distributivgesetz, 10
Durchschnitt
    arithmetisches Mittel, 98
    Mengen, 9
durchschnittliche Produktivität, 279
durchschnittlicher Zinssatz, 336

EigenschaftenMartrixMult, 485
einfache Verzinsung, 327
Einheitsmatrix, 485
Einheitsvektor, 477
Einschränkung
    einer Funktion, 115
einspaltige Matrix, 476
einzeilige Matrix, 476
Elastizität, 312
Element, 1
Elementarmatrizen, 505
Eliminationsverfahren
    von Gauss, 504
    von Gauss (Algorithmus), 509
Endkapital, 136
endogen
    Input, 496
Endwert
    Rente, 332
Endwert eines Kapitals, 453
Erlösfunktion, 91
ertragsgesetzliche Kostenfunktion, 294
ertragsgesetzliche Produktionsfunktion, 292
erweiterte Matrix, 510
Eulersche Zahl, 135
Europäische Option, 151
exogen

Input, 496
Exponent, 135
Exponentialfunktionen, 134
Extremum, 217

Fahrstrahl, 305
Fallen
einer Funktion, 126
Fixkosten, 63
Fixkostenfunktion, 63
Folge, 323
arithmetische, 324
geometrische, 328
konstant, 354
Funktion, 23
Addition, 33
beschränkte, 411
Einschränkung, 115
Fallen, 126
Graph, 23
konkav, 127
konvex, 127
Monotonie, 126
Multiplikation, 34
Operationen, 33
Restriktion, 115
stetige, 195
stetige und Nullstellen, 202
Verkettung, 115, 117
Wachstum, 126
zusammengesetzte, 149
Funktion der variablen Kosten, 69
Funktionsgleichung, 25
Funktionswert, 24
Future, 365

ganze Zahlen, 41
Gausssches Eliminationsverfahren, 504
geometrische Folge, 328
Summe, 330
Zinseszinsformel, 329
geometrisches Mittel, 337
geordnetes Paar, 15
Gerade, 41
Gesamtkostenfunktion, 69
Gewinnbereich, 92
Gewinnfunktion, 92
Gleichgewichtsmenge, 71
Gleichgewichtsspreis, 71
Gleichung
ersten Grades, 67
quadratische, 87
Gleichungen
mit rationalen Ausdrücken, 110
Graph einer Funktion, 23
Grenzerlös, 279
Grenzgewinn, 279
Grenzkosten, 279
Grenzproduktivität, 279
Grenzrate der Substitution, 375
Grenzstückkosten, 279
Grenzwert, 351
gegen eine Zahl, 172
gegen minus Unendlich, 169
gegen Unendlich, 159
linksseitig, 177
nicht reeller für gegen Unendlich, 164
rechtsseitig, 177

Häufungspunkt einer Menge, 172
Höhere Ableitungen, 219
Hauptsatz der Integralrechnung, 418

Identitätsfunktion, 123
Injektion, 25
Inklusion, 6
Innerbetriebliche Leistungsverrechnung, 512
Innere eines Intervall, 423
Input-Output-Analyse, 496
Input-Vektor, 476
Integral
bestimmtes, **407**, 410
Hauptsatz, 418
uneigentliches, 448
Integration
Partielle, 437
Substitutionsregel, 440
Interner Zinssatz, 338
Intervall, 29
beschränktes, 410
Innere, 423
Inverse
einer Matrix, 493
mit Excel, 495
Inverse Matrix
mit Excel, 495
und lineare Gleichungssysteme, 503
Invertierbarkeit
und det, 510
Investition
optimale Dauer, 460
Investitition
Kapitalwertmethode, 343

Kapitalwertmethode, 343
Kardinalzahl, 351
kartesisches Koordinatensystem, 43
kartesisches Produkt, 17

Kettenregel, 245
Keynesianische Konsumfunktion, 296
Koeffizient
    eines Polynoms, 61
Kommutativgesetz, 10
    Matrixmultiplikation, 488
Komplementmenge, 7
konkav, 219
Konkavität
    einer Funktion, 127
konstante Folge, 354
Konstante Funktion, 62
Konsumentenrente, 432
Konsumfunktion
    Keynesianische, 296
Konsumquote, 280
Konvergenz, 353
konvex, 219
Konvexität
    einer Funktion, 127
Koordinatensystem, 43
Kostenfunktion, 69
    der fixen Kosten, 63
    der variablen Kosten, 83
    ertragsgesetzliche, 294

