# Mathématiques économie d'entreprise

**Paul Ruppen**

**22 décembre 2019**

La mise en page de ce document à été effectuée par LaTeX.

**Littérature**


— Favre, J.-P. (2009). *Mathématiques de gestion.* Epalinges : Digilex.

— Tietze, J. (1998). *Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik* (7e éd.). Wiesbaden : Vieweg.

— Sydsaeter, K., & Hammond, P. (2002). *Essential Mathematics for Economic Analysis.* Prentice-Hall : Pearson.

— Varian, H. R. (2010). *Intermediate microeconomics: A modern approach* (8e éd.). London : Norton.



Paul Ruppen
HES-SO Valais Wallis
économie d'entreprise
site de Sierre
CH-3960 Sierre


Vous trouvez ce dossier et d'autres documents sous `http://math.logik.ch`

# Table des matières

# Chapitre 1

# Théorie des ensembles

La théorie des ensembles est une théorie fondamentale des mathématiques : on peut formuler à l'intérieur de cette théorie les autres théories mathématiques (p.ex. théorie des nombres, théorie des fonctions, analyse, algèbre linéaire, théorie des probabilités, statistiques, etc.).

## 1.1 Vocabulaire des mathématiques

Pour définir un mot il faut d'autres mots. Pour définir à leur tour ces mots, de nouveau d'autres mots, etc. Si nous voulions tout définir, on serait amené à définir sans fin (=régression à l'infini). Comme cela n'est pas possible, on doit commencer quelque part par un vocabulaire non défini. On appelle les termes (mots) indéfinis d'une théorie „vocabulaire de base". Le vocabulaire de base des mathématiques comprend les expression et symboles suivants :

— le symbole pour l'expression „est un élément de" : „$\in$"
— le symbole pour l'ensemble vide : „$\emptyset$" ou „$\{\}$"
— le vocabulaire logique : „et", „ou", „non" (= il n'est pas), „si ... alors", „si et seulement si" „il existe (au moins) un, de sorte que", „tous (toutes)", „est identique à" (ou „est la même chose que", „est égal"; symbole : „$=$").

Avec ces expressions du vocabulaire de base on peut définir les autres expressions de la théorie des ensembles et des mathématiques.

## 1.2 Types de propositions en mathématiques

Dans les systèmes mathématiques (et par là dans la théorie des ensembles) on rencontre trois types de propositions :

1. Les *Définitions* sont utilisées pour introduire des termes nouveaux à l'aide du vocabulaire de base ou de termes déjà introduits par définition. Les définitions n'introduisent que des expressions ou symboles plus courts et plus pratiques pour des expressions plus compliquées. On ne peut prouver (= démontrer) des définitions et les définitions ne sont ni vraies ni fausses. Les définitions proposent d'utiliser certains symboles d'une certaine manière dans un livre. Elles peuvent varier d'un livre à l'autre, bien qu'un usage uniforme des symboles facilite les études en mathématiques. Si nous définissons une expression $A$ par une expression $B$ nous écrivons „$A := B$" ou „$B =: A$".
2. Les *Axiomes* sont les propositions d'une théorie qu'on ne prouve pas. Ils sont le fondement de la théorie et on peut prouver toutes les autres propositions de la théorie sur leur base. On ne peut pas démontrer toutes les propositions d'une théorie mathématique, puisqu'on utilise des proposition pour démontrer une proposition. Si on voulait tout démontrer, on serait amené de nouveau à une régression à l'infini. C'est pourquoi il faut commencer avec quelques propositions qu'on ne démontre pas et qu'on appelle les axiomes.

3. Les *Théorèmes* sont les propositions qu'on peut prouver à l'intérieur d'un système mathématique. La plupart des règles de calcul que nous utilisons sont au fond des théorèmes (p.ex. $a + b = b + a$ pour $a, b \in \mathbb{R}$). Les théorèmes d'un système mathématiques sont vrais, si les axiomes du système sont vrais.

Pour rendre compréhensible les théories mathématiques, on ajoute des motivations et des explications aux axiomes, définitions et théorèmes d'une théorie mathématique.

## 1.3 Le concept de l'ensemble

La théorie des ensemble se base sur l'existence d'ensembles. Les ensembles sont des objets abstraits, qu'on ne peut percevoir par les sens. Un tas de sable n'est p.ex. pas identique à l'ensemble des grains de sable de ce tas. Les ensembles peuvent comprendre des objets qui ne se trouvent pas dans des endroits proches dans l'espace (p.ex. une bouteille à Sao Paolo et un stylo dans une salle de classe à Sierre). Les ensembles peuvent de plus comprendre des objets qui ne sont pas perceptibles par les sens (p.ex. des nombres - attention, le chiffre utilisé pour désigner un nombre n'est pas le nombre lui-même !). Passons à une détermination plus précise du terme „ensemble“ : Un ensemble est défini par le fait qu'il contient des éléments. Sinon un ensemble est l'ensemble vide. Cette définition peut être formulé à l'aide du vocabulaire de base d'une manière plus formelle :

**Définition 1.3.1.** *$x$ est un ensemble si et seulement si il existe un $y$ de sorte que $y \in x$, ou $x = \emptyset$.* $\diamondsuit$

**Définition 1.3.2.** *$x \notin z$ si et seulement si $x$ n'est pas élément de $z$.* $\diamondsuit$

**Exemple 1.3.3.** *L'ensemble des lettres de l'alphabète latin*
*L'ensemble des cantons suisses*
*L'ensemble des pages d'un livre*
*L'ensemble des nombres pairs.*
*L'ensemble des classes d'une haute école spécialisée.* $\diamondsuit$

**Remarque 1.3.4.** *On marquera la fin d'une preuve par le symbole „$\Box$“. Il signifie „Ce qui était à démontrer“. Une expression équivalente est „q.e.d“ (Quod erat demonstrandum, latin pour „Ce qui était à démontrer“). On termine les exemples et les remarques par le symbole „$\diamondsuit$“ pour rendre plus lisible le texte. Il est recommandable de travailler avec des couleurs (toujours la même couleur pour les définitions, toujours la même pour les théorèmes et toujours la même pour les exemples et remarques).* $\diamondsuit$

Puisque les ensembles sont des objets, les ensembles peuvent contenir des ensembles comme éléments. On peut par exemple former l'ensemble des ensembles des classes des hautes écoles spécialisées suisses.

## 1.4 Types de représentation des ensembles

### 1.4.1 Par l'énumération des éléments entre des accolades

Nous utilisons en général les majuscules $A, B, C, D, ....$ pour les ensembles.
Pour l'ensemble $A$, qui contient les éléments $a, b, c$ et 3, nous écrivons

$$A = \{a, b, c, 3\}.$$

Pour l'ensemble $B$, qui contient Zurich, Sierre et Brigue comme éléments, nous écrivons

$$B = \{Zurich, Sierre, Brigue\}.$$

S'il est clair de quel ensemble on parle - après l'énumération de quelques éléments de l'ensemble - on peut renoncer à l'énumération des autres éléments. Par là on peut exprimer des ensembles avec un nombre infini d'éléments, p.ex.

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ......\}$$

(= l'ensemble des nombres naturels sans zéro). En général on préfère pour ce cas la représentation suivante :

### 1.4.2 Par la propriété caractéristique

Nous fournissons une propriété et formons l'ensemble des objets qui ont cette propriété, p.ex.

$$\{x \mid x \text{ est un nombre naturel}\}$$

L'expression suivante est tout aussi courante :

$$\{x : x \text{ est un nombre naturel}\}$$

Nous utiliserons la première. On lit „$\{x \mid x$" de la manière suivante : „l'ensemble de tous les $x$, tel que $x$". Dans l'exemple : „L'ensemble de tous les $x$, tel que $x$ est un nombre naturel."

Autre exemple :

$$\{x \mid x \text{ est un nombre premier}\}$$

(les *nombres premiers* sont des nombres, qu'on ne peut - dans le domaine des nombres naturels - que diviser par 1 et par le nombre lui-même : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, .... . 0 et 1 n'en font pas partie selon la définition courante)

**Exercice 1.4.1.** *Représenter les ensembles suivants selon la méthode d'énumération :*
$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ *et* $x < 5\}$. *(„$<$" se lit comme „est inférieur à" pour des nombres ; „$>$" pour „supérieur à", „$\leq$" pour „inférieur ou égal à" et „$\geq$" pour „supérieur ou égal à" ; $\mathbb{N}$ = l'ensembles des nombres naturels avec zéro ; $\mathbb{N}^*$ = l'ensemble des nombres naturels sans zéro)*
$B = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ *et* $3 < x < 10\}$
$C = \{x \mid x = 2n + 1$ *et* $n \in \mathbb{N}^*\}$.
*Représenter les ensembles suivants par une propriété caractéristique :*
$D = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ................\}$
$F = \{$*Lausanne, Genève, Sion, Berne, Delémont, Zurich, Glaris, Bellinzone, Appenzell, Coire, Bâle, Fribourg, .....*$\}$

**Solutions 1.4.2.** $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
$B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$C = \{3, 5, 7, 9, ......\}$
$D = \{x \mid x = 2n$ *et* $n \in \mathbb{N}^*\}$
$F = \{x \mid x$ *est la capitale d'un canton suisse*$\}$

Pour aider l'intuition on représente souvent les ensembles à l'aide de diagrammes (diagrammes de Venn, John Venn, 1834 - 1923, mathématicien anglais ; aussi appelés diagramme d'Euler, selon le mathématicien suisse Leonhard Euler, 1707 - 1783), p.ex. (voir figure 1.4.1) :

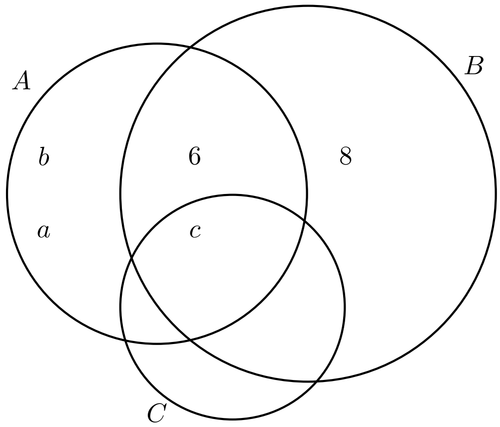


FIGURE 1.4.1 – Exemple de représentation graphique d'ensembles à l'aide de diagrammes de Venn

Ce diagramme illustre le fait que $a, b, c, 6 \in A$ ; $6, c, 8 \in B$ et $c \in C$ et que 6 est un élément de $A$ et de $B$. $c$ est un élément de A, B et C.

Il faut souligner que la théorie des ensembles ne se réduit pas à ce type de diagrammes. En fait, elle n'a rien à voir avec ces diagrammes qui ne sont que des instruments d'illustration. Les diagrammes ne s'utilisent que dans les premier pas dans le domaine. Pour la suite, uniquement la compréhension des définitions et des théorèmes mènera plus loin.

## 1.5 Quelques définitions et théorèmes

Nous nous limitons à des définitions et des théorèmes qu'on utilisera par la suite. Il n'est pas nécessaire d'arriver à reproduire les preuves. Il est cependant recommandable d'avoir compris les preuves au moins une fois. Par là, on devient plus habile par rapport à l'utilisation des symboles et on comprend mieux les théorèmes. Travailler les preuves permet de s'occuper de la matière sans apprendre par cœur.

Si deux ensembles contiennent exactement les mêmes éléments, alors les deux ensembles sont identiques (égaux). Ils ne sont alors qu'un seul objet. Autre formulation : un ensemble est déterminé par ses éléments et uniquement par ses éléments. Formulation plus formelle :

**Axiome 1 :** (Si pour tout $x$, $x \in A$ si est seulement si $x \in B$), alors $A = B$

Nous avons mentionné d'une manière exemplaire un axiome. Il restera seul, comme nous n'introduirons pas la théorie des ensembles d'une manière formelle.

On peut facilement prouver l'inverse :

**Théorème 1.5.1.** *Si $A = B$, alors pour tout $x$, $x \in A$ si est seulement si $x \in B$.*

*Démonstration.* Il est clair que pour tout $x$, $x \in A$ si est seulement si $x \in A$. Puisque $A = B$, nous pouvons remplace dans cette proposition le deuxième $A$ par $B$ pour obtenir : pour tout $x$, $x \in A$ si est seulement si $x \in B$. □

**Théorème 1.5.2.** $\{a, a\} = \{a\}$

*Démonstration.* Supposons que $x \in \{a, a\}$. Alors $x = a$. Comme $a \in \{a\}$, $x \in \{a\}$. Supposons de l'autre côté que $x \in \{a\}$. Alors $x = a$. Comme $a \in \{a, a\}$, il s'ensuit que $x \in \{a, a\}$. Avec l'axiome 1 on peut affirmer : $\{a, a\} = \{a\}$ □

**Important :** On peut déduire du théorème précédent qu'un ensemble contient un élément ou ne le contient pas. Il ne peut pas le contenir plusieurs fois. C'est pourquoi p.ex. $\{a, a, a\} = \{a\}$. Il n'est pas faux de mettre plusieurs fois le nom d'un objet entre les accolades, mais cela n'a pas beaucoup de sens.

**Théorème 1.5.3.** $\{a, b\} = \{b, a\}$

*Démonstration.* Chaque élément de $\{a, b\}$ est un élément de $\{b, a\}$, comme $a$ est élément de $\{b, a\}$ et $b$ est élément de $\{b, a\}$. A l'inverse tout élément de $\{b, a\}$ est élément de $\{a, b\}$. Par conséquent un objet est élément de $\{a, b\}$ si et seulement s'il est élément de $\{b, a\}$. Selon l'axiome 1 les deux ensembles sont identiques. □

**Important :** On peut déduire du théorème que l'ordre des objets à l'intérieur des accolades ne joue aucun rôle.

**Définition 1.5.4.** *$x \neq y$ si et seulement si il n'est pas le cas que $x = y$* ♢

On peut caractériser l'ensemble vide p.ex. par

$$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}.$$

Il n'y a pas d'objets qui ne sont pas identiques à eux-mêmes. Par conséquent, l'ensemble des objets qui ne sont pas identiques à eux-mêmes est vide. Sur la base des autres axiomes de la théorie des ensemble, l'ensemble $\{x \mid x \neq x\}$ existe. Comme $\{x \mid x \neq x\}$ est un ensemble, on peut déduire de la définition de „est un ensemble", qu'il existe des éléments de $\{x \mid x \neq x\}$ ou que $\{x \mid x \neq x\} = \emptyset$. Puisqu'il n'existe pas d'éléments de $\{x \mid x \neq x\}$, il en résulte $\{x \mid x \neq x\} = \emptyset$. L'ensemble vide ne contient alors pas d'éléments, car $\{x \mid x \neq x\}$ ne contient pas d'éléments.

A partir des axiomes de la théorie des ensembles on peut déduire qu'aucun ensemble ne se contient soi-même en tant qu'élément :

**Théorème 1.5.5.** *Il n'existe pas de $x$, tel que $x \in x$.*

On peut en déduire :

**Théorème 1.5.6.**

$$a \neq \{a\}$$

*Démonstration.* $a$ est un ensemble ou pas. Si $a$ est un ensemble, il ne peut contenir $a$ (théorème 1.5.5). Comme $\{a\}$ contient $a$ et $a$ ne contient pas $a$, les deux ensembles sont différents. Si $a$ n'est pas un ensemble, $a$ ne contient pas d'éléments tandis que $\{a\}$ contient un élément. Les deux objets sont alors différents. □

Selon la proposition qu'on vient de démontrer, on peut de même affirmer

$$\{a\} \neq \{\{a\}\}$$

Tandis que $\{a\}$ contient $a$ en tant qu'élément, $\{\{a\}\}$ contient l'élément $\{a\}$.

$A$ est un sous-ensemble de $B$ si et seulement si tous les éléments de $A$ sont éléments de $B$. Ainsi $\{1, 2\}$ est un sous-ensemble de $\{3, 1, 4, 2\}$, p.ex. (voir figure 1.5.2).

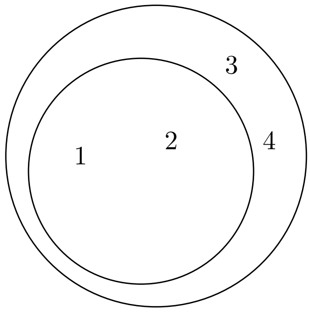


FIGURE 1.5.2 – Diagramme de Venn pour la proposition "$\{1,2\}$ est un sous-ensemble de $\{3,1,4,2\}$"

Nous introduisons pour l'expression „est un sous-ensemble de" un symbole : „$\subset$" et nous définissons :

**Définition 1.5.7.** *$A \subset B$ si est seulement si pour tout $x$, si $x \in A$ alors $x \in B$.*
*(on appelle „$\subset$" aussi „inclusion". On lit la définition de la manière suivante : „A est un sous-ensemble de B si et seulement si ....").* $\Diamond$

**Théorème 1.5.8.** *(1) Pour tout A, $A \subset A$*
*(2) Pour tout A, $\emptyset \subset A$*
*(3) Pour tout $A, B$, ($A \subset B$ et $B \subset A$) si et seulement si $A = B$*
*(4) Pour tout $A, B, C$ : si ($A \subset B$ et $B \subset C$), alors $A \subset C$ (transitivité de l'inclusion)*
*(5) Pour tout A, si $A \subset \emptyset$ , alors $A = \emptyset$.*

*Démonstration.* (1) Pour tout $x$, si $x \in A$, alors $x \in A$. Selon la définition de l'inclusion on peut en conclure : $A \subset A$

(2) La proposition „pour tout $x$, si $x \in A$ alors $x \in B$" est équivalente à „il n'y a pas de $x, x \in A$ et $x \notin B$" (un exemple illustratif : La proposition „Tous les chevaux sont des mammifères" est équivalente à la proposition „Il n'y a pas d'objet, qui soit un cheval et qui ne soit pas un mammifère"). Comme $\emptyset$ ne contient pas d'élément, il n'y a pas d'élément de A, qui ne soit pas élément de B. On peut en déduire : $\emptyset \subset A$.

(3) Supposons que $A \subset B$ et $B \subset A$. On peut en déduire pour tout $x$, si $x \in A$, alors $x \in B$ et pour tout $x$, si $x \in B$, alors $x \in A$, en d'autres mots : pour tout $x$, $x \in A$ si et seulement si $x \in B$. Selon l'axiome 1 : $A = B$.

(4) Supposons que ($A \subset B$ et $B \subset C$). Selon la définition de l'inclusion on peut en déduire : pour tout $x$, si $x \in A$, alors $x \in B$. Pour tout $x$, si $x \in B$, alors $x \in C$. Par conséquent : pour tout $x$, si $x \in A$, alors $x \in C$. Selon la définition de l'inclusion : $A \subset C$

(5) Supposons que $A \subset \emptyset$. Pour tout $x$, si $x \in A$ alors $x \in \emptyset$. Puisque $\emptyset$ ne contient pas d'élément, $A$ ne peut contenir d'élément. On peut en déduire : $A = \emptyset$. $\square$

**Important :** (1) $A \subset B$ n'exclut pas que $A = B$.
(2) Il faut soigneusement différencier la relation „d'être élément de" de la relation de l'inclusion. En fait $A \subset A$, mais non pas $A \in A$, car aucun ensemble n'est élément de lui-même. Un ensemble peut cependant être tout aussi bien élément que sous-ensemble d'un autre ensemble : p.ex. $A = \{2, 4, 6\}$,

$B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, A\}$. Dans l'exemple : $A \subset B$, $A \neq B$, $A \in B$. Exemples suplémentaires :

| | |
|---|---|
| $\{1,2\} \subset \{1,2,3,4\}$ | vrai |
| $\{1,2\} \in \{1,2,3,4\}$ | faux |
| $\{1,2\} \in \{\{1,2\},3,4\}$ | vrai |
| $\{1,2\} \subset \{\{1,2\},3,4\}$ | faux |
| $\{1,2\} \subset \{\{1,2\},1,2,3,4\}$ | vrai |
| $\{1,2\} \in \{\{1,2\},1,2,3,4\}$ | vrai |

La *différence* des ensembles $A$ et $B$ est l'ensemble des objets, qui sont éléments de $A$ sans être éléments de $B$. Ainsi $\{5,6\}$ est la différence de $\{1,2,5,6\}$ et de $\{1,2,3,4\}$ (dans cet ordre - la différence de $\{1,2,3,4\}$ et de $\{1,2,5,6\}$ est $\{3,4\}$ ; voir figure 1.5.3). La différence de deux ensembles est un ensemble.

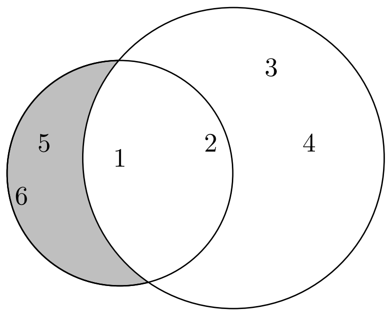


FIGURE 1.5.3 – Diagramme de Venn pour la proposition $\{5,6\}$ est la différence de $\{1,2,5,6\}$ et $\{1,2,3,4\}$ - dans cet ordre

Pour l'expression „est la différence de $A$ et de $B$" nous introduisons le symbole „$A \backslash B$" :

**Définition 1.5.9.** $A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$ ◊

**Théorème 1.5.10.** *(1)* $A \backslash A = \emptyset$
*(2)* $A \backslash \emptyset = A$

*Démonstration.* (1) Il n'y a pas d'élément de $A$, qui ne soit pas élément de $A$. Alors $A \backslash A = \emptyset$.
(2) L'ensemble des $x \in A$ de sorte que $x \notin \emptyset$ est égal à $A$, comme $\emptyset$ ne contient pas d'élément. □

Si $A$ est un sous-ensemble de $B$, le complément de $A$ (par rapport à $B$) est la différence de $B$ et de $A$. Ainsi $\{1,2\}$ est un sous-ensemble de $\{1,2,3,4\}$. Le complément de $\{1,2\}$ par rapport à $\{1,2,3,4\}$ est l'ensemble $\{3,4\}$ (voir figure 1.5.4).

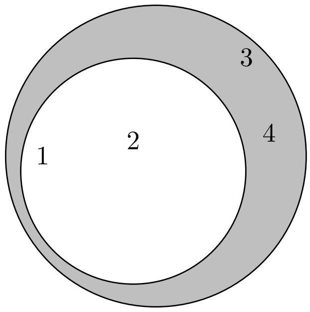


FIGURE 1.5.4 – Diagramme de Venn pour la proposition : le complément de $\{1, 2\}$ relatif à $\{1, 2, 3, 4\}$ est l'ensemble $\{3, 4\}$

Pour le complément d'un ensemble par rapport à un autre ensemble nous introduisons le symbole „$A^c$" ou „$A^c_B$", si le contexte nécessite la mention de l'ensemble englobant.

**Définition 1.5.11.** *Si $A \subset B$, alors* $(A^c_B = B \backslash A)$ $\Diamond$

Il s'agit d'une définition conditionnelle. Le complément d'un ensemble $A$ par rapport à un autre ensemble $B$ n'est défini que s'il y a un ensemble $B$, de sorte que $A$ est un sous-ensemble de $B$. On lit la définition comme „Si $A$ est un sous-ensemble de $B$, alors le complément de $A$ par rapport à $B$ est la différence de $B$ et de $A$".

L'intersection de $A$ et de $B$ est l'ensemble des objets qui sont élément de $A$ et de $B$. Ainsi $\{1, 2\}$ est l'intersection de $\{1, 2, 3, 4\}$ et de $\{1, 2, 5, 6, 7\}$ (voir figure 1.5.5)

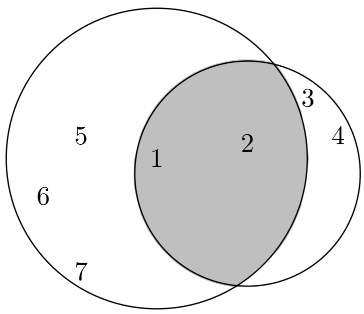


FIGURE 1.5.5 – Diagramme de Venn pour la proposition : $\{1, 2\}$ est l'intersection de $\{1, 2, 3, 4\}$ et $\{1, 2, 5, 6, 7\}$.

Pour l'intersection de $A$ et de $B$ nous introduisons la notation „$A \cap B$". Formellement nous définissons le nouveau symbole par la

**Définition 1.5.12.** $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$ $\Diamond$

**Théorème 1.5.13.** *(1)* $(A \cap B) \subset A$
*(2)* $(A \cap B) \subset B$
*(3)* $A \cap A = A$
*(4)* $A \cap \emptyset = \emptyset$
*(5) Si* $A \subset B$, *alors* $A \cap B = A$
*(6)* $A \cap B = B \cap A$ *(commutativité)*
*(7)* $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *(associativité)*

*Démonstration.* (1) $A \cap B$ est l'ensemble de tous les $x$, de sorte que $x \in A$ et $x \in B$. Si $x \in A \cap B$, alors $x \in A$. Selon la définition de l'inclusion $(A \cap B) \subset A$.

(2) La preuve suit celle de (1).

(3) $x \in A \cap A$ si et seulement si $x \in A$ et $x \in A$. Ainsi $x \in A$, si $x \in A \cap A$. Selon la définition de l'inclusion $(A \cap A) \subset A$. Supposons à l'inverse que $x \in A$. Par conséquent $x \in A$ et $x \in A$. Selon la définition de l'inclusion $A \subset (A \cap A)$. En utilisant le théorème 1.5.8(3) on peut affirmer $A \cap A = A$.

(4) Puisque $\emptyset$ ne contient pas d'élément, il n'y a pas de $x$, de sorte que $x \in A$ et $x \in \emptyset$. Par conséquent il n'y a pas de $x \in A \cap \emptyset$. Ainsi $A \cap \emptyset = \emptyset$.

(5) Selon le théorème 1.5.13(1) on peut affirmer $(A \cap B) \subset A$. Supposons que $A \subset B$ et $x \in A$. Il s'ensuit que - puisque $A$ est un sous-ensemble de $B$ - $x \in B$. Par conséquent $x \in A$ et $x \in B$. Avec cela $x \in A \cap B$. Selon la définition de l'inclusion il s'ensuit que $A \subset (A \cap B)$ et par conséquent - avec le thérorème 1.5.8(3) - $A \cap B = A$ (sous condition que $A \subset B$).

(6) Supposons que $x \in A \cap B$. Il s'ensuit que $x \in A$ et $x \in B$. Par conséquent $x \in B$ et $x \in A$. Selon la définition de l'intersection $x \in B \cap A$. Ainsi $(A \cap B) \subset (B \cap A)$. De manière analogue nous déduisons $(B \cap A) \subset (A \cap B)$. Selon le théorème 1.5.8(3) $(A \cap B) = (B \cap A)$.

