

Gleichungssysteme ersten Grades lösen

Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten

$$18 = 10a + b$$

$$23 = 30a + b$$

Einsetzungsmethode

Durch Isolieren von b in der ersten Gleichung ergibt sich $b = 18 - 10a$.

b wird nun in der zweiten Gleichung durch die rechte Seite von $b = 18 - 10a$ ersetzt:

$$23 = 30a + (18 - 10a) = 20a + 18 \implies$$

$$\frac{23 - 18}{20} = 0.25 = a$$

$$\implies b = 18 - 10 \cdot 0.25 = 15.5$$

Gleichsetzungsmethode

In allen Gleichungen nach einer Variable auflösen, z.B. nach b :

$$b = 18 - 10a$$

$$b = 23 - 30a$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen gleichsetzen:

$$18 - 10a = 23 - 30a \implies$$

$$20a = 5 \implies$$

$$a = \frac{5}{20} = 0.25 \implies$$

$$b = 18 - 10 \cdot 0.25 = 15.5$$

Additionsmethode

Man multipliziert die erste Gleichung mit -1 und addiert sie zur zweiten (die erste lässt man sonst unverändert):

$$18 = 10a + b$$

$$5 = 20a$$

denn $(-1)18 + 23 = 5$ und $(-1)(10a + b) + 30a + b = 20a$.

Man multipliziert die zweite Gleichung mit $\frac{1}{20}$ und erhält:

$$18 = 10a + b$$

$$\frac{5}{20} = a$$

Man multipliziert die zweite Gleichung mit -10 und addiert diese zur ersten (man lässt die zweite sonst unverändert):

$$15.5 = b$$

$$\frac{1}{4} = a$$

denn $(-10)\frac{5}{20} + 18 = \frac{31}{2} = 15.5$ und $(-10)(a) + 10a + b = b$.

Drei Gleichungen mit drei Unbekannten

$$\begin{aligned}6 &= 25a + 5b + c \\9 &= 64a + 8b + c \\7 &= 2500a + 50b + c\end{aligned}$$

$$a = -\frac{22}{945}, b = \frac{1231}{945}, c = \frac{13}{189}$$

Einsetzungsmethode

$$c = 6 - 25a - 5b \implies$$

$$\begin{aligned}9 &= 64a + 8b + (6 - 25a - 5b) \\7 &= 2500a + 50b + (6 - 25a - 5b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}64a + 8b + (6 - 25a - 5b) &= 39a + 3b + 6 \\2500a + 50b + 6 - 25a - 5b &= 2475a + 45b + 6 \implies\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}9 &= 39a + 3b + 6 \\7 &= 2475a + 45b + 6\end{aligned}$$

Mit Einsetzungsmethode für zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten weiterfahren, d.h. eine der Variablen in einer Gleichung isolieren und in der anderen Gleichung ersetzen.

Gleichsetzungsmethode

$$\begin{aligned}c &= 6 - 25a - 5b \\c &= 9 - 64a - 8b \\c &= 7 - 2500a - 50b\end{aligned}$$

Man wählt zwei mal zwei Paare von Gleichungen - alle Gleichungen müssen verwendet werden - und setzt gleich (z.B. 1+2 und 2+3 oder 1+2 und 1+3)

$$\begin{aligned}6 - 25a - 5b &= 9 - 64a - 8b \\9 - 64a - 8b &= 7 - 2500a - 50b\end{aligned}$$

Man vereinfacht und fährt mit Gleichsetzungsmethode mit zwei Unbekannten fort.

Additionsmethode

Man multipliziert die erste Gleichung mit -1 und addiert diese zu den beiden anderen Gleichungen:

$$\begin{aligned}6 &= 25a + 5b + c \\3 &= 39a + 3b \\1 &= 2475a + 45b\end{aligned}$$

denn $-1 \cdot 6 + 9 = 3$ und $-1 \cdot (25a + 5b + c) + 64a + 8b + c = 39a + 3b$
und $-1 \cdot 6 + 7 = 1$ und $-1 \cdot (25a + 5b + c) + 2500a + 50b + c = 2475a + 45b$

Man multipliziert die zweite Gleichung mit $-\frac{5}{3}$ und addiert zur ersten:

$$\begin{aligned}1 &= -40a + c \\3 &= 39a + 3b \\1 &= 2475a + 45b\end{aligned}$$

denn $-\frac{5}{3} \cdot 3 + 6 = 1$ und $-\frac{5}{3}(39a + 3b) + 25a + 5b + c = c - 40a$.

Man kann die zweite Gleichung mit $\frac{1}{3}$ multiplizieren:

$$\begin{aligned}1 &= -40a + c \\1 &= 13a + b \\1 &= 2475a + 45b\end{aligned}$$

und dann die zweite Gleichung mit $-\frac{1}{45}$ multiplizieren und zur dritten addieren:

$$\begin{aligned}1 &= -40a + c \\1 &= 13a + b \\-44 &= 1890a\end{aligned}$$

denn $-45 \cdot 1 + 1 = -44$ und $-45(13a + b) + 2475a + 45b = 1890a$

Man multipliziert die dritte Gleichung mit $-\frac{13}{1890}$ und addiert sie zur zweiten:

$$\begin{aligned}1 &= -40a + c \\\frac{1231}{945} &= b \\-44 &= 1890a\end{aligned}$$

denn $-\frac{13}{1890} \cdot -44 + 1 = \frac{1231}{945}$ und $-\frac{13}{1890}(1890a) + 13a + b = b$.

