

# Formelblatt Mathematik

Version: 29. April 2016

## Mengenlehre: Einführung

**Definition 1.**  $x$  ist eine Menge genau dann, wenn es ein  $y$  gibt, so dass  $y \in x$  oder  $x = \emptyset$ .

**Definition 2.**  $x \notin z$  genau dann, wenn nicht  $x \in z$

**Definition 3.**  $A \subset B$  genau dann, wenn für alle  $x$  gilt, wenn  $x \in A$ , dann  $x \in B$  (Teilmenge).

**Definition 4.**  $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$  (Differenzmenge).

**Definition 5.** Wenn  $A \subset B$ , dann  $(A_B^c = B \setminus A)$  (Komplement).

**Definition 6.**  $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$  (Schnittmenge).

**Definition 7.** Zwei Mengen  $A$  und  $B$  sind disjunkt genau dann, wenn  $A \cap B = \emptyset$

**Definition 8.**  $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$  (Vereinigungsmenge).

**Definition 9.**  $\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subset A\}$  (Potenzmenge).

## Mengenlehre: Relationen

**Definition 10.**  $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$  (geordnetes Paar)

**Definition 11.**  $(y, z, x) := ((y, z), x)$  (Tripel)

$(y, z, x, r) := ((y, z, x), r)$  (4-Tupel)

$(x_1, \dots, x_n) := ((x_1, \dots, x_{n-1}), x_n)$  ( $n$ -Tupel)

**Definition 12.**  $A$  ist eine Relation genau dann, wenn für alle  $x$  gilt, wenn  $x \in A$ , dann gibt es ein  $y$  und ein  $z$ , so dass  $(y, z) = x$

**Definition 13.** Eine Relation, die nur  $n$ -Tupel enthält wird  $n$ -stellige Relation genannt.

**Definition 14.**  $A \times B := \{(x, y) \mid x \in A \text{ und } y \in B\}$  (kartesisches Produkt)

**Definition 15.** Jede Teilmenge von  $A \times B$  ist eine „Relationen von  $A$  nach  $B$ “.

**Definition 16.**  $A_1 \times \dots \times A_n := ((A_1 \times \dots \times A_{n-2}) \times A_{n-1}) \times A_n$

**Definition 17.**  $\bigtimes_{i=1}^n A_i := A_1 \times \dots \times A_n$

**Definition 18.**  $A^n := \bigtimes_{i=1}^n A$ .

**Definition 19.**  $A$  ist symmetrisch genau dann, wenn  $A$  eine Relation ist und für alle  $(x, y) \in A$  gilt: es gibt ein  $(y, x) \in A$ .

**Definition 20.**  $A$  ist asymmetrisch genau dann, wenn  $A$  eine Relation ist und für alle  $(x, y) \in A$  gilt: es gibt kein  $(y, x) \in A$ .

**Definition 21.** Eine Relation  $A$  ist reflexiv, wenn es für alle Komponenten  $x$  ihrer geordneten Paare ein geordnetes Paar  $(x, x) \in A$  gibt.

**Definition 22.** Eine Relation  $A$  ist transitiv, wenn für alle  $(x, y), (y, z) \in A$  gilt:  $(x, z) \in A$ .

**Definition 23.**  $R$  ist eine Äquivalenzrelation genau dann, wenn  $R$  eine transitive, symmetrische und reflexive Relation ist.

**Definition 24.** Eine Menge  $B$  von  $n$  nichtleeren Mengen  $X_i$  stellt eine Zerlegung  $Z$  einer Menge  $A$  dar genau dann, wenn gilt:

(1)  $X_i \cap X_j = \emptyset$  für  $i \neq j$  und

(2)  $\bigcup_{i=1}^n X_i = A$

(3)  $X_i \neq \emptyset$  für alle  $i$ .

**Satz 25.** Sei  $R$  eine Äquivalenzrelation auf die Menge  $A$ . Dann gilt:  $Z = \{M_x \mid M_x = \{y \mid (x, y) \in R\}\}$  ist eine Zerlegung von  $A$ .

(Wir nennen  $Z$  die  $R$ -Zerlegung von  $A$ . Gebräuchlich ist auch der Ausdruck  $R$ -Partition von  $A$ ).

**Definition 26.** Die Elemente einer  $R$ -Zerlegung heissen „Äquivalenzklassen“ der  $R$ -Zerlegung.

## Mengenlehre: Funktionen

**Definition 27.**  $g$  ist der Graph einer Funktion von  $A$  nach  $B$  genau dann, wenn  $g$  eine Relation von  $A$  nach  $B$  ist und für alle  $x, y, z$  gilt: wenn  $(x, y) \in g$  und  $(x, z) \in g$ , dann  $z = y$ .

**Definition 28.**  $f$  ist eine Funktion genau dann, wenn es  $A, B$  und  $g$  gibt, so dass

(i)  $f = (A, B, g)$  und

(ii)  $g$  ist der Graph einer Funktion von  $A$  nach  $B$

**Definition 29.**  $A$  ist der Definitionsbereich von  $f$  genau dann, wenn  $f = (A, B, g)$ .

**Definition 30.**  $B$  ist der Wertebereich von  $f$  genau dann, wenn  $f = (A, B, g)$ .

**Definition 31.** Sei  $f = (A, B, g)$ . Urbild von  $f := \{x \mid (x, y) \in g\}$

**Definition 32.** Sei  $f = (A, B, g)$ . Bild( $f$ ) :=  $\{y \mid (x, y) \in g\}$

**Definition 33.** Sei  $f = (A, B, g)$ .  $f(x) = y$  genau dann, wenn  $(x, y) \in g$ .

**Definition 34.** Sei  $f = (A, B, g)$ . Ist Urbild von  $f = A$ , wird  $f$  „Abbildung“ genannt.

**Definition 35.** Bei Abbildungen bedeutet die Schreibweise

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow B \\ x &\rightarrow f(x), \end{aligned}$$

dass  $A$  der Definitionsbereich ist (der mit dem Urbild zusammenfällt) und  $B$  der Wertebereich ist. Die zweite Zeile gibt die Zuordnungsvorschrift an.

**Definition 36.** Sei  $f = (A, B, g)$ . Ist Bild( $f$ ) =  $B$ , wird  $f$  „Surjektion“ oder „surjektive Funktion“ genannt.

**Definition 37.** Sei  $f = (A, B, g)$  und  $f$  eine Abbildung. Gilt für alle  $(x, y), (z, r) \in g$ , dass  $y \neq r$ , sprechen wir von einer „Injektion“ oder einer „injektiven Funktion“.

**Definition 38.** Sei  $f = (A, B, g)$ . Ist  $f$  surjektiv und injektiv, wird  $f$  „bijektive Abbildung“ oder „Bijektion“ genannt.

**Definition 39.** Für bijektive  $f = (A, B, g)$  definieren wir:

$f^{-1} := (B, A, g^{-1})$  mit  $g^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in g\}$

Wir nennen  $f^{-1}$  die Umkehrfunktion von  $f$ .

**Definition 40.** Wenn zwei Abbildungen  $f$  und  $g$  denselben Definitionsbereich  $D$  haben und der Wertebereich der Funktionen aus reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  besteht, so definieren wir:

$$\begin{aligned} f + g : D &\rightarrow \mathbb{R} \\ (f + g)(x) &:= f(x) + g(x) \end{aligned}$$

**Definition 41.** Wenn zwei Abbildungen  $f$  und  $g$  denselben Definitionsbereich  $D$  haben und der Wertebereich der Funktionen aus reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  besteht, so definieren wir:

$$\begin{aligned} f \cdot g : D &\rightarrow \mathbb{R} \\ (f \cdot g)(x) &:= f(x) \cdot g(x) \end{aligned}$$

## Verwendete Zahlenmengen

- $\mathbb{N}$  = die Menge der natürlichen Zahlen:  $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{N}^*$  = die Menge der natürlichen Zahlen ohne die Null:  $\{1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{N}_n$  = die Menge der  $n + 1$  natürlichen Zahlen von 0 bis  $n$ :  $\{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$
- $\mathbb{N}_n^*$  = die Menge der  $n$  natürlichen Zahlen von 1 bis  $n$ :  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$
- $\mathbb{Z}$  = die Menge der ganzen Zahlen (Beispiel für eine ganze Zahl die nicht natürlich ist:  $-1$ ).
- $\mathbb{Q}$  = die Menge der rationalen Zahlen (Beispiele für rationale Zahlen, die nicht ganz sind:  $\frac{4}{5}$ ;  $6.77777777\dots$ )
- $\mathbb{R}$  = die Menge der reellen Zahlen (Beispiele für reelle Zahlen, die nicht rational sind:  $\pi$ ;  $\sqrt{2}$ ;  $\log_{10} 5$ )
- $\mathbb{R}^+$  = die Menge der positiven reellen Zahlen (inklusive die Null). Analog für  $\mathbb{Z}^+$  und  $\mathbb{Q}^+$ .