(7) Supposons que $x \in (A \cap B) \cap C$. Il s'ensuit que $x \in A \cap B$ et $x \in C$. Par conséquent ($x \in A$ et $x \in B$) et $x \in C$. On peut en déduire que $x \in A$ et ($x \in B$ et $x \in C$) et par là $x \in A$ et $x \in B \cap C$ et finalement $x \in A \cap (B \cap C)$. Il s'ensuit que $((A \cap B) \cap C) \subset (A \cap (B \cap C))$. De manière analogue nous déduisons que $(A \cap (B \cap C)) \subset ((A \cap B) \cap C)$. Par conséquent $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. □

**Définition 1.5.14.** *Deux ensembles $A$ et $B$ sont disjoints si et seulement si $A \cap B = \emptyset$ (voir figure 1.5.6)* ◊

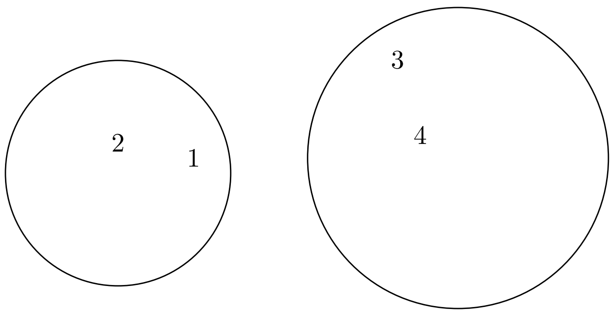


FIGURE 1.5.6 – Diagramme de Venn pour la proposition : les ensembles $\{1, 2\}$ et $\{3, 4\}$ sont disjoints

L'union de deux ensembles $A$ et $B$ est l'ensemble des objets qui sont éléments de $A$ ou de $B$. Ainsi l'union de $\{1, 2\}$ et $\{2, 3, 4\}$ est l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ (voir figure 1.5.7).

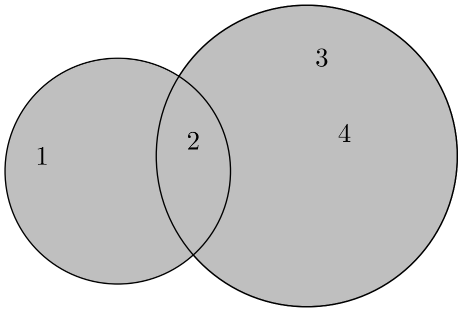


FIGURE 1.5.7 – Diagramme de Venn pour l'union des ensembles $\{1, 2\}$ et $\{2, 3, 4\}$

Pour l'expression „l'union de $A$ et $B$" nous introduisons la notation „$A \cup B$", d'une manière plus formelle nous fournissons la

**Définition 1.5.15.** $A \cup B = \{x \mid x \in A \textit{ ou } x \in B\}$ ◊

**Théorème 1.5.16.** *(1)* $A \subset (B \cup A)$
*(2)* $B \subset (B \cup A)$
*(3)* $A \cup A = A$
*(4)* $A \cup \emptyset = A$
*(5) Si* $A \subset B$*, alors* $(A \cup B = B)$
*(6)* $A \cup B = B \cup A$ *(commutativité)*
*(7)* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *(associativité)*
*(8)* $A \cap (B \cup C) = ((A \cap B) \cup (A \cap C))$ *(distributivité)*
*(9)* $A \cup (B \cap C) = ((A \cup B) \cap (A \cup C))$ *(distributivité)*

*Démonstration.* (1) Supposons que $x \in A$. Il s'ensuit que $x \in A$ ou $x \in B$. Par conséquent $x \in A \cup B$ et avec ce résultat $A \subset (B \cup A)$.

(2) La preuve suit celle de (1).

(3) Supposons que $x \in A \cup A$. On peut en déduire que $x \in A$ ou $x \in A$. Par conséquent $x \in A$ et par là $A \cup A \subset A$. Supposons que $x \in A$. On peut en déduire que $x \in A$ ou $x \in A$ et par là $x \in A \cup A$. Il s'ensuit que $A \subset A \cup A$. Finalement il s'ensuit que $A \cup A = A$.

(4) Supposons que $x \in A \cup \emptyset$. Ainsi $x \in A$ ou $x \in \emptyset$. Comme il n'y a pas de $x$ tel que $x \in \emptyset$ on peut en déduire que $x \in A$. Ainsi $A \cup \emptyset \subset A$. Supposons maintenant que $x \in A$. On peut en déduire que $x \in A$ ou $x \in \emptyset$ et par conséquent $x \in A \cup \emptyset$. Ainsi $A \subset A \cup \emptyset$. Finalement on obtient $A \cup \emptyset = A$.

(5) (i) Supposons que $A \subset B$ et $x \in A \cup B$. Il s'ensuit que $x \in A$ ou $x \in B$. Supposons d'abord que $x \in A$. Selon la première hypothèse on peut en déduire que $x \in B$. Supposons maintenant que $x \in B$. Indépendamment du fait que $x \in A$ ou $x \in B$ on peut déduire que $x \in B$. Par conséquent $A \cup B \subset B$. (ii) Supposons que $x \in B$. On peut en déduire que $x \in A$ ou $x \in B$ et par là $x \in A \cup B$. Par conséquent $B \subset A \cup B$.
On peut déduire de (i) et (ii) $A \cup B = B$ (si $A \subset B$).

(6) Supposons que $x \in A \cup B$. Par conséquent $x \in A$ ou $x \in B$. Il s'ensuit que $x \in B$ ou $x \in A$ et par conséquent $x \in B \cup A$. Ainsi $A \cup B \subset B \cup A$. De manière analogue nous montrons que $B \cup A \subset A \cup B$. Ces résultats impliquent $A \cup B = B \cup A$.

(7) Supposons que $x \in A \cup (B \cup C)$. Ainsi $x \in A$ ou $x \in B \cup C$. De plus on peut en déduire

$x \in A$ ou ($x \in B$ ou $x \in C$) et ainsi ($x \in A$ ou $x \in B$) ou $x \in C$. Par conséquent $x \in A \cup B$ ou $x \in C$ et par là $x \in (A \cup B) \cup C$. C'est pourquoi $A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$. De manière analogue on peut prouver que $(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$. En résumant ces résultats on obtient $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

(8) Supposons que $x \in A \cap (B \cup C)$. Ainsi $x \in A$ et $x \in B \cup C$ et par conséquent $x \in A$ et ($x \in B$ ou $x \in C$). On en déduit que ($x \in A$ et $x \in B$) ou ($x \in A$ et $x \in C$). Cela permet d'affirmer que $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$ et dans un pas supplémentaire $x \in ((A \cap B) \cup (A \cap C))$. Ainsi $A \cap (B \cup C) \subset ((A \cap B) \cup (A \cap C))$. A l'inverse supposons que $x \in ((A \cap B) \cup (A \cap C))$. Ainsi $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$, ce qui implique ($x \in A$ et $x \in B$) ou ($x \in A$ et $x \in C$). On peut en déduire que $x \in A$ et ($x \in B$ ou $x \in C$). Ainsi $x \in A$ et $x \in B \cup C$ et par conséquent $x \in A \cap (B \cup C)$ . Ainsi $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$ . En résumant ces résultats on obtient $A \cap (B \cup C) = ((A \cap B) \cup (A \cap C))$.

(9) Supposons que $x \in A \cup (B \cap C)$. Il s'ensuit que $x \in A$ ou $x \in B \cap C$. Ainsi $x \in A$ ou ($x \in B$ et $x \in C$). Par conséquent ($x \in A$ ou $x \in B$) et ($x \in A$ ou $x \in C$). On peut en déduire que $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$, ce qui implique $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Ainsi $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$. De manière analogue on peut déduire que $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$. En résumant ces résultats on obtient $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. □

L'ensemble des parties d'un ensemble $A$ est l'ensemble de tous les sous-ensembles de $A$. Ainsi l'ensemble des parties de $\{1, 2, 3\}$ est l'ensemble

$$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

D'une manière plus formelle nous fournissons la

**Définition 1.5.17.** $\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subset A\}$ ♢

On lit la définition de la manière suivante : „L'ensemble des parties de $A$ est l'ensemble de tous les ensembles $B$, de sorte que $B$ est un sous-ensemble de $A$".

**Définition 1.5.18.** *Si $A$ contient un nombre fini d'éléments, $|A|$ est le nombre d'éléments de l'ensemble $A$* ♢

On peut démontrer que l'ensemble des parties $\mathcal{P}(A)$ d'un ensemble fini $A$ contient $2^n$ éléments ($n$ est le nombre d'éléments de $A$, un ensemble est fini s'il contient un nombre fini d'éléments). On peut alors écrire pour des ensembles finis $A$

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}.$$

**Important :** Les théorèmes prouvés ci-dessus impliquent que pour tout $A : \emptyset \subset A$ et $A \subset A$. Par conséquent on peut affirmer pour des ensembles arbitraires $A : \emptyset \in \mathcal{P}(A)$ et $A \in \mathcal{P}(A)$.

### 1.5.1 Exercices

1. Indiquer selon la notation de l'énumération les ensembles suivants
   (a) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}^* \text{ et } x < 10\}$
   (b) $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } 3 < x < 8\}$
   (c) $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ et } -3 < x < 3\}$ ($\mathbb{Z}$ = ensemble des nombres entiers)
   (d) $E = \{x \mid x = 2n \text{ et } n \in \mathbb{N}^*\}$
   (e) $F = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ et } \frac{x}{4} \in \mathbb{Z}\}$

2. Indiquer selon la notation de la propriété caractéristique les ensembles suivants
   (a) $A = \{$Bâle, Berne, Bellinzone$\}$
   (b) $B = \{$nord, sud, est, ouest$\}$
   (c) $D = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$
   (d) $E = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, ...\}$
   (e) $G = \{2, 4, 6, 8\}$
3. Supposons que $A = \{a, b, c, d, 1, 2, 3\}$ et $B = \{a, d, 2\}$. Déterminer par énumération des éléments l'ensemble suivant : $E = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$
4. Est-ce que les ensembles suivants sont identiques ?
   (a) $A = \{a, b, c, d\}$ et $B = \{c, a, d, b\}$
   (b) $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{123\}$
   (c) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } \frac{x}{5} \in \mathbb{N} \text{ et } 10 < x < 15\}$ et
   $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } x \text{ est un nombre premier et } 24 < x < 28\}$
   (d) $A = \{a, 1, 2\}$ et $B = \{1, 2, \{a\}\}$
   (e) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}^* \text{ et } x \text{ est impair}\}$ et $B = \{x \mid \text{il y a un } z \in \mathbb{N}^* \text{ de sorte que } x = 2z + 1\}$
   (f) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}^* \text{ et } x \text{ est impair}\}$ et $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}^* \text{ et } \frac{x}{2} \in \mathbb{N}\}$
5. Sous quelles conditions les ensembles $A$ et $B$ sont-ils identiques ?
   (a) $A = \{a, b, c, d\}$ et $B = \{a, 1, c, b\}$
   (b) $A = \{a, b\}$ et $B = \{1, 2\}$
   (c) $A = \{a, b, c, d, e\}$ et $B = \{1, 2, a, c, e\}$
6. Nous considérons les ensembles $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, 1\}$ et $C = \{A, B, \{1\}\}$. Est-ce que les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
   (a) $a \in A$
   (b) $2 \notin B$
   (c) $\{a\} \in A$
   (d) $\{a, b\} \in B$
   (e) $B \in C$
   (f) $\{a, b\} \in C$
   (g) $1 \in C$
   (h) $\{1\} \in C$
7. Est-ce que les propositions suivantes sont vraies ? Si non, modifier les affirmations de sorte qu'il en résulte des propositions vraies (souvent plusieurs possibilités)
   (a) $1 \subset \{1, 2, 3\}$
   (b) $\{a\} \in \{2, a, b\}$
   (c) $\{4, 6\} \subset \{6, 4\}$
   (d) $\{1, 2, 3\} \in \mathbb{N}$
   (e) $\emptyset \subset \{a, b, c\}$
   (f) $\emptyset \subset \{\emptyset, \{a, b\}\}$
   (g) $\emptyset \in \emptyset$
   (h) $\emptyset \subset \{\emptyset\}$

   (i) $\{\emptyset\} \subset \emptyset$

8. Supposons que $E = \{a, b, c, d, e\}$ et que $A := \{a, c\}$ et $B := \{a, b, c, e\}$. Chercher tous les sous-ensembles $X$ de $E$ de sorte que $A \cup X = B$.

9. Indiquer pour les équations (affirmations) suivantes les conditions nécessaires et suffisantes qui garantissent leur vérité (parfois plusieurs possibilités).
   (a) $A \cap B = A$
   (b) $A \cap (B \cup C) = A$
   (c) $A \cup B = A$
   (d) $A \cup (B \cap C) = A$
   (e) $A \cap B = A \cup B$

10. Supposons que $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Former l'ensemble des parties de $E$.

### 1.5.2 Solutions

1. On obtient :
   (a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
   (b) $B = \{4, 5, 6, 7\}$
   (c) $C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
   (d) $E = \{2, 4, 6, 8, 10, ........\}$
   (e) $F = \{........ - 16, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16, ....\}$

2. On obtient :
   (a) $A = \{x \mid x$ est le chef-lieu d'un canton et la première lettre du nom de $x$ est „$B$“$\}$
   (b) $B = \{x \mid x$ est un point cardinal$\}$
   (c) $D = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ et $x \neq 0$ et $-4 < x < 4\}$
   (d) $E = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ et $\frac{x}{6} \in \mathbb{N}^*\} = \{x \mid x = 6y$ et $y \in \mathbb{N}^*\}$
   (e) $G = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ et $\frac{x}{2} \in \mathbb{N}^*$ et $x < 10\} = \{x \mid x = 2y$ et $y \in \mathbb{N}^*$ et $x < 10\}$

3. $E = \{b, c, 1, 3\}$

4. On obtient :
   (a) Oui
   (b) Non
   (c) Oui, A et B sont vides !
   (d) Non, comme $a \neq \{a\}$
   (e) Non, comme $0 \notin \mathbb{N}^*$, 1 n'appartient pas à $B = \{x \mid$ il existe un $z \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = 2z+1\}$.
   (f) Non

5. On obtient :
   (a) Si $d = 1$, alors $A = B$.
   (b) Si $a = 1$ et $b = 2$ ou si $a = 2$ et $b = 1$, alors $A = B$.
   (c) Si $d = 1$ et $b = 2$ ou si $d = 2$ et $b = 1$, alors $A = B$.

6. On obtient :
   (a) vrai
   (b) vrai, sauf si $2 = a$ ou $2 = b$
   (c) faux
   (d) faux
   (e) vrai
   (f) vrai
   (g) faux
   (h) vrai
7. On obtient :
   (a) non. „$1 \in \{1, 2, 3\}$“ est vrai. (ou : $\{1\} \subset \{1, 2, 3\}$)
   (b) non : $\{a\} \subset \{2, a, b\}$ ;
   (c) oui
   (d) non : $\{1, 2, 3\} \subset \mathbb{N}$
   (e) oui ;
   (f) oui ;
   (g) non : $\emptyset \subset \emptyset$ ;
   (h) oui ;
   (i) non : (le premier ensemble contient un élément, à savoir l'ensemble vide, le deuxième ensemble ne contient pas d'élément !)
8. $\{b, e\}, \{a, b, e\}, \{b, c, e\}, \{a, b, c, e\}$
9. On obtient :
   (a) $A \subset B$ si et seulement si $A \cap B = A$
   (b) $A \cap (B \cup C) = A$ si et seulement si $A \subset (B \cup C)$
   (c) $B \subset A$ si et seulement si $A \cup B = A$
   (d) $A \cup (B \cap C) = A$ si et seulement si $(B \cap C) \subset A$
   (e) $A \subset B$ et $B \subset A$ si et seulement si $A \cap B = A \cup B$
   (Ces cinq propositions sont des théorèmes qu'on pourrait prouver !).
10. $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\},$
    $\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\},$
    $\{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\},$
    $\{3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}, E\}$

## 1.6 Couples et relations

### 1.6.1 Couples

Nous appelons les ensembles qui contiennent deux éléments „paire (sans ordre)“ : p.ex. $\{a, b\}$ avec $a \neq b$. L'ordre des lettres à l'intérieur des accolades ne joue aucun rôle puisque $\{a, b\} = \{b, a\}$. L'ordre joue en mathématique - comme dans le reste de la vie - un rôle important. Si Antoine est le père de Pierre, Pierre n'est pas le père d'Antoine. Si $5 > 3$, alors 3 n'est pas supérieur à 5. etc. Les couples (paires ordonnées) sont des ensembles spécifiques qui devraient nous permettre d'exprimer l'ordre. Nous les définissons de la manière suivante :

**Définition 1.6.1.** $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$ ◊

$(x, y)$ est un couple. Nous disons que „$x$" apparaît en première position du couple $(x, y)$ et que „$y$" survient à la deuxième position de ce couple. Nous appelons „$x$" la première composante du couple et „$y$" la deuxième composante du couple - les composantes ne sont pas des éléments du couple. Les couples sont des ensembles qui contiennent des ensembles qui contiennent à leur tour les composantes comme éléments.

Pour démontrer que les couples arrivent à exprimer l'ordre nous pouvons prouver la proposition suivante :

**Théorème 1.6.2.** *Si $x \neq y$, alors $(x, y) \neq (y, x)$*

*Démonstration.* Puisqu'un ensemble $A$ est égal à un ensemble $B$ si et seulement si $A$ et $B$ contiennent les mêmes éléments, il faut montrer que $(x, y)$ et $(y, x)$ ne contiennent pas les mêmes éléments. Que cela soit le cas on voit immédiatement :
$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$
$(y, x) = \{\{y\}, \{x, y\}\}$
Tandis que $(x, y)$ contient l'ensemble $\{x\}$ comme élément, $(y, x)$ ne contient pas cet objet comme élément, car $x \neq y$. □

Au lieu de prouver ce théorème on pourrait tout aussi bien prouver le théorème suivant pour montrer que les couples arrivent à exprimer l'ordre :

**Théorème 1.6.3.** $(x, y) = (z, u)$ *si et seulement si* $x = z$ *et* $y = u$.

*Démonstration.* (a) Supposons que $(x, y) = (z, u)$. En utilisant la définition, on obtient

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{z\}, \{z, u\}\}.$$

Tous les éléments de $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ sont alors des éléments de $\{\{z\}, \{z, u\}\}$ et tous les éléments de $\{\{z\}, \{z, u\}\}$ sont des éléments de $\{\{x\}, \{x, y\}\}$.
$z = u$ ou $z \neq u$.
(i) Si $z = u$, $\{\{z\}, \{z, u\}\} = \{\{z\}\}$, et comme les éléments de $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ sont des éléments de $\{\{z\}\}$, $\{x\}, \{x, y\} \in \{\{z\}\}$ et $\{x\} = \{x, y\} = \{z\}$. Alors $x = z$ et $y = u$, car $x = z = y = u$.
(ii) $z \neq u$. Puisque les éléments de $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ sont des éléments de $\{\{z\}, \{z, u\}\}$, $\{x\} \in \{\{z\}, \{z, u\}\}$ et par conséquent $\{x\} = \{z\}$ ou $\{x\} = \{z, u\}$. Comme $z \neq u$, la deuxième équation est fausse - les deux ensembles ne contiennent pas les mêmes éléments. On peut en conclure : $\{x\} = \{z\}$ et $x = z$. De plus, $\{x, y\} \in \{\{z\}, \{z, u\}\}$.
Puisque $\{x, y\} \neq \{z\}$, $\{x, y\} = \{z, u\}$ et à cause de $x = z$, $y = u$.
(b) Si $x = z$ et $y = u$, on obtient $(z, u)$ à partir de $(x, y)$, en remplaçant en $(x, y)$ par $x$ par $z$ et $y$ par $u$ (remplacer ce qui est identique). □

Les couples peuvent apparaître dans d'autres couples comme composantes. Si un couple est la première composante d'un autre couple nous obtenons des triplets, p.ex. $((y, z), x)$.

**Définition 1.6.4.** *(i)* $((y, z), x)$ *est un triplet.*
*(ii)* $(y, z, x) := ((y, z), x)$ ◊

**Remarque 1.6.5.** $(y, z, x) = ((y, z), x) \neq (y, (z, x))$. *Tandis qu'à gauche la première composante est un couple, à droite la première composante est $y$. Si l'on veut exprimer $(y, (z, x))$ on ne peut pas renoncer aux parenthèses !* ◊

Un triplet peut apparaître comme première composante d'un couple, p.ex. $((y, z, x), u)$. Nous appelons de tels couples „quadruplet".

**Définition 1.6.6.** $(y,z,x,u) := ((y,z,x),u)$ *est un quadruplet.* ◊

Un quadruplet peut apparaître comme première composante d'un couple. Nous appelons de tels couples 5-uplet (ou quintuplet). D'une manière générale un $n-1$-uplet peut apparaître comme première composante d'un couple et on obtient un $n$-uplet. Nous définissons d'une manière plus formelle et récursive :

**Définition 1.6.7.** *(i)* $(y,z)$ *est un 2-uplet (= couple).*
*(ii) le couple* $((x),r)$ *est un n-uplet si et seulement si* $(x)$ *est un* $n-1$*-uplet (n>2).*
*(iii)* $(x,z) := ((x),z)$ ◊

**Exemple 1.6.8.** *Est-ce que* $(5,6,7,8,9)$ *est un 5-uplet ? Selon la définition* $(5,6,7,8,9) = ((((5,6),7),8),9)$. *De plus* $((((5,6),7),8),9)$ *est un 5-uplet si et seulement si* $(((5,6),7),8)$ *est un 4-uplet.* $(((5,6),7),8)$ *est un 4-uplet si et seulement si* $((5,6),7)$ *est un 3-uplet (= triplet).* $((5,6),7)$ *est un 3-uplet si et seulement si* $(5,6)$ *est un 2-uplet (= couple). Comme* $(5,6)$ *est un 2-uplet,* $((5,6),7)$ *est un 3-uplet,* $(((5,6),7),8)$ *est un 4-uplet et* $((((5,6),7),8),9)$ *un 5-uplet. L'exemple montre que la définition détermine d'une manière récursive les n-uplets pour tout n.* ◊

**Remarque 1.6.9.** *Souvent on écrit* $(x_1,...,x_n)$ *pour symboliser un n-uplet .* ◊

**Exemple 1.6.10.** *(Berne, Bâle, Zurich, Paris, Londres) ;* $(5,4,6,4,38,4,3,4)$ ◊

**Théorème 1.6.11.** $(a,a) = \{\{a\}\} \neq \{a\}$

*Démonstration.* $(a,a) = \{\{a\},\{a,a\}\} = \{\{a\},\{a\}\} = \{\{a\}\} \neq \{a\}$ □

**Théorème 1.6.12.** $(a,a,a) \neq (a,a)$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}(a,a,a) &= ((a,a),a)\\ &= \{\{(a,a)\},\{(a,a),a\}\}\\ &= \{\{\{\{a\}\}\},\{\{\{a\}\},a\}\}\\ &\neq \{\{a\}\}\end{aligned}$$

□

**Important :** Ainsi les couples - par opposition au paires sans ordre - peuvent exprimer combien de fois un objet surgit dans un autre objet, puisque $\{a,a,a\} = \{a,a\} = \{a\}$, tandis que $(a,a,a) \neq (a,a)$.

### 1.6.2 Relations

Une relation est un ensemble qui ne contient que des couples comme éléments. Définition plus formelle :

**Définition 1.6.13.** *A est une relation si et seulement si pour tout x, si* $x \in A$*, alors il y a un y et un z de sorte que* $(y,z) = x$. ◊

**Exemple 1.6.14.** $A = \{$*(Antoine, Pierre),*$(5,6)$*,(Paris, France)*$\}$
$B = \{(x,y) \mid x$ *est le père de* $y\}$
$C = \{(x,y) \mid x$ *est plus grand que* $y\}$
$H = \{(x,y) \mid x$ *et* $y$ *sont des nombres naturels et* $x < y\}$

*$A, B, C$ et $H$ sont des relations.*
*$\emptyset$ est une relation (il n'y a pas de $x \in \emptyset$ sans que $x$ soit un couple).* $\Diamond$

**Théorème 1.6.15.** *Si $A$ est une relation, alors pour tout $B$, si $B \subset A$, alors $B$ est une relation.*

Lecture informelle du théorème : Si $A$ est une relation, alors tous les sous-ensembles de $A$ sont des relations.

Nous appelons des relations, qui ne contiennent que des $n$-uplets : „relations $n$-aires“.

Nous considérons deux ensembles $A$ et $B$. Nous pouvons former l'ensemble de tous les couples qui contiennent comme première composante un élément de $A$ et comme deuxième composante un élément de $B$. La relation produite par là est appelée „produit cartésien *de $A$ par $B$*“ (René Descartes, 1596 - 1650, mathématicien, physicien et philosophe français). Ainsi

$$\{(1,2),(1,3),(1,10),(2,2),(2,3),(2,10)\}$$

est le produit cartésien de $\{1,2\}$ par $\{2,3,10\}$.
Nous introduisons pour le produit cartésien de $A$ par $B$ la notation suivante :
$A \times B$ (on peut lire „$A$ croix $B$“ ou „$A$ fois $B$“) et nous définissons d'une manière plus formelle :

**Définition 1.6.16.** $A \times B := \{(x,y) \mid x \in A \text{ } et \text{ } y \in B\}$ $\Diamond$

Pour des ensembles finis $A$ et $B$ $A \times B$ contient $n \cdot m$ éléments de sorte que $n$ est le nombre d'éléments de $A$ et $m$ est le nombre d'éléments de $B$. Avec la notation introduite (voir page 11) pour le nombre d'éléments d'un ensemble on peut affirmer :

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|\,.$$

Chaque sous-ensemble de $A \times B$ est une relation !

**Définition 1.6.17.** *$R$ est une relation de $A$ vers $B$ si et seulement si $R \subset A \times B$.* $\Diamond$

Ainsi

$$\{(1,2),(2,2)\} \subset \{(1,2),(1,3),(1,10),(2,2),(2,3),(2,10)\} = \{1,2\} \times \{2,3,10\}$$

et $\{(1,2),(2,2)\}$ est une relation de $\{1,2\}$ vers $\{2,3,10\}$.