Man multipliziert die dritte Gleichung mit $\frac{40}{1890}$ und addiert zur ersten:

$$\begin{aligned}\frac{13}{189} &= c \\\frac{1231}{945} &= b \\-44 &= 1890a\end{aligned}$$

denn $\frac{40}{1890} \cdot -44 + 1 = \frac{13}{189}$ und $\frac{40}{1890}(1890a) + -40a + c = c$

Man multipliziert die dritte Zeile mit $-\frac{1}{1890}$ und erhält:

$$\begin{aligned}\frac{13}{189} &= c \\\frac{1231}{945} &= b \\\frac{-22}{945} &= a\end{aligned}$$

Vier Gleichungen mit vier Unbekannten

$$\begin{aligned}6 &= 125a + 25b + 5c + d \\9 &= 512a + 64b + 8c + d \\7 &= 125000a + 2500b + 50c + d \\30 &= 1000000a + 10000b + 100c + d\end{aligned}$$

$$\left[a = \frac{25\,037}{82\,593\,000}, b = -\frac{3500\,131}{82\,593\,000}, c = \frac{542\,891}{359\,100}, d = -\frac{44\,393}{82\,593} \right]$$

Einsetzungsmethode

$$d = 6 - 125a - 25b - 5c \implies$$

$$9 = 512a + 64b + 8c + (6 - 125a - 25b - 5c)$$

$$7 = 125000a + 2500b + 50c + (6 - 125a - 25b - 5c)$$

$$30 = 1000000a + 10000b + 100c + (6 - 125a - 25b - 5c)$$

Vereinfachen und Einsetzungsmethode für drei Gleichungen mit drei Unbekannten anwenden.

Gleichsetzungsmethode:

$$d = 6 - 125a - 25b - 5c$$

$$d = 9 - (512a + 64b + 8c)$$

$$d = 7 - (125000a + 2500b + 50c)$$

$$d = 30 - (1000000a + 10000b + 100c)$$

Drei Paare von Gleichungen gleichsetzen (alle verwenden!), z.B.

$$6 - 125a - 25b - 5c = 9 - (512a + 64b + 8c)$$

$$9 - (512a + 64b + 8c) = 7 - (125000a + 2500b + 50c)$$

$$7 - (125000a + 2500b + 50c) = 30 - (1000000a + 10000b + 100c)$$

Vereinfachen und Gleichsetzungsmethode für drei Gleichungen mit drei Unbekannten anwenden.

Additionsmethode

$$6 = 125a + 25b + 5c + d$$

$$9 = 512a + 64b + 8c + d$$

$$7 = 125000a + 2500b + 50c + d$$

$$30 = 1000000a + 10000b + 100c + d$$

Man multipliziert die erste Zeile mit -1 und addiert sie zu den anderen Zeilen:

$$6 = 125a + 25b + 5c + d$$

$$3 = 387a + 39b + 3c$$

$$1 = 124875a + 2475b + 45c$$

$$24 = 999875a + 9975b + 95c$$

denn $-1 \cdot 6 + 9 = 3$ und $-1(125a + 25b + 5c + d) + 512a + 64b + 8c + d = 387a + 39b + 3c$

$-1 \cdot 6 + 7 = 1$ und $-1(125a + 25b + 5c + d) + 125000a + 2500b + 50c + d = 124875a + 2475b + 45c$

$-1 \cdot 6 + 30 = 24$ und $-1(125a + 25b + 5c + d) + 1000000a + 10000b + 100c + d = 999875a + 9975b + 95c$.

Man multipliziert die zweite Zeile mit $\frac{-5}{3}$ und addiert sie zur ersten Zeile:

$$1 = d - 40b - 520a$$

$$3 = 387a + 39b + 3c$$

$$1 = 124875a + 2475b + 45c$$

$$24 = 999875a + 9975b + 95c$$

denn $\frac{-5}{3} \cdot 3 + 6 = 1$ und $\frac{-5}{3} (387a + 39b + 3c) + 125a + 25b + 5c + d = d - 40b - 520a$.
 Man multipliziert die zweite Zeile mit $-\frac{45}{3}$ und addiert sie zur dritten Zeile:

$$\begin{aligned} 1 &= d - 40b - 520a \\ 3 &= 387a + 39b + 3c \\ -44 &= 119\,070a + 1890b \\ 24 &= 999\,875a + 9975b + 95c \end{aligned}$$

denn $-\frac{45}{3} \cdot 3 + 1 = -44$ und $-\frac{45}{3} (387a + 39b + 3c) + 124\,875a + 2475b + 45c = 119\,070a + 1890b$.
 Man multipliziert die zweite Zeile mit $\frac{-95}{3}$ und addiert sie zur vierten Zeile:

$$\begin{aligned} 1 &= d - 40b - 520a \\ 3 &= 387a + 39b + 3c \\ -44 &= 119\,070a + 1890b \\ -71 &= 987\,620a + 8740b \end{aligned}$$

denn $\frac{-95}{3} (3) + 24 = -71$ und $\frac{-95}{3} (387a + 39b + 3c) + 999\,875a + 9975b + 95c = 987\,620a + 8740b$.
 Man multipliziert die dritte Zeile mit $\frac{40}{1890}$ und addiert sie zur ersten Zeile

$$\begin{aligned} \frac{13}{189} &= 2000a + d \\ 3 &= 387a + 39b + 3c \\ -44 &= 119\,070a + 1890b \\ -71 &= 987\,620a + 8740b \end{aligned}$$

denn $\frac{40}{1890} \cdot -44 + 1 = \frac{13}{189}$ und $\frac{40}{1890} (119\,070a + 1890b) + d - 40b - 520a = 2000a + d$.
 Man multipliziert die dritte Zeile mit $\frac{-39}{1890}$ und addiert sie zur zweiten Zeile:

$$\begin{aligned} \frac{13}{189} &= 2000a + d \\ \frac{1231}{315} &= 3c - 2070a \\ -44 &= 119\,070a + 1890b \\ -71 &= 987\,620a + 8740b \end{aligned}$$

denn $\frac{-39}{1890} \cdot -44 + 3 = \frac{1231}{315}$ und $\frac{-39}{1890} (119\,070a + 1890b) + 387a + 39b + 3c = 3c - 2070a$.
 Man multipliziert die dritte Zeile mit $\frac{-8740}{8740}$ und addierte sie zur vierten:

$$\begin{aligned} \frac{13}{189} &= 2000a + d \\ \frac{1231}{315} &= 3c - 2070a \\ -44 &= 119\,070a + 1890b \\ \frac{25\,037}{189} &= 437\,000a \end{aligned}$$

denn $\frac{-8740}{1890} \cdot -44 + -71 = \frac{25\,037}{189}$ und $\frac{-8740}{1890} (119\,070a + 1890b) + 987\,620a + 8740b = 437\,000a$.
 Man multipliziert die vierte Gleichung mit $\frac{-2000}{437\,000}$ und addiert sie zur ersten:

$$\begin{aligned} -\frac{44\,393}{82\,593} &= d \\ \frac{1231}{315} &= 3c - 2070a \\ -44 &= 119\,070a + 1890b \\ \frac{25\,037}{189} &= 437\,000a \end{aligned}$$

denn $\frac{-2000}{437\,000} \cdot \frac{25\,037}{189} + \frac{13}{189} = -\frac{44\,393}{82\,593}$ und $\frac{-2000}{437\,000} (437\,000a) + 2000a + d = d$.
 Man multipliziert die vierte Gleichung mit $\frac{2070}{437\,000}$ und addiert sie zur zweiten:

$$\begin{aligned} -\frac{44\,393}{82\,593} &= d \\ \frac{542\,891}{119\,700} &= 3c \\ -44 &= 119\,070a + 1890b \\ \frac{25\,037}{189} &= 437\,000a \end{aligned}$$

denn $\frac{2070}{437\,000} \cdot \frac{25\,037}{189} + \frac{1231}{315} = \frac{542\,891}{119\,700}$ und $\frac{2070}{437\,000} (437\,000a) + 3c - 2070a = 3c$.
 Man multipliziert die vierte Gleichung mit $\frac{-119\,070}{437\,000}$ und addiert sie zur dritten:

$$\begin{aligned} -\frac{44\,393}{82\,593} &= d \\ \frac{542\,891}{119\,700} &= 3c \\ -\frac{3500\,131}{43\,700} &= 1890b \\ \frac{25\,037}{189} &= 437\,000a \end{aligned}$$

denn $\frac{-119\,070}{437\,000} \cdot \frac{25\,037}{189} + -44 = -\frac{3500\,131}{43\,700}$ und $\frac{-119\,070}{437\,000} (437\,000a) + 119\,070a + 1890b = 1890b$.
 Man multipliziert die zweite Gleichung mit $\frac{1}{3}$, die zweite durch $\frac{1}{1890}$ und die dritte mit $\frac{1}{437\,000}$ und erhält das Resultat:

$$a = \frac{25\,037}{82\,593\,000}, b = -\frac{3500\,131}{82\,593\,000}, c = \frac{542\,891}{359\,100}, d = -\frac{44\,393}{82\,593}$$

Bemerkung 1 *Zum Rechnen von Hand ist die Einsetzungsmethode vermutlich die sicherste. Man kann die Methoden auch mischen, wenn man sieht, dass man mir irgend einer Methode gut vereinfachen kann. Die Additionsmethode ist für Gleichungssysteme mit mehr als 2 Unbekannten sehr anfällig auf menschliche Fehler.*