**Definition 42.** Für  $x, y \in \mathbb{R}$  ist  $d: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $d(x, y) := \sqrt{(x - y)^2}$  die (euklidische) Länge der Strecke zwischen den der Zahl  $x$  und der Zahl  $y$  zugeordneten Punkten ( $d$  für „Distanz zwischen  $x$  und  $y$ “, die Länge ist also eine nicht-negative reelle Zahl; die Länge der Strecke ist der Abstand zwischen den zwei Punkten).

**Satz 43.** Für  $d$  gemäss Definition gilt:

1.  $d(x, y) = d(y, x)$  (Symmetrie)
2.  $d(x, y) \geq 0$
3.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

**Definition 44.** Der Abstand zwischen zwei Punkten  $\mathbf{x} := (x_1, x_2)$  und  $\mathbf{y} := (y_1, y_2)$  im zweidimensionalen Raum ist der Wert der Abbildung

$$d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$
$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

Der (euklidische) Abstand zwischen  $\mathbf{x} := (x_1, x_2, x_3)$  und  $\mathbf{y} := (y_1, y_2, y_3)$  ist der Wert der Abbildung

$$d: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$
$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

Allgemein ist der (euklidische) Abstand zwischen  $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n)$  und  $\mathbf{y} := (y_1, \dots, y_n)$  der Wert der Abbildung

$$d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$
$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

## Polynome

**Definition 45.**  $f$  ist ein Polynom (eine Polynomfunktion) genau dann, wenn

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

mit  $a_i \in \mathbb{R}$ .

**Definition 46.**

$$[a, b] := \{x \mid a \leq x \leq b\} \text{ (abgeschlossenes Intervall)}$$
$$]a, b] := \{x \mid a < x \leq b\} \text{ (linksseitig offenes Intervall = rechtseitig abgeschlossenes)}$$
$$[a, b[ := \{x \mid a \leq x < b\} \text{ (rechtsseitig offenes Intervall = linksseitig abgeschlossenes)}$$
$$]a, b[ := \{x \mid a < x < b\} \text{ (offenes Intervall)}$$

**Definition 47.**  $f$  ist ein Polynom 0-ten Grades genau dann wenn gilt:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = a_0, \quad a_0 \in \mathbb{R}$$

**Definition 48.**  $f$  ist ein Polynom 1-ten Grades genau dann wenn gilt:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = a_0 + a_1 x; \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}; a_1 \neq 0$$

**Definition 49.**  $m_f$  ist die Steigung des Polynoms ersten Grades  $f$  genau dann, wenn

$$m_f := \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

wobei  $(x_1, f(x_1))$  und  $(x_2, f(x_2))$  zwei beliebige Elemente des Graphen von  $f$  sind.

**Satz 50.** Für ein Polynom ersten Grades  $f$  mit  $f(x) = a_1 x + a_0$  ist

- $m_f = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$  unabhängig von der Wahl von  $(x_1, f(x_1))$  und  $(x_2, f(x_2))$
- $m_f = a_1$ .

**Definition 51.**  $f$  ist ein affines Polynome genau dann, wenn  $f$  ist ein Polynom 1-ten Grades ist und  $a_0 \neq 0$ .

**Definition 52.**  $f$  ist ein lineares Polynome genau dann, wenn  $f$  ist ein Polynom 1-ten Grades ist und  $a_0 = 0$ .

**Definition 53.**  $f$  ist ein Polynom zweiten Grades genau dann, wenn

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

mit  $a_2 \neq 0$ .

**Satz 54.** Ein Polynom ersten Grades kann aus 2 Punkten  $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$  berechnet werden genau dann, wenn das folgende Gleichungssystem eine eindeutige Lösung hat:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= a_1 x_1 + a_0 \\ f(x_2) &= a_1 x_2 + a_0 \end{aligned}$$

**Definition 55.** Eine Nullstelle einer reellen Funktion ist ein  $x$  mit  $f(x) = 0$ .

**Satz 56.** Ein Polynom zweiten Grades  $f$  mit  $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  hat zwei, eine oder keine reelle Nullstellen. Ist  $a_1^2 - 4a_0 a_2 > 0$  hat es genau zwei reelle Nullstellen, nämlich

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{a_1}{2a_2} \pm \frac{1}{2a_2} \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2} \\ &= \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2} \end{aligned}$$

Gilt  $a_1^2 - 4a_0 a_2 = 0$ , hat es genau eine reelle Nullstelle, nämlich  $-\frac{a_1}{2a_2}$ .

Gilt  $a_1^2 - 4a_0 a_2 < 0$ , hat es keine reelle Nullstelle.

**Definition 57.** Der Schnittpunkt zweier Funktion ist die Schnittmenge der Graphen der Funktionen.

**Satz 58.** Ein Polynom zweiten Grades kann aus 3 Punkten  $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), (x_3, f(x_3))$  berechnet werden, genau dann, wenn das folgende Gleichungssystem eine eindeutige Lösung hat:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0 \\ f(x_2) &= a_2 x_2^2 + a_1 x_2 + a_0 \\ f(x_3) &= a_2 x_3^2 + a_1 x_3 + a_0 \end{aligned}$$

**Satz 59.**  $f$  ist ein Polynom dritten Grades genau dann, wenn

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &:= a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \end{aligned}$$

mit reellen Zahlen  $a_i$ .  $a_3 \neq 0$ .

**Satz 60.** Ein Polynom dritten Grades kann aus 4 Punkten

$(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), (x_3, f(x_3)), (x_4, f(x_4))$ , berechnet werden, genau dann, wenn das folgende Gleichungssystem eine eindeutige Lösung hat:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= a_3 x_1^3 + a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0 \\ f(x_2) &= a_3 x_2^3 + a_2 x_2^2 + a_1 x_2 + a_0 \\ f(x_3) &= a_3 x_3^3 + a_2 x_3^2 + a_1 x_3 + a_0 \\ f(x_4) &= a_3 x_4^3 + a_2 x_4^2 + a_1 x_4 + a_0 \end{aligned}$$

**Algorithmus 61.** Näherungsverfahren für Nullstellenberechnung: Sei  $[a, b]$  ein Intervall, indem genau eine Nullstelle der in  $]a, b[$  stetigen Funktion  $f$  vorkommt. Wir setzen  $a := \frac{a+b}{2}$  genau dann, wenn  $f(\frac{a+b}{2})f(b) < 0$ , sonst  $b := \frac{a+b}{2}$  und wiederholen das Verfahren, bis  $f(a)$  oder  $f(b) < k > 0$  ( $k$  ist die gewünschte Genauigkeit).

## Weitere elementare reelle Funktionen

**Definition 62.**  $f$  ist eine rationale Funktion genau dann, wenn es zwei Polynomfunktionen  $g$  und  $h$  gibt, so dass

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{x \mid h(x) = 0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &:= \frac{g(x)}{h(x)}. \end{aligned}$$

**Definition 63.**  $y = \sqrt[n]{x} =: x^{\frac{1}{n}}$  genau dann, wenn  $y^n = x$  für  $x \in \mathbb{R}^+$ ;  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

**Definition 64.**  $f$  ist eine Wurzelfunktion genau dann, wenn für  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &:= x^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

**Satz 65.** Ist  $f$  ein Polynom der Form

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= x^n \end{aligned}$$

mit  $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ , ist die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  von  $f$  eine Wurzelfunktion und zwar gilt  $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$  (gilt gemäss Definition)

**Definition 66.** Die Verkettung von  $f$  mit  $g$  ist für zwei Abbildungen mit

$$\begin{aligned} g : A &\rightarrow B \\ f : \text{Bild}(g) &\rightarrow C \end{aligned}$$

definiert durch

$$\begin{aligned} h : A &\rightarrow C \\ h(x) &= f(g(x)) \end{aligned}$$

**Satz 67.**  $f^{-1}(f(x)) = x = f(f^{-1}(x))$ .

**Definition 68.** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine reelle Funktion und das offene Intervall  $I \subset D \subset \mathbb{R}$

- $f$  wächst in  $I$  strikt monoton genau dann, wenn für alle  $x, y \in I$  mit  $x > y$  gilt:  $f(x) > f(y)$ .
- $f$  wächst im offenen Intervall  $I$  monoton genau dann, wenn für alle  $x, y \in I$  mit  $x > y$  gilt:  $f(x) \geq f(y)$ .
- $f$  fällt im offenen Intervall  $I$  strikt monoton genau dann, wenn für alle  $x, y \in I$  mit  $x > y$  gilt:  $f(x) < f(y)$ .
- $f$  fällt im offenen Intervall  $I$  monoton genau dann, wenn für alle  $x, y \in I$  mit  $x > y$  gilt:  $f(x) \leq f(y)$ .
- Ist  $f$  in  $I$  (strikt) monoton wachsend ist oder in  $I$  (strikt) monoton fallend, nennen wir  $f$  „(strikt) monoton“.