L'ordre de formation du produit cartésien joue un rôle important comme $A \times B$ est différent de $B \times A$ si et seulement si $A \neq B$ (non-commutativité du produit cartésien), comme montre l'exemple suivant :

$$\begin{aligned}&\{1,2\} \times \{3,4\} = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\} \neq \\ &\{3,4\} \times \{1,2\} = \{(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}\end{aligned}$$

Nous pouvons former le produit cartésien de manière répétée :
p.ex. $E = (A \times B) \times C$. Les éléments de $E$ sont des triplets. Ainsi avec
$A = \{1,2\}, B = \{1,3,4\}$ et $C = \{10,8\}$ :

$$\begin{aligned}(A \times B) \times C &= \{(1,1),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4)\} \times \{10,8\} \\ &= \{(1,1,10),(1,3,10),(1,4,10),(2,1,10),(2,3,10),(2,4,10), \\ &(1,1,8),(1,3,8),(1,4,8),(2,1,8),(2,3,8),(2,4,8)\}\end{aligned}$$

Il faut souligner que $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$ (le produit cartésien n'est pas associatif). Ainsi

$$\begin{aligned}A \times (B \times C) &= \{1,2\} \times \{(1,10),(1,8),(3,10),(3,8),(4,10),(4,8)\} \\ &= \{(1,(1,10)),(1,(1,8)),(1,(3,10)),(1,(3,8)),(1,(4,10)),(1,(4,8)), \\ &(2,(1,10)),(2,(1,8)),(2,(3,10)),(2,(3,8)),(2,(4,10)),(2,(4,8))\}\end{aligned}$$

On peut former le produit cartésien en utilisant quatre ensembles, p.ex. :

$$E = (((A \times B) \times C) \times D).$$

Les éléments de $E$ sont des 4-uplets et $E$ est une relation 4-aire.

D'une manière générale et récursive nous définissons :

**Définition 1.6.18.** $\underset{i=1}{\overset{2}{\times}} A_i := A_1 \times A_2$

$\underset{i=1}{\overset{n}{\times}} A_i := \left( \underset{i=1}{\overset{n-1}{\times}} A_i \right) \times A_n$ *pour* $n > 2$. ◊

Les éléments de $\underset{i=1}{\overset{n}{\times}} A_i$ sont des $n-$uplets et $\underset{i=1}{\overset{n}{\times}} A_i$ est une relation $n$-aire.

**Exemple 1.6.19.** *Pour illustrer le fonctionnement de la définition un exemple. On obtient :*

$$\begin{aligned}
\underset{i=1}{\overset{5}{\times}} A_i &= \left( \underset{i=1}{\overset{4}{\times}} A_i \right) \times A_5 \\
&= \left( \left( \underset{i=1}{\overset{3}{\times}} A_i \right) \times A_4 \right) \times A_5 \\
&= \left( \left( \left( \underset{i=1}{\overset{2}{\times}} A_i \right) \times A_3 \right) \times A_4 \right) \times A_5 \\
&= (((A_1 \times A_2) \times A_3) \times A_4) \times A_5
\end{aligned}$$

◊

**Définition 1.6.20.** $A^n := \underset{i=1}{\overset{n}{\times}} A_i$, *si* $A_i = A_j$ *pour* $i, j \in N_n^*$ *(le produit cartésien n-ième de l'ensemble A)* ◊

**Exemple 1.6.21.** *(1) Avec* $A_1 = \{1, 2\}, A_2 = \{3, 4\}$ *et* $A_3 = \{1, 5, 6\}$

$$\begin{aligned}
\underset{i=1}{\overset{3}{\times}} A_i = \{&(1, 3, 1), (1, 4, 1), (2, 3, 1), (2, 4, 1), (1, 3, 5), (1, 4, 5), (2, 3, 5), (2, 4, 5), \\
&(1, 3, 6), (1, 4, 6), (2, 3, 6), (2, 4, 6)\}
\end{aligned}$$

*(2) Avec* $A = \{0, 1\}$

$$\begin{aligned}
A^4 = \{&(0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), \\
&(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), \\
&(0, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1)(1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\}
\end{aligned}$$

*La relation 4-aire doit contenir* $2^4 = 16$ *éléments.* ◊

Les relations peuvent avoir différentes propriétés : symétrie, asymétrie, réflexivité, transitivité, etc. Nous définissions quelques unes des ces propriétés qui jouent parfois un certain rôle en mathématiques.

**Symétrie *et* asymétrie**

**Définition 1.6.22.** *A est symétrique si et seulement si A est une relation et pour tout* $(x, y) \in A$ *il y a un* $(y, x) \in A$. ◊

La relation suivante est symétrique :

$$\{(3,4),(4,3)\}.$$

La relation suivante n'est pas symétrique :

$$\{(3,4),(4,5)\}$$

Exemples moins formels : Si Antoine est aussi grand que Berthe, alors Berthe est aussi grande qu'Antoine. Ainsi la relation $G = \{(x, y) \mid x$ est aussi grand que $y\}$ est symétrique. Si Antoine est le frère de Berthe, Berthe n'est pas le frère d'Antoine. Ainsi la relation $B = \{(x, y) \mid x$ est le frère de $y\}$ n'est pas symétrique.

**Définition 1.6.23.** *A est asymétrique si et seulement si A est une relation et pour tout $(x, y) \in A$ il n'y a pas de $(y, x) \in A$.* ◊

La relation suivante est asymétrique :

$$\{(3,4),(4,5)\}.$$

La relations suivante n'est pas asymétrique.

$$\{(3,4),(4,3),(5,4)\}$$

Exemples moins formels : Si $a$ est le père de $b$, alors $b$ n'est pas le père de $a$. Cela vaut pour tous les couples $(a, b)$, de sorte que $a$ est le père de $b$. Ainsi la relation d'être le père de quelqu'un est asymétrique.
La relation „$>$" est asymétrique.
La relation „est frère de" n'est pas asymétrique. Si Antoine est le frère de Pierre, Pierre est le frère d'Antoine.
Une relation peut être ni asymétrique ni symétrique :

$$\{(3,4),(4,3),(5,7)\}$$

La relation „est frère de" est ni asymétrique ni symétrique comme il y a des couples $(x, y) \in F$ pour lesquels $(y, x) \in F$ pourvu que x et y soient du même genre et des couples $(x, y) \in F$, pour lesquels $(y, x) \notin F$, pourvu que x et y ne soient pas du même genre.

#### Réflexivité et irréflexivité

**Définition 1.6.24.** *Une relation A est réflexive si et seulement si pour toutes les composantes x de ses couples il y a un couple $(x, x) \in A$.* ◊

Formulation alternative : la relation $A$ est réflexive si et seulement si pout tout $(x, y) \in R$, $(x, x) \in R$ et $(y, y) \in R$. La relation de l'identité p.ex. est réflexive (tout objet est identique à soi-même).
La relation suivante est réflexive :

$$A = \{(3,3),(4,4),(5,5),(5,4),(4,5)\}$$

$A$ est de plus symétrique.

$$B = \{(3,3),(4,4),(5,5),(5,4),(4,3)\}$$

$B$ est réflexif, mais ni asymétrique ni symétrique.

$$C = \{(3,3), (4,4), (5,5), (5,6)\}.$$

$C$ n'est pas réflexif, comme 6 apparaît comme composante dans un couple sans que $(6,6)$ soit élément de $C$.

**Définition 1.6.25.** *Une relation $A$ est irréflexive si et seulement si pour aucune composante $x$ de ses couples il y a un couple $(x,x) \in A$.* $\Diamond$

„est plus grand que" est irréflexif. Il n'existe aucun objet qui est plus grand que lui même. „$<$" est irréflexif. Il n'existe aucun nombre qui est inférieur à lui-même. Une relation peut être ni réflexive ni irréflexive. p.ex. $\{(a,a)(a,b)(b,c)\}$. Certaines personnes se soignent, d'autre pas.

**Transitivité**

**Définition 1.6.26.** *Une relation $A$ est transitive si et seulement si pour tout $(x,y)$, $(y,z) \in A$ alors $(x,z) \in A$.* $\Diamond$

Formulation équivalente : Une relation $A$ est transitive si et seulement s'il n'existe pas de couples $(x,y)$, $(y,z) \in A$, sans que $(x,z) \in A$. Si $(x,y)$, $(y,z)$ ne surviennent pas en $A$, il n'y a alors rien à vérifier !
Si $a$ est plus grand que $b$ et $b$ est plus grand que $c$, alors $a$ est plus grand que $c$. Cela est valable pour tout $a$, $b$ et $c$. La relation „être plus grand que" est alors transitive. La relation „d'être le père de" n'est pas transitive : Si $a$ est le père de $b$ et $b$ est le père de $c$, alors $a$ n'est pas le père de $c$.
Un autre exemple :

$$A = \{(5,3), (3,6), (5,6), (6,7), (3,7)\}.$$

$A$ n'est pas transitif.

$$B = \{(5,3), (3,6), (5,6), (6,7)\}$$

$B$ n'est pas transitif, comme $(3,7)$ n'est pas élément de $B$.

$$C = \{(5,3), (5,6)\}$$

est transitif, puisqu'il n'y a pas de couples $(x,y)$, $(y,z) \in C$ sans que $(x,z) \in C$. Ainsi peut-on affirmer pour tous les couples $(x,y)$ et $(y,z) \in C$ : $(x,z) \in C$.

**Exemple 1.6.27.** *Préférer (Antoine préfère le vin à la bière) est une relation asymétrique, irréflexive et transitive. On ne préfère pas le vin au vin (irréflexivité). Si on préfère le vin à la bière, on ne préfère pas la bière au vin (asymétrie). Si on préfère le vin à la bière et la bière à l'eau, on préfère le vin à l'eau (transitivité).* $\Diamond$

## 1.7 Relations d'équivalence et partitions

**Définition 1.7.1.** *$R$ est une relation d'équivalence si et seulement si $R$ est une relation transitive, symétrique et réflexive.*

$\Diamond$

Ainsi „est parent de" n'est pas une relation d'équivalence, puisque la parenté n'est pas transitive. De l'autre côté „être de même taille que" est une relation d'équivalence. De même „$=$" est une relation d'équivalence.

Nous disons que $R$ est une relation sur l'ensemble $A$ si et seulement si tous les éléments de $A$ apparaissent en tant que composantes d'un élément de $R$ et que seul de tels éléments sont utilisés comme composantes de $R$. Plus formellement :

**Définition 1.7.2.** *$R$ est une relation sur l'ensemble $A$ si et seulement si $\{x|\ (x, y) \in R$ ou $(y, x) \in R\} = A$.* ◊

Si $R$ est une relation d'équivalence sur $A$, nous pouvons considérer un élément $x \in A$ et former l'ensemble suivant :

$$M_x := \{y \mid (x, y) \in R\} \tag{1.7.1}$$

$M_x$ est alors l'ensemble des $y$, qui apparaissent à la deuxième position des couples avec $x$ à leur première position - c'est à dire l'ensemble des $y$ avec lesquelles $x$ est en relation $R$. Pour tout $x \in A$ on peut former un tel ensemble. On peut prouver pour ces ensembles, si $R$ est une relation d'équivalence :

1. $M_x = M_y$ si et seulement si $(x, y) \in R$.
2. $M_x \cap M_y = \emptyset$ si et seulement si $(x, y) \notin R$.
3. $\bigcup\limits_{x \in A} M_x = A$

( $\bigcup\limits_{x \in A} M_x$ ist l'union de tous le $M_x$, tel que $x \in A$). $\bigcup\limits_{i=1}^{2} M_i = M_1 \cup M_2$; $\bigcup\limits_{i=1}^{n} M_i = \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} M_i \cup M_n$))

**Définition 1.7.3.** *Un ensemble $Z$ de $n$ ensembles non vides $X_i$ est une partition d'un ensemble $A$ si et seulement si :*
*(1) $X_i \cap X_j = \emptyset$ pour $i \neq j$ $(1 \leq i, j \leq n)$*
*(2) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i = A$*
*(3) $X_i \neq \emptyset$ pour tout $i \in \mathbb{N}_n^*$.* ◊

Une partition d'un ensemble $A$ est par là une répartition d'un ensemble en sous-ensembles non-vides $X_i$ de sorte que toutes les intersections de $X_i$ et $X_j$ $(i \neq j)$ sont vides et que l'union de tous les sous-ensembles $X_i$ est égale à l'ensemble $A$ (voir figure 1.7.8)

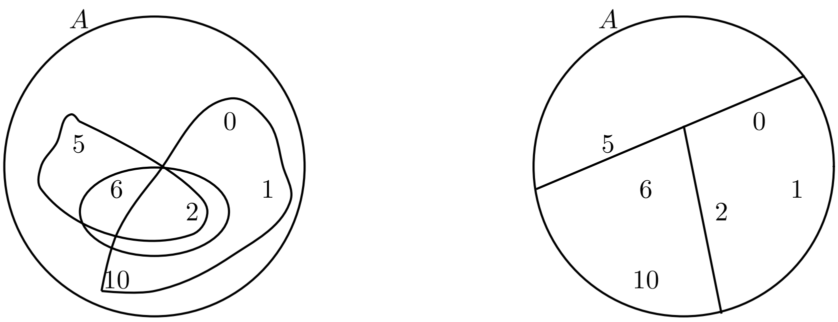


FIGURE 1.7.8 – A gauche : répartition d'un ensemble $A$ en ensemble d'ensembles $\{\{6, 2\}, \{5, 6, 2\}, \{10, 0, 1, 2\}\}$ qui ne constitue pas une partition de $A$ ; A droite : répartition en ensemble d'ensembles $\{\{5\}, \{6, 10\}, \{0, 2, 1\}\}$ qui constitue une partition de $A$

**Exemple 1.7.4.** $\{\{1, 2, 3\}, \{5, 6\}, \{8, 9\}\}$ *est une partition de* $\{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9\}$.
$\{\{1, 2, 3\}, \{1, 5, 6\}, \{8, 9\}\}$ *n'est pas une partition de* $\{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9\}$, *puisque*
$\{1, 2, 3\} \cap \{1, 5, 6\} = \{1\}$
$\{\{1, 2, 3\}, \{6\}, \{8, 9\}\}$ *n'est pas une partition de* $\{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9\}$, *comme*
$\{1, 2, 3\} \cup \{6\} \cup \{8, 9\} \neq \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9\}$. ◊

**Théorème 1.7.5.** *Supposons que $R$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble $A$. On peut alors affirmer : $Z = \{M_x \mid M_x = \{y \mid (x, y) \in R\}\}$ est une partition de $A$.*
*(Nous appelons $Z$ la $R$-partition de $A$).*

**Exemple 1.7.6.** *Nous supposons que* $R$ *est une relation d'équivalence sur* $A$ *et que*
$R = \{(2,2),(1,1),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(2,3),(3,2),(4,5),$
$(5,4),(5,6),(6,5),(4,6),(6,4),(7,4),(7,5),(7,7),(7,6),(6,7),(4,7),(5,7)\}$.
*Par là* $R$ *est une relation d'équivalence sur* $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$*. L'ensemble des ensembles* $M_x = \{y \mid (x,y) \in R\}$ *est* $\{\{1\},\{2,3\},\{4,5,6,7\}\}$*, ce qui est une partition de* $A$*.* ◊

Chaque relation d'équivalence $R$ produit de la sorte une $R$-partition déterminée d'une manière univoque par $R$. A l'inverse nous pouvons attribuer à chaque partition $Z_A = \{Y_i \mid i \in N_n^*\}$ d'un ensemble $A$ exactement une relation d'équivalence $R$ de sorte que $Z$ est la $R$-partition de $A$. La construction est évidente : nous devons mettre „en relation“ chaque élément $x$ d'un élément $Y$ de $Z$ à chaque élément $y$ de $Y$ et nous devons ne pas mettre en relation d'autres éléments de $A$, en d'autres mots :

$$R = \bigcup_{i=1}^{n} (Y_i \times Y_i)$$

**Exemple 1.7.7.** $X = \{1,2,3,4,5,6\}$, $Z = \{\{1\},\{2,3\},\{4,5,6\}\}$*.* $Z$ *est une partition de* $X$*, car*
*(a)* $M_1 = \{1\}$; $M_2 = M_3 = \{2,3\}$; $M_4 = M_5 = M_6 = \{4,5,6\}$
*(b)* $\{1\} \cap \{2,3\} = \emptyset = \{2,3\} \cap \{4,5,6\} = \{1\} \cap \{4,5,6\}$
*(c)* $\{1\} \cup \{2,3\} \cup \{4,5,6\} = X$
*Nous construisons la relation d'équivalence correspondante :*
$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(2,3),(3,2),$
$(4,5),(5,4),(4,6),(6,4),(5,6),(6,5)\}$*.* $R$ *est réflexif, transitif et symétrique.* ◊

**Définition 1.7.8.** *Les éléments d'une R-partition sont appelés „classes d'équivalence“ de la* $R-$*partition.*

◊

**Exercice 1.7.9.** *(a) Construire une relation d'équivalence R sur un ensemble A avec peu d'éléments. Vérifier que les caractéristiques d'une relation d'équivalence sont satisfaites. Former la R-partition de A et vérifier qu'il s'agit d'une partition.*
*(b) Choisir un ensemble A et construire une partition quelconque de cet ensemble. Construire la relation d'équivalence correspondante et vérifier qu'il s'agit effectivement d'une relation d'équivalence.*

**Solutions 1.7.10.** *(exemple) :*
*(a)* $R = \{(1,3),(3,1),(1,1),(3,3),(4,5),(5,4),(5,5),(4,4)\}$*.* $R$ *est réflexif, symétrique et transitif. La partition correspondante est :* $Z = \{\{1,3\},\{4,5\}\}$*.* $A = \{1,3,4,5\}$ *(c'est effectivement une partition)*
*(b)* $Z = \{\{1,2\},\{3,4,5\},\{8,9\}\}$*.* $A = \{1,2,3,4,5,8,9\}$*. La relation d'équivalence correspondante est* $R = \{(1,1),(2,2)(3,3),(4,4),(5,5),(8,8),(9,9),$
$(1,2),(2,1),(3,4),(4,3),(3,5),(5,3),(4,5),(5,4),(8,9),(9,8)\}$ *(c'est effectivement une relation d'équivalence).*

## 1.8 Fonctions

Nous introduisons dans ce sous-chapitre le concept de la fonction qui est absolument fondamental en mathématiques. $g$ est le graphe d'une fonction de $A$ vers $B$ si et seulement si $g$ est une relation de $A$ vers $B$ et que chaque composante en première position d'un couple de la relation a tout au plus une autre composante à la deuxième position - $(x,y)$ et $(x,z)$ ne peuvent alors être élément d'un graphe d'une fonction g, si $y \neq z$. Définition plus formelle :

**Définition 1.8.1.** *g est le graphe d'une fonction de A vers B si et seulement si g est une relation de A vers B et pour tout* $x,y,z$ *: si* $(x,y) \in g$ *et* $(x,z) \in g$*, alors* $z = y$*.* ◊

**Exemple 1.8.2.** $g = \{(1,2),(2,5),(4,-5),(6,18)\}$ *est le graphe d'une fonction, car les objets en première position des couples n'ont qu'un seul objet à la deuxième position du couple.*
$g = \{(1,2),(1,3),(4,-5),(6,18)\}$ *n'est pas le graphe d'une fonction, car dans deux couples avec 1 en première position il y a deux objets différents à la deuxième position - à savoir 2 et 3.* $\diamondsuit$

**Définition 1.8.3.** *$f$ est une fonction de $A$ vers $B$ si et seulement s'il y a des ensembles $A$, $B$ et $g$ de sorte que*
*(i) $f = (A, B, g)$ et*
*(ii) $g$ est le graphe d'une fonction de $A$ vers $B$.* $\diamondsuit$

Une fonction est par conséquent un triplet contenant comme composantes un graphe d'une fonction de $A$ vers $B$ et les ensembles $A$ et $B$. $g$ est „le graphe de la fonction $f$ de $A$ vers $B$“.

**Exemple 1.8.4.** *Si $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{2,3,4,5,6\}$ et*
*$g = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6)\}$, alors $f = (A,B,g)$ est une fonction, car $g$ est le graphe d'une fonction de $A$ vers $B$.*

*Si $A = B =$ humanité $=$ l'ensemble de tous les êtres humains et $g = \{(x,y) \mid x$ est le père de $y\}$, alors $f = (A,B,g)$ n'est pas une fonction, car certains pères ont plusieurs enfants. Par là $g$ n'est pas le graphe d'une fonction.*

*Si $A = B =$ humanité et $g = \{(x,y) \mid y$ est le père de $x\}$, alors $f = (A,B,g)$ est une fonction, car aucun enfant a plus d'un père (biologique). Par là $g$ est le graphe d'une fonction de $A$ vers $B$ et $(A,B,g)$ est une fonction. D'ailleurs : $c = \{(x,y) \mid x$ est enfant de $y\} = g$.* $\diamondsuit$

**Définition 1.8.5.** *$A$ est le domaine de définition de $f$ si et seulement si $f = (A,B,g)$ est une fonction. (domaine de définition = ensemble de définition = ensemble de départ) (voir figure 1.8.9)* $\diamondsuit$

**Définition 1.8.6.** *$B$ est le domaine des valeurs de $f$ si et seulement si $f = (A,B,g)$ est une fonction. (domaine des valeurs = ensemble des valeurs = ensemble d'arrivée) (voir figure 1.8.9)* $\diamondsuit$

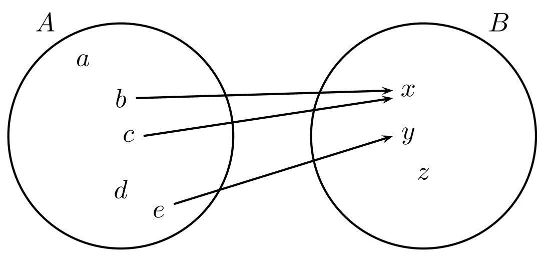


FIGURE 1.8.9 – Représentation d'une fonction à l'aide de diagrammes de Venn. ($A$ domaine de définition, $B$ domaine des valeurs, les flèches dirigées de gauche à droite symbolisent - avec les objets reliées par elles - les couples correspondants du graphe $g$ de la fonction : $a \to b$ si et seulement si $(a,b) \in g$)

Nous appelons l'ensemble des composantes en première position des couples du graphe de la fonction $f$ „*image réciproque de la fonction $f$*“ et nous définissons d'une manière plus formelle :

**Définition 1.8.7.** *Si $f = (A,B,g)$ est une fonction, alors l'image réciproque de $f$ est identique à $\{x \mid (x,y) \in g\}$ (voir figure 1.8.10)* $\diamondsuit$

Nous appelons l'ensemble des composantes à la deuxième position des couples du graphe de la fonction $f$ „image de la fonction $f$". Nous utilisons l'abréviation „Image($f$)"

**Définition 1.8.8.** *Si $f = (A, B, g)$ est une fonction, alors Image$(f) := \{y \mid (x, y) \in g\}$ (voir figure 1.8.10)* ♢

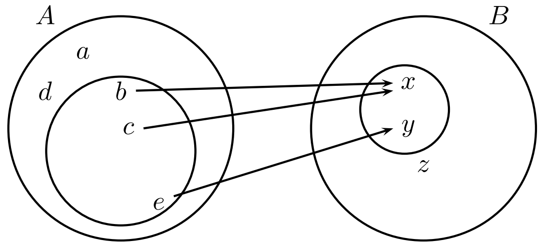


FIGURE 1.8.10 – Représentation de l'image réciproque et de l'image d'une fonction à l'aide de diagrammes de Venn. ($A$ domaine de définition, $B$ domaine des valeurs, l'image réciproque de $f$ est $\{b, c, e\}$ ; l'image de $f$ est $\{x, y\}$.

Au lieu de dire que „$x$ est la première composante d'un élément du graphe de la fonction $f$ et que $y$ est la deuxième composante de cet élément", les mathématiciens disent en général : „la fonction $f$ attribue $y$ à $x$ ". D'une manière générale on dira qu'un fonction attribue des objets du domaine des valeurs à des objets du domaine de définition. En réalité une fonction n'agit pas, elle n'attribue pas. Il s'agit d'une manière de parler pratique et courte pour exprimer ce qui est défini d'une manière tout à fait claire à l'intérieur de la théorie des ensembles. Nous allons utiliser aussi cette manière de parler et on définit formellement :

**Définition 1.8.9.** *La fonction $f$ attribue $y$ à $x$ si et seulement si $(x, y) \in g$ et $g$ est le graphe de la fonction $f$.* ♢

On appelle la première composante de l'élément du graphe d'une fonction „argument" (antécédent) , la deuxième „valeur de la fonction".

Si une fonction $f$ attribue $y$ à $x$, nous écrirons aussi „$f(x)$" pour „$y$" :

**Définition 1.8.10.** *Supposons que $f = (A, B, g)$ est une fonction. $f(x) = y$ si et seulement si $(x, y) \in g$.* ♢

Si le domaine de définition et l'image réciproque d'une fonction sont identiques, nous parlons d'une *application.* Nous retenons d'une manière plus formelle :

**Définition 1.8.11.** *Pour une fonction $f = (A, B, g)$, $f$ est une application si et seulement si l'image réciproque de $f = A$.* ♢

Pour la représentation symbolique des applications nous utiliserons souvent la notation suivante (différentes variantes) :

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\to f(x) \end{aligned} \tag{1.8.2}$$

$A$ indique le domaine de définition (= image réciproque pour le cas des applications) et $B$ le domaines des valeurs. A la deuxième ligne on indique comment on attribue les objets de $B$ aux objets de $A$. A la deuxième ligne on utilise souvent „$\longmapsto$" pour „$\to$". Si nous parlons de fonctions par la suite nous entendons toujours des applications si rien d'autre est explicité. Exemple concret pour la notation introduite :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to x^2 \end{aligned} \tag{1.8.3}$$

Nous attribuons $y = x^2 \in \mathbb{R}$ à chaque $x \in \mathbb{R}$. Une variante utile de la notation est :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ f(x) &:= x^2 \end{aligned} \tag{1.8.4}$$

Nous pouvons tout aussi bien écrire „$f$ est une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ de sorte que $f(x) := x^2$", „$f$ est une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ de sorte que $x \to x^2$" ou „$f$ est une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, qui attribue $x^2$ à $x$". L'exemple est typique pour les fonctions dont le domaine de définition est un ensemble de nombres : on définit l'attribution par des équations (dans l'exemple $f(x) = x^2$). Elles indiquent comment on calcule à l'aide de l'argument la valeur de la fonction de cet argument. Ce type de démarche est important quant on a un nombre infini d'arguments dans le domaine de définition de l'application. Il faut cependant souligner qu'il y a plus de fonctions que d'équations - l'ensemble des équations est infini dénombrable ; l'ensemble des fonctions est infini non dénombrable). C'est pourquoi il n'est pas possible de définir le concept général de la fonction à l'aide des équations. On a fourni alors une définition de la fonction qui ne nécessite pas le concept de l'équation.