Lösungsmenge
    von Ungleichungen, 523
Lücke, 184
leere Menge, 1
Leistungsverrechnung
    innerbetriebliche, 512
Lineare Abbildung
    Definition, 473
Lineare Funktionen
    Definition mit Matrizen, 475
    Operationen, 480
Lineare Gleichungssysteme, 502
    und Matrizen, 502
Lineare Optimierung, 523
Lineare Programmierung, 524
Lineare Umkehrfunktionen, 492
Lineares Planungsrechnen, 524
Lineares Polynom, 81
linkseitig offenes Intervall, 29
linksseitig abgeschlossenes Intervall, 29
linksstetig, 195
Logarithmus
    natürlicher, naturalis, 137
Logarithmus Naturalis, 137
Logarithmusfunktion, 137
Logarithmusfunktionen, 134
logisches Vokabular, 1

Marktgleichgewicht, 71
Masseinheiten, 277
Matrix
    Addition von Matrizen, 480
    als mathematisches Objekt, 474
    Diagonal-, 485
    Einheits-, 485
    einspaltig, 476
    einzeilig, 476
    erweiterte, 510
    in Zeilennormalform, 509
    inverse, 493
    Inverse mit Excel, 495
    Inverse und lineare Gleichungssysteme, 503
    Lineare Umkehrfunktionen, 492
    Multiplikation mit Konstante, 481
    Multiplikation mit Vektor, 475
    Multiplikation von Matrizen mit Excel, 489
    Null-, 481
    Operationen auf, 480
    quadratisch, 485
    und lineare Gleichungssysteme, 502
maximaler Gewinn
    Monopolsituation, 311
    perfekte Konkurrenz, 308
Maximum, 217
    Bedingungen, 220
Menge, 2
    leere, 1
Minimum, 217
    Bedingungen, 221
monoton sinkend, 215
monoton steigend, 215
Monotonie, 126
Multiplikation
    Matrix mit Konstante, 481
    Matrix mit Vektor, 475
    Matrix mit Vektor, Excel, 477
    Matrizen mit Excel, 489
    Vektor mit reeller Zahl, 471
    von Matrizen, 482

Näherungsverfahren
    Nullstellenbestimmung, 96
natürliche Zahlen, 41
natürlicher Logarithmus, 137
Neoklassische Nutzenfunktion, 291
Neoklassische Produktionsfunktion, 297
Nullcouponanleihen, 341
Nullmatrix, 481
Nullstelle, 123
    affines Polynom, 65
    Näherungsverfahren, 96
    Polynom 2-ten Grades, 84

Polynom 3-ten Grades, 96
rationaler Funktionen, 109
stetiger Funktion, 202
Nutzenfunktion
neoklassische, 291

offenes Intervall, 29
Operations Research, 524
optimale Dauer einer Investition, 460
Output-vektor, 476

Partielle Integration, 437
Polynom, 60
0-ten Grades, 62
1-ten Grades, 63
2-ten Grades, 83
3-ten Grades, 95
n. ten Grades, 105
Potenzmenge, 11
Preisangebotsfunktion, 71
Preiskalkulation
Leistungsverrechnung, 514
Preisnachfragefunktion, 70, 279
Primärkosten, 512
Produktionsfunktion
ertragsgesetzliche, 292
neoklassische, 297
Produktionsmatrix, 476, 482
Produktivität, 279
Produktsymbol, 336
Produzentenrente, 432
Projektion, 487
Punkt, 41
pure discount bond, 341
Put-Option, 152

Quadratische Funktion, 83
Quadratische Gleichung, 87
quadratische Matrix, 485

Rationale Funktionen, 107
rationale Zahlen, 41
rationaler Ausdruck, 107
rechtsseitig abgeschlossenes Intervall, 29
rechtsseitig offenes Intervall, 29
rechtsstetig, 195
reelle Funktionen, 60
reelle Zahlen, 41
Reflexivität, 19
Reihen, 350
rekursive Definition, 324
Relation, 16
Rente
Barwert, 342
Endwert, 332
unendliche, 355
Rentenbarwert, 459
Rentenendwert, 457
Restfunktion, 226
Restriktion
einer Funktion, 115
Restriktionsmenge, 524
Restriktionssystem, 524
Rohstoffmatrix, 482