**Definition 69.**  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , mit offenem Intervall  $I \subset D \subset \mathbb{R}$ . Dann ist  $f$  konkav in  $I$  genau dann, wenn für alle  $x, y \in I$  mit  $y > x$  und die Gerade  $g$  durch  $(x, f(x))$  und  $(y, f(y))$  gilt.  $g(z) > f(z)$  für  $z \in ]x, y[$ .

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , mit offenem Intervall  $I \subset D \subset \mathbb{R}$ . Dann ist  $f$  konvex in  $I$  genau dann, wenn für alle  $x, y \in I$  mit  $y > x$  und die Gerade  $g$  durch  $(x, f(x))$  und  $(y, f(y))$  gilt.  $g(z) < f(z)$  für  $z \in ]x, y[$ .

**Definition 70.**  $f$  ist eine Exponentialfunktion zur Basis  $a$ ,  $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ , genau dann, wenn

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &:= a^x \end{aligned}$$

**Bemerkung 71.** Wir nennen  $x$  in  $2^x$  den „Exponenten“ und 2 die „Basis“

**Satz 72.**

$$e \approx 2.71828182845905$$

**Definition 73.**

$$\exp(x) := e^x$$

**Satz 74.** Für Exponentialfunktionen  $f$  und  $a, b > 0$  gilt:

- $f(0) = 1$ , denn  $f(0) = a^0 = 1$ .
- $\text{Bild}(f) = ]0, \infty[$ , denn positive Zahlen hoch irgend eine Zahl sind positiv.
- Ist  $a > 1$ , dann ist  $f$  strikt monoton wachsend, denn mit  $a > 1$  ist  $a^x > a^y$  für  $x > y$ .
- Ist  $0 < a < 1$ , dann ist  $f$  strikt monoton fallend, denn mit  $0 < a < 1$  ist  $a^x < a^y$  für  $x > y$ .
- $f$  ist konvex.
- $a^x a^y = a^{x+y}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $a^x b^x = (ab)^x$
- $1^x = 1$  ( $\implies 1^0 = 1$ )
- Für eine Basis  $a := \frac{1}{b}$  mit  $b > 1$  gilt:  $a^x = \left(\frac{1}{b}\right)^x = \frac{1}{b^x} = b^{-x}$ .

**Satz 75.** Ein Kapital mit Zinseszins nach der Zeit  $t \in \mathbb{N}$  ist gegeben durch die Funktion

$$K : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$K(t) = K_0(1+i)^t$$

Innerhalb der Jahre ergibt sich durch die Formel eine gute Näherung an die übliche proportionale Berechnung.

**Definition 76.** Für die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion zur Basis  $a$  schreibt man:

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\log_a(y) = x : \iff y = a^x.$$

Man nennt solche Funktionen „Logarithmusfunktionen“

**Satz 77.** Für Logarithmusfunktionen  $\log_a$  mit  $a > 0$  gilt:

- Die Nullstellen der Funktionen sind 1, denn  $\log_a y = 0$  genau dann, wenn  $y = a^0 = 1$ .
- Logarithmusfunktionen sind strikt monoton wachsend für  $a > 1$ .
- Logarithmusfunktionen sind konkav für  $a > 1$ .
- Ist  $a > 1$ , so gilt für  $x > 1$  die Ungleichung  $\log_a x > 0$  und für  $0 < x < 1$  die Ungleichung  $\log_a x < 0$ .
- Logarithmusfunktionen sind strikt monoton fallend für  $0 < a < 1$ .
- Ist  $0 < a < 1$ , so gilt für  $x > 1$  die Ungleichung  $\log_a x < 0$  und für  $0 < x < 1$  die Ungleichung  $\log_a x > 0$ .
- Logarithmusfunktionen sind konvex für  $0 < a < 1$ .
- $\log_a a^x = x$

- $a^{\log_a x} = x$
- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a x^y = y \log_a x$
- $\log_a a = 1 \quad (\ln e = 1).$
- Ist  $f(x) = g(x)$  genau dann gilt  $\log_a f(x) = \log_a g(x)$
- $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

## Grenzwerte reeller Funktionen

**Definition 78.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$  genau dann, wenn für alle  $k > 0$  gilt, es gibt ein  $x'$ , so dass für alle  $x$  gilt: wenn  $x > x'$ , dann  $|f(x) - a| < k$   
 ( $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine reelle Funktion;  $D$  ist unbeschränkt;  $x, x' \in D; a \in \mathbb{R}$ ).

**Satz 79.** Wenn  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \in \mathbb{R}$ , dann

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow \infty} g(x),$$

**Satz 80.** Wenn  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x), a \in \mathbb{R}$ , dann

$$a \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (af(x))$$

**Satz 81.** Wenn  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \in \mathbb{R}$ , dann

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$$

**Satz 82.** Wenn  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \in \mathbb{R}$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \neq 0$ , dann

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)}$$

**Satz 83.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x^n} = 0$  ( $n > 0, a \in \mathbb{R}$ ).

**Satz 84.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} a = a$  für  $a \in \mathbb{R}$

**Satz 85.** Für  $a \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{für } a > 1 \\ 1 & \text{für } a = 1 \\ 0 & \text{für } 0 < a < 1 \end{cases}$

**Satz 86.** Für  $a \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow \infty} a^{-x} = \begin{cases} 0 & \text{für } a > 1 \\ 1 & \text{für } a = 1 \\ \infty & \text{für } 0 < a < 1 \end{cases}$

**Satz 87.** Wenn  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ , dann  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x)} = 0$

**Definition 88.**  $e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \approx 2.718228182846$

**Satz 89.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$

**Satz 90.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \infty \quad (n > 0)$ .

**Satz 91.** Für  $a \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty \quad (a > 1)$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = -\infty \quad (0 < a < 1)$

**Satz 92.** Wenn  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  und  $a \in \mathbb{R} :$ , dann  $\lim_{x \rightarrow \infty} (af(x)) = \begin{cases} \infty & \text{für } a > 0 \\ -\infty & \text{für } a < 0 \end{cases}$

**Satz 93.** Wenn  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$  und  $a \in \mathbb{R}$ , dann  $\lim_{x \rightarrow \infty} (af(x)) = \begin{cases} \infty & \text{für } a < 0 \\ -\infty & \text{für } a > 0 \end{cases}$

**Satz 94.** Wenn  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  und  $a \in \mathbb{R}$ , dann  $\lim_{x \rightarrow \infty} (a + f(x)) = \infty$

**Satz 95.** Wenn  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$  und  $a \in \mathbb{R}$ , dann  $\lim_{x \rightarrow \infty} (a + f(x)) = -\infty$ ,

**Satz 96.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)^n) = \left( \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \right)^n \quad (n \in \mathbb{N})$ ,

**Satz 97.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{g(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)} \quad (\text{für } g(x) \geq 0)$

**Satz 98.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)}$ ,

**Satz 99.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(f(x)) = \ln(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)) \quad (\text{für } f(x) > 0)$ ,

**Satz 100.** Wenn  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$  dann  $\lim_{x \rightarrow \infty} a^{g(x)} = 0. \quad (a > 1, a \in \mathbb{R})$

**Definition 101.**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$  genau dann, wenn es für jedes  $k > 0$  ein  $x'$  gibt, so dass für alle  $x$  gilt: wenn  $x < x'$ , dann  $|f(x) - a| < k$ .  
( $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine reelle Funktion;  $D$  ist nach unten unbeschränkt;  $x, x' \in D; a \in \mathbb{R}$ ).

**Satz 102.**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{für } a > 1 \\ 1 & \text{für } a = 1 \\ \infty & \text{für } 0 < a < 1 \end{cases}$

**Satz 103.**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^{-x} = \begin{cases} \infty & \text{für } a > 1 \\ 1 & \text{für } a = 1 \\ 0 & \text{für } 0 < a < 1 \end{cases}$

**Satz 104.**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} -\infty & \text{für } n \text{ ungerade} \\ \infty & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$

**Definition 105.**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$  genau dann, wenn es für jedes  $k > 0$  ein  $x'$  gibt, so dass für alle  $x < x'$  gilt:  $f(x) > k$ .  
( $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine reelle Funktion;  $x, x' \in D$ ).

**Definition 106.**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  genau dann, wenn es für jedes  $k < 0$  ein  $x'$  gibt, so dass für alle  $x < x'$  gilt:  $f(x) < k$ .  
( $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine reelle Funktion;  $x, x' \in D$ ).

**Definition 107.** Unter Umgebung eines Punktes  $x_0$  verstehen wir ein Intervall  $]x_0 - k; x_0 + k[$  mit  $k > 0$ .