Si l'ensemble des valeurs et l'image d'une fonction coïncident nous parlons d'une *surjection* ou d'une fonction surjective. Si l'on attribue des objets différents du domaine des valeurs aux objets différents du domaine de définition d'une application nous parlons d'une *injection* ou d'une fonction injective. Une injection surjective est appelé *bijection* ou fonction bijective. On appelle les fonctions bijectives aussi „biunivoques". D'une manière plus formelle nous définissons :

**Définition 1.8.12.** *Pour une fonction $f = (A, B, g)$,*

- *$f$ est une surjection si et seulement si image $(f) = B$*
- *$f$ est une injection si et seulement si $f$ est une application et que pour tout $(x, y), (z, r) \in g$, si $x \neq z$ alors $y \neq r$.*
- *$f$ est une bijection si et seulement si $f$ est une injection surjective.*

$\diamondsuit$

**Exemple 1.8.13.** *Diagrammes de Venn pour les types de fonctions définis ci-dessus. La fonction $f$ de $A = \{a, b, c, d, e\}$ vers $B = \{x, y, z\}$ (voir figure 1.8.9) avec le graphe $g = \{(c, x), (c, y), (e, y)\}$ n'est ni une application ni une surjection. Elle n'est ni injective ni bijective.*

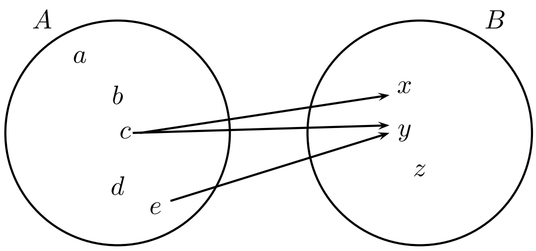


FIGURE 1.8.11 – Exemple pour la représentation graphique d'une relation qui n'est pas une fonction

*La relation $\{(c, x), (c, y), (e, y)\}$ de $A$ vers $B$ (voir figure 1.8.11) n'est pas le graphe d'une fonction.*
*La fonction de $A$ vers $B$ avec le graphe $g = \{(a, x), (b, x), (c, y), (e, z)\}$ est surjective, sans être une application (voir figure 1.8.12).*

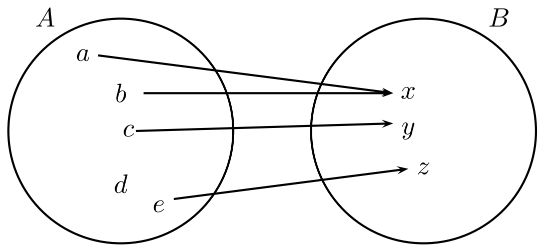


FIGURE 1.8.12 – Exemple d'une représentation graphique d'une surjection qui n'est pas une application

*La fonction de A vers B avec le graphe* $\{(a, x), (b, x), (c, y), (d, z), (e, z)\}$ *(voir figure 1.8.13) est une application qui n'est ni surjective ni injective.*

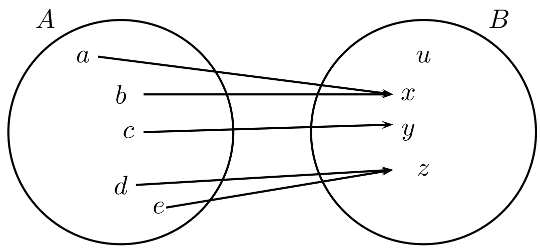


FIGURE 1.8.13 – Exemple d'une représentation graphique d'une application qui n'est ni une injection ni une surjection

*La fonction de A vers B avec le graphe* $\{(a, x), (c, y), (d, z)\}$ *(voir figure 1.8.14) est une injection (et une application), qui n'est pas surjective.*

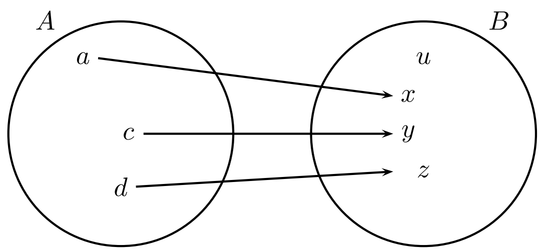


FIGURE 1.8.14 – Exemple d'une représentation graphique d'une application injective qui n'est pas surjective

*La fonction de A vers B avec le graphe* $g = \{(a, x), (d, z), (c, y)\}$ *est bijective (et une application, une surjection et une injection) (voir figure 1.8.15) :*

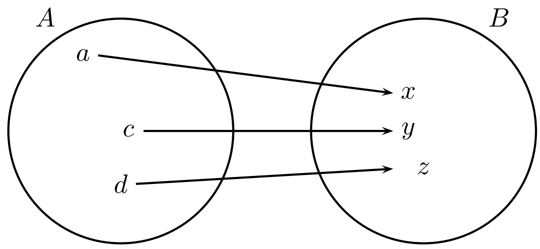


FIGURE 1.8.15 – Exemple d'une représentation graphique d'une bijection (application injective et surjective)

$\diamond$

Si $A$ et $B$ sont finis, une injection ne peut être surjective et par là bijective que si $A$ et $B$ contiennent le même nombre d'éléments.

Dans le cas d'une bijection, le graphe de la fonction contient toutes les informations sur la fonction, puisque le domaine de définition est identiques à l'image réciproque de la fonction et le domaine des valeurs est identique à l'image de la fonction.

La figure suivante 1.8.16 donne un aperçu des relations entres les graphes des types de fonctions introduites :

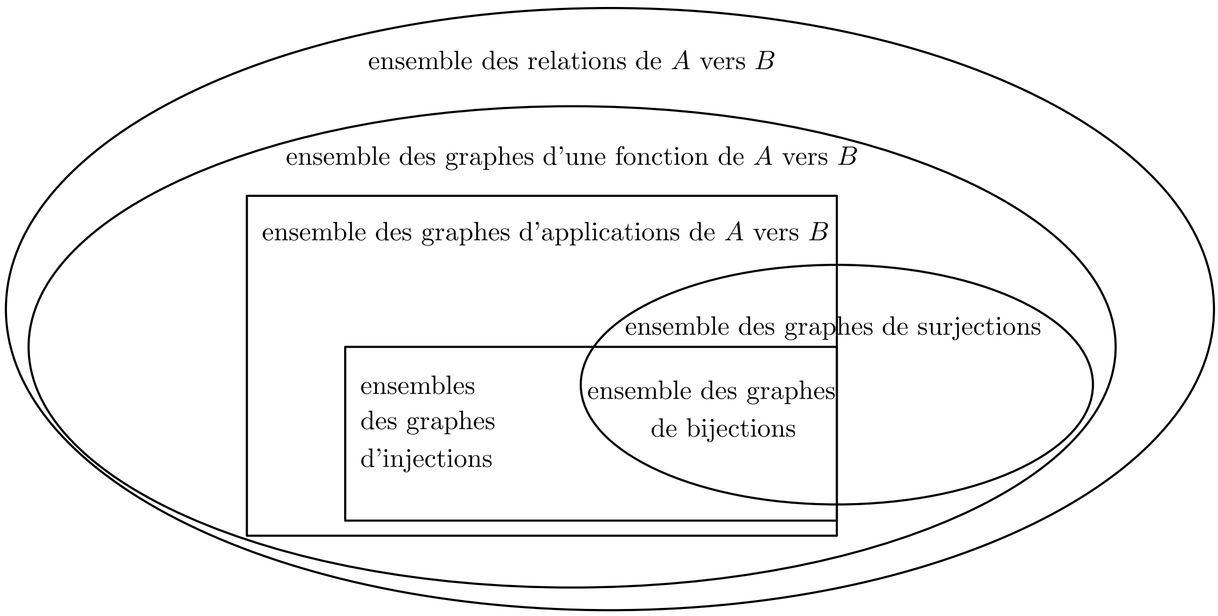


FIGURE 1.8.16 – Tableau récapitulatif des graphes introduits

**Définition 1.8.14.** *Pour des fonctions $f = (A, B, g)$ bijectives nous définissons :*
$f^{-1} := (B, A, g^{-1})$ *de sorte que* $g^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in g\}$
*Nous appelons $f^{-1}$ la fonction réciproque (parfois appelée „fonction inverse“) de $f$.* $\diamond$

La fonction réciproque de $f$ avec $g = \{(a, x), (d, z), (c, y)\}$ est : $f^{-1}$avec $g^{-1} = \{(x, a), (z, d), (y, c)\}$. Si une fonction bijective est données par une équation (p.ex. $f(x) = 5x + 2$), on peut souvent donner pour la fonction réciproque une équation qui peut être calculé à partir de la première. On isole dans l'équation $x$. Dans l'exemple on obtient

$$x = \frac{f(x) - 2}{5} \tag{1.8.5}$$

et en adaptant la notation

$$f^{-1}(y) = \frac{y-2}{5}.$$

Pour mener certaines discussions on échange parfois les variables : on remplace dans (1.8.5) $f(x)$ par $x$ et $x$ par $g(x)$. On obtiendrait :

$$g(x) = \frac{x-2}{5}$$

**Exemples de fonctions**

**Exemple 1.8.15.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ; $f(x) := x^2$ *(application ; non injective, car p.ex.* 4 *est attribué à* 2 *et* $-2$ *; non surjective, car* $-4$ *n'est pas attribué).* $\diamondsuit$

**Exemple 1.8.16.** *Les opérations sur les nombres réels sont des fonctions. Ainsi l'addition attribue un nombre réel à deux nombres réels ou plutôt à leur couple. On peut formuler d'une manière formelle :*

$$+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

*Au lieu de* $+((x,y))$ *on écrit* $x+y := +((x,y))$. *L'addition ainsi définie est une application de* $\mathbb{R}^2$ *vers* $\mathbb{R}$. *Elle n'est pas bijective car* $x+y = y+x$. *Elle est surjective, puisqu'on trouve pour chaque nombre réel* $x$ *un couple* $(y,z)$, *de sorte que* $x = (y+z)$.
*La division n'est pas une application* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *car* $\frac{x}{0}$ *pour* $x \neq 0$ *n'est pas défini dans les nombres réels. Si nous définissons par contre* $\mathbb{R}^{2\setminus 0} := \{(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } y \neq 0\}$ *et div :* $\mathbb{R}^{2\setminus 0} \to \mathbb{R}$ *tel que par div on attribue* $\frac{x}{y}$ *à* $(x,y)$ *il s'agit d'une application à partir de* $\mathbb{R}^{2\setminus 0}$. *Cette application est surjective, mais pas injective.* $\diamondsuit$

**Exemple 1.8.17.** *Nous considérons l'ensemble* $F$ *de tous les ensembles finis de nombres réels (qui ne contiennent qu'un nombre fini de nombre réels en tant qu'éléments) et nous définissons*

$$\max : F \to \mathbb{R}$$
$$\max(A) := x \text{ tel que pour tous les } y \in A : y \leq x$$

*On a alors p.ex.*

$$\max(\{5,4,6\}) = 6$$
$$\max(\{-0.5,-1,-10\}) = -0.5$$

$$\min : F \to \mathbb{R}$$
$$\min(A) := x \text{ tel que pour tous les } y \in A : y \geq x$$

*On a alors p.ex.*

$$\min(\{5,4,6\}) = 4$$
$$\min(\{-0.5,-1,-10\}) = -10$$

max *et* min *sont surjectives (on trouve pour chaque nombre réel un ensemble* $A$, *tel que* $\max(A) = x$ *et pour chaque nombre réel* $y$ *un ensemble* $A$, *tel que* $\min(A) = y$. max *et* min *ne sont pas injectives.* max *attribue p.ex. à* {*1,2,3*} *et à* {*-1,2.5,3*} *le même nombre,* min *à* {*1,8,9*} *et à* {*1,10,11*} *le même nombre..* $\diamondsuit$

**Exemple 1.8.18.** *Nous utilisons pour les intervalles les notations et désignations suivantes :*

$$
\begin{aligned}
[a,b] &:= \{x \mid a \leq x \leq b\} \text{ (intervalle fermé)}\\
]a,b] &:= \{x \mid a < x \leq b\} \text{ (intervalle semi-ouvert à gauche = intervalle semi-fermé à droite)}\\
[a,b[ &:= \{x \mid a \leq x < b\} \text{ (intervalle semi-fermé à gauche = intervalle semi-ouvert à droite)}\\
]a,b[ &:= \{x \mid a < x < b\} \text{ (intervalle ouvert)}\\
]a,\infty[ &:= \{x \mid a < x\} \text{ (intervalle non borné à droite - sans } \infty)\\
]-\infty,a[ &:= \{x \mid x < a\} \text{ (intervalle non borné à gauche - sans } -\infty)\\
]-\infty,\infty[ &:= \mathbb{R} \qquad \text{(intervalle non borné}\\
&\qquad\qquad \text{- sans les nombres non-réels } \infty \text{ et } -\infty)
\end{aligned}
$$

*$\infty$ est une abréviation pour „infini“ et $-\infty$ pour „moins infini“. Infini et moins infini sont des nombres non-réels qu'on utilisera peu par la suite. Si $I$ est un intervalle fermé ou semi-fermé à droite nous l'appelons „intervalle fermé à droite“. Si $I$ est un intervalle fermé ou semi-fermé à gauche nous l'appelons „intervalle fermé à gauche“. Si $I$ est un intervalle ouvert ou semi-ouvert à droite nous l'appelons „intervalle ouvert à droite“. Si $I$ est un intervalle ouvert ou semi-ouvert à gauche nous l'appelons „intervalle ouvert à gauche“. (au lieu des notations introduites les suivantes sont très courantes : $[a,b) := [a,b[$ ; $(a,b] :=]a,b]$ ; $(a,b) :=]a,b[$)*

*Si nous considérons l'ensembles des intervalles fermés à droite $\mathbb{I}_r$, nous pouvons définir la fonction*

$$
\begin{aligned}
&\max : \mathbb{I}_r \to \mathbb{R}\\
&\max(I) = x \text{ si et seulement si pour tout } y \in I : y \leq x \text{ et } x \in I
\end{aligned}
$$

*Elle attribue à chaque intervalle fermé à droite un nombre réel, à savoir le nombre le plus grand de l'intervalle. Il s'agit d'une application à partir de $\mathbb{I}_r$. Ainsi* $\max]5,20] = 20$. *Si nous considérons par contre l'ensemble de tous les intervalles* max *n'est pas une application. Pour les intervalles ouverts à droite il n'y a pas de nombre le plus grand qui est élément de l'intervalle. Pour le comprendre nous étudions l'intervalle $]a,b[$. Pour tout nombre $c \in]a,b[$ très proche de $b$ il y a un nombre réel $d \in]a,b[$ encore plus proches de $b$, si nous définissons p.ex. $d := \frac{b+c}{2}$.*
*On peut attribuer des nombres à des intervalles fermés à gauche par la définition suivante - on attribue le nombre réel le plus petit -*

$$
\begin{aligned}
&\min : \mathbb{I}_l \to \mathbb{R}\\
&\min(I) = x \text{ si et seulement si pour tout } y \in I : y \geq x \text{ et } x \in I
\end{aligned}
$$

*$\mathbb{I}_l$ pour l'ensemble des intervalles fermés à gauche. Ainsi* $\min[5,6] = 5$. ♢

**Exemple 1.8.19.** *Nous étudions l'ensemble $K$ des cantons suisses. Les demi-cantons sont considérés comme des cantons. Alors $f : K \to O$ de sorte que $O$ est l'ensemble des communes suisses, définit une application injective, si $f$ attribue son chef-lieu à chaque canton. Ainsi f(Valais)=Sion.* ♢

**Exemple 1.8.20.** *Nous considérons l'ensemble $Z$ des partitions $P_i$ d'un ensemble fini. Nous construisons selon le sous-chapitre 1.7 les relations d'équivalence $R_i$ correspondant aux $P_i$. Nous appelons l'ensembles des relations d'équivalence construites de la sorte $R_A$. La fonction $f$, qui attribue un $P_i$ à chaque $R_i$, est une bijection de $Z$ vers $R_A$.* ♢

### Sommes des composantes de n-uplets

Nous pouvons non seulement à l'aide de fonctions attribuer des objets à des nombres ou des ensembles (voir exemples ci-dessus), mais aussi à des $n-$uplets. Un exemple important est la somme des composantes d'un $n$-uplet :

$$\sum_{i=1}^{n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_1, ..., x_n) := x_1 + ... + x_n$$

Aux lieu de $\sum\limits_{i=1}^{n} (x_1, ..., x_n)$ nous écrivons $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i := \sum\limits_{i=1}^{n} (x_1, ..., x_n)$. Il s'agit d'une application à partir de l'ensembles de $n$-uplets de nombres réels vers les nombres réels. On lit l'expression $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ comme „somme des $x_i$, de $i = 1$ à $n$“. $\Sigma$ est le $S$ grecque majuscule (sigma ; pour somme). $i$ est appelé „index de sommation“. Le départ de la sommation est indiqué par „$i = 1$“, le dernier nombre à sommer est $x_n$ ce qui est indiqué par le „n“ au-dessus du signe $\Sigma$. Par là pour $(2, 5, 3, 4, 1)$ :

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 2 + 5 + 3 + 4 + 1 = 15.$$

On peut choisir au lieu de $i$ d'autres symboles pour l'index, p.ex. $j$ ou $k$. L'index de sommation ne parcourt que des nombres entiers et ceci dans l'ordre de grandeur des nombres - du plus petit au plus grands.

**Exercice 1.8.21.** *Calculer*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i$$

*pour a)* $(5, 16, 18, 19, 55)$
*b)* $(4.2, 5.55, 14.6)$

**Solutions 1.8.22.** *a)* $\sum_{i=1}^{5} x_i = 5 + 16 + 18 + 19 + 55 = 113$
*b)* $\sum_{i=1}^{3} x_i = 4.2 + 5.55 + 14.6 = 24.35$

Pour le calcul avec $\Sigma$ on peut prouver trois règles (théorèmes) qu'on utilise souvent - surtout en statistiques. La première règle dit qu'on peut mettre une constante se trouvant après $\Sigma$ devant ce signe. Cette règle correspond à la mise en évidence d'une constante dans une somme. De l'autre côté on peut mettre une constante qui se trouve avant $\Sigma$ après ce signe.

**Théorème 1.8.23.** *Pour $a \in \mathbb{R}$ :*

$$\sum_{i=1}^{n} a x_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a x_i &= a x_1 + a x_2 + ... + a x_{n-1} + a x_n \\ &= a(x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + x_n) \\ &= a \sum_{i=1}^{n} x_i\end{aligned}$$

□

**Exemple 1.8.24.** *Pour* $\mathbf{x} := (x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 5, 6, 8)$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4} 5x_i &= 5 \cdot 1 + 5 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 5 \cdot 8 \\ &= 5(1 + 5 + 6 + 8) \\ &= 5 \sum_{i=1}^{4} x_i\end{aligned}$$

◊

La règle suivante dit qu'on peut distribuer le signe Σ sur une somme ou qu'on peut à l'inverse le „mettre en évidence". La règle se base sur la commutativité de l'addition (on peut réarranger l'ordre selon lequel on additionne les nombres d'un ensemble fini de nombres).

**Théorème 1.8.25.**

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) &= (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + ... + (x_{n-1} + y_{n-1}) + (x_n + y_n) \\ &= (x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + x_n) + (y_1 + y_2 + ... + y_{n-1} + y_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i\end{aligned}$$

□

**Exemple 1.8.26.** *Si* $\mathbf{x} = (1, 5, 6, 3)$ *et* $\mathbf{y} = (4, 6, 8, 9)$ *ont peut affirmer*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4} (x_i + y_i) &= (1 + 4) + (5 + 6) + (6 + 8) + (3 + 9) \\ &= (1 + 5 + 6 + 3) + (4 + 6 + 8 + 9) \\ &= \sum_{i=1}^{4} x_i + \sum_{i=1}^{4} y_i\end{aligned}$$

◊

**Définition 1.8.27.** *Pour* $(x_1, ..., x_n) = (a, ..., a)$ *avec* $a \in \mathbb{R}$ *nous écrivons*

$$\sum_{i=1}^{n} a := \sum_{i=1}^{n} x_i$$

◊

La règle suivante se base sur le fait que $\underbrace{a + a + ... + a + a}_{n\ fois} = na$.

**Théorème 1.8.28.**

$$\sum_{i=1}^{n} a = na$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a &= \underbrace{a + a + ... + a + a}_{n\ fois} \\ &= na\end{aligned}$$

□

**Exemple 1.8.29.**

$$\sum_{i=1}^{10} 5 = 10 \cdot 5 = 50.$$

♢

En général nous utilisons ces trois règles pour démontrer des contenus généraux. Pour l'illustrer un exemple : nous montrons que la somme des différences entre des nombres réelles et leur moyenne arithmétique est identique à 0.

**Exemple 1.8.30.** *Pour $x_i \in \mathbb{R}$ et $1 \leq n \in \mathbb{N}$ :*

$$\sum_{j=1}^{n} \left( x_j - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right) = 0$$

*car*

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n} \left( x_j - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right) \underset{th\acute{e}or\grave{e}me}{=} 1.8.25 \sum_{j=1}^{n} x_j - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \\ &= n\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \textit{(augmenter la première expression par } n\textit{)} \\ &\underset{th\acute{e}or\grave{e}me\ 1.8.23}{=} n\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \\ &\underset{th\acute{e}or\grave{e}me\ 1.8.28}{=} n\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j - \frac{1}{n} n \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \textit{(car la somme } \sum_{i=1}^{n} x_i \textit{ est une constante !)} \\ &= 0\end{aligned}$$

♢

### Opérations sur les fonctions

On peut définir pour les fonctions - comme pour les nombres - différentes opérations. Puisque les opérations sont des fonctions, nous définissons par là une fonction, qui attribue un autre objet - p.ex. une autre fonction - à un couple de fonctions. Nous introduisons d'une manière exemplaire deux opérations : l'addition (par points) et la multiplication (par points) de deux fonctions avec des valeurs réelles. Il en résulte une nouvelle fonction.

**Définition 1.8.31.** *Nous considérons l'ensemble $A_D$ des applications $f : D \to \mathbb{R}$ avec $D \subset \mathbb{R}$. Toutes ses applications sont définies sur le même $D$. Nous définissons*

$$\begin{aligned}f &: A_D^2 \to A_D \\ f((g, h)) &:= g + h \ \textit{avec} \ (g + h)(x) := g(x) + h(x)\end{aligned}$$

*Nous attribuons alors à das couples de fonctions sur $D$ une autre fonction sur $D$.* $\Diamond$

$g+h$ attribue à $x$ la somme des valeurs attribuées à $x$ par $g$ et par $h$. Si les fonctions sont données par des équations, nous pouvons additionner les équations pour obtenir une équation décrivant la somme des fonctions.

**Exemple 1.8.32.** $g(x) = 5x + 2$ *et* $h(x) = 4x^2 - 3x + 5$.
$g(6) = 5 \cdot 6 + 2 = 32$ *et* $h(6) = 4 \cdot 6^2 - 3 \cdot 6 + 5 = 131$. *Selon la définition*
$(g+h)(6) = 32 + 131 = 163$.
*En additionnant les équations nous obtenons :*

$$\begin{aligned}(g+h)(x) &= g(x) + h(x)\\ &= 5x + 2 + 4x^2 - 3x + 5\\ &= 4x^2 + 2x + 7.\end{aligned}$$

*et par là :* $(g+h)(6) = 4 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6 + 7 = 163$. $\Diamond$

**Définition 1.8.33.** *Nous considérons l'ensemble $A_D$ des applications $f : D \to \mathbb{R}$ avec $D \subset \mathbb{R}$. Toutes ses applications sont définies sur le même $D$. Nous définissons*

$$\begin{gathered}f : A_D^2 \to A_D\\ f((g,h)) := g \cdot h \text{ avec } (g+h)(x) := g(x) \cdot h(x)\end{gathered}$$

*$g \cdot h$ attribue à $x$ le produit des nombres attribué à $x$ par $h$ et par $g$. Si les fonctions sont données par des équations, nous pouvons multiplier les équations pour obtenir une équation décrivant le produit des fonctions.* $\Diamond$

**Exemple 1.8.34.** $g(x) = 5x+2$ *et* $h(x) = 4x^2-3x+5$. $g(6) = 5\cdot6+2 = 32$ *et* $h(6) = 4\cdot6^2-3\cdot6+5 = 131$. *Selon la définition* $(g \cdot h)(6) = 32 \cdot 131 = 4192$
*En multipliant les équations*

$$\begin{aligned}(g \cdot h)(x) &= g(x) \cdot h(x)\\ &= (5x+2) \cdot \left(4x^2 - 3x + 5\right)\\ &= 20x^3 - 7x^2 + 19x + 10\end{aligned}$$

*et par là* $(g \cdot h)(6) = 20 \cdot 6^3 - 7 \cdot 6^2 + 19 \cdot 6 + 10. = 4192$. $\Diamond$

### 1.8.1 Exercices

1. Former $\{1,2\} \times \{3,4\}$
2. Former l'ensemble des parties de $\{1,2\} \times \{3,4\}$.
3. Former $A^5$ pour $A = \{1,2\}$
4. Former $A^3$ pour $A = \{1,2,3\}$
5. Former $\bigtimes_{i=1}^{4} A_i$ pour $A_1 = \{1\}, A_2 = \{2,3\}, A_3 = \{4\}, A_4 = \{2,4\}$
6. Examiner si les relations suivantes sont réflexives, transitives, etc :
   $\{(1,1)\}$
   $\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$
   $\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,1)\}$
   $\{(1,1),(3,4)\}$

