Vermischte Übungen I W-Theorie

1. Aus der Menge der Oberwalliserin und Oberwalliser wird zufällig eine Person gezogen (= Zufallsexperiment). Geben sie die Ergebnismenge Ω an, wenn wir untersuchen, ob wir einen Mann oder eine Frau gezogen haben.

2. Im Oberwallis betrage der Anteil der Frauen an der Gesamtbevölkerung 51.2%.
a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, eine Frau zu ziehen.
b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, einen Mann zu ziehen.
c) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion auf Ω an.
d) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Ω an.
e) Wir ziehen zwei Personen (mit Zurücklegen). Geben Sie die neue Ergebnismenge Ω' an. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, zwei Frauen zu ziehen? Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion auf Ω' an.
f) Wir ziehen 30 Personen (mit Zurücklegen). Geben Sie den neuen Stichprobenraum Ω'' an. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, 10 Männer und 20 Frauen in dieser Reihenfolge zu ziehen? 10 Männer und 20 Frauen unabhängig von der Reihenfolge zu ziehen?

3. Bei den Schwarzhalsziegen gibt es die Virenkrankheit R. 5% der Ziegen sind krank, 10% sind resistent und der Rest sind gesund ohne resistent zu sein. Wir ziehen eine Ziege. Geben Sie die Ergebnismenge Ω an, wenn wir untersuchen, ob eine Ziege krank, resistent oder gesund ist (ohne resistent zu sein).
a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, eine kranke Ziege zu ziehen.
b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, eine resistente Ziege zu ziehen.
c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, eine gesunde (nicht resistente) Ziege zu ziehen.
d) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion auf Ω an.
e) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Ω an.
f) Wir ziehen zwei Ziegen (mit Zurücklegen). Geben Sie die neue Ergebnismenge Ω' an. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, zwei kranke Ziegen zu ziehen, wenn sich die Wahrscheinlichkeit des Ziehens einer kranken Ziege durch das Ergebnis der ersten Ziehung nicht verändert? Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion auf Ω' an.
g) Wir ziehen 40 Ziegen (mit Zurücklegen). Geben Sie die neue Ergebnismenge Ω'' an. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, 5 kranke, 10 resistente und 25 gesunde, nicht-resistente Ziegen zu ziehen (in dieser Reihenfolge)?

4. Sei $\Omega = \{Z, K, R\}$ (mit Gleichverteilung) gegeben und die Zufallsvariable X durch ihren Graphen $\{(Z, 1), (K, 2), (R, 3)\}$. Berechnen Sie den Graphen von f, P, f_X und P_X und den Graphen der Verteilungfunktion. Berechnen Sie $P(X = 2)$ und $P(X \leq 2)$. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

5. Sei eine Verteilungsfunktion durch ihren Graphen gegeben:
$$\{(-1, 0.2), (0, 0.4), (1, 0.5), (2, 0.8), (10, 1)\}.$$
Zudem sei die Zufallsvariable X durch ihren Graphen gegeben:
$$\{(a, -1), (b, 0), (c, 1), (d, 2), (e, 10)\}.$$
Berechnen Sie $\Omega, \mathfrak{X}, f_X, P_X, f, P, E(X), V(X), P(0 \leq X \leq 2)$.

6. Sei eine Wahrscheinlichkeitsfunktion durch ihren Graphen gegeben:
$$\{(a, 0.2), (b, 0.2), (c, 0.1), (d, 0.3), (e, 0.2)\}.$$
Zudem sei die Zufallsvariable X durch ihren Graphen gegeben:
$$\{(a, 1), (b, 0), (c, 0), (d, 0), (e, 1)\}.$$
Berechnen Sie $\Omega, \mathfrak{X}, f_X, P_X, E(X), V(X), P(0 \leq X \leq 2)$.

7. Wir betrachten erneut die Oberwalliser Bevölkerung. Wir ziehen zwei Personen (mit Zurücklegen). Wir legen zwei identische und unabhängige Zufallsvariablen durch ihre Graphen $X_i = \{(\text{Mann}, 1), (\text{Frau}, 2)\}$ fest $\quad (i \in \mathbb{N}_2^*)$. Berechnen Sie die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen (indem Sie den Graphen der Wahrscheinlichkeitsfunktion und der Verteilung angeben; Geben Sie auch den Definitionsbereich der Wahrscheinlichkeitsfunktion der gemeinsamen Verteilung an; Anteil der Frauen 51.9). Berechen Sie die Verteilung der Statistiken Summe $T(x) = x_1 + x_1 \quad (x = (x_1, x_2)$, Mittelwert $\bar{X}(x) = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{2} x_i$ und Varianz $S^2(x) = \frac{1}{2-1}\sum\limits_{i=1}^{2}(x_i - \bar{x}))^2$ $(\bar{x} := \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$; Sie können dabei nur die Wahrscheinlichkeitsfunktionen angeben). Berechnen Sie $E(X_i), V(X_i), E(T), V(T), E(\bar{X}), V(\bar{X}), E(S^2), V(S^2)$. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von T, von $\bar{X}$ und S^2.
Berechnen Sie $P(T = 3), P(\bar{X} \leq 1.5); P(S^2 > 2)$