**Definition 108.**  $x_0 \in \mathbb{R}$  ist ein Häufungspunkt einer Menge  $D \subset \mathbb{R}$  genau dann, wenn es in jeder Umgebung von  $x_0$  ein  $x \in D$  gibt.

**Definition 6:**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  genau dann, wenn es für jedes  $k > 0$  ein  $r > 0$  gibt, so dass:  
wenn  $|x_0 - x| < r$ , dann  $|f(x) - a| < k$   
( $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine reelle Funktion;  $x, x' \in D$ ;  $a \in \mathbb{R}$ ,  $x_0$  ist ein Häufungspunkt von  $D$ ,  $k, r > 0$ ,  $k, r \in \mathbb{R}$ ).

**Satz 109.**  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  für  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \in \mathbb{R}$

**Satz 110.**  $\lim_{x \rightarrow x_0} (bf(x)) = b \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  für  $b, \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R}$

**Satz 111.**  $\lim_{x \rightarrow x_0} a = a$  (für  $a \in \mathbb{R}$ )

**Satz 112.**  $\lim_{x \rightarrow x_0} fg(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  für  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \in \mathbb{R}$

**Satz 113.**  $\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$  für  $x, x_0 \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}^*$

**Satz 114.**  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$  für  $g(x) \neq 0$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \in \mathbb{R}$ .

**Satz 115.**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  gilt für Exponentialfunktionen auf  $\mathbb{R}$ , für rationale Funktionen in ihrem Definitionsbereich sowie für Wurzel- und Logarithmusfunktionen auf  $]0, \infty[$ .

**Satz 116.** Wenn  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  und  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ , dann  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = b$ , für  $a, b \in \mathbb{R}$  (Kettenregel)

**Satz 117.**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h)$

**Definition 118.**  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$  genau dann, wenn es für jedes  $k > 0$  ein  $r > 0$  gibt, so dass:

wenn  $0 < x - x_0 < r$ , dann  $|f(x) - a| < k$ .  
( $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine reelle Funktion;  $x, x' \in D$ ;  $a \in \mathbb{R}$ ;  $x_0$  ist ein Häufungspunkt von  $D$ ).

**Definition 119.**  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a$  genau dann, wenn es für jedes  $k > 0$  ein  $r > 0$  gibt, so dass:

wenn  $0 < x_0 - x < r$ , dann  $|f(x) - a| < k$ .  
( $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine reelle Funktion;  $x, x' \in D$ ;  $a \in \mathbb{R}$ ;  $x_0$  ist ein Häufungspunkt von  $D$ ).

**Definition 120.** Für  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine reelle Funktion;  $x, x' \in D$ ,  $x_0$  ist ein Häufungspunkt von  $D$ :

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$  genau dann, wenn es für jedes  $k > 0$  ein  $r > 0$  gibt, so dass:

wenn  $0 < x - x_0 < r$ , dann  $f(x) > k$ .

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$  genau dann, wenn es für jedes  $k < 0$  ein  $r > 0$  gibt, so dass:

wenn  $0 < x - x_0 < r$ , dann  $f(x) < k$ .

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$  genau dann, wenn es für jedes  $k > 0$  ein  $r > 0$  gibt, so dass:

wenn  $0 < x_0 - x < r$ , dann  $f(x) > k$ .

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$  genau dann, wenn es für jedes  $k < 0$  ein  $r > 0$  gibt, so dass:

wenn  $0 < x_0 - x < r$ , dann  $f(x) < k$ .

**Satz 121.**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = \infty$

**Satz 122.**  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{für gerades } n \\ -\infty & \text{für ungerades } n \end{cases}$

**Satz 123.**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$  ( $a > 1$ )

**Satz 124.**  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  genau dann, wenn  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

**Satz 125.**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existiert genau dann, wenn  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

## Stetigkeit

**Definition 126.** • eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig in  $x_0 \in I \subset D$  genau dann, wenn  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  ( $D \subset \mathbb{R}$ ,  $I$  ist ein offenes Intervall)

- eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist in  $x_0 \in I \subset D$  rechtsstetig genau dann, wenn  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$
- eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist in  $x_0 \in I \subset D$  linksstetig genau dann, wenn  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$
- Eine Funktion  $f$  ist im offenen Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  stetig genau dann, wenn für alle  $x \in I$  gilt:  $f$  ist stetig in  $x$ .
- Eine Funktion  $f$  ist stetig, genau dann wenn sie in  $\mathbb{R}$  stetig ist.

**Satz 127.** •  $f(x) = x^n$  ist stetig in  $\mathbb{R}$

- Ist  $f(x)$  stetig im offenen Intervall  $I \subset \mathbb{R}$ , dann ist  $f(x)$  stetig im offenen Intervall  $J \subset I$ .
- Wenn  $f(x)$  stetig ist im offenen Intervall  $I \subset \mathbb{R}$ , dann ist  $f(x)^n$ ,  $a^{f(x)}$  stetig in  $I$  für  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .
- Wenn  $f(x)$  stetig ist im offenen Intervall  $I \subset \mathbb{R}$ , dann ist  $\log_a f(x)$  stetig in  $I \setminus \{x : f(x) \leq 0\}$  für  $a > 0$ .
- Wenn  $f(x)$  stetig ist im offenen Intervall  $I \subset \mathbb{R}$ , dann ist  $\sqrt[n]{f(x)}$  stetig in  $I \setminus \{x : f(x) \leq 0\}$  für  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- Die Summe im offenen Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  stetiger Funktionen ist stetig in  $I$ .
- Das Produkt im offenen Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  stetiger Funktionen ist stetig in  $I$ .
- Der Quotient  $\frac{f(x)}{g(x)}$  im offenen Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  stetiger Funktionen ist stetig in  $I \setminus \{x : g(x) = 0\}$

**Definition 128.**  $x$  ist eine Nullstelle einer Funktion  $f$  genau dann, wenn  $f(x) = 0$

**Satz 129.** (Nullstellensatz) (i) Für eine stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  gelte:  $f(a) < 0$  und  $f(b) > 0$ . Dann gibt es mindestens eine Nullstelle zwischen  $a$  und  $b$ .  
(ii) Für eine stetige Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $a, b \in I \subset \mathbb{R}$  gelte:  $f(a) > 0$  und  $f(b) < 0$ . Dann gibt es mindestens eine Nullstelle zwischen  $a$  und  $b$ .

**Satz 130.** (Nullstellen strikt monotoner Funktionen) (i) Für eine stetige Funktion  $f$  gelte:  $f(x_1) < 0$  und  $f(x_2) > 0$  und  $f$  ist im Intervall  $[x_1, x_2]$  strikt monoton steigend, dann gibt es genau eine Nullstelle zwischen  $x_1$  und  $x_2$ .  
(ii) Für eine stetige Funktion  $f$  gelte:  $f(x_1) > 0$  und  $f(x_2) < 0$  und  $f$  ist im Intervall  $[x_1, x_2]$  strikt monoton sinkend, dann gibt es genau eine Nullstelle zwischen  $x_1$  und  $x_2$ .

**Satz 131.** (Zwischenwertsatz) (i) Ist die Funktion  $f$  im Intervall  $\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$  stetig, dann gilt für alle  $x_1 < x_2$  ( $x_1, x_2 \in I$ ) mit  $f(x_1) < f(x_2)$ : es gibt für jedes  $y$  mit  $f(x_1) < y < f(x_2)$  mindestens ein  $x_3 \in [x_1, x_2]$ , so dass  $f(x_3) = y$ .  
(ii) Ist die Funktion  $f$  im Intervall  $\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$  stetig, dann gilt für alle  $x_1 < x_2$  ( $x_1, x_2 \in I$ ) mit  $f(x_1) > f(x_2)$ : es gibt für jedes  $y$  mit  $f(x_1) > y > f(x_2)$  mindestens ein  $x_3 \in [x_1, x_2]$ , so dass  $f(x_3) = y$ .

**Satz 132.** Sei  $f$  in  $I$  stetig und sei  $c \in I$  und  $f(c) > 0$ . Dann gibt es eine Umgebung  $U$  von  $f(c)$ , so dass  $f(x) > 0$  für  $x \in U$ .

**Satz 133.** Polynom  $n$ -ten Grades haben höchstens  $n$  reelle Nullstellen (Fundamentalsatz der Algebra: Jedes Polynom  $n$ -ten Grades hat genau  $n$  Nullstellen in der Menge der komplexen Zahlen).

## Steigung von Funktionen - Ableitungen

**Definition 134.** Sei  $f$  in  $x_0$  stetig und  $m$  die Steigung der Funktion  $f$  in  $x_0$ :

$$m(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

**Satz 135.** Wenn  $f(x) = x^n$ , dann  $f'(x) = nx^{n-1}$ .

**Satz 136.** Wenn  $h(x) = f(x) + g(x)$ , dann  $h'(x) = f'(x) + g'(x)$  (sofern  $f'(x)$  und  $g'(x) \in \mathbb{R}$ ).