7. Examiner si l'ensemble $A$ est une relation d'équivalence :
   $A = \{(1,1),(2,1),(1,2),(3,3)\}$
   Si $A$ n'est pas une relation d'équivalence, ajouter les couples qui manquent pour en produire une telle relation $A'$ sur $\{1,2,3\}$.
   Former la partition produite par $A$ ou $A'$ sur $\{1,2,3\}$.
8. Former l'ensemble des graphes d'une fonction qui sont des sous-ensembles de $\{1,2\}\times\{3,4\}$.
9. Former l'ensemble des graphes d'une fonction de $\{1,2\}$ vers $\{3,4\}$, qui correspondent à des applications.
10. Former l'ensemble des graphes d'une fonction $\{1,2\}$ vers $\{3,4\}$, qui correspondent à des surjections.
11. Former l'ensemble des graphes d'une fonction $\{1,2\}$ vers $\{3,4\}$, qui correspondent à des injections.
12. Former l'ensemble des graphes d'une fonction $\{1,2\}$ vers $\{3,4\}$, qui correspondent à des bijections.
13. Former les fonctions réciproques des bijections, dont vous avez formé le graphe sous 12).
14. Indiquer les sous-ensembles de {1,2} × {3,4,5} qui
    a) sont des graphes d'injections
    b) sont des graphes de surjections
    c) sont des graphes de bijections.
15. Indiquer les sous-ensembles de {1,2,3}×{4,5} qui
    a) sont des graphes d'injections
    b) sont des graphes de surjections
    c) sont des graphes de bijections.
16. Calculer $\max[5,6] =$
    $\max[5,6[=$
    $\min[5,6] =$
    $\min]5,6] =$
    $\max\{4,5,6\} =$
    $\min\{4,5,6\} =$
17. Calculer $\sum\limits_{i=1}^{6} x_i$ pour $(x_1,...,x_6) = (1,2,3,4,5,6)$.
    $\sum\limits_{i=1}^{4}(x_i + y_i)$ pour $(x_1,...,x_4) = (1,2,3,4)$ et $(y_1,...,y_4) = (7,2,3,11)$
    $\sum\limits_{i=1}^{5} 6x_i$ pour $(x_1,...,x_5) = (4,1,4,6,-3)$
    $\sum\limits_{i=1}^{5} 6$
    $\frac{1}{6}\sum\limits_{i=1}^{6} x_i$ pour $(x_1,...,x_6) = (1,2,3,4,5,6)$.
    $\frac{1}{5}\sum\limits_{j=1}^{6}\left(x_j - \frac{1}{6}\sum\limits_{i=1}^{6} x_i\right)$ pour $(x_1,...,x_6) = (1,2,3,4,5,6)$.
    $\sum\limits_{j=1}^{6}\left(x_j - \frac{1}{6}\sum\limits_{i=1}^{6} x_i\right)^2$ pour $(x_1,...,x_6) = (1,2,3,4,5,6)$.
18. Simplifier : $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - a)$
    $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - a)^2$

### 1.8.2 Solutions

1. $\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$

2. $\{\emptyset, \{(1,3)\}, \{(1,4)\}, \{(2,3)\}, \{(2,4)\}, \{(1,3),(1,4)\}, \{(1,3),(2,3)\},$
$\{(1,3),(2,4)\}, \{(1,4),(2,3)\}, \{(1,4),(2,4)\}, \{(2,3),(2,4)\},$
$\{(1,3),(1,4),(2,3)\}, \{(1,3),(1,4),(2,4)\}, \{(1,3),(2,3),(2,4)\},$
$\{(1,4),(2,3),(2,4)\}, \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}\}$ (nombre d'éléments : $2^4$)
3. nombre d'éléments : $2^5 = 32$
$A^5 = \{(1,1,1,1,1)\,,$
$(2,1,1,1,1)\,, (1,2,1,1,1)\,, (1,1,2,1,1)\,, (1,1,1,2,1)\,, (1,1,1,1,2)\,,$
$(2,2,1,1,1)\,, (2,1,2,1,1)\,, (2,1,1,2,1)\,, (2,1,1,1,2)\,, (1,2,2,1,1)\,, (1,2,1,2,1)\,, (1,2,1,1,2)\,, (1,1,2,2,1)\,,$
$(1,1,2,1,2)\,, (1,1,1,2,2)\,,$
$(2,2,2,1,1)\,, (2,2,1,2,1)\,, (2,2,1,1,2)\,, (2,1,2,2,1)\,, (2,1,2,1,2)\,, (2,1,1,2,2)\,, (1,2,2,2,1)\,,$
$(1,2,2,1,2)\,, (1,2,1,2,2)\,, (1,1,2,2,2)$
$(2,2,2,2,1)\,, (2,2,2,1,2)\,, (2,2,1,2,2)\,, (2,1,2,2,2)\,, (1,2,2,2,2)\,, (2,2,2,2,2)\}$
4. nombres d'éléments : $3^3 = 27$
$A^3 = \{(1,1,1)\,,$
$(1,1,2)\,, (1,2,1)\,, (2,1,1)\,, (1,2,2)\,, (2,1,2)\,, (2,2,1)\,, (2,2,2)$
$(1,1,3)\,, (1,3,1)\,, (3,1,1)\,, (1,3,3)\,, (3,1,3)\,, (3,3,1)\,, (3,3,3)$
$(2,2,3)\,, (2,3,2)\,, (3,2,2)\,, (2,3,3)\,, (3,2,3)\,, (3,3,2)$
$(1,2,3)\,, (1,3,2)\,, (2,1,3)\,, (2,3,1)\,, (3,1,2)\,, (3,2,1)\}$
5. nombre d'éléments : $1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$
$\overset{4}{\underset{1}{\times}} A_i = \{(1,2,4,2)\,, (1,3,4,2)\,, (1,2,4,4)\,, (1,3,4,4)\}$
6. $\{(1,1)\}$ est réflexif, symétrique et transitif (est une relation d'équivalence)
$\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$ est symétrique
$\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,1)\}$ est symétrique, transitif, réflexif (est une relation d'équivalence)
$\{(1,1),(3,4)\}$ est transitif.
7. $A$ n'est pas une relation d'équivalence. En ajoutant p.ex. $(2,2)$ nous obtenons une relation d'équivalence qui produit la partition $\{\{1,2\},\{3\}\}$
On pourrait aussi bien ajouter $(2,2),(2,3),(3,2),(3,1),(1,3)$ et par là produire la partition $\{\{1,2,3\}\}$
8. $\{\emptyset, \{(1,3)\}, \{(1,4)\}, \{(2,3)\}, \{(2,4)\}, \{(1,3),(2,3)\},$
$\{(1,3),(2,4)\}, \{(1,4),(2,3)\}, \{(1,4),(2,4)\}\}$
9. $\{\{(1,3),(2,3)\}, \{(1,3),(2,4)\}, \{(1,4),(2,3)\}, \{(1,4),(2,4)\}\}$
10. $\{\{(1,3),(2,4)\}, \{(1,4),(2,3)\}\}$
11. $\{\{(1,3),(2,4)\}, \{(1,4),(2,3)\}\}$
12. $\{\{(1,3),(2,4)\}, \{(1,4),(2,3)\}\}$
10) = 11) = 12), car $\{1,2\}$ et $\{3,4\}$ ont un nombre identique d'éléments.
13. $f_i^{-1} = (B, A, g_i^{-1})$ avec $i \in \{1,2\}$ et $g_1^{-1} = \{(3,1),(4,2)\}$ ou $g_2^{-1} = \{(4,1),(3,2)\}$ et $B = \{3,4\}$, $A = \{1,2\}$
14. a) injections : {(1,3), (2,4)} ; {(1,3), (2,5)} ; {(1,4), (2,5)} ; {(2,3), (1,4)} ; {(2,3), (1,5)} ; {(2,4), (1,5)} ;
b) pas de surjections (en voulant attribuer tous les objets de {3,4,5} il faut attribuer à 1 ou à 2 deux objets différents - on n'est plus en face d'une fonction
c) pas de bijections (car pas de surjections)
15. a) pas d'injections, car une injection est une application et il faut utiliser tous les objets de {1,2,3} ce qui n'est pas possible sans attribuer un objet deux fois.
b) quelques surjections : {(1,4), (2,4), (3,5)} ; {(1,5), (2,4), (3,5)} ; {(1,4), (2,5), (3,4)}, etc.
c) pas de bijections (car pas d'injections).
16. $\max[5,6] = 6$
$\max[5,6[$ (n'est pas défini)
$\min[5,6] = 5$

$\min]5,6]$ (n'est pas défini)
$\max\{4,5,6\} = 6$
$\min\{4,5,6\} = 4$

17. $\sum_{i=1}^{6} x_i = 1+2+3+4+5+6 = 21$ pour $(x_1, ..., x_6) = (1,2,3,4,5,6)$.
$\sum_{i=1}^{4} (x_i + y_i) = (1+7) + (2+2) + (3+3) + (4+11) = 33$
pour $(x_1, ..., x_4) = (1,2,3,4)$ pour $(y_1, ..., y_4) = (7,2,3,11)$
$\sum_{i=1}^{5} 6x_i = 6 \cdot 4 + 6 \cdot 1 + 6 \cdot 4 + 6 \cdot 6 - 6 \cdot 3 = 6\,(4+1+4+6-3) = 72$ pour $(x_1, ..., x_5) = (4,1,4,6,-3)$
$\sum_{i=1}^{5} 6 = 5 \cdot 6 = 30$
$\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{7}{2} = 3.5$
$\frac{1}{5}\sum_{j=1}^{6}\left(x_j - \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i\right) = \frac{1}{5}\left((1-3.5)+(2-3.5)+(3-3.5)+(4-3.5)+(5-3.5)+(6-3.5)\right) = 0$
$\sum_{j=1}^{6}\left(x_j - \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i\right)^2 = \left((1-3.5)^2+(2-3.5)^2+(3-3.5)^2+(4-3.5)^2+(5-3.5)^2+(6-3.5)^2\right) = 17.5$

18. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} a\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - na\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n}na = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - a$
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2ax_i + a^2\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} 2ax_i + \sum_{i=1}^{n} a^2\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2a\sum_{i=1}^{n} x_i + na^2\right)$
$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2a\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n}na^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2a\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + a^2$

### 1.8.3 Exercices

1. Supposons que $A = \{a,b,c\}$, $B = \{a,b\}$ et $C = \{a,d\}$. Déterminer
   (a) $A \times A$
   (b) $A \times B$
   (c) $(A \times B) \times C$
   (d) $B \times (C \times C)$

2. Examiner si les relations suivantes sont transitives, réflexives ou symétrique (toutes les composantes sont différentes par paire) :
   (a) $A = \{(a,2),(b,3),(c,4)\}$
   (b) $B = \{(a,b),(b,a),(c,d),(d,4),(a,a),(c,4)\}$
   (c) $C = \{(a,b),(b,a),(c,d),(d,c),(5,6),(6,5),(8,9),(9,8)\}$
   (d) $D = \{(a,b),(b,c),(a,c),(c,d),(a,d),(b,a),(a,a),(c,b),(b,b),(d,c),$
   $(c,c),(d,d),(c,a),(d,a),(b,d),(d,b)\}$
   (e) $E = \{(5,5),(6,6),(7,7),(\text{Sitten}, \text{Sitten})\}$

3. Nous supposons que $A = \{1,2,3\}$ et $B = \{x,y\}$.
   (a) Former $A \times B$
   (b) Indiquer tous les graphes d'une fonction qui sont des sous-ensembles de $A \times B$

(c) Indiquer tous les graphes qui correspondent à des applications de $A$ vers $B$ et qui sont sous-ensemble de $A \times B$

4. Déterminer les graphes de toutes les applications de l'ensemble $E = \{a, b\}$ vers $E$.
5. Examiner si les ensembles suivants sont des graphes d'une fonction :

   (a) $A = \{(a, 2), (b, 2), (c, 2), (d, 2), (4, 2), (f, 2), (Sion, 2), (g, 2), (5, 8)\}$
   (b) $B = \{(a, 2), (b, 2), (c, 2), (d, 2), (4, 2), (f, 2), (Sion, 2), (g, 2), (a, 8)\}$
   (c) $C = \{(a, 2), (b, 2), (c, 2), (d, 2), (4, 2), (f, 2), (Sion, 2), (g, 2), (4, 8)\}$
   (d) $\{((0, 0), 1), ((0, 1), 1), ((1, 0), 1), ((1, 1), 0)\}$

6. Examiner si l'ensemble $A$ est une relation d'équivalence. Si tel est le cas, indiquer la partition produite par $A$.
   $A = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (1, 1), (2, 2), (4, 5),$
   $(2, 3), (5, 4), (6, 4), (4, 6), (4, 4), (6, 6), (5, 5), (6, 5), (5, 6)\}$
7. Trouver pour la partition suivante $\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6, 7\}\}$ la relation d'équivalence correspondante.

### 1.8.4 Solutions

1. On obtient :

   (a) $A \times A = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, a), (b, c), (c, c), (c, a), (c, b)\}$
   (b) $A \times B = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, a), (c, b)\}$
   (c) $(A \times B) \times C = \{((a, a), a), ((a, a), d), ((a, b), a), ((a, b), d), ((b, a), a),$
   $((b, a), d), ((b, b), a), ((b, b), d), ((c, a), a), ((c, a), d), ((c, b), a), ((c, b), d)\}$
   (d) $B \times (C \times C) = \{(a, (a, a)), (a, (a, d)), (a, (d, a)), (a, (d, d)), (b, (a, a)),$
   $(b, (a, d)), (b, (d, a)), (b, (d, d))\}$

2. $A$ est transitif.
   $B$ n'est pas transitif, pas symétrique, pas réflexif.
   $C$ est symétrique.
   $D$ est transitif, symétrique et réflexif.
   $E$ est réflexif, symétrique et transitif.

3. On obtient :

   (a) $A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}$
   (b) $\{(1, x)\}, \{(1, y)\}, \{(2, x)\}, \{(2, y)\}, \{(3, x)\}, \{(3, y)\},$
   $\{(1, x), (2, x)\}, \{(1, x), (2, y)\}, \{(1, x), (3, x)\}, \{(1, x), (3, y)\},$
   $\{(1, y), (2, x)\}, \{(1, y), (2, y)\}, \{(1, y), (3, x)\}, \{(1, y), (3, y)\},$
   $\{(2, x), (3, x)\}, \{(2, x), (3, y)\}, \{(2, y), (3, x)\}, \{(2, y), (3, y)\},$
   $\{(1, x), (2, x), (3, x)\}, \{(1, y), (2, y), (3, y)\}, \{(1, x), (2, y), (3, y)\},$
   $\{(1, y), (2, y), (3, x)\}, \{(1, y), (2, x), (3, y)\}, \{(1, x), (2, x), (3, y)\},$
   $\{(1, x), (2, y), (3, x)\}, \{(1, y), (2, x), (3, x)\}, \emptyset$
   (c) $\{(1, x), (2, x), (3, x)\}, \{(1, y), (2, y), (3, y)\}, \{(1, x), (2, y),$
   $(3, y)\}, \{(1, y), (2, y), (3, x)\}, \{(1, y), (2, x), (3, y)\}, \{(1, x), (2, x), (3, y)\},$
   $\{(1, x), (2, y), (3, x)\}, \{(1, y), (2, x), (3, x)\}$

4. $\{(a, a), (b, a)\}; \{(a, b), (b, b)\}; \{(a, b), (b, a)\}; \{(a, a), (b, b)\}$

5. $A$ est graphe d'une fonction. $B$ n'est pas graphe d'une fonction. $C$ n'est pas graphe d'une fonction. $D$ est graphe d'une fonction.

6. $A$ est réflexif, transitif et symétrique. $A$ est par conséquent une relation d'équivalence. La partition produite est $\{\{1,2,3\},\{4,5,6\}\}$
7. $A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(7,7),(1,2),$
$(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2),(4,5),(5,4),(6,7),(7,6)\}$

## 1.9 Objectifs d'apprentissage

— Arriver à définir et appliquer correctement les concepts de la théorie des ensembles „ensemble", „sous-ensemble", „intersection", „union", „différence", „complément" et „ensemble des parties". Comprendre et arriver à utiliser correctement les symboles correspondants.
— Arriver à définir et appliquer correctement les concepts de la théorie des ensembles „paire ordonnée", „n-uplet", „relation" et „produit cartésien". Comprendre et arriver à utiliser correctement les symboles correspondants. Arriver à vérifier si une relation est réflexive, transitive, symétrique ou asymétrique. Arriver à définir le concept „relation d'équivalence" et „partition". Arriver à trouver la partition produite par une relation d'équivalence et la relation d'équivalence produite par une partition.
— Arriver à définir et appliquer correctement les concepts „fonction", „graphe d'une fonction", „application", „injection", „surjection", „bijection" et „fonction réciproque". Arriver à définir et appliquer correctement les concepts „domaine de définition", „domaine des valeurs", „image d'une fonction" et „image réciproque d'une fonction". Savoir que $f(x)$ désigne $y$ dans $(x, y)$, si $(x, y) \in g$ et $g$ est le graphe de la fonction $f$.
— Arriver à définir et appliquer correctement max et min.
— Arriver à appliquer correctement le signe de sommation et les règles de sommation liées à ce signe.
— Arriver à effectuer l'addition et la multiplication (par points) sur des fonctions.
— Arriver à résoudre des exercices du type ce ceux ci-dessus.

# Chapitre 2

# Représentation graphique des nombres, couples, relations et fonctions

## 2.1 Les nombres réels et la droite réelle

Nous utiliserons les ensembles de nombres suivants qu'on peut supposer comme connus. On pourrait définir dans le cadre de la théorie des ensembles les différents types de nombres ce qui mènerait cependant trop loin.

— $\mathbb{N}$ = l'ensemble des nombres naturels : $\{0, 1, 2, 3, ...\}$
— $\mathbb{N}^*$ = l'ensemble des nombres naturels sans zéro : $\{1, 2, 3, ...\}$
— $\mathbb{N}_n$ = l'ensemble des $n + 1$ nombres naturels de 0 à $n$ : $\{0, 1, 2, 3, ..., n\}$
— $\mathbb{N}_n^*$ = l'ensemble des $n$ nombres naturels de 1 à $n$ : $\{1, 2, 3, ..., n\}$
— $\mathbb{Z}$ = l'ensemble des nombres entiers (exemple d'un nombre entier qui n'est pas naturel : $-1$).
— $\mathbb{Q}$ = l'ensemble des nombres rationnels (exemples de nombres rationnels qui ne sont pas entiers : $\frac{4}{5}$; 6.77777777...)
— $\mathbb{R}$ = l'ensemble des nombres réels (exemples de nombres réels qui ne sont pas rationnels : $\pi$; $\sqrt{2}$; $\log_{10} 5$)
— $\mathbb{R}_+$ = l'ensemble des nombres positifs réels (avec zéro). D'une manière analogue pour $\mathbb{Z}_+$ et $\mathbb{Q}_+$ (ou aussi $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Z}^+$ et $\mathbb{Q}^+$)

On peut affirmer :

$$\mathbb{N}_n^* \subset \mathbb{N}^* \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$
$$\mathbb{N}_n \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$
$$\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{Q}_+ \subset \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$$

Les représentations graphiques des nombres réels peuvent alors s'utiliser aussi pour les autres types de nombres du tableau.

Nous supposons connus les concepts „point“, „segment“ et „droite“. Un point n'a pas d'extension et n'est par conséquent pas visible. Lorsqu'on dessine un point sur un papier ou sur un autre support, il s'agit d'une représentation du point, pas du point lui-même. Un segment est le lien le plus court entre deux points différents et contient un nombre non dénombrable de points - les ensembles des nombres naturels, entiers et rationnels sont dénombrables, l'ensemble des nombres réels ou les intervalles réels ne sont pas dénombrables. La droite est le prolongement d'un segment des deux côté vers l'infini.

Nous définissons à partir des nombres réels une bijection $f$ sur une droite $g$, en attribuant un point arbitraire de la droite à 0. Ensuite on attribue à droite de 0 de nouveau d'une manière arbitraire un point à 1. On applique un nombre positif entier $z$ sur la droite en lui attribuant le point qui se trouve à une distance égale à $z$ fois la distance entre 0 et 1. Le nombre entier négatif $z$ est appliqué à la droite en lui attribuant le point qui se trouve à gauche de 0 de sorte que la distance entre $z$ et 0 est identique à celle entre 0 et $-z$. On applique les nombres rationnels $\frac{q}{p}$ entre 0 et 1 en divisant le segment entre 0 et 1 en $p$ segments de même longueur et en attribuant le dernier point des premiers $q$ segments à $\frac{q}{p}$. etc. Par rapport à l'application des nombres réels, les bases pour une discussion précise nous manquent. On peut en tout cas appliquer chaque nombre réel à un point de la droite. Pour les dessins on utilise une approximation rationnelle pour les nombres non-rationnels. Nous appelons la droite ainsi construite $g$ „droite réelle graduée".

**Exercice 2.1.1.** *Dessiner deux droites réelles graduées et placer les nombres réels* 2.5, 3 *et* 5.

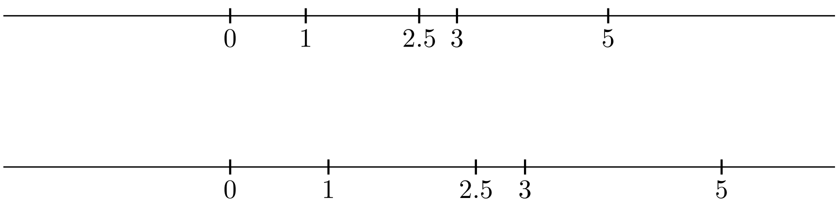


Figure 2.1.1 – Exemple de solution pour l'exercice 2.1.1 - deux droites réelles graduées

**Définition 2.1.2.** *Pour $x, y \in \mathbb{R}$ on définit la longueur (euclidienne) du segment entre le nombre $x$ et le nombre $y$ (= la distance entre les nombres $x$ et $y$) par $d(x,y) := \sqrt{(x-y)^2}$ (d pour distance, $d$ est une application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, la distance est un nombre non-négatif).* ◊

La longueur $d(5,3)$ du segment entre 5 et 3 est $5-3=2$ ou à l'aide de la définition $\sqrt{(5-3)^2} = 2$. Pour le cas spécial $x = 0$ on obtient $d(x,y) = |y|$ pour $|y| = y$ si $y \geq 0$ et $|y| = -y$ si $y < 0$. Ainsi $|5| = 5$ et $|-5| = -(-5) = 5$. On obtient p.ex. $d(0,-3) = \sqrt{(0-(-3))^2} = 3$. Il y a un nombre non-dénombrable de segments de longueur identique sur la droite réelle. De plus on peut affirmer $\sqrt{(y-x)^2} = |x-y|$ pour $x, y \in \mathbb{R}$.

**Théorème 2.1.3.** *Pour $d$ déterminée par la définition 2.1.2 on peut affirmer :*

1. $d(x,y) = d(y,x)$ *(symétrie)*
2. $d(x,y) \geq 0$
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *(inéquation triangulaire)*

*Démonstration.*

1. $d(x,y) = \sqrt{(y-x)^2} = \sqrt{(x-y)^2} = d(y,x)$
2. Puisque $(x-y)^2 \geq 0$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on obtient $\sqrt{(x-y)^2} \geq 0$.
3. On peut affirmer $y \in [x,z]$ ou $y \notin [x,z]$. Pour le premier cas $d(x,z) = d(x,y) + d(y,z)$ et par là $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ . Pour le deuxième cas soit $y > z$ soit $y < x$. Pour le premier de ces cas $d(x,y) > d(x,z)$. Alors $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, car $d(y,z) \geq 0$.
   Si par contre $y \leq x$, on peut affirmer : $d(y,z) > d(x,z)$ et par conséquent $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, car $d(x,y) \geq 0$.

□

**Remarque 2.1.4.** *Si on étiquète le point qu'on attribue à* 5.3 *par le chiffre „*5.3*", on peut indiquer par là la distance $d(5.3, 0)$ ou le nombre auquel on attribue le point, puisque les deux sont identiques. Si on étiquète le point correspondant par le chiffre „*$-5.3$*", on désigne le nombre, et non pas la distance qui se monte à* 5.3. ◊

## 2.2 Couples et système de coordonnées cartésiennes

Si nous choisissons deux droites réelles graduées de sorte qu'une est perpendiculaire à l'autre, qu'elles ont le même zéro et que la droite horizontale devient - éventuellement après la multiplication par une constante positive - la droite verticale par une rotation de $90^0$ dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, nous parlons d'un système cartésien de coordonnées (à deux dimensions). Nous appelons la droite horizontale en général „*axe des $x$*" (= abscisse) et la droite verticale „*axe des $y$*" (= ordonnée). Nous appelons l'aire à droite de l'ordonnée au dessus de l'axe des $x$ „premier quadrant", l'aire à gauche de l'ordonnée et au dessus de l'abscisse „deuxième quadrant", l'aire à gauche de l'ordonnée et en dessous de l'abscisse „troisième quadrant" et l'aire qui reste „quatrième quadrant". Nous pouvons attribuer des points du plan créé par l'abscisse et l'ordonnée aux couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Pour un couple $(z, u) \in \mathbb{R}^2$ nous obtenons cette attribution en

— dessinant $(z, 0)$ sur l'abscisse et une droite parallèle à l'ordonnée à travers $(z, 0)$,
— dessinant $(0, u)$ sur l'ordonnée et une droite parallèle à l'abscisse à travers $(0, u)$ et
— attribuant l'intersection de ces deux droites aux couples $(z, u)$ (voir figure 2.2.2).

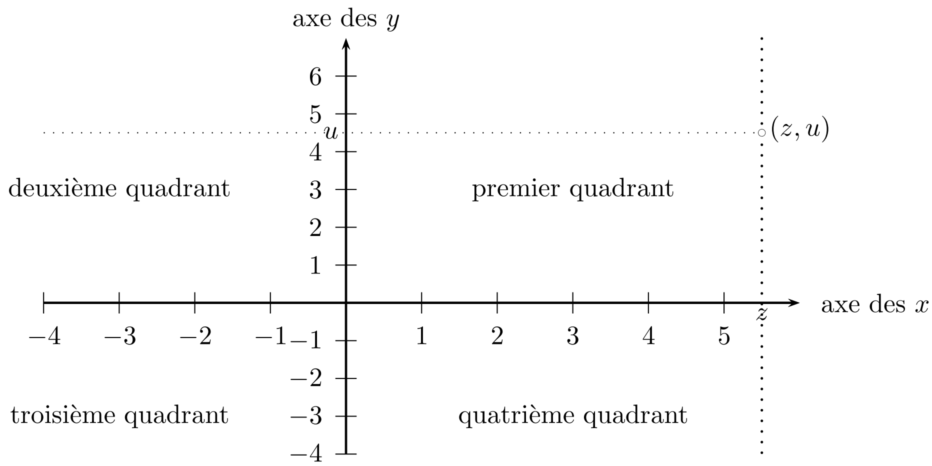


FIGURE 2.2.2 – Exemple de l'attribution d'un point à un couple $(z, u)$ dans le système de coordonnées cartésiennes

On peut ainsi définir une bijection entre les points du plan et les couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. C'est pourquoi on peut identifier les points du plan par les couples correspondants.

**Exercice 2.2.1.** *Dessiner un système de coordonnées cartésiennes et dessiner les points* $(5, 6), (-2, 3), (1, -3), (-1, -2), (0, 3)$ *et* $(2, 0)$.