Lösungen

1. $\Omega = \{\text{Mann, Frau}\}$

2. a) $P(\{\text{Frau}\}) = 0.512$
b) $P(\{\text{Mann}\}) = 1 - P(\{\text{Frau}\}) = 1 - 0.512 = 0.488$
c) Graph von $f = \{(\text{Frau,}0.512), (\text{Mann}, 0.488)\}$
d) Graph von $P = \{(\emptyset, 0), (\{\text{Frau}\}, 0.512), (\{\text{Mann}\}, 0.488), (\{\text{Frau,Mann}), 1\}\}$
e) $\Omega' = \Omega \times \Omega = \{(\text{Frau,Frau}),\ (\text{Frau,Mann}),(\text{Mann,Frau}),(\text{Mann,Mann})\}$
$f_{\Omega\times\Omega} = \{(\text{Frau,Frau,}0.512^2),\ (\text{Frau,Mann,}0.512 \cdot 0.488),$
$(\text{Mann,Frau,}0.512 \cdot 0.488),(\text{Mann,Mann,}0.488^2)\}$
f) $\Omega'' = \underset{i=1}{\overset{30}{\times}} \Omega_i$ mit $\Omega_i = \Omega$.
$f''(\omega) = 0.488^{10} 0.512^{20} = 0.000000001173\,8$ (in dieser Reihenfolge).
$P(E) = \binom{30}{10} \cdot f''(x) = \binom{30}{10} 0.488^{10} 0.512^{20} = 0.03526\,7$

3. $\Omega = \{K, R, G\}$
a) $f(K) = 0.05.$
b) $f(R) = 0.1$
c) $f(G) = 0.85$
d) Graph von $f = \{(K, 0.05), (R, 0.1), (G, 0.85)\}$
e) Graph von $P = \{(\emptyset, 0), (\{K\}, 0.05), (\{R\}, 0.1), (\{G\}, 0.85),$
$(\{K, R\}, 0.15), (\{K, G\}, 0.9), (\{R, G\}, 0.95), (\{K, R, G\}, 1)\}$
f) $\Omega' = \Omega \times \Omega = \{(K, K), (K, R), (K, G), (R, K), (R, R), (R, G), (G, K), (G, R), (G, G)\}$
$f_{\Omega\times\Omega}((K, K)) = 0.05 \cdot 0.05 = 0.002\,5$
Graph von $f_{\Omega\times\Omega} = \{(K, K, 0.0025), (K, R, 0.005), (K, G, .042\,5), (R, K, 0.005), (R, R, 0.01),$
$(R, G, 0.085), (G, K, 0.042\,5), (G, R, 0.085), (G, G, 0.7225)\}$
Probe:$0.0025 + 0.005 + 0.0425 + 0.005 + 0.01 + 0.085 + 0.0425 + 0.085 + 0.7225 = 1$
g) $\Omega'' = \underset{i=1}{\overset{40}{\times}} \Omega_i$ mit $\Omega_i = \Omega$.
$f_{\Omega''}(\omega) = 0.05^5 0.1^{10} 0.85^{25} = 5.\,374\,3 \times 10^{-19}$ (in Reihenfolge)

4. Graph von $f = \{(Z, \frac{1}{3}), (K, \frac{1}{3}), (R, \frac{1}{3})\}$
Graph von $P = \{(\emptyset, 0), (\{Z\}, \frac{1}{3}), (\{K\}, \frac{1}{3}), (\{R\}, \frac{1}{3}), (\{Z, K\}, \frac{2}{3}),$
$(\{Z, R\}, \frac{2}{3}), (\{K, R\}, \frac{2}{3}), (\{Z, K, R\}, 1)\}$
Graph von $f_X = \{(1, \frac{1}{3}), (2, \frac{1}{3}), (3, \frac{1}{3})\}$
Graph von $P_X = \{(\emptyset, 0), (\{1\}, \frac{1}{3}), (\{2\}, \frac{1}{3}), (\{3\}, \frac{1}{3}), (\{1, 2\}, \frac{2}{3}),$
$(\{1, 3\}, \frac{2}{3}), (\{2, 3\}, \frac{2}{3}), (\{1, 2, 3\}, 1)\}$
$P(X = 2) = \frac{1}{3}$
$P(X \leq 2) = \frac{2}{3}$
$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} = 2$
$V(X) = (1 - 2)^2 \frac{1}{3} + (2 - 2)^2 \frac{1}{3} + (3 - 2)^2 \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