**Satz 137.** Wenn  $f(x) = a$ , dann  $f'(x) = 0$ . ( $a$  ist eine reelle Zahl).

**Satz 138.** Wenn  $h(x) = af(x)$ , dann  $h'(x) = af'(x)$  (wenn  $a$  und  $f'(x) \in \mathbb{R}$ ).

**Satz 139.** • Sei  $f$  in  $]a, b[$  stetig und differenzierbar: Wenn  $f'(x) > 0$  für alle  $x \in ]a, b[$ , so ist  $f$  in  $]a, b[$  strikt monoton steigend

- Sei  $f$  in  $]a, b[$  stetig und differenzierbar: wenn  $f'(x) < 0$  für alle  $x \in ]a, b[$ , dann ist  $f$  in  $]a, b[$  strikt monoton sinkend.

**Definition 140.** • In  $x_0$  liegt ein (striktes) lokales Minimum genau dann, wenn es eine Umgebung  $U$  von  $x_0$  gibt, so dass für alle  $x \in U$  mit  $x \neq x_0$  gilt:  $f(x) > f(x_0)$

- In  $x_0$  liegt ein (striktes) lokales Maximum genau dann, wenn es eine Umgebung  $U$  von  $x_0$  gibt, so dass für alle  $x \in U$  mit  $x \neq x_0$  gilt:  $f(x) < f(x_0)$
- In  $x_0$  liegt ein (striktes) lokales Extremum genau dann, wenn in  $x_0$  ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum vorliegt.

**Satz 141.** Sei  $f$  im offenen Intervall  $I$  zweimal differenzierbar.

- Eine Funktion  $f$  ist im offenen Intervall  $I$  strikt konkav genau dann, wenn  $f'(x)$  strikt monoton sinkend in  $I$  ist.
- Eine Funktion  $f$  ist im offenen Intervall  $I$  strikt konvex genau dann, wenn  $f'(x)$  strikt monoton steigend in  $I$  ist..

**Satz 142.** Sei  $f$  zweimal differenzierbar und  $U$  eine Umgebung von  $x_0$ . Gilt

|                              |
|------------------------------|
| $f'(x_0) = 0$                |
| $f''(x) < 0$ für $x \in U$ , |

dann liegt in  $x_0$  ein Maximum vor.

**Satz 143.** Sei  $f$  zweimal differenzierbar und sei  $U$  eine Umgebung von  $x_0$ . Gilt

|                              |
|------------------------------|
| $f'(x_0) = 0$                |
| $f''(x) > 0$ für $x \in U$ , |

dann liegt in  $x_0$  ein Minimum vor.

**Satz 144.** Sei  $f \neq a$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) auf das geschlossenen Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  definiert und stetig, so nimmt die Funktion in  $I$  ihr absolutes Maximum und Minimum an.

**Satz 145.** Es gilt:

|    |                                 | $f(x)$                            | $f'(x)$                                                                                                                       |
|----|---------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1  | Polynome                        | $x^n$                             | $nx^{n-1}$                                                                                                                    |
| 2  | Konstante                       | $a$                               | 0                                                                                                                             |
| 3  | Produkt Konstante - Funktion    | $af(x)$                           | $af'(x)$                                                                                                                      |
| 4  | Summe von Funktionen            | $f(x) + g(x)$                     | $f'(x) + g'(x)$                                                                                                               |
| 5  | Produkt zweier Funktionen       | $f(x) \cdot g(x)$                 | $(f'(x) \cdot g(x)) + (f(x) \cdot g'(x))$                                                                                     |
| 6  | Quotient zweier Funktionen      | $\frac{f(x)}{g(x)}$               | $\frac{(f'(x) \cdot g(x)) - (f(x) \cdot g'(x))}{[g(x)]^2}$                                                                    |
| 7  | Kettenregel                     | $g(h(x))$                         | $g'(h(x)) \cdot h'(x)$                                                                                                        |
| 8  | Logarithmusfunktion (Basis e)   | $\ln x$                           | $\frac{1}{x}$                                                                                                                 |
| 9  | Logarithmusfunktion (Basis a)   | $\log_a x$                        | $\frac{1}{x \ln a}$                                                                                                           |
| 10 | Logarithmusfunktion von $g(x)$  | $\log_a g(x)$                     | $\frac{g'(x)}{g(x) \cdot \ln a}$                                                                                              |
| 11 | Exponentialfunktion (Basis e)   | $e^x$                             | $e^x$                                                                                                                         |
| 12 | Exponentialfunktion (Basis a)   | $a^x$                             | $a^x \ln a$                                                                                                                   |
| 12 | Exponentialfunktion ( $g > 0$ ) | $g(x)^{h(x)}$                     | $g(x)^{h(x)} \cdot \left[ h'(x) \cdot \ln g(x) + h(x) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)} \right]$                                       |
| 13 | Wurzelfunktionen                | $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ | $\frac{m}{n} x^{\left(\frac{m}{n}-1\right)} = \frac{m}{n} x^{\left(\frac{m-n}{n}\right)}; m \in \mathbb{N}; n \in \mathbb{N}$ |
| 14 | Verallgemeinerung von 14        | $x^s$                             | $sx^{s-1}; s \in \mathbb{R}$                                                                                                  |

**Satz 146.** • Sei  $f \neq a$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) auf das geschlossenen Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  definiert und stetig, so nimmt die Funktion in  $I$  ihr absolutes Maximum und Minimum an

- Ist die Funktion  $f$  im geschlossenen Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  stetig und ist sie dort strikt monoton steigend, so nimmt die Funktion  $f$  an der rechten Intervallgrenze ihr absolutes Maximum an und an der linken Intervallgrenze ihr absolutes Minimum.
- Ist die Funktion  $f$  in  $I$  strikt monoton sinkend, so nimmt die Funktion an der rechten Intervallgrenze ihr absolutes Minimum an und an der linken Intervallgrenze ihr absolutes Maximum.

## Ökonomische Anwendungen der Differentialrechnung

**Definition 147.** • Sei eine Kostenfunktion  $K = K_v + K_f$  gegeben ( $K$  drückt Kosten als Funktion der produzierten Menge aus;  $K_v$  Funktion der variablen Kosten,  $K_f$  Funktion der fixen Kosten):

Grenzkostenfunktion:  $K'(x) = \frac{d}{dx}(K(x))$

Stückkostenfunktion:  $k(x) = \frac{K(x)}{x}$

Man beachte:  $K'(x) = K'_v(x)$

Grenzstückkosten:  $k'(x) = \frac{d}{dx}k(x)$

- Preisnachfragefunktion:  $p(x)$
- Grenzerlös für die Erlösfunktion  $E(x) = x \cdot p(x)$  ( $E$  drückt Erlös als Funktion der abgesetzten Menge aus):  $E'(x) = \frac{d}{dx}E(x)$   
Bei konstantem Preis gilt:  $E'(x) = p$
- Grenzproduktivität (= Grenzoutput = Grenzertrag;  $x(r)$  = Produktionsfunktion, drückt produzierte Menge als Funktion des Inputs aus):  $x'(r) = \frac{d}{dr}x(r)$   
Durchschnittsoutput, Durchschnittsertrag oder durchschnittliche Produktivität:  $\bar{x}(r) = \frac{x(r)}{r}$   
Grenz-Durchschnittsoutput:  $\bar{x}'(r) = \frac{d}{dr} \frac{x(r)}{r}$
- Grenzgewinn ( $G$  = Gewinnfunktion, drückt Gewinn als Funktion der abgesetzten Menge aus):  $G'(x) = \frac{d}{dx}G(x)$ .

Stückgewinnfunktion:  $g(x) = \frac{G(x)}{x}$

Grenzstückgewinn:  $g'(x) = \frac{d}{dx} \frac{G(x)}{x}$

- Deckungsbeitragsfunktion:  $G_D(x) = E(x) - K_v(x)$

Grenzdeckungsbeitrag:  $G'_D(x) = \frac{d}{dx} (E(x) - K_v(x)) = E'(x) - K'_v(x) = E'(x) - K'(x)$

Stückdeckungsbeitragsfunktion:  $g_D(x) = \frac{G_D(x)}{x}$

Grenzstückdeckungsbeitrag:  $g'_D(x) = \frac{d}{dx} \frac{G_D(x)}{x}$

- Marginale Konsumquote (= Grenzhang, Grenzneigung zum Konsum):  $\frac{dC}{dY}$  ( $C$  ist Konsumfunktion, welche den Preis des Konsums als Funktion des Einkommens  $Y$  ausdrückt).

Marginale Sparquote (Grenzhang, Grenzneigung zum Sparen):  $\frac{dS}{dY}$  ( $S$  ist die Sparfunktion, welche die gesparte Summe als Funktion des Einkommens  $Y$  ausdrückt).