**Solutions 2.2.2.** *On obtient :*

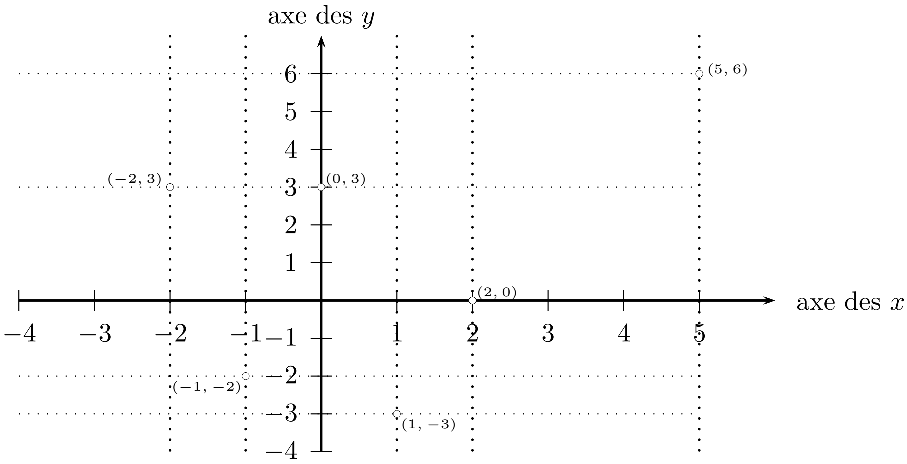


FIGURE 2.2.3 – Solution de l'exercice 2.2.1

Puisque les relations sont des ensembles de couples nous pouvons dessiner les relations $R \subset \mathbb{R}^2$ dans un système de coordonnées cartésiennes.

**Exercice 2.2.3.** *Dessiner la relation* $\{(1,2),(3,4),(2,2),(2,4)\}$ *dans un système de coordonnées cartésiennes.*

**Solutions 2.2.4.** *On obtient :*

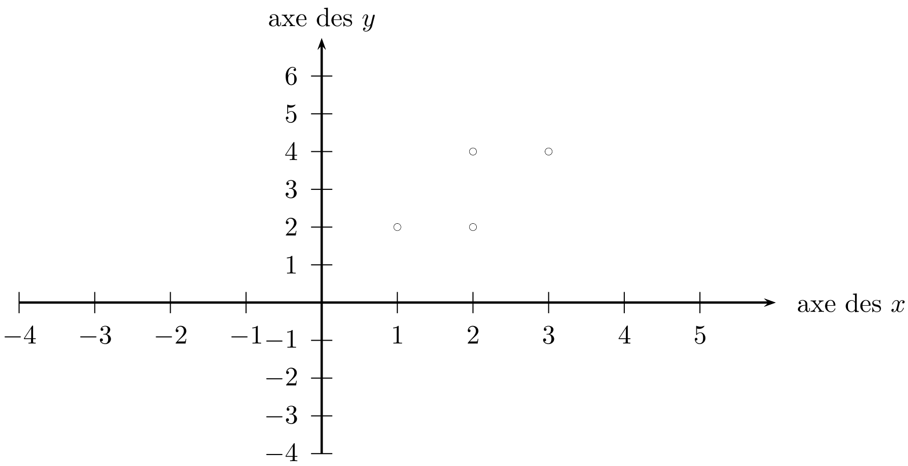


FIGURE 2.2.4 – Solution de l'exercice 2.2.3

**Exercice 2.2.5.** *Dessiner le produit cartésien* $\{1,2,3\} \times \{2,4,5\}$ *dans un système de coordonnées cartésiennes.*

**Solutions 2.2.6.** *On obtient :*

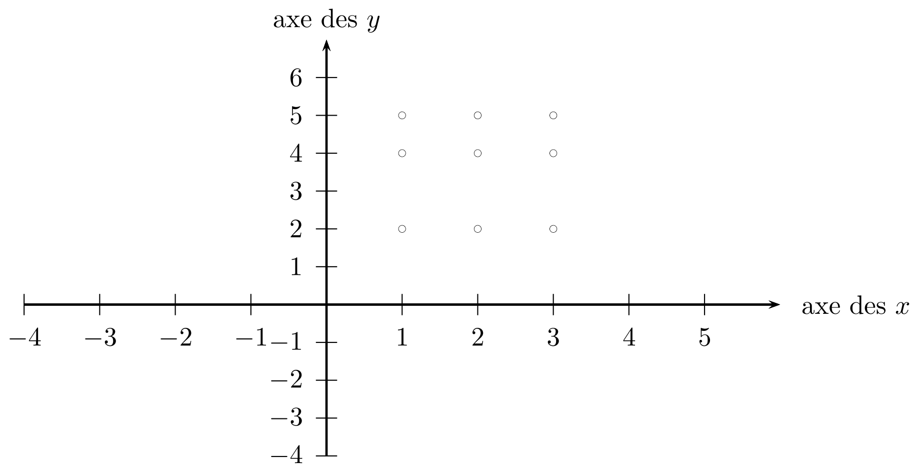


FIGURE 2.2.5 – Solution de l'exercice 2.2.5

**Remarque 2.2.7.** *L'ensemble des points qui correspond au produit cartésien de deux ensembles de nombres correspond toujours à un rectangle. Pour le cas du produit cartésien de deux intervalles on obtient un rectangle plein.* ♢

Puisque les fonctions ont pour graphe des relations spécifiques, nous pouvons dessiner les graphes $g$ d'une fonction tel que $g \subset \mathbb{R}^2$ dans un système de coordonnées cartésiennes. Souvent on appelle la représentation graphique d'un graphe d'une fonction aussi „graphe".

**Exercice 2.2.8.** *Dessiner le graphe de la fonction* $(\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{(1, 4), (2, 4), (3, 5)\})$ *dans un système de coordonnées cartésiennes.*

**Solutions 2.2.9.** *On obtient :*

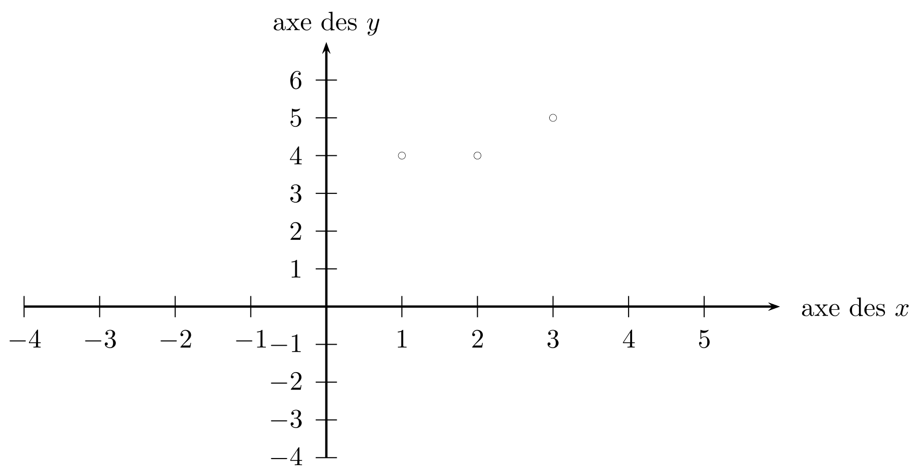


FIGURE 2.2.6 – Solution de l'exercice 2.2.8

Si une fonction attribue un nombre réel $y$ à chaque nombre réel $x$, la représentation graphique est - sous certaines conditions - une courbe continue, p.ex. pour les points du graphe de la fonction

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ; $f(x) = 0.8x^2$ dans l'intervalle $[-3, 3]$ (voir figure 2.2.7) on obtient

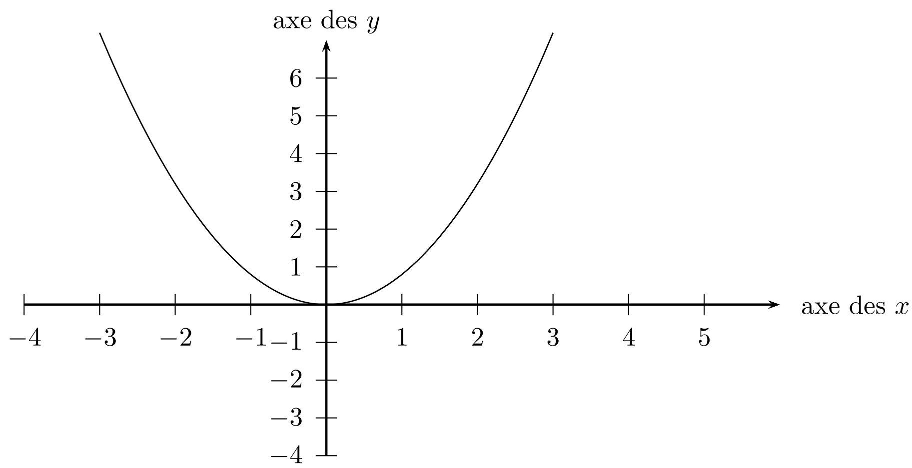


FIGURE 2.2.7 – Exemple de la représentation graphique du graphe d'une fonction donné par $f(x) = 0.8x^2$

En théorie la courbe contient un nombre infini non dénombrable de points - entre autre p.ex. $(0.1, 0.008), (\ln 2, 0.384362411)$, $(\sqrt{2}, 1.6), (2, 3.2), (2.5, 5), (3, 7.2)$. L'exemple produit une courbe continue ce qui est dû au fait que pour les nombres $x$ très proches de $x_0$, $f(x)$ est très proche de $f(x_0)$. Cela doit être valable pour tous les $x_0$. Les fonctions avec cette caractéristique sont un cas spécial très important pour les mathématiques qu'on va analyser en détail par la suite.

Un exemple pour une fonction dont la représentation graphique ne produit pas une ligne continue est la fonction qui attribue à tous les $x \in \mathbb{R}$ selon le hasard (distribution standard normale) un $y \in \mathbb{R}$. Pour la représentation graphique nous pouvons nous restreindre à des nombres entre -3 et 3 à une distance de 0.001 - il faut alors dessiner 6001 points. On obtient la représentation graphique suivante, qu'on peut reproduire (pas dans le détail à cause de l'effet du hasard) p. ex. par R avec les commandes (a=seq(-3,3,0.001) ; b=rnorm(a) ; ab=cbind(a,b) ;plot(ab))

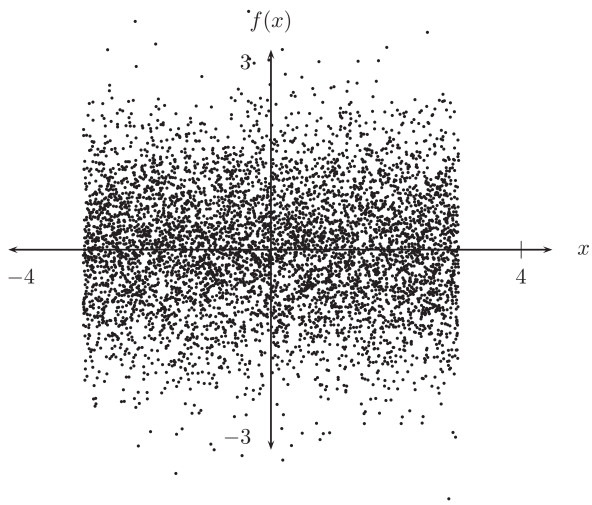


FIGURE 2.2.8 – Représentation graphique de la fonction qui attribue un nombre aux $x$ entre $-3$ et 3 à une distance de 0.001 selon le hasard (distribution standard normale). Aucun point est au-dessus d'un autre.

La représentation graphique du graphe d'une fonction se distingue de la représentation graphique d'une relation qui n'est pas le graphe d'une fonction par le fait qu'il y a au plus un point au dessus de chaque x sur l'abscisse (voir figures 2.2.9 et 2.2.10 pour un exemple).

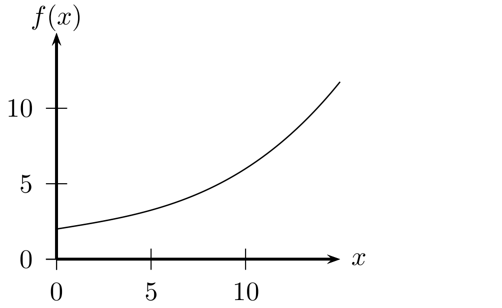


FIGURE 2.2.9 – Exemple de la représentation graphique d'une relation qui est le graphe d'une fonction

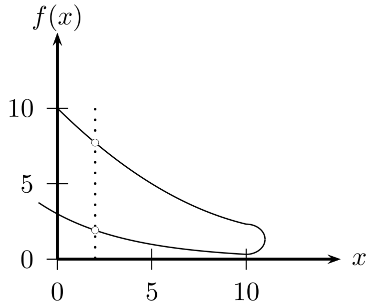


FIGURE 2.2.10 – Exemple de la représentation graphique d'une relation, qui n'est pas le graphe d'une fonction

**Définition 2.2.10.** *La longueur (euclidienne)* $d(\mathbf{x},\mathbf{y})$ *du segment entre deux points* $\mathbf{x} := (x_1, x_2)$ *et* $\mathbf{y} := (y_1, y_2)$ *dans l'espace deux-dimensionnel* $\mathbb{R}^2$ *est définie par*

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

*La longueur du segment est alors un nombre réel. d est une application* $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*, qui n'est ni surjective ni injective (pourquoi ?).* ♢

**Exemple 2.2.11.** *La distance entre* $\mathbf{x} = (5, 4)$ *et* $\mathbf{y} = (0.5, 1)$ *est*

$$\sqrt{(5 - 0.5)^2 + (4 - 1)^2} = 5.408\,3$$

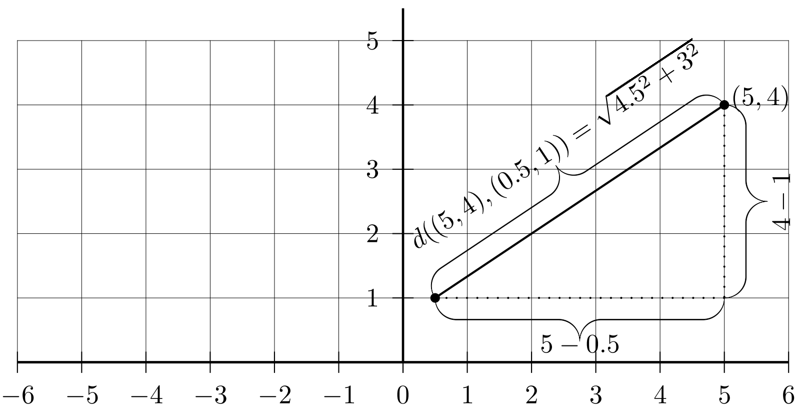


FIGURE 2.2.11 – La distance entre les points $\mathbf{x} = (5, 4) = (x_1, x_2)$ et $\mathbf{y} = (0.5, 1) = (y_1, y_2)$ est $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = \sqrt{(5 - 0.5)^2 + (4 - 1)^2}$

♢

**Remarque 2.2.12.** *L'application* $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *n'est pas le même objet que* $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *puisque les deux applications ont des domaines de définition différents. On pourrait différencier ces deux applications par la notation en utilisant p.ex.* $d_1 := \sqrt{(x-y)^2}$ *et* $d_2 := \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$. *Les deux fonctions sont cependant compatibles : elles mènent aux mêmes résultats pour les points sur l'axe des* $x$. *Dans un espace à deux dimension, on représente le nombre* $x$ *sur l'axe des* $x$ *par* $(x, 0)$. *La distance entre* $x$ *et* $y$ *devient alors la distance entre* $(x, 0)$ *et* $(y, 0)$. *On obtient :*

$$d_2\left((x_1, y_2), (y_1, y_2)\right) = \sqrt{(x-y)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(x-y)^2} = d_1(x, y)$$

*De plus le contexte rend claire les espaces en question. C'est pourquoi on peut renoncer à cette complication notationnelle.* ◊

**Exemple 2.2.13.** *La longueur du segment entre* $(5.5, 0)$ *et* $(3.1, 0)$ *est* $5.5 - 3.1 = 2.4$, *car*

$$\sqrt{(5.5-3.1)^2 + (0-0)^2} = 2.4$$

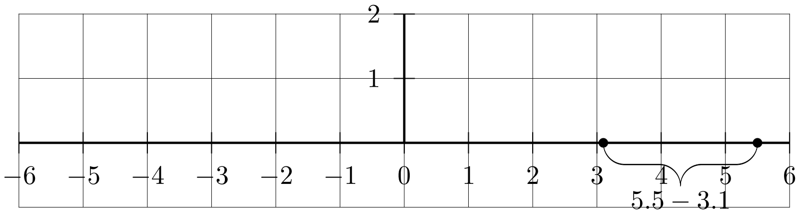


FIGURE 2.2.12 – La distance entre les points $\mathbf{x} = (5.5, 0) = (x_1, x_2)$ et $\mathbf{y} = (3.1, 0) = (y_1, y_2)$ est $\sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2} = \sqrt{(5.5-3.1)^2 + (0-0)^2} = 2.4$

◊

**Remarque 2.2.14.** *Au lieu de* $(x, 0)$ *nous écrivons en général près du point* $(x, 0)$ *uniquement* $x$. *Pour exprimer la distance entre* $(0, 0)$ *et* $(0, x)$, *nous écrivons souvent sous le segment entre* $(0, 0)$ *et* $(0, x)$ *ou sous* $(0, x)$ „$|x|$“, *car*

$$\sqrt{(0-0)^2 + (0-x)^2} = \sqrt{(-x)^2} = |x|.$$

*Pour* $x > 0$, *la distance enter* $x$ *et* $0$ *est alors* $x$, *pour* $x < 0$ *par contre la distance est* $-x$. ◊

**Remarque 2.2.15.** *En général nous écrivons à côté du point* $(x, f(x))$ *uniquement* $f(x)$. *La distance entre le point* $(x, 0)$ *et* $(x, f(x))$ *est*

$$\sqrt{(x-x)^2 + (0-f(x))^2} = \sqrt{(-f(x))^2 = |f(x)|}$$

*Si* $f(x) > 0$, *on peut - pour exprimer la distance entre* $(x, 0)$ *et* $(x, f(x))$ *- écrire à côté du segment entre ces deux points* $f(x)$. *D'autre part,* $f(x)$ *à côté du point* $(x, f(x))$ *exprime et la valeur de fonction et la distance entre les deux points. Si* $f(x) < 0$, *pour exprimer la distance, il faut ajouter* $-f(x)$ *au graphique, pour exprimer la valeur de fonction on écrit* $f(x)$. ◊

**Exemple 2.2.16.** *Si* $f(2) = 3$, *la distance entre le point* $(2, 3) = (2, f(2))$ *et* $(2, 0)$ *se monte à* $3$, *car*

$$\sqrt{(2-2)^2 + (3-0)^2} = 3$$

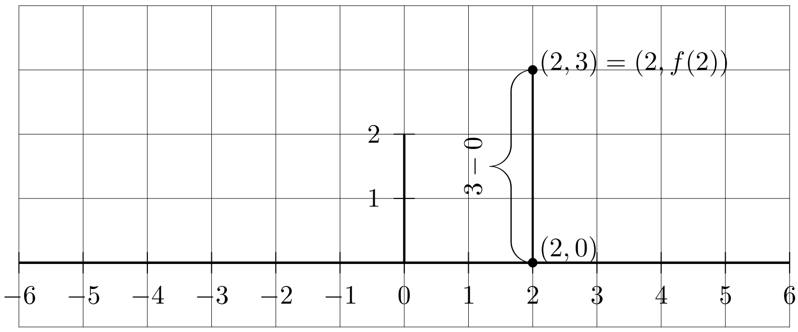


FIGURE 2.2.13 – Distance entre les points $\mathbf{x} = (2, 3) = (x_1, f(x_1))$ et $\mathbf{y} = (2, 0) = (y_1, y_2)$ est $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (f(x_1) - 0)^2} = \sqrt{(2-2)^2 + (3-0)^2} = 3$

◊

**Remarque 2.2.17.** *Le théorème 2.1.3 est aussi valable pour* $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ◊

## 2.3 Représentation graphique de triplets

Si nous ajoutons à un système cartésien à deux dimensions une troisième droite réelle graduée qui est perpendiculaire à l'axe des $x$ et à l'axe des $y$ et a le même zéro que les deux axes, nous parlons d'un système de coordonnées cartésiennes à trois dimension (voir pour la direction du troisième axe la figure 2.3.14). L'espace créé par les trois axes est l'espace standardisé à trois dimensions. Nous pouvons attribuer des points de cet espace à des triplets (pour la méthode voir la figure 2.3.14)

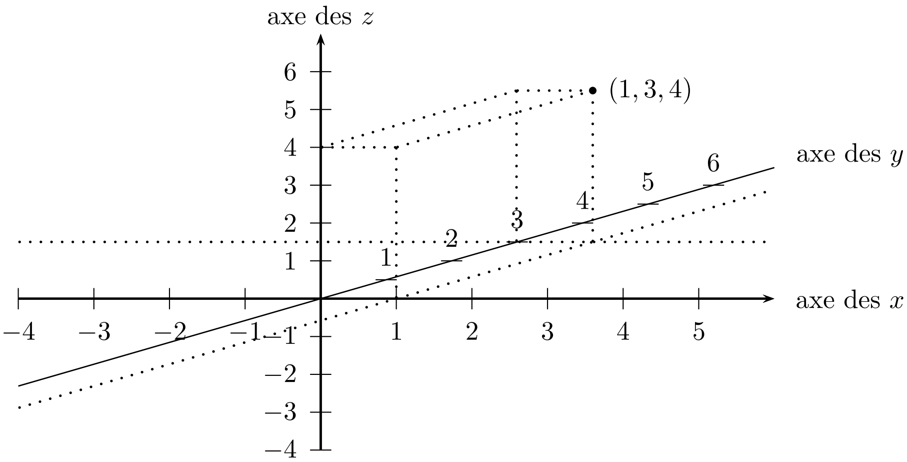


FIGURE 2.3.14 – Exemple de la représentation graphique du triplet $(1, 3, 4)$ dans le système de coordonnées cartésiennes à trois dimensions avec pavé droit (parallélépipède rectangle) dont le point forme un des angles

Par conséquent on peut représenter des relations contenant des triplets dans le système de coordonnées cartésiennes. Souvent les applications $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jouent un rôle - on verra des exemples économiques par la suite. Leur graphe est une relation contenant des triplets et peut être représenté dans un système de coordonnées cartésiennes tridimensionnel. Ainsi on peut p.ex. dessiner $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini par

$$f(x, y) := f((x, y)) = (x + 1)^2 + y^2 + 0.1$$

(voir figure 2.3.15).

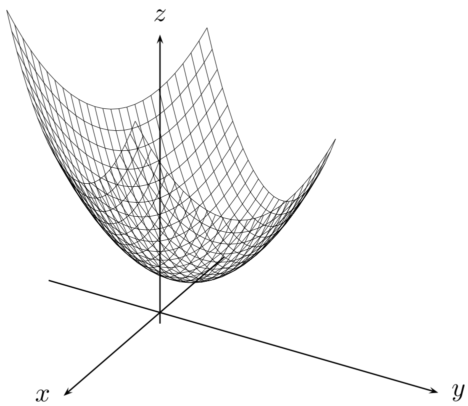


FIGURE 2.3.15 – Représentation graphique de la fonction donnée par $z := f(x, y) = (x + 1)^2 + y^2 + 0.1$ dans le domaine $[-1, 1] \times [-0.8, 1]$ (sous-ensemble du domaine de définition)

Ainsi

$$f(3, 4) = (3 + 1)^2 + 4^2 + 0.1 = 32.1$$
$$f(2, 1) = (2 + 1)^2 + 1^2 + 0.1 = 10.1$$

**Définition 2.3.1.** *La distance (euclidienne)* $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *entre* $\mathbf{x} := (x_1, x_2, x_3)$ *et* $\mathbf{y} := (y_1, y_2, y_3)$ *est définie par*

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

*Généralement, la distance (euclidienne)* $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *entre* $\mathbf{x} := (x_1, ..., x_n)$ *et* $\mathbf{y} := (y_1, ..., y_n)$ *est*

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

$d$ *est une application* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. ◊

D'une manière générale on peut utiliser des fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ou $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ - cela aussi dans la théorie économique, comme on verra par la suite - on peut p.ex. attribuer un $m$-uplet de produits à un $n$-uplet de ressources nécessaires à leur production. On ne peut plus représenter graphiquement ce type de fonctions.

**Exercices**

1. (a) dessiner 5.3 et $-3.2$ sur la droite réelle suivante :

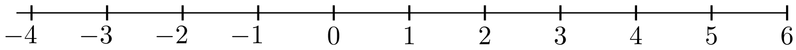


FIGURE 2.3.16 – Graphique pour l'exercice

(b) étiqueter le résultat.

(c) Calculer $d\,(5.3, 0)$,

(d) $d\,(0, -3.2)$,

(e) $d\,(5.3, -3.2)$ et

(f) $d\,(5.3, 3.2)$ .

2. (a) Dessiner $(3.5, 2)$ et $(1.3, -1.2)$ dans la surface suivante. Etiqueter le résultat.

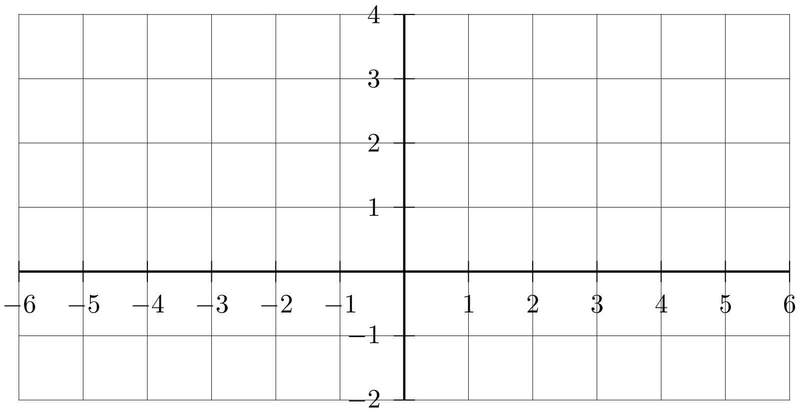


FIGURE 2.3.17 – Graphique pour l'exercice

(b) déterminer la distance entre les points $(3.5, 2)$ et $(1.3, -1.2)$

(c) entre les points $(3.5, 2)$ et $(3.5, 0)$

(d) entre les points $(0, 2)$ et $(3.5, 2)$

(e) entre les points $(1.3, -1.2)$ et $(1.3, 0)$

(f) entre les points $(1.3, -1.2)$ et $(0, -1.2)$

(g) Dessiner les segments avec les longueurs calculées dans le graphique (il y a différentes possibilités, choisir des exemples illustratifs)

3. On connaît du graphe d'une fonction les deux points suivants : $(1, 3)$ et $(4, 2)$.

(a) Dessiner ces points dans le graphique suivants. Etiqueter le résultat.