Sätze, 2
Schnittpunkt, 65
Sekante, 209
Sekantengleichung, 218
Sekundärkosten, 512
senkrechte Projektion, 487
Sigma, 30
Solver, 98, 527
Spar-Einkommensfunktion, 75
Sparquote, 280
Sprungstelle, 184
Stückkosten, 279
Stückkostenfunktion, 107
Stammfunktion, 407
Steigung, 64, 209
stetige Verzinsung, 362
Stetigkeit, 195
linksstetig, 195
rechtsstetig, 195
Strecke, 41
strikt
monoton sinkend, 215
monoton steigend, 215
Substitution
Grenzrate der, 375
Substitutionsregel, 440
Summationsindex, 30
Summationsobergrenze, 30
Summationsuntergrenze, 30
Summe
arithmetische Folge, 326
geometrische Folge, 330
Surjektion, 25
Symmetrie, 19

Tangente, 210
Tangentengleichung, 224
Teilmenge, 5
Terminkontrakt, 365
Theorem, 2
Tilgung, 346
Tilgungsplan, 347
Transitivität, 20

Umgebung einer reellen Zahl, 172
Umkehrfunktion, 28
    Verkettung, 123
Umkehrfunktionen, 124
Umkehrmatrix, 493
    mit Excel, 495
Uneigentliches Integral, 448
Unendlich, 351
unendliche Rente, 355
Unendlichkeitsstelle, 184
Unendlichkeitsstellen, 109
Ungleichung
    ersten Grades, 523
    Lösungsmenge, 523
unterjährige Verzinsung, 362
Urbild, 24

variable Kosten, 69
Vektor, 470
    Addition, 472
    Einheits-, 477
    Multiplikation Matrix mit, 475
    Multiplikation mit reeller Zahl, 471
Venn-Diagramm, 3, 25
Vereinigungsmenge, 9
Verfall, 365
Verkettung
    Kommutativität, 123
    Umkehrfunktion, 123
    und Multiplkation von Matrizen, 482
    von Funktionen, 115, 117
Verzinsung
    einfache, 327
    unterjährig, 362
    Zinseszins, 329

Wachstum, 289
    einer Funktion, 126
    konkav, 290
    konvex, 290
Wert
    der Funktion, 24
Wertebereich, 23
Wurzelfunktionen, 115

x-Achse, 43

y-Achse, 43

Zahlengerade, 42
Zeilennormalform, 509
Zerlegung, 21
Zero Bond, 341
Zielfunktion, 525
Zins
    stetige Verzinsung, 362
Zinseszins, 329
    stetige Verzinsung, 362
Zinseszinsformel
    geometrische Folge, 329
Zinsfuss, 129
Zinssatz, 129, 136
    durchschnittlicher, 336
    interner, 338
Zinsstruktur, 344
Zusammengesetzte Funktion, 149

Literatur

Bergmann, U. (1991). *Training Kurvendiskussion.* Stuttgart: Klett.

Bergmann, U. (2002). *Training Differentialrechnung Sekundarstufe 2.* Stuttgart: Klett.

Dück, W., Körth, H., Runge, W. & Wunderlich, L. (1988). *Taschenbuch der Wirtschaftsmathematik: Formeln, Tabellen, Zusammenstellungen.* Thun: Harri Deutsch.

Eichholz, W. & Vilkner, E. (2007). *Taschenbuch der Wirtschaftsmathematik.* Leibzig: Hanser.

Favre, J.-P. (2009). *Mathématiques de gestion.* Epalinges: Digilex.

Purkert, W. (2005). *Brückenkurs Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler* (5. Aufl.). Stuttgart: Teubner.

Sydsaeter, K. & Hammond, P. (2004). *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler: Basiswissen mit Praxisbezug.* München: Pearson.

Tietze, J. (1998). *Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik* (7. Aufl.). Wiesbaden: Vieweg.

Varian, H. R. (2010). *Intermediate microeconomics: A modern approach* (8. Aufl.). London: Norton.