Es gilt:  $Y = C(Y) + S(Y)$ . Damit gilt:  $\frac{d}{dY} Y = 1 = \frac{d}{dY} C + \frac{d}{dY} S$

Damit ist dann  $C'(Y) \leq 1$  und  $S'(Y) \leq 1$

**Definition 148.** Eine Nutzenfunktion  $U : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  ist neoklassisch genau dann, wenn

$$U'(x) > 0$$

$$U''(x) < 0$$

**Definition 149.** Eine Kostenfunktion  $K : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  heisst „ertragsgesetzlich“ genau dann, wenn  $K'(x) > 0$  in  $\mathbb{R}^+$  und es gibt in  $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  einen konkav-konvex-Wendpunkt

**Satz 150.** Sei eine Kostenfunktion  $K : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  gegeben. Dann ist  $K$  ertragsgesetzlich genau dann, wenn  $a > 0, b < 0, c > 0, d \geq 0, b^2 < 3ac$

**Definition 151.** Eine Produktionsfunktion  $x : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  heisst „ertragsgesetzlich“ genau dann, wenn (i)  $x(0) = 0$ . (ii) es gibt ein Intervall  $[0, a[$ , so dass  $x'$  in diesem steigend und konvex ist (positive, wachsende Grenzerträge). Es gibt ein Intervall  $]a, b]$  mit  $x$  ist maximal in  $b$  so dass  $x$  in diesem Intervall steigend und konkav ist (positive, aber abnehmende Grenzerträge). Es gibt ein Intervall  $]b, c]$ , so dass  $x$  dort sinkend und konkav ist (negative, abnehmende Grenzerträge) und  $x(c) = 0$ .

**Satz 152.** Sei  $x : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  eine Produktionsfunktion der Form  $x(r) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . Dann ist  $x$  genau dann „ertragsgesetzlich“, wenn  $a < 0, b > 0, c > 0$  und  $d = 0$

## Folgen und Reihen

**Definition 153.** Eine Folge ist eine Abbildung  $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ . Eine endliche Folge ist eine Abbildung  $\mathbb{N}_n^* \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definition 154.**  $(a_n)$  ist eine arithmetische Folge genau dann, wenn

$$a_1 \in \mathbb{R}$$

$$a_{n+1} = a_n + b$$

mit  $b \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Satz 155.** Für arithmetische Folgen gilt:

$$a_n = a_1 + (n-1)b \text{ für } n > 1.$$

**Satz 156.** Für eine arithmetische Folge mit  $a_1, a_{n+1} = a_n + b$  gilt:

$$\sum_{i=1}^n a_i = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

**Satz 157.** Für eine arithmetische Folge  $(a_n)$  mit  $a_1, a_{n+1} = a_n + b$  gilt: Ist  $b > 0$ , dann ist  $(a_n)$  strikt monoton wachsend, ist  $b < 0$ , dann ist  $(a_n)$  strikt monoton fallend.

**Definition 158.** Die Folge  $(a_n)$  ist geometrisch genau dann, wenn

$$\begin{aligned} a_1 &\in \mathbb{R} \\ a_{n+1} &= a_n q \end{aligned}$$

mit  $n \in \mathbb{N}^*, q \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0, 1\}$ .

**Satz 159.** Ist  $(a_n)$  eine geometrische Folge mit  $a_1$  und  $a_{n+1} = a_n q$ , dann gilt

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

mit  $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ .

**Satz 160.** Ist  $(a_n)$  eine geometrische Folge mit  $a_1, a_{n+1} = a_n q$ , dann gilt

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_1 q^i = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

**Satz 161.** Sei  $(a_n)$  eine geometrische Folge mit  $a_1$  und  $a_n = q a_{n-1}$ , dann gilt:

Wenn  $a_1 > 0$  und  $q > 1$ , dann ist  $(a_n)$  strikt monoton wachsend.

Wenn  $a_1 > 0$  und  $0 < q < 1$ , dann ist  $(a_n)$  strikt monoton sinkend.

Wenn  $a_1 < 0$  und  $q > 1$ , dann ist  $(a_n)$  strikt monoton sinkend.

Wenn  $a_1 < 0$  und  $0 < q < 1$ , dann ist  $(a_n)$  strikt monoton wachsend.

Wenn  $a_1 = 0$  oder  $q = 1$ , dann ist  $(a_n)$  konstant.

**Satz 162.** Der Endwert  $K_n$  einer jährlichen Ein- oder Auszahlung am Schluss des Jahres (nachschüssig) eines fixen Betrages  $R$  (Rente) beträgt

$$K_n = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

vorschüssig:

$$K_n = (1+i) R \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

**Satz 163.** Sei  $K_n$  ein Kapital, dass in  $n$  Jahren fällig wird. Dann ist der Barwert  $B_n$  dieses Kapitals definiert als

$$B_n = \frac{K_n}{(1+i)^n}.$$

$i$  wird Abzinsungssatz oder Diskontierungssatz genannt.

**Satz 164.** Der Barwert  $B_n$  einer nachschüssigen Rente  $R$  beträgt beim Zinssatz  $i$  und der Laufzeit  $n$

$$B_n = R \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

vorschüssig:

$$= R \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^{n-1}}$$

**Satz 165.** Die Annuität beträgt (nachschüssig,  $S$  Schuld;  $n$  = Anzahl Jahre;  $i$  = Zinsfuß).

$$A = \frac{S(1+i)^n i}{(1+i)^n - 1}$$

Die Restschuld im  $k$ -ten Jahr beträgt

$$R_k = S(1+i)^{k-1}$$

**Definition 166.** Eine Folge  $(s_n)$ , die aus der Summe der jeweils ersten  $n$  Glieder einer Folge  $(a_n)$  besteht, heisst Reihe.

**Definition 167.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \infty$$

genau dann, wenn für alle  $k > 0$  gilt:

$$|\{a_i \mid a_i < k\}| < \infty.$$

**Satz 168.** Sei  $(a_n)$  eine arithmetische Folge mit  $a_1$  und  $a_{n+1} = a_n + b$  mit  $b > 0$ . Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \infty.$$

**Definition 169.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = -\infty$$

genau dann, wenn für alle  $k < 0$  gilt:

$$|\{a_i \mid a_i > k\}| < \infty.$$

**Satz 170.** Sei  $(a_n)$  eine arithmetische Folge mit  $a_1$  und  $a_{n+1} = a_n + b$  mit  $b < 0$ . Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = -\infty.$$

**Definition 171.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = c \in \mathbb{R}$$

genau dann, wenn für alle  $k > 0$  gilt:

$$|\{a_i \mid a_i \notin ]c - k, c + k[ \}| < \infty$$

**Satz 172.** Für eine geometrische Folge  $(a_n)$  mit  $a_1 = 1$  und  $a_n = a_{n-1}q$  sowie  $0 < q < 1$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 0$$

**Satz 173.** Sei  $(a_n)$  eine konstante Folge. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = a.$$

**Satz 174.** Ist  $a \in \mathbb{R}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = c \in \mathbb{R}$ , dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (aa_n) = a \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = ac$$

**Satz 175.** Ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = c \in \mathbb{R}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = d \in \mathbb{R}$  dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = c + d.$$

**Satz 176.** Ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = c \in \mathbb{R}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  sowie  $b_n \neq 0$  für  $n \in \mathbb{N}^*$ , dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)} = \frac{c}{d}.$$

**Satz 177.** Der Barwert einer unendlichen Rente ist  $\frac{R}{i}$  ( $i$  Zinssatz;  $R$  Rente).

**Satz 178.**

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n &= e \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{nm} &= e^m \\ \lim_{m \rightarrow \infty} K_0 \left( 1 + \frac{i}{m} \right)^{nm} &= K_0 e^{i \cdot n} \end{aligned}$$

## Ableitungen im dreidimensionalen Raum

**Satz 179.** Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig ableitbar. Dann liegt ein Maximum vor, wenn für alle von  $(0, 0)$  verschiedenen Punkte  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  und die Matrix  $H_0 = \begin{pmatrix} h_{11}^0 & h_{12}^0 \\ h_{21}^0 & h_{22}^0 \end{pmatrix}$  gilt

$$x(xh_{11}^0 + yh_{12}^0) + y(xh_{21}^0 + yh_{22}^0) < 0.$$

Ein Minimum liegt vor, wenn gilt

$$x(xh_{11}^0 + yh_{12}^0) + y(xh_{21}^0 + yh_{22}^0) > 0$$

für alle für alle von  $(0, 0)$  verschiedenen  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Kein Extrempunkt liegt vor, wenn für manche  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$x(xh_{11}^0 + yh_{12}^0) + y(xh_{21}^0 + yh_{22}^0) > 0$$

und für manche

$$x(xh_{11}^0 + yh_{12}^0) + y(xh_{21}^0 + yh_{22}^0) < 0$$

**Satz 180.** (i) Wenn  $h_{11}^0 > 0$ , dann ist  $h_{11}^0 \left( x + \frac{h_{12}^0 y}{h_{11}^0} \right)^2 + \frac{h_{11}^0 h_{22}^0 - (h_{12}^0)^2}{h_{11}^0} y^2 > 0$  genau dann, wenn  $h_{11}^0 h_{22}^0 > (h_{12}^0)^2$ . Damit liegt in diesem Fall ein Minimum vor. (Begründung: Wenn  $h_{11}^0 > 0$  ist  $h_{11}^0 \left( x + \frac{h_{12}^0 y}{h_{11}^0} \right)^2 > 0$ . Zudem ist in  $\frac{h_{11}^0 h_{22}^0 - (h_{12}^0)^2}{h_{11}^0} y^2 > 0$  genau dann, wenn  $h_{11}^0 h_{22}^0 - (h_{12}^0)^2 > 0$  -  $h_{11}^0$  ist ja positiv).