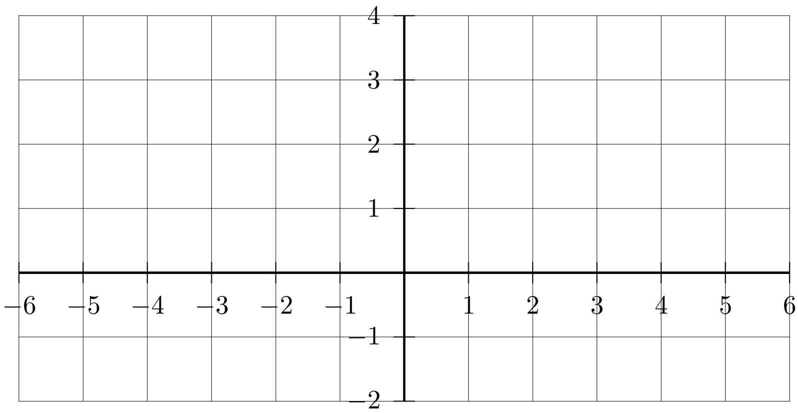


FIGURE 2.3.18 – Graphique pour l'exercice

(b) Dessiner le segment d'une longueur de $|f(1) - f(4)|$ dans le graphique (il y a différentes possibilités, choisir un exemple illustratif)

4. Dessiner le point $(2, 3, -1)$ dans le graphique suivant.

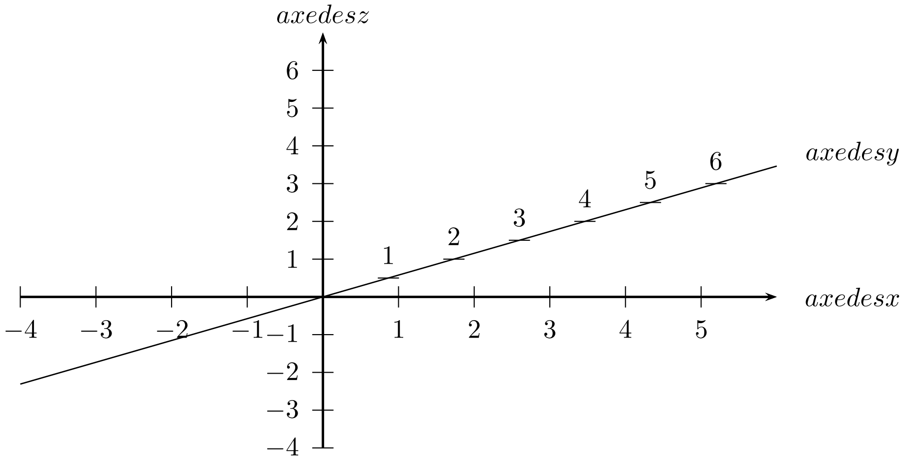


FIGURE 2.3.19 – Représentation graphique de l'espace tri-dimensionnal

Quelle es la distance entre le point $(2, 3, -1)$ et le point $(0, 0, 0)$
et entre le point $(2, 3, -1)$ et le point $(4, 2, 5)$?

**Solutions**

1. (a) Dessiner 5.3 et −3.2 sur la droite réelle résulte en :

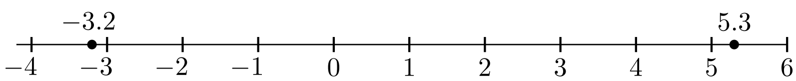


FIGURE 2.3.20 – Graphique pour la solution de l'exercice

(b) Pour l'étiquetage voir la figure 2.3.20.
(c) $d(5.3, 0) = 5.3$
(d) $d(0, -3.2) = 3.2$
(e) $d(5.3, -3.2) = \sqrt{(5.3 - (-3.2))^2} = 8.5 = 5.3 + 3.2$
(f) $d(5.3, 3.2) = \sqrt{(5.3 - 3.2)^2} = 2.1 = 5.3 - 3.2$

2. (a) Le dessin de $(3.5, 2)$ et de $(1.3, -1.2)$ ainsi que l'étiquetage résultent en :

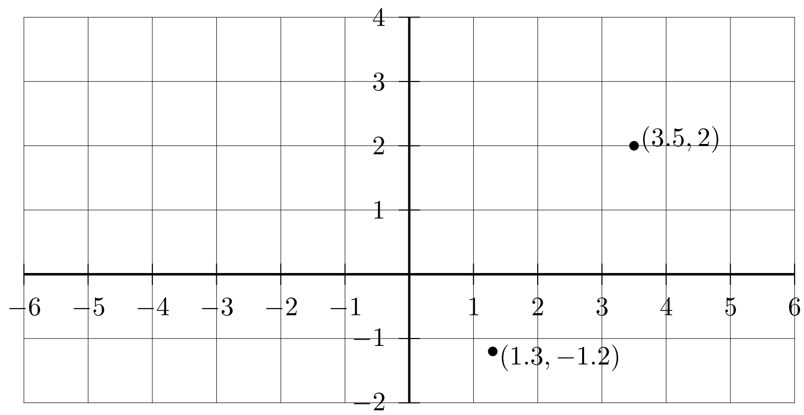


FIGURE 2.3.21 – Solution de l'exercice - dessin et étiquetage de points

(b) $d((3.5, 2), (1.3, -1.2)) = \sqrt{(3.5 - 1.3)^2 + (2 - (-1.2))^2} = 3.8833$
(c) $d((3.5, 2), (3.5, 0)) = \sqrt{(3.5 - 3.5)^2 + (2 - 0)^2} = 2$
(d) $d((0, 2), (3.5, 2)) = \sqrt{(0 - 3.5)^2 + (2 - 2)^2} = 3.5$
(e) $d((1.3, -1.2), (1.3, 0)) = \sqrt{(1.3 - 1.3)^2 + (-1.2 - 0)^2} = 1.2$
(f) $d((1.3, -1.2), (0, -1.2)) = \sqrt{(1.3 - 0)^2 + (-1.2 - (-1.2))^2} = 1.3$
(g) On obtient :

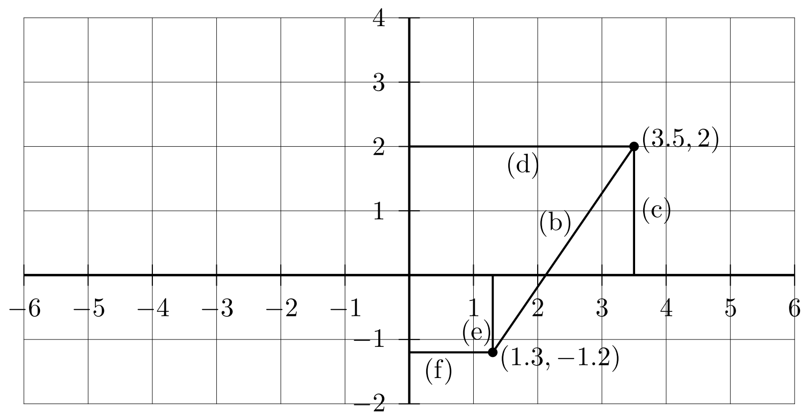


FIGURE 2.3.22 – solution de l'exercice (segments)

3. Représentation graphique de $(1, 3) = (1, f(1))$ et de $(4, 2) = (4, f(4))$ :

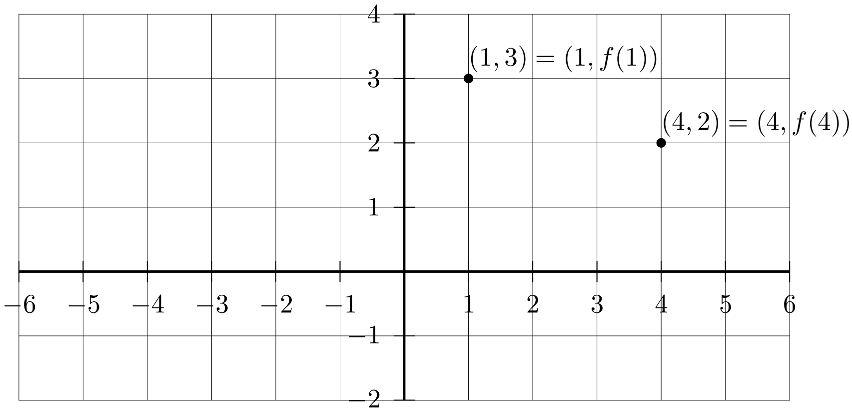


FIGURE 2.3.23 – Représentation de deux éléments du graphe de la fonction $f$

(a) Le dessin du segment de la longueur $|f(1) - f(4)|$ dans le graphique :

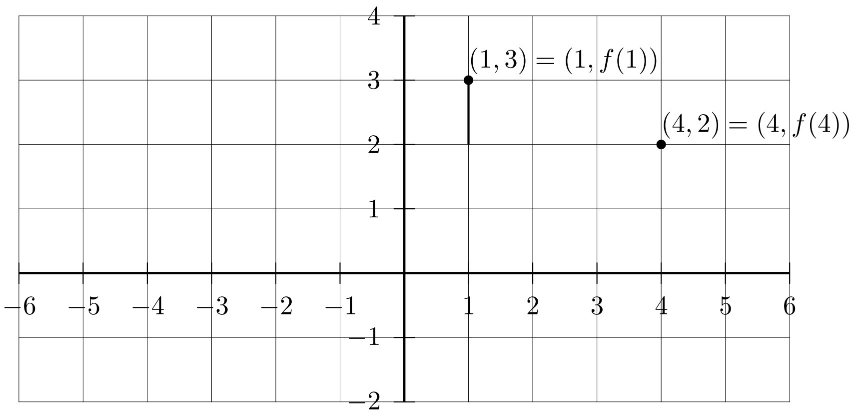


FIGURE 2.3.24 – Représentation graphique d'un segment de longueur $|f(1) - f(4)| = |3 - 2| = 1$

Une autre possibilité illustrative est un segment entre les points $(4, 3)$ et $(4.2)$.

4. On obtient :

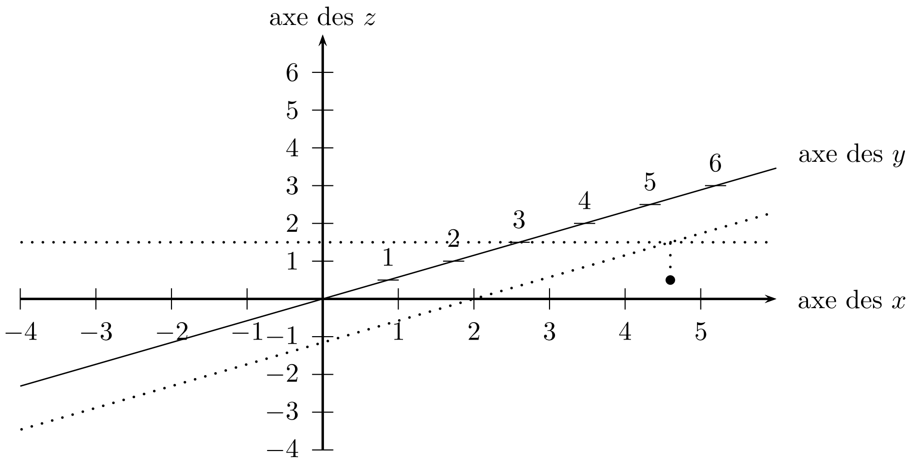


FIGURE 2.3.25 – Représentation graphique du triplet $(2, 3, -1)$ dans l'espace tridimensionnel

La distance entre les points $(2, 3, -1)$ et $(0, 0, 0)$ :

$$\sqrt{(2-0)^2 + (3-0)^2 + (-1-0)^2} = 3.\,741\,7$$

et $(4, 2, 5)$ :

$$\sqrt{(2-4)^2 + (3-2)^2 + (-1-5)^2} = 6.\,403\,1$$

## 2.4 Objectifs d'apprentissage

- Connaître les abréviations pour les ensembles de nombres (première page du chapitre)
- Arriver à dessiner des nombres réels sur une droite réelle graduée.
- Arriver à calculer la longueur d'un segment entre deux points sur la droite réelle (= distance entre les deux points)
- Arriver à dessiner des couples et par là les éléments des relations et des graphes d'une fonction dans un système de coordonnées cartésiennes.
- Arriver à calculer la longueur d'un segment entre deux points dans l'espace deux-dimensionnel $\mathbb{R}^2$.
- Arriver à dessiner des triplets et par là les éléments des relations contenant des triplets et des graphes de fonctions $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dans un système de coordonnées cartésiennes à trois dimensions.
- Arriver à calculer la longueur d'un segment entre deux points dans l'espace tridimensionnel $\mathbb{R}^3$.
- Arriver à étiqueter correctement les points sur la droite réelle, dans l'espace deux- et tridimensionnel.

# Chapitre 3

# Polynômes

## 3.1 Economie et fonctions

On peut décrire certains phénomènes économiques en utilisant des fonctions. Cela est le cas si l'on peut attribuer certaines grandeurs uniques à des grandeurs. Ainsi dans un processus de production il y a des coûts spécifiques uniques (à un certain moment d'un processus de production spécifique) qui correspondent à une quantité de biens produits spécifique. Ce n'est pas possible d'avoir dans un processus de production d'une certaine entreprise à un moment précis deux coûts différents. C'est pourquoi on peut représenter le lien entre la quantité de biens produits et les coûts correspondants par une fonction. Les fonctions sont des *modèles* que nous pouvons utiliser pour décrire des aspects de la réalité. En général nous utilisons des fonctions réelles que nous définissons comme des fonctions dont le graphe est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. Plus précisément nous utilisons presque toujours des fonctions réelles définies sur des intervalles de $\mathbb{R}$. L'utilisation de ce type de fonctions réelles est une idéalisation mathématique : en réalité nous mesurons les grandeurs (coûts, quantités produites, temps, etc.) toujours dans un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$ (nombres rationnels), à savoir les nombres rationnels d'un nombre fini de chiffres après la virgule. Les fonctions réelles définies sur des intervalles ont cependant souvent des qualités mathématiques qui sont très utiles entre autre pour la théorie de l'optimisation (gain maximal, coûts minimaux par unité , etc.) Comme cette idéalisation n'a pas d'inconvénients, elle est tout à fait anodine.

Comment peut-on trouver des fonctions aptes à décrire des liens entre des phénomènes économiques ? En général on utilise des moyens statistiques à cette fin - dans notre contexte nous nous limiterons à des méthodes moins exigeantes pour construire des fonctions. Souvent nous avons une idée générale de la forme réaliste d'une fonction - ainsi les coûts augmentent avec la quantité produite de biens. Par conséquent une fonction de coût doit monter de gauche à droite. Puisqu'il n'y a pas des quantités négatives de biens ou des coûts négatifs, la fonction doit se développer dans le premier quadrant. De plus on peut parfois réclamer des caractéristiques supplémentaires : une fonction de coût doit toujours croître, mais peut-être moins pour des petites quantités que pour des grandes(voir figure 3.1.1).

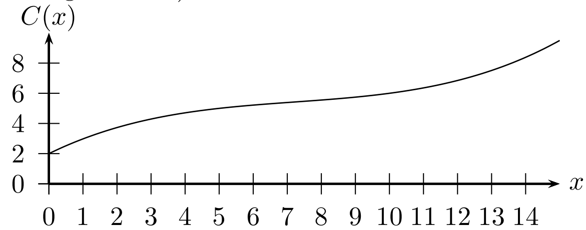


FIGURE 3.1.1 – Fonction de coût $C$. Sur l'axe des $x$ il y a les quantités produites, sur l'axe des $y$ les coûts. Pour chaque quantité possible, on peut calculer les coûts correspondants. La fonction est partout croissante, d'abord de moins en moins, ensuite de plus en plus

**Exercice 3.1.1.** *Dessiner dans la figure 3.1.1 les coûts, qui correspondent à une production de 10 unités de quantité. Indiquer le montant approximatif de ces coûts.*

Si nous connaissons sur la base de l'expérience certains points d'une fonction de coût (10 kg coûtent 5 CHF, 20 kg coûtent 8 CHF, etc.) nous pouvons calculer une fonction à travers ces points qui respecte éventuellement ces autres caractéristiques réclamées (voir figure 3.1.2).

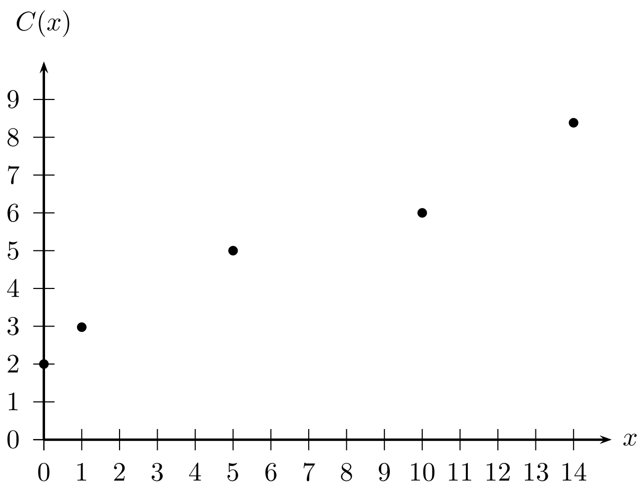


FIGURE 3.1.2 – Fonction de coût $C$. Sur l'axe des $x$ il y a les quantités produites, sur l'axe des $y$ les coûts. On connaît 4 points. Il faut trouver une fonction raisonnable qui relie ces points. Relier ces points par une courbe !

Nous allons traiter d'abord une classe simple de fonctions réelles, fonctions dites polynomiales ce qui nous permettra de plus de répéter certaines connaissances de base élaborées dans les écoles précédentes.

## 3.2 Définition de la fonction polynomiale

Les fonctions polynomiales (polynômes) sont des applications $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Il s'agit alors de fonctions réelles.

**Exemple 3.2.1.** *Exemples de fonctions polynomiales*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = 3x^2 + 2x + 4$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$g(x) = 4x + 2$$

$\Diamond$

Formellement on peut définir :

**Définition 3.2.2.** *Une application $f$ est un polynôme si est seulement si*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) := \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

*pour $a_i \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Nous appelons les $a_i$ les coefficients du polynôme et $n$ le degré du polynôme.* $(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0)$
$\diamondsuit$

On définit d'une manière récursive :

**Définition 3.2.3.** $x^1 := x;\ \ x^n := x^{n-1}x$ *pour* $n > 1$ $\diamondsuit$

Pour calculer avec des polynômes on a besoin du

**Théorème 3.2.4.** $x^n x^m = x^{n+m}$

*Démonstration.* (par induction) (1) $x^1x^1 = xx = x^2 = x^{1+1}$. (2) Nous posons $x^nx^m = x^{n+m}$. Pour $x^nx^{m+1}$ on peut en déduire : $x^nx^{m+1} = x^nx^mx = x^{n+m}x^1 = x^{n+m+1}$ et d'une manière analogue $x^{n+1}x^m = x^{n+1+m}$. La théorème est alors valable pour tout $m, n \geq 1$. $\square$

Il est p.ex. $2^32^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^7 = 2^{3+4}$.

**Théorème 3.2.5.** $(x^n)^m = x^{nm} = (x^m)^n$

Il est p.ex. $\left(2^2\right)^3 = (2 \cdot 2)^3 = (2 \cdot 2)(2 \cdot 2)(2 \cdot 2) = 2^6 = 2^{2 \cdot 3}$ et $(2 \cdot 2)(2 \cdot 2)(2 \cdot 2) = (2 \cdot 2 \cdot 2)(2 \cdot 2 \cdot 2) = (2 \cdot 2 \cdot 2)^2 = \left(2^3\right)^2$

**Théorème 3.2.6.** $(xy)^n = x^ny^n$

Il est p.ex. $(2 \cdot 3)^4 = (2 \cdot 3)(2 \cdot 3)(2 \cdot 3)(2 \cdot 3) = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 2^43^4$.

Pour des raisons économiques nous ne tenons parfois compte que de certains intervalles comme domaine de définition.

**Remarque 3.2.7.** *Nous appelons aussi „polynômes“ des fonctions qu'on peut transformer en* $\sum_{i=0}^{n} a_ix^i$. *Ainsi* $f(x) = (4x+2)^2$ *est un polynôme, car* $(4x+2)^2 = (4x+2)(4x+2) = 16x^2 + 8x + 8x + 4 = 16x^2 + 16x + 4 = 4 + 16x + 16x^2$. $\diamondsuit$

**Exemple 3.2.8.**

$$f(x) = 5x^4 + 3x^2 - 4x + 5 \tag{3.2.1}$$

*Dans l'exemple (3.2.1) :* $n = 4;\ a_4 = 5; a_3 = 0; a_2 = 3; a_1 = -4; a_0 = 5$ *(polynôme du* $4^{\text{ème}}$ *degré).*

$$f(x) = 5 \tag{3.2.2}$$

*Dans l'exemple (3.2.2) :* $n = 0;\ a_0 = 5; x^0 = 1; 1 \cdot 5 = 5$ *(polynôme du degré 0)*

$$f(x) = 0.234x^{20} - 4x \tag{3.2.3}$$

*Dans l'exemple (3.2.3) :* $n = 20;\ a_{20} = 0.234;$ *(polynôme du 20*$^{\text{ème}}$ *degré)*
$a_i = 0$ *pour* $i \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\};\ a_1 = -4;\ a_0 = 0$.

$$f(x) = 4.5x + 4 \tag{3.2.4}$$

*Dans l'exemple (3.2.4) :* $n = 1;\ a_1 = 4.5; a_0 = 4.$ *(polynôme du premier degré)*
$f(x) = \left(5x^2 + 3x\right)^3$ *est un polynôme du* $6^{\text{ème}}$ *car on obtient par calcul :*

$f(x) = \left(5x^2 + 3x\right)^3 = 125x^6 + 225x^5 + 135x^4 + 27x^3$
$(a_6 = 125; a_5 = 225; a_4 = 135; a_3 = 27; a_2 = a_1 = a_0 = 0)$. ◊

Nous discuterons par la suite ce type de fonctions et introduisons des exemples économiques pour leur utilisation.

## 3.3 Polynômes de degré zéro

**Définition 3.3.1.** *$f$ est un polynôme de degré zéro si et seulement si*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = a_0, \quad a_0 \in \mathbb{R}$$

◊

— On appelle les polynômes de degré zéro aussi „constants“ ou „fonctions constantes“, puisqu'un polynôme de degré zéro attribue partout le même nombre aux nombres réels. Le graphe d'une constante est alors $\{(x, a_0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ pour un $a_0 \in \mathbb{R}$. Un sous-ensemble du graphe du polynôme défini par l'équation $f(x) = 5$ serait alors $\{(10, 5), (0.5, 5), (0.1, 5)\}$. Le graphe possède un nombre infini non dénombrable de couples. La deuxième composantes de ces couples est partout 5. On appelle les sous-ensembles du graphe d'une fonction qu'on donne à l'aide d'un tableau „tableau des valeurs“. En général on utilise pour les tableaux des valeurs des $x$ à distance égale, pour l'exemple

| $x$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |

— La représentation graphique du graphe est une droite parallèle à l'axe des $x$. Elle coupe l'axe des $y$ au point $(0, a_0)$ (voire figure 3.3.3).

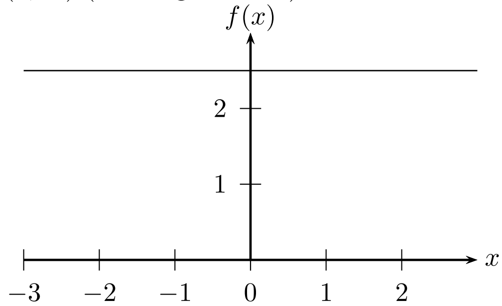


FIGURE 3.3.3 – Représentation graphique du polynôme $f(x) = 2.5$

— La droite parallèle est déterminée par le nombre $a_0$. Il suffit alors de connaître un seul point $(x, a_0)$ de la fonction polynomiale du 0ième degré pour pouvoir la dessiner dans un système de coordonnées cartésiennes.

— Les polynômes de degré 0 sont des applications dont l'image est un ensemble qui ne contient qu'un seul élément : $image(f) = \{a_0\}$. Ces fonctions ne sont alors pas surjectives, comme on n'attribue pas tous les nombres réels. Elle ne sont pas injectives, car on attribue à des nombres réelles différents toujours le même nombre. Ainsi ces fonctions ne sont pas bijectives et on ne peut pas former la fonction réciproque.

— Exemple économique : fonction de coût fixe. Les coûts fixes sont les coûts qui surviennent indépendamment de la quantité de biens produite. On attribue un nombre fixe, les coûts fixes, à chaque quantité de production. (abréviation p.ex. $C_f(x) = a_0$). Puisque les quantités produites ne peuvent être négatives, nous limitons le polynôme cependant au domaine de définition $\mathbb{R}^+$. Voir l'exemple graphique la figure 3.3.4)

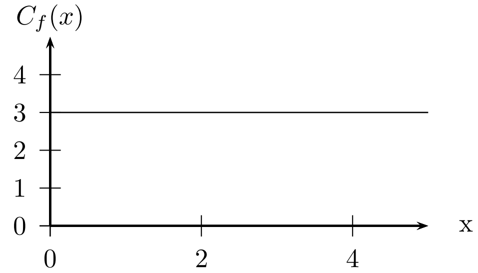


FIGURE 3.3.4 – Représentation graphique d'un polynôme du degré zéro ; fonction de coût fixe

## 3.4 Polynômes du premier degré

Nous distinguons deux types de polynômes du premier degré : les fonctions linéaires et affines.

### 3.4.1 Fonctions affines

**Définition 3.4.1.**

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) := a_1x + a_0 \textit{ avec } a_1 \neq 0 \neq a_0$$

$\Diamond$

— On attribue le nombre $a_1x+a_0$ à chaque nombre $x$. Le graphe de $f$ est alors $\{(x, a_1x+a_0) \mid x \in \mathbb{R}\}$.
Avec $a_0 = 3; a_1 = 4$ : $f(x) = 4x + 3$. Un sous-ensemble du graphe de $f(x) = 4x + 3$ serait alors $\{(10, 43), (0.5, 5), (0.1, 3.4), (-200, -797)\}$.
— Si nous dessinons les points du graphe d'une fonction affine dans un système de coordonnées cartésiennes nous obtenons une droite (voir figure 3.4.5).

