

Graphische Illustrationen zweier Grenzwertsätze

Satz. Wenn $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \in \mathbb{R}$, dann

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow \infty} g(x),$$

Beispiel.

$$f(x) = 4 + \frac{1}{x^2}$$

$$g(x) = 2 - \frac{1}{x}$$

Dabei ist $f(x) + g(x)$ für z. B. $x = 5$

$$f(5) + g(5) = 4 + \frac{1}{5^2} + 2 - \frac{1}{5} = 5.84$$

oder für $x = 1.5$

$$f(1.5) + g(1.5) = 4 + \frac{1}{1.5^2} + 2 - \frac{1}{1.5} = 5.777777778.$$

Es gilt: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 4$; $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = 6 = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$

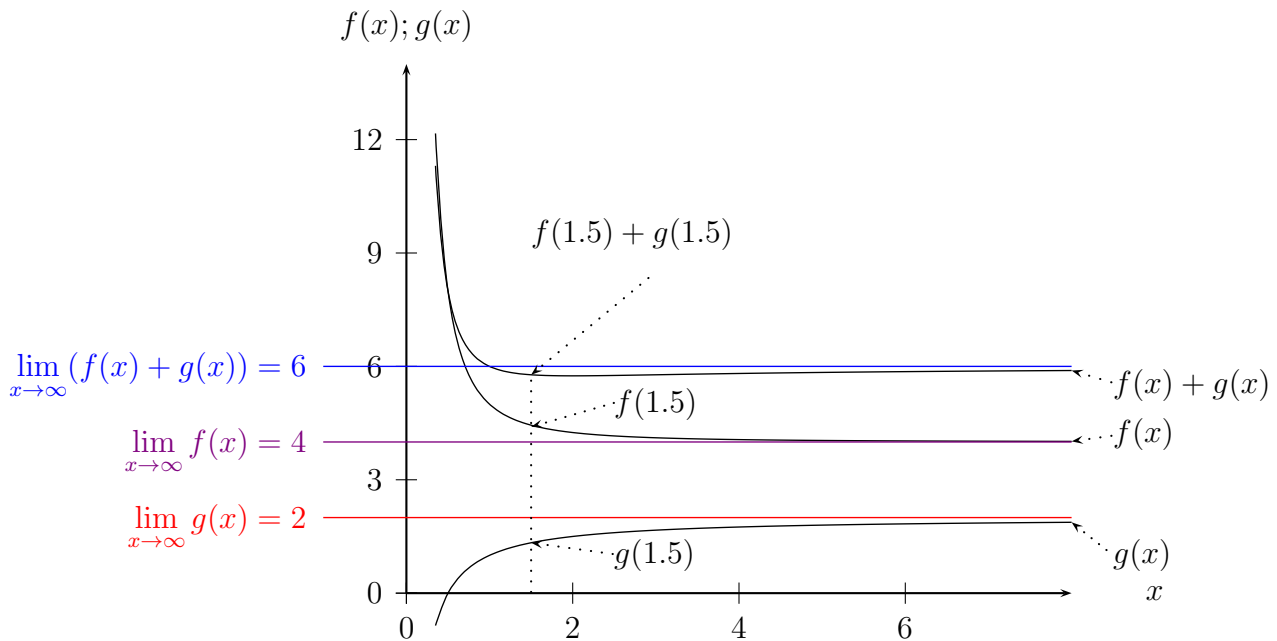


Abbildung 1: Der reelle Grenzwert der Summe zweier Funktionen mit reellen Grenzwerten a und b ist mit $a + b$ identisch

Satz. Wenn $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x), a \in \mathbb{R}$, dann

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (af(x)) = a \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

Beispiel.

$$f(x) = 0.5 + \frac{1}{x}$$

$$a = 3.5$$

Dabei ist $3.5 \cdot f(x)$ für z. B. $x = 5$

$$3.5f(5) = 3.5 \cdot \left(0.5 + \frac{1}{5}\right) = 2.45$$

oder für $x = 1.2$

$$3.5 \cdot f(1.2) = 3.5 \cdot \left(0.5 + \frac{1}{1.2}\right) = 4.666\bar{7}$$

Es gilt: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.5$; $\lim_{x \rightarrow \infty} 3.5f(x) = 1.75 = 3.5 \cdot 0.5 = 3.5 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

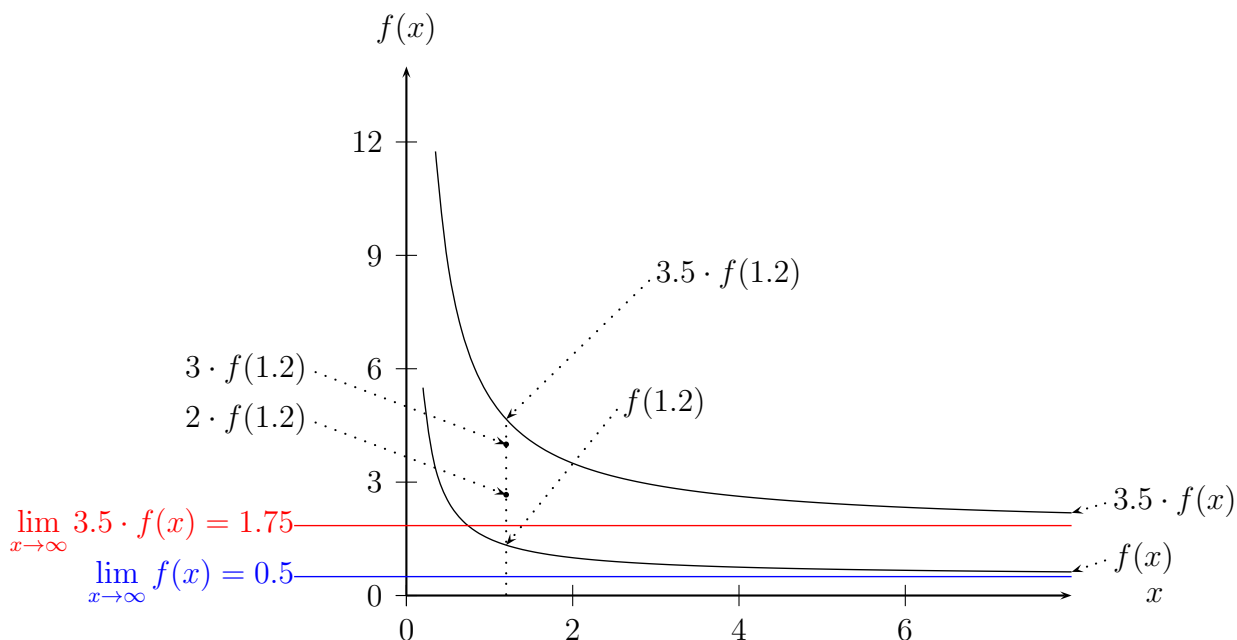


Abbildung 2: Der reelle Grenzwert des Produktes einer reellen Konstanten a und einer reellen Funktion mit reellem Grenzwert b ist mit ab identisch