(ii) Wenn  $h_{11}^0 < 0$ , dann ist  $h_{11}^0 \left( x + \frac{h_{12}^0 y}{h_{11}^0} \right)^2 + \frac{h_{11}^0 h_{22}^0 - (h_{12}^0)^2}{h_{11}^0} y^2$  genau dann, wenn  $h_{11}^0 h_{22}^0 > (h_{12}^0)^2$ . Damit liegt in diesem Fall ein Maximum vor (Da  $h_{11}^0$  negativ ist, muss der Zähler in  $\frac{h_{11}^0 h_{22}^0 - (h_{12}^0)^2}{h_{11}^0}$  positiv sein, damit der Ausdruck  $\frac{h_{11}^0 h_{22}^0 - (h_{12}^0)^2}{h_{11}^0} y^2$  negativ ist).

## Integrale

**Definition 181.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $C \in \mathbb{R}$ :  $F + C$  ist in  $I$  eine Stammfunktion von  $f$  genau dann wenn in  $I$  gilt:

$$\frac{d}{dx} (F(x) + C) = f(x)$$

| $f(x)$                                         | $\int f(x)dx = F(x) + C$                                    | Anwendungsbedingungen und Bemerkungen                                                                                                                                              |
|------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 0                                              | $C$                                                         | $C \in \mathbb{R}$ ( $C$ = eine reelle Konstante)                                                                                                                                  |
| $x^n$                                          | $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$                                   | $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$                                                                                                                                                |
| $(ax+b)^n$                                     | $\frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$            | wenn $n \in \mathbb{N} : x, a, b \in \mathbb{R}$<br>wenn $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} : x \neq 0, ax+b \neq 0$<br>wenn $n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} : x > 0, ax+b > 0$ |
| $\frac{1}{x}$                                  | $\ln x + C$<br>$\ln(-x) + C$                                | $x > 0$<br>$x < 0$                                                                                                                                                                 |
| $\frac{1}{\frac{ax+b}{1}}$<br>$\frac{1}{ax+b}$ | $\frac{1}{a} \ln(ax+b) + C$<br>$\frac{1}{a} \ln(-ax-b) + C$ | $ax+b > 0; a \neq 0$<br>$ax+b < 0; a \neq 0$                                                                                                                                       |
| $e^x$                                          | $e^x + C$                                                   | $x \in \mathbb{R}$                                                                                                                                                                 |
| $e^{ax+b}$                                     | $\frac{1}{a} e^{ax+b} + C$                                  | $a \neq 0$                                                                                                                                                                         |
| $a^x \ln a$                                    | $a^x + C$                                                   | $x \in \mathbb{R}; a \neq 0$                                                                                                                                                       |
| $\frac{1}{a^x}$                                | $-\frac{1}{a^x \ln a}$                                      | $a > 0$                                                                                                                                                                            |

Tabelle 1: Stammfunktionen einiger reeller Funktionen

Für Stammfunktionen schreiben wir auch:

$$\int f(x)dx := F(x) + C,$$

**Satz 182.** Es gelten folgende Zusammenhänge:

|                                                        |
|--------------------------------------------------------|
| $\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx$            |
| $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ |

**Definition 183.** (des bestimmten Integrals):

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) \right]$$

(für  $x \in [a, b]$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $f(x) \geq 0$ ,  $f$  stetig und beschränkt)

**Satz 184.**  $\int_c^c f(x)dx = 0$ ,  $c \in \mathbb{R}$

**Satz 185.**  $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$

**Satz 186.**  $\int_a^b c f(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$

**Satz 187.**  $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$

**Satz 188.** Mit

$$A_c(t) := \int_c^t f(x)dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{t-c}{n} \sum_{i=1}^n f\left(c + i \frac{t-c}{n}\right) \right] \quad (c \leq t \leq d).$$

gilt:

$$\frac{d}{dt}A_c(t) = \frac{d}{dt} \left( \int_c^t f(x)dx \right) = f(t).$$

(Manchmal 1. Hauptsatz der Integralrechnung genannt).

**Satz 189. (Hauptsatz der Integralrechnung)**

Wenn  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  mit  $f(x) \geq 0$ ,  $f$  stetig und beschränkt,  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

**Definition 190.**  $F(x)|_a^b := F(b) - F(a)$

**Satz 191. (Partielle Integration)** Sei  $I$  ein Intervall mit den Grenzen  $c, d \in \mathbb{R}$ , so dass  $c \neq d$ . Seien  $f$  und  $g$  differenzierbar auf  $I$  mit stetigen Ableitungen  $f'$  und  $g'$ . Dann gilt für alle  $a, b \in I$ :

$$\int_a^b g(x)f'(x)dx = G(x)f(x) \Big|_a^b - \int_a^b G(x)f'(x)dx$$

(mit  $F'(x) = f(x)$  und  $G'(x) = g(x)$ )

**Satz 192. (Substitutionsregel, Fassung 1)** Sei  $I$  ein Intervall mit den Grenzen  $c, d \in \mathbb{R}$ , so dass  $c \neq d$ . Sei  $J$  ein Intervall mit den Grenzen  $e, h \in \mathbb{R}$ , so dass  $e \neq h$ . Seien  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $g : J \rightarrow I$  stetig differenzierbar auf  $J$ . Sei  $\text{Bild}(J) \subset I$ . Dann gilt:

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)dt$$

**Satz 193. (Substitutionsregel, Fassung 1)** Sei  $I$  ein Intervall mit den Grenzen  $c, d \in \mathbb{R}$ , so dass  $c \neq d$ . Sei  $J$  ein Intervall mit den Grenzen  $e, h \in \mathbb{R}$ , so dass  $e \neq h$ . Seien  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $g : J \rightarrow I$  stetig differenzierbar auf  $J$ . Sei  $g(J) = I$ . Dann gilt: Wenn  $g$  eine injektive (und damit umkehrbare) Abbildung ist, gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t)dt$$

**Definition 194.**

$$\begin{aligned} \int_c^\infty f(x)dx &:= \lim_{d \rightarrow \infty} \int_c^d f(x)dx \\ \int_{-\infty}^d f(x)dx &:= \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^d f(x)dx \\ \int_{-\infty}^\infty f(x)dx &:= \lim_{d \rightarrow \infty} \int_c^d f(x)dx + \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^d f(x)dx \end{aligned}$$

## Finanzmathematik (Integralrechnung)

Endwert eines Kapitals bei stetiger Verzinsung:

$$K(t) = K_0(1+i)^t$$

$K_0$  = Anfangskapital  
 $i \in [0, 1]$  = Zinssatz  
 $t \in \mathbb{R}^+$  = Laufzeit

Barwert eines Kapitals bei stetiger Verzinsung:

$$K_B(t) = \frac{K}{(1+i)^t}$$

$K$  = zu  $t$  anfallendes Kapital  
 $i \in [0, 1]$  = Zinssatz  
 $t \in \mathbb{R}^+$  = Laufzeit

Endwert einer Rente bei stetiger Verzinsung:

$$K(t) = R \frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

$R$  = Rente pro Jahr  
 $i \in [0, 1]$  = Zinssatz  
 $t \in \mathbb{R}^+$  = Laufzeit

Barwert einer Rente bei stetiger Verzinsung:

$$K_B(t) = R \frac{(1+i)^t - 1}{i(1+i)^t}$$

$R$  = Rente pro Jahr  
 $i \in [0, 1]$  = Zinssatz  
 $t \in \mathbb{R}^+$  = Laufzeit

Endwert eines durch die Funktion  $f$  gegebenen stetigen Finanzflusses (Integral von  $f$  in Intervall drückt Finanzfluss in diesem Intervall aus):

$$K(b) = \frac{\ln(1+i)}{i} \int_0^b f(t) (1+i)^t dt$$

$f$  = Finanzflussfunktion  
 $i \in [0, 1]$  = Zinssatz  
 $b \in \mathbb{R}^+$  = Dauer des Finanzflusses