5. $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$
$\mathfrak{X} = \{-1, 0, 1, 2, 10\}$
Graph von $f_X = \{(-1, 0.2), (0, 0.2), (1, 0.1), (2, 0.3), (10, 0.2)\}$.
Graph von $P_X = \{(\emptyset, 0), (\{-1\}, 0.2), (\{0\}, 0.2), (\{1\}, 0.1), (\{2\}, 0.3), (\{10\}, 0.2),$
$(\{-1, 0\}, 0.4), (\{-1, 1\}, 0.3), (\{-1, 2\}, 0.5), (\{-1, 10\}, 0.4),$
$(\{0, 1\}, 0.3), (\{0, 2\}, 0.5), (\{0, 10\}, 0.4),$
$(\{1, 2\}, 0.4), (\{1, 10\}, 0.4),$
$(\{2, 10\}, 0.5),$
$(\{-1, 0, 1\}, 0.5), (\{-1, 0, 2\}, 0.7), (\{-1, 0, 10\}, 0.6),$
$(\{-1, 1, 2\}, 0.6), (\{-1, 1, 10\}, 0.5),$
$(\{-1, 2, 10\}, 0.7),$
$(\{0, 1, 2\}, 0.6), (\{0, 1, 10\}, 0.5), (\{0, 2, 10\}, 0.7),$

$(\{1,2,10\},0.6)$,
$(\{-1,0,1,2\},0.8),(\{-1,0,1,10\},0.7),(\{-1,0,2,10\},0.9)$,
$(\{-1,1,2,10\},0.8),(\{0,1,2,10\},0.8)$,
$(\{-1,0,1,2,10\},1)\}$
Graph von $f=\{(a,0.2),(b,0.2),(c,0.1),(d,0.3),(e,0.2)\}$
Graph von $P=\{(\emptyset,0),(\{a\},0.2),(\{b\},0.2),(\{c\},0.1),(\{d\},0.3),(\{e\},0.2)$,
$(\{a,b\},0.4),(\{a,c\},0.3),(\{a,d\},0.5),(\{a,e\},0.4)$,
$(\{b,c\},0.3),(\{b,d\},0.5),(\{b,e\},0.4)$,
$(\{c,d\},0.4),(\{c,e\},0.4)$,
$(\{d,e\},0.5)$,
$(\{a,b,c\},0.5),(\{a,b,d\},0.7),(\{a,b,e\},0.6)$,
$(\{a,c,d\},0.6),(\{a,c,e\},0.5)$,
$(\{a,d,e\},0.7)$,
$(\{b,c,d\},0.6),(\{b,c,e\},0.5),(\{b,e,f\},0.7)$,
$(\{c,d,e\},0.6)$,
$(\{a,b,c,d\},0.8),(\{a,b,c,e\},0.7),(\{a,b,e,f\},0.9)$,
$(\{a,c,d,e\},0.8),(\{b,c,d,e\},0.8)$,
$(\{a,b,c,d,e\},1)\}$
$E(X)=-1\cdot 0.2+0\cdot 0.2+1\cdot 0.1+2\cdot 0.3+10\cdot 0.2=2.5$
$V(X)=(-1-2.5)^2 0.2+(0-2.5)^2 0.2+(1-2.5)^2 0.1+(2-2.5)^2 0.3+$
$(10-2.5)^2 0.2=15.25$
$P(0\le X\le 2)=0.2+0.1+0.3=0.6$
$\{(-1,0.2),(0,0.2),(1,0.1),(2,0.3),(10,0.2)\}$

6. $\Omega=\{a,b,c,d,e\}$
   $\mathfrak{X}=\{0,1\}$ (Somit Bernoulliverteilung!)
   Graph von $f_X=\{(0,0.6),(1,0.4)\}$
   Graph von $P_X=\{(\emptyset,0),(\{0\},0.6),(\{1\},0.4),(\{0,1\},1)\}$
   $E(X)=0\cdot 0.6+1\cdot 0.4=0.4$
   $V(X)=(0-0.4)^2 0.6+(1-0.4)^2 0.4=0.24$
   $P(0\le X\le 2)=0.4+0.6=1$

7. $\Omega=\{\text{Mann, Frau}\}$
   Graph von $f=\{(\text{Mann},0.481),(\text{Frau, }0.519)\}$
   $\mathfrak{X}_i=\{1,2\}$
   Graph von $f_{X_i}=\{(1,0.481),(2,0.519)\}$
   $\mathfrak{X}_1\times\mathfrak{X}_2=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$ (= Definitionbereich von $f_{(X_1,X_2)}$).
   Graph von $f_{(X_1,X_2)}=\{((1,1),0.481^2,((1,2),0.481\cdot 0.519)$,
   $((2,1),0.481\cdot 0.519),((2,2),0.519^2)\}=$
   $\{((1,1),0.231\,36),((1,2),0.249\,64)$,
   $((2,1),0.249\,64)),((2,2),0.269\,36)\}$

   $Bild(T)=\{2,3,4\}$
   Graph von $f_T=\{(2,0.231\,36),(3,2\cdot 0.249\,64),(4,0.26936)\}=$
   $\{(2,0.231\,36),(3,0.499\,28),(4,0.26936)\}$
   Graph der Verteilung von T $(=P_T):\{(\emptyset,0),(\{2\},0.23136),(\{3\},0.49928),(\{4\},0.26936)$,
   $(\{2,3\},0.730\,64),(\{2,4\},0.500\,72),(\{3,4\},0.768\,64),(\{2,3,4\},1)\}$
   $E(T)=2\cdot 0.23136+3\cdot 0.499\,28+4\cdot 0.26936=3.038=E(X_1)+E(X_2)$
   $V(T)=(2-3.038)^2 0.23136+(3-3.038)^2 0.49928+(4-3.038)^2 0.26936=0.499\,28=2\cdot V(X_i)$.
   Graph der Verteilungsfunktion $F_T=\{\{(2,0.231\,36),(3,0.730\,64),(4,1)\}\}$

   $Bild(\bar{X})=\{1,1.5,2\}$
   $P(T=3)=0.49928$.
   Graph von $f_{\bar{X}}=\{(1,0.231\,36),(1.5,2\cdot 0.249\,64),(2,0.26936)\}=$

$\{(1, 0.231\,36), (1.5, 0.499\,28), (2, 0.26936)\}$
Graph der Verteilung von $\bar{X}$ $(= P_{\bar{X}}) : \{(\emptyset, 0), (\{1\}, 0.23136), (\{1.5\}, 0.49928), (\{2\}, 0.26936), (\{1, 1.5\}, 0.730\,64), (\{1, 2\}, 0.500\,72), (\{1.5, 2\}, 0.768\,64), (\{1, 1.5, 2\}, 1)\}$
$E(\bar{X}) = 1 \cdot 0.23136 + 1.5 \cdot 0.49928 + 2 \cdot 0.26936 = 1.519 = E(X_i)$
$V(\bar{X}) = (1 - 1.519)^2 0.23136 + (1.5 - 1.519)^2 0.49928+$
$(2 - 1.519)^2 0.26936 = 0.124\,82 = \frac{V(X_i)}{2}$

$E(X_i) = E(X_1) = 1 \cdot 0.481 + 2 \cdot 0.519 = 1.519$
$V(X_i) = V(X_1) = (1 - 1.519)^2 0.481 + (2 - 1.519)^2 0.519 = 0.24964$
Graph der Verteilungsfunktion $F_{\bar{X}} = \{(1, 0.23136), (1.5, 0.73064), (2, 1)\}$
$P(\bar{X} \leq 1.5) = 0.73064$

$Bild(S^2) = \{0, 0.5\}$
Berechnung der Elemente von $Bild(S^2)$:
$(1 - 1)^2 + (1 - 1)^2 = 0$
$(1 - 1.5)^2 + (2 - 1.5)^2 = 0.5$
$(2 - 2)^2 + (2 - 2)^2 = 0$
$f_{(X_1, X_2)} = \{((1, 1), 0.481^2, ((1, 2), 0.481 \cdot 0.519),$
$((2, 1), 0.481 \cdot 0.519), ((2, 2), 0.519^2)\}$
Graph von $f_{S^2} = \{(0, 0.481^2 + 0.519^2), (0.5, 2 \cdot 0.519 \cdot 0.481)\} =$
$f_{S^2} = \{(0, 0.500\,72), (0.5, 0.499\,28)\}$
Graph der Verteilung von S^2 (=Graph von P_{S^2}) :
$\{(\emptyset, 0), (\{0\}, 0.50072), (\{0.5\}, 0.49928), (\{0, 0.5\}, 1)\}$
$E(S^2) = 0 \cdot 0.50072 + 0.5 \cdot 0.49928 = 0.249\,64$
$V(S^2) = (0 - 0.249\,64)^2 \cdot 0.50072 + (0.5 - 0.249\,64)^2 0.49928 = 0.0625$
Graph der Verteilungsfunktion $F_{S^2} = \{(0, 0.50072), (0.5, 1)\}$
$P(S^2 > 2) = 0.$