Barwert eines durch die Funktion  $f$  gegebenen stetigen Finanzflusses (Integral von  $f$  in Intervall drückt Finanzfluss in diesem Intervall aus):

$$K_B(b) = \frac{\ln(1+i)}{i} \int_0^b \frac{f(t)}{(1+i)^t} dt$$

$f$  = Finanzflussfunktion  
 $i \in [0, 1]$  = Zinssatz  
 $b \in \mathbb{R}^+$  = Dauer des Finanzflusses

## Optimale Dauer einer Investition

$$cr(T) = ck(T) - L'(T) + L(T) \ln(1+i)$$

$T$  = Dauer der Investition

$r(t)$  = Erlösflussfunktion (drückt Erlös als Integral der Funktion in Intervallen aus)

$k(t)$  = Kostenflussfunktion (drückt Kosten als Integral der Funktion in Intervallen aus)

$L(t)$  = Verkaufserlösfunktion der Investition

$$c = \frac{\ln(1+i)}{i}$$

$i \in [0, 1]$  = Zinssatz

## Lineare Funktionen und Matrizen

**Definition 195.** Sei  $(x_1, \dots, x_n)$  ein  $n$ -Tupel oder seien die  $x_i$  die ersten  $n$  Glieder der Folge  $(x)$ , dann gilt:

$$\sum_{i=1}^n x_i := x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n$$

**Satz 196.** Für  $a \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\sum_{i=1}^n ax_i = a \sum_{i=1}^n x_i$$

**Satz 197.**

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i$$

**Definition 198.** Gilt  $(x_1, \dots, x_n) = (a, \dots, a)$  mit  $a \in \mathbb{R}$  so schreiben wir

$$\sum_{i=1}^n a := \sum_{i=1}^n x_i$$

**Satz 199.**

$$\sum_{i=1}^n a = na$$

**Definition 200.** (Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl)

Sei  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  und  $a \in \mathbb{R}$ , dann ist

$$a \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix}$$

**Definition 201.** Sei  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ , dann ist

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

**Definition 202.** Eine Abbildung  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  für  $n, m \in \mathbb{N}^*$  heisst „linear“ genau dann, wenn

$$\begin{aligned} f(ax) &= af(x) \\ f(x+y) &= f(x) + f(y) \end{aligned}$$

für  $a \in \mathbb{R}$

**Satz 203.** Funktionen

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \end{pmatrix}$$

mit  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  sind linear.

**Definition 204.** der Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \end{pmatrix}$$

**Satz 205.** Die Multiplikation einer  $(m, n)$ -Matrix mit einem  $n$ -Vektor definiert eine lineare Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ .

**Definition 206.** Vektoren, die bis auf eine Zeile  $i$  nur Nullen aufweisen und die in der  $i$ -ten Zeile eine 1 aufweisen, werden Einheitsvektoren genannt. Wir kürzen sie ab durch  $\mathbf{e}_i$ . Wenn die Anzahl  $n$  der Komponenten des Vektors erwähnt werden soll, schreibt man  $\mathbf{e}_i^n$ .

**Satz 207.** Seien  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  zwei  $(m, n)$ -Matrizen, welche die linearen Abbildungen  $f$  und  $g$  definieren. Dann gilt:

$$f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{x}$$

wobei  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  definiert ist durch  $a_{ij} + b_{ij}$  für  $1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n$ .

**Satz 208.** Für eine Matrix  $\mathbf{A}$ , welche die lineare Funktion  $f$  festlegt, und eine reelle Zahl  $b$  gilt:

$$bf(\mathbf{x}) = (b\mathbf{A})\mathbf{x}$$

wobei  $b\mathbf{A}$  durch  $ba_{ij}$  für alle  $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$  festgelegt ist.

**Definition 209.** Eine Matrix, die als Komponenten nur 0 enthält, heisst Nullmatrix. Sie wird durch  $\mathbf{O}$  abgekürzt. Wird die Nullmatrix mit einer  $(m, n)$ -Matrix addiert, gehen wir gewöhnlich stillschweigend davon aus, dass  $\mathbf{O}$  eine  $(m, n)$ -Matrix ist.

**Satz 210.** Für  $k, r \in \mathbb{R}$  und  $(m, n)$ -Matrizen  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{O}$  gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \mathbf{B} + \mathbf{A} \\ \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \\ k(r\mathbf{A}) &= (kr)\mathbf{A} \\ k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= k\mathbf{A} + k\mathbf{B} \\ (k + r)\mathbf{A} &= k\mathbf{A} + r\mathbf{A} \\ \mathbf{A} + \mathbf{O} &= \mathbf{A} = \mathbf{O} + \mathbf{A} \end{aligned}$$

**Satz 211.** Sei  $\mathbf{B}$  eine  $(k, m)$ -Matrix und  $\mathbf{A}$  eine  $(m, n)$ -Matrix so dass

$$h(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{x}).$$

Dann gibt es eine  $(k, n)$ -Matrix  $\mathbf{C}$ , so dass

$$h(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\mathbf{x}.$$

Diese Matrix ist bestimmt durch

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^m b_{il}a_{lj}$$

**Definition 212.** Für die  $(k, n)$ -Matrix  $\mathbf{C}$ , so dass

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{x})$$

mit einer  $(k, m)$ -Matrix  $\mathbf{B}$  und einer  $(m, n)$ -Matrix  $\mathbf{A}$ , schreiben wir

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}\mathbf{A}.$$

Wir nennen  $\mathbf{C}$  das Produkt der Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  (in dieser Reihenfolge). Wir sagen, dass  $\mathbf{C}$  mittels Matrixmultiplikation von  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  resultiert.

**Definition 213.** Eine  $(n, n)$ -Matrix  $\mathbf{A}$  wird „quadratisch“ genannt. Wir verwenden dafür oft das Symbol  $\mathbf{A}_n$  oder  $\mathbf{A}_{nn}$

Eine quadratische Matrix mit  $a_{ij} = 0$  für  $i \neq j$  wird „Diagonalmatrix“ genannt.

Eine  $(n, n)$ -Diagonalmatrix mit  $a_{ii} = 1$  für alle  $1 \leq i \leq n$ , wird „Einheitsmatrix“ genannt. Wir kürzen sie ab durch  $\mathbf{E}$  (oder durch  $\mathbf{E}_n$ )

**Satz 214.**

$$\mathbf{A}\mathbf{E} = \mathbf{A} = \mathbf{E}\mathbf{A}$$

**Satz 215.** Für  $a \in \mathbb{R}$  und für geeignete Spalten- und Zeilenanzahlen aufweisende Matrizen  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  und  $\mathbf{C}$  gilt:

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C})$$

$$a(\mathbf{A}\mathbf{B}) = (a\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(a\mathbf{B})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{C}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{C}$$

**Definition 216.** Eine Matrix  $\mathbf{B}$  mit  $\mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{E}$  wird „inverse Matrix von  $\mathbf{A}$ “ oder „die Inverse von  $\mathbf{A}$ “ oder „Umkehrmatrix von  $\mathbf{A}$ “ genannt. Wir kürzen sie ab durch  $\mathbf{A}^{-1}$ .

**Satz 217.** Existiert die Umkehrmatrix einer Matrix  $\mathbf{A}$ , welche die lineare Funktion  $f$  definiert, dann wird durch die Umkehrmatrix  $\mathbf{A}^{-1}$  die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  von  $f$  definiert, d.h. es gilt  $f^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$

**Definition 218.** Eine Matrix, die von links her in Zeilen Nullen aufweist oder als erste von Null verschiedene Zahl eine 1, so dass (a) unter und über dieser 1 in der Spalte jeweils nur Nullen vorkommen und (b) in der Teilmatrix links unterhalb dieser 1 nur Nullen vorkommen, wird „Matrix in Zeilennormalform“ genannt.

**Satz 219.** Jede Matrix kann mittels der Addition einer Zeile zu einer anderen Zeile und mittels der Multiplikation einer Zeile mit einer von 0 verschiedenen reellen Zahl in Zeilennormalform umgewandelt werden.

**Satz 220.** Sei  $(\mathbf{A}', b')$  die Zeilennormalform der erweiterten Matrix  $(\mathbf{A}, b)$ , die dem Gleichungssystem  $\mathbf{A}\mathbf{x} = b$  entspricht, und bei dem  $\mathbf{A}$  eine  $(m, n)$ -Matrix ist:

- Besteht  $A'$  nur mehr aus paarweise verschiedenen Einheitsvektoren, so weist das der Matrix entsprechende Gleichungssystem genau eine Lösung auf (die Bedingung impliziert, dass  $A$  quadratisch ist).
- Gibt es eine Zeile  $i$  von  $A'$ , so dass  $a_{ij} = 0$  für  $1 \leq j \leq n$  und ist  $b_i \neq 0$ , dann hat das der Matrix  $(A, b)$  entsprechende Gleichungssystem keine Lösung.
- Tritt keiner der beiden obigen Fälle ein, gibt es unendlich viele Lösungen.