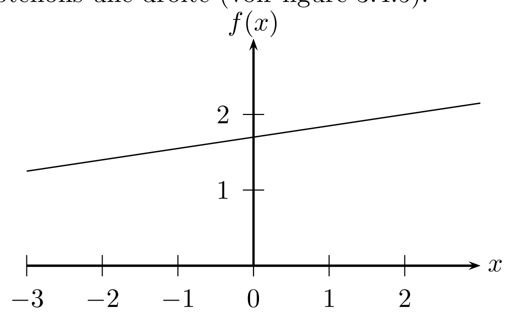


FIGURE 3.4.5 – Représentation graphique du polynôme $f(x) = 0.15x + 1.7$

— Les fonctions affines sont bijectives, car (i) elles sont surjectives. Soit $y \in \mathbb{R}$ pour un $y$ arbitraire. Il faut montrer qu'il y a un $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = a_1x + a_0$. Cet $x$ est donné par $x = \frac{y-a_0}{a_1}$ (isoler $x$ dans l'équation $y = a_1x + a_0$). (ii) De plus ces fonctions sont injectives : Soit $x_1 \neq x_2$. Ainsi $a_1x_1 \neq a_1x_2$ und $a_1x_1 + a_0 \neq a_1x_2 + a_0$. On attribue alors à des $x_i$ différent des valeurs de fonction différentes.
Puisque les fonctions affines sont bijectives, la fonction réciproque existe. Si une fonction affine est donnée par $f(x) = a_1x + a_0$ la fonction réciproque est donnée par $f^{-1}(x) = \frac{x-a_0}{a_1}$ - car $y = a_1x + a_0$ est équivalent à $x = \frac{y-a_0}{a_1}$. Pour exprimer que $x$ est la valeur attribuée par la fonction réciproque $f^{-1}$ au nombre $y$, nous écrivons $f^{-1}(y) = \frac{y-a_0}{a_1}$. Comme le choix des symboles pour les variables est arbitraire on peut tout aussi bien affirmer $f^{-1}(x) = \frac{x-a_0}{a_1} = \frac{1}{a_1}x - \frac{a_0}{a_1}$.

### Pente d'une fonction affine

Avant de discuter d'autres qualités des fonctions affines nous définissons le concept de la pente d'une droite qui est déterminée par une fonction affine $f$. On la définit par

**Définition 3.4.2.**

$$m_f := \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

*tel que $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$ sont deux éléments différents quelconques du graphe de $f$.* ♢

La figure 3.4.6 ci-dessous illustre la définition de la pente d'une droite qui est déterminée par une fonction affine $f$.

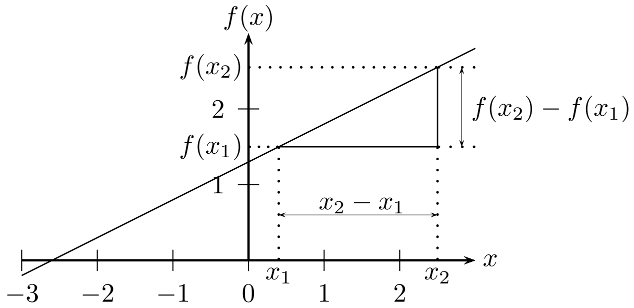


FIGURE 3.4.6 – Pente d'une droite qui est déterminée par un polynôme affine

**Théorème 3.4.3.** *Pour une fonction affine $f(x) = a_1x + a_0$ :*

- *La pente $m_f = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ est indépendante du choix des points $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2)$ (pour $x_1 \neq x_2$)*
- *La pente $m_f$ est identique à $a_1$.*

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} m_f &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{a_1x_2 + a_0 - (a_1x_1 + a_0)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{a_1x_2 + a_0 - a_1x_1 - a_0}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{a_1x_2 - a_1x_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{a_1(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= a_1 \end{aligned}$$

Puisque $x_1$ et $x_2$ n'apparaissent pas en $a_1$, la pente est indépendante du choix de $x_1$ ou de $x_2$. □

La pente d'une droite peut être positive ou négative. Attention : plus la pente est négative, plus petite elle est ! (voir figures 3.4.7 et 3.4.8)

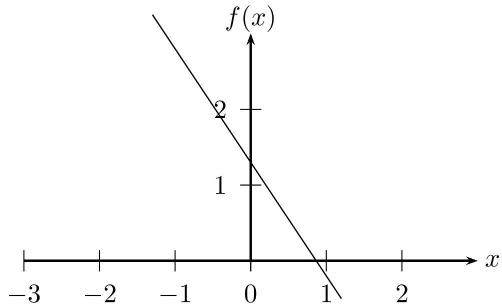


FIGURE 3.4.7 – La pente −1.5 de la droite de cette figure est plus petite que la pente −0.5 de la droite de la figure 3.4.8, puisque $-1.5 < -0.5$

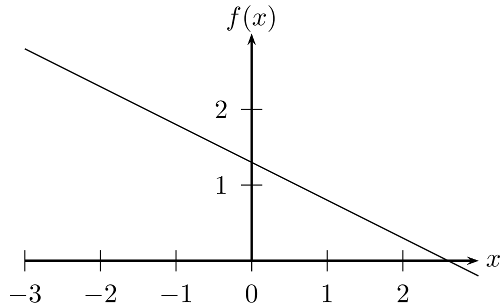


FIGURE 3.4.8 – La pente −0.5 de la droite de cette figure est plus grande que la pente −1.5 de la droite de la figure 3.4.7, puisque $-0.5 > -1.5$

Nous avons montré que la fonction réciproque de $f(x) = a_1x + a_0$ est $f^{-1}(y) = \frac{y-a_0}{a_1} = \frac{1}{a_1}y - \frac{a_0}{a_1}$. Par conséquent la pente de la fonction réciproque se monte à $\frac{1}{a_1}$.

**L'intersection d'une fonction affine avec l'axe des y**

**Théorème 3.4.4.** *Une fonction affine $f(x) = a_1x + a_0$ coupe l'axe des $y$ en $(0, a_0)$.*

*Démonstration.* L'axe des $y$ est coupé par le graphe d'une fonction en $x = 0$. Nous posons alors en $f(x) = a_1x + a_0$ $x = 0$ et obtenons : $f(0) = a_1 \cdot 0 + a_0 = a_0$ (voir figure 3.4.9)

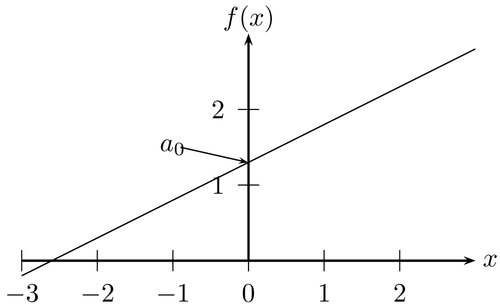


FIGURE 3.4.9 – Point d'intersection de la fonction affine avec l'axe des $y$

□

Nous appelons $f(0)$ „l'ordonnée à l'origine" pourvu que $f(0)$ soit défini. L'ordonnée à l'origine de la fonction réciproque de $f(x) = a_1x + a_0$ est $-\frac{a_0}{a_1}$.

**Le zéro d'une fonction affine**

**Définition 3.4.5.** *Une fonction réelle $f$ a un zéro en $x$ si et seulement si $f(x) = 0$.* ◊

**Théorème 3.4.6.** *Les fonctions affines $f(x) = a_1x + a_0$ ont un seul zéro, à savoir en $-\frac{a_0}{a_1}$. $(a_1 \neq 0)$.*

*Démonstration.* Selon la définition d'un zéro on peut affirmer $f(x) = 0 = a_1x + a_0$. En isolant $x$ on obtient $a_1x = -a_0$ et $x = -\frac{a_0}{a_1}$. □

(voir figure 3.4.10)

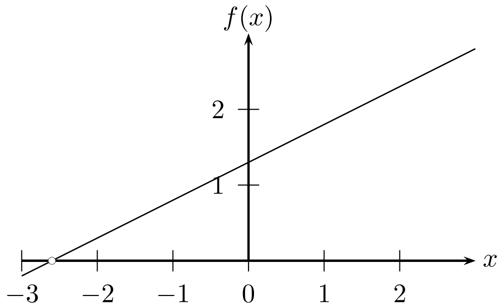


FIGURE 3.4.10 – Zéro du polynôme affine $f(x) = 0.5x + 1.3$ en $x = -\frac{a_0}{a_1} = -\frac{1.3}{0.5} = -2.6$

#### Représentation graphique

A l'aide de l'équation $f(x) = a_1x + a_0$ on peut dessiner immédiatement le graphe de la fonction affine dans un système de coordonnées cartésiennes. On connaît l'intersection $(0, a_0)$ avec l'axe des $y$ et on peut immédiatement représenter la pente $a_1$ sans calcul, si l'on choisit comme base du triangle de la pente 1. (voir figure 3.4.11).

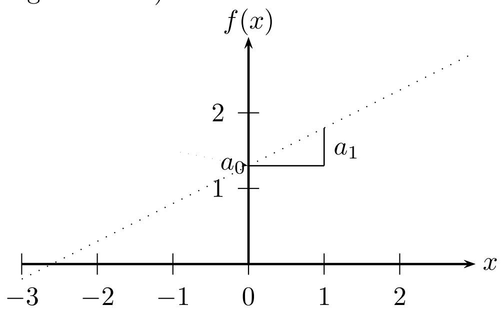


FIGURE 3.4.11 – Dessiner un polynôme affine à l'aide des coefficients

On peut dessiner immédiatement une fonction affine dans un système de coordonnées cartésiennes si l'on connaît deux points du graphe. On dessine une droite à travers ces deux points. Pour des raisons pratiques (précision du dessin) il est cependant préférable de choisir des points plus éloignés.

#### Calcul de fonctions affines

Une fonction affine est déterminée par deux points ou par un point et sa pente. Nous analysons ces deux possibilités.

— Si nous connaissons deux points $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$ du graphe d'une fonction affine, nous pouvons calculer la pente selon le théorème 3.4.3

$$a_1 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Il nous reste à calculer la l'intersection avec l'axe des $y$. Puisque nous connaissons déjà la pente, nous pouvons la substituer dans l'équation $f(x_1) = a_1x_1 + a_0$ :

$$f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}x_1 + a_0 \Longrightarrow$$
$$a_0 = f(x_1) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}x_1$$

Exemple : Nous connaissons $(5, 4)$, $(6, 8)$. La pente est $\frac{8-4}{6-5} = 4$. Nous substituons :

$$a_0 = 4 - 4 \cdot 5 = -16$$

De là, l'équation de la fonction affine est $f(x) = 4x - 16$.

Une autre possibilité de calcul est la résolution du système d'équations suivant (isoler $a_1$ et $a_0$; $x_1, x_2, f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont connus) :

$$\begin{aligned} f(x_1) &= a_1 x_1 + a_0 \\ f(x_2) &= a_1 x_2 + a_0 \end{aligned}$$

Dans l'exemple ($x_1 = 5, x_2 = 6, f(x_1) = 4, f(x_2) = 8$) :

$$\begin{aligned} 4 &= a_1 5 + a_0 \\ 8 &= a_1 6 + a_0 \end{aligned}$$

On obtient les solutions $a_1 = 4$ et $a_0 = -16$ (contrôler par votre calcul !)

— Si nous connaissons la pente $m_f$ et un point $(x_1, f(x_1))$, nous avons immédiatement $a_1$ ($= m_f$). $a_0$ se calcule comme ci-dessus en substituant dans l'équation

$$\begin{aligned} f(x_1) = a_1 x_1 + a_0 &\Longrightarrow \\ a_0 = f(x_1) - a_1 x_1 & \end{aligned}$$

Exemple : Soit la pente $m_f = 3$ et le point $(1.5, 6)$. Nous calculons
$a_0 = 6 - 3 \cdot 1.5 = 1.5$
On obtient l'équation $f(x) = 3x + 1.5$.

**Fonctions affines et équations du premier degré**

Nous appelons une expression qui ne contient que des termes de la forme $a_i$ et $a_j x$ tel que ces termes sont relié par „+" ou „−" et $a_i$, $a_j \in \mathbb{R}$, „expression du premier degré". Si nous relions deux expression du premier degré par le signe de l'égalité, nous obtenons une équation que nous appelons „équation du premier degré". Ainsi

$$5x + 30x - 10 = 4x - 13 \tag{3.4.5}$$

est une équation du premier degré.

Résoudre une équation c'est trouver l'ensemble des objets qui transforment une équation en une proposition vraie. Nous appelons cet ensemble „ensemble solution". Pour l'équation (3.4.5) et pour $x = 3$ on obtient $5 \cdot 3 + 30 \cdot 3 - 10 = 95$ et $4 \cdot 3 - 13 = -1$. On obtient ainsi la proposition fausse „$95 = -1$". $x$ n'est alors pas élément de l'ensemble solution. On trouve les $x$ tel que (3.4.5) devient une proposition vraie en appliquant des opérations sur l'équation qui laissent inchangé l'ensemble solution. On peut transformer ainsi l'équation pour arriver à la fin de ce calcul à l'indication des éléments de l'ensemble solution. Ainsi on peut simplifier les deux côté de l'équation par des transformations algébriques, p.ex. $5x + 30x = 35x$, et (3.4.5) devient

$$35x - 10 = 4x - 13. \tag{3.4.6}$$

De plus l'ensemble solution reste inchangé si nous additionnons des deux côtés la même expression du premier degré ou des constantes. L'addition de 13 des deux côtés de (3.4.6) produit p.ex.

$$35x - 10 + 13 = 4x - 13 + 13.$$

Par une simplification algébrique on obtient

$$35x + 3 = 4x.$$

Par l'addition de $-35x$ il en résulte :

$$-35x + 35x + 3 = 4x - 35x$$

et par une autre simplification

$$3 = -31x.$$

L'ensemble solution reste de plus inchangé si l'on multiplie les deux côtés de l'équation par une constante (nombre réel) différente de 0. Ainsi par une multiplication par $-\frac{1}{31}$ des deux côtés on obtient

$$-\frac{3}{31} = \frac{-31}{-31}x$$

et par simplification algébrique

$$-\frac{3}{31} = x.$$

L'ensemble solution est alors $\left\{-\frac{3}{31}\right\}$. Pour le vérifier : on remplace tous les $x$ de l'équation (3.4.5) par $-\frac{3}{31}$. On obtient pour $5x + 30x - 10$ respectivement $4x - 13$ :

$$\begin{aligned} 5 \cdot -\frac{3}{31} + 30 \cdot -\frac{3}{31} - 10 &= -13.387 \\ 4 \cdot -\frac{3}{31} - 13 &= -13.387 \end{aligned}$$

Il en résulte une proposition vraie.

La solution d'une équation du premier degré est identique au zéro d'une fonction affine qui est déterminée par l'équation (éventuellement multipliée par un nombre constant différent de zéro). Avec les opérations introduites nous pouvons transformer l'équation de la manière suivante :

$$\begin{aligned} 5x + 30x - 10 &= 4x - 13 \\ 35x - 10 &= 4x - 13 \\ 31x - 10 &= -13 \\ 31x + 3 &= 0 \end{aligned}$$

La fonction affine déterminée par l'équation est alors $f(x) = 31x + 3$, mais les polynômes $f(x) = 62x + 6$ ou généralement $f(x) = c(31x + 3)$ avec $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ sont des polynômes avec le même zéro. Le zéro selon la formule donnée ci-dessus est

$$-\frac{a_0}{a_1} = -\frac{3}{31}.$$

### L'intersection de deux fonctions affines

**Définition 3.4.7.** *L'ensemble des points d'intersection de deux fonctions est donné par l'intersection des graphes de ces deux fonctions.* ◊

**Théorème 3.4.8.** *Si deux fonctions affines n'ont pas la même pente, alors ils ont un point d'intersection unique. Si deux fonctions affines différentes ont la même pente, alors ils n'ont pas de point d'intersection (on a dans ce cas des droites dites „parallèles").*

Puisque l'ensemble des points d'intersection de deux fonctions $f$ et $g$ est défini comme l'intersection des graphes de ces fonctions, les éléments de l'intersection doivent être élément des deux graphes. Il faut par conséquent chercher des couples $(x, f(x)) = (x, g(x))$ qui remplissent les deux équations

$$\begin{aligned} f(x) &= a_1 x + a_0 \\ g(x) &= b_1 x + b_0 \end{aligned}$$

tel que $f(x) = g(x)$. On obtient :

$$\begin{aligned} a_1 x + a_0 = b_1 x + b_0 &\Longleftrightarrow \\ a_1 x - b_1 x = b_0 - a_0 &\Longleftrightarrow \\ x(a_1 - b_1) = b_0 - a_0 &\Longleftrightarrow \\ x = \frac{b_0 - a_0}{a_1 - b_1} & \end{aligned}$$

Il y a une solution, si $a_1 \neq b_1$, c. à d. si $f$ et $g$ ne sont pas des parallèles.

**Exemple 3.4.9.** *Supposons que $f(x) = 1.5x + 1.8$ et $g(x) = 1.2x - 2$. Il faut chercher le point d'intersection des deux fonctions. Nous savons qu'au point d'intersection $f(x) = g(x)$. Nous résolvons alors le système d'équations (isoler $x$)*

$$1.5x + 1.8 = 1.2x - 2$$

*et nous obtenons le point $(-12.667, -17.2)$ en tant que point d'intersection comme vous pouvez contrôler par votre calcul.* ◊

### Exemples économiques de fonctions affines

**Fonction de coût** $C : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}; C(x) = a_1 x + a_0$ (fonction de coût total ; sans rabais ; sans économies d'échelle). $C(0) = a_0 = C_f(x)$. $a_0$ représente alors les coûts fixes, comme il s'agit des coûts qui apparaissent même si l'on ne produit rien. Les coûts variables $C_v$ sont définis en tant que coûts totaux moins les coûts fixes. On peut alors affirmer $C(x) = C_v(x) + C_f(x)$. Les coûts totaux sont la somme des coûts fixes et des coûts variables.

**Exemple 3.4.10.** *Fonction de coût total $C(x) = 0.7x + 3 = C_v(x) + C_f(x)$. Ainsi les coûts fixes se montent à $C_f(x) = 3$. Les coûts variables sont $0.7x + 3 - 3 = 0.7x$. Pour une production de 5 unités de quantité les coûts s'élèvent à $C(5) = 0.7 \cdot 5 + 3 = 6.5$ unités monétaires. Les coûts variables à 5 unités produites se montent : $0.7 \cdot 5 = 3.5$ (voir figure 3.4.12)*

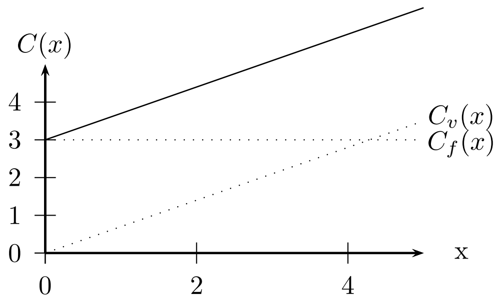


FIGURE 3.4.12 – Représentation graphique d'une fonction affine ; fonction de coût total $C(x) = 0.7x + 3 = C_v + C_f$

◊

**Fonction de demande** La quantité demandée $D$ dépend du prix $p$. Si le prix augmente, la demande du produit baisse. Si le prix baisse, la demande augmente. Pour chaque prix il y a exactement une quantité demandée. C'est pourquoi on peut représenter la quantité demandée en fonction de l'évolution des prix. On peut p.ex. utiliser une fonction affine de pente négative pour représenter le lien entre les deux grandeurs (voir l'exemple 3.4.13)

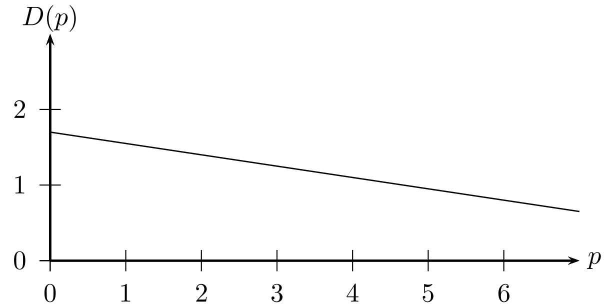


FIGURE 3.4.13 – Représentation graphique d'une fonction de demande $D(p) = -0.15p + 1.7$

Le graphe de la fonction doit être sous-ensemble de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, comme il n'y a pas de prix négatifs et de quantités négatives.

Si une grandeurs influence une autre grandeur, nous appelons la grandeur qui influence „variable indépendante“, la grandeur influencée „variable dépendante“. En général on désigne les valeurs de la variable indépendante par $x$ et les valeurs de la variable dépendante par $y$. Dans la théorie économique, on a cependant tendance à mettre les quantité sur l'axe des $x$. Ainsi on exprimerait le prix en fonction de la quantité demandée. On obtient de l'équation $D(p) = -0.15p + 1.7$ de l'exemple 3.4.13 en remplaçant $D(p)$ par $x$ et $p$ par $p_D(x)$ :

$$x = -0.15p_D(x) + 1.7.$$

Nous isolons $p_D(x)$ et nous obtenons la fonction de demande qui exprime le prix en fonction de la quantité demandée

$$p_D(x) = \frac{x - 1.7}{-0.15} = 11.333 - 6.6667x$$

(voir figure 3.4.14)

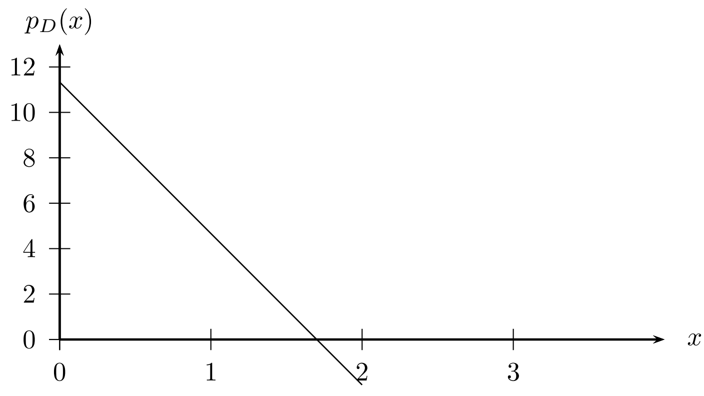


FIGURE 3.4.14 – Représentation graphique d'une fonction de demande $p_D(x) = -6.6667x+11.3333$

Dans le calcul ci-dessus nous avons calculé la fonction réciproque de $D$ et nous avons renoncé à échanger les variables puisque celles-ci ont une interprétation économique. Pour la fonction réciproque nous nous restreignons aussi au premier quadrant.

**Remarque 3.4.11.** *Si nous avons une fonction de demande $p_D(x)$ donné par une équation déterminant une fonction affine nous pouvons isoler $x$ et exprimer la quantité demandée en fonc-*

*tion du prix.* ♢

**Fonction d'offre** Si le prix augmente, la quantité offerte du bien augmente et il y a à un moment donné et à un prix donné une quantité offerte unique. C'est pourquoi on peut exprimer le lien entre le prix et la quantité offerte par une fonction, qui doit croître dans l'intervalle économique raisonnable. On pourrait par conséquent utiliser une fonction affine d'une pente positive pour représenter ce lien (voir l'exemple figure 3.4.15)

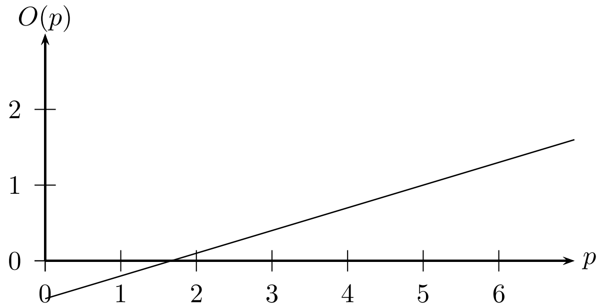


FIGURE 3.4.15 – Représentation graphique d'une fonction décrivant la quantité offerte en fonction du prix $O(p) = 0.3p - 0.5$

La fonction peut être interprété économiquement pour des prix positifs et des quantités positives (le graphe de la fonction doit alors se situer dans le premier quadrant). Le zéro de la fonction indique à quel prix l'offre est zéro. Dans l'exemple $O(p) = 0.3p - 0.5$ pour un prix plus bas que $-\frac{-0.5}{0.3} = 1.666\,7$ la quantité offerte est 0.

Pour les fonctions exprimant le lien entre le prix et l'offre il est aussi de coutume de mettre la quantité offerte sur l'axe des $x$. Pour l'exemple ci-dessus on obtiendrait à partir de $x = 0.3p_O(x) - 0.5$ la représentation

$$p_O(x) = \frac{x + 0.5}{0.3} = 3.3333x + 1.66666$$

(voir figure 3.4.16).

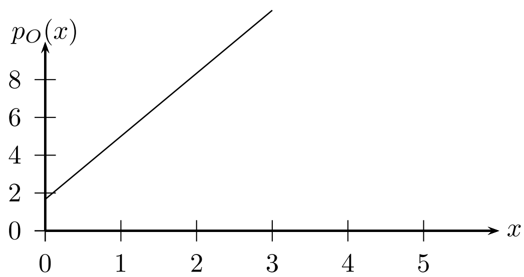


FIGURE 3.4.16 – Représentation graphique de la fonction d'offre $p_O(x) = 3.33333x + 1.66666$

L'équilibre de marché (de l'offre et de la demande) est défini par l'intersection des fonctions de demande et d'offre. Le prix au point d'intersection est appelé „prix d'équilibre" et la quantité „quantité d'équilibre".

**Exemple 3.4.12.** *Considérons la fonction de demande $p_D$ et la fonction d'offre $p_O$ :*

$$p_D(x) = -0.8x + 3$$
$$p_O(x) = 1.2x + 0.2$$

*Le point d'intersection de ces deux polynômes est* $(1.4, 1.88)$. *Autrement dit : la quantité d'équilibre se monte à* 1.4 *et le prix d'équilibre à* 1.88 *(voir figure 3.4.17)*

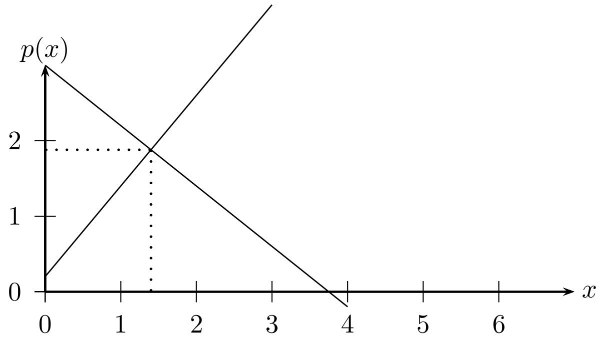


FIGURE 3.4.17 – Représentation graphique d'une fonction d'offre et de demande ; prix et quantité d'équilibre.

*La réflexion suivante montre pourquoi l'intersection des deux fonctions fournit l'équilibre de marché. Si le prix est plus élevé que* 1.88, *par ex.* 2.5, *la quantité demandée se monte à* $x$ *dans l'équation* $2.5 = -0.8x + 3$, *c. à d.* $x = 0.625$. *La quantité offerte par contre se monte à* $x$ *dans l'équation* $2.5 = 1.2x + 0.2$, *à savoir* $x = 1.916\,7$. *Il y a un surplus d'offre de* $1.916\,7 - 0.625 = 1.291\,7$. *Le marché n'est pas en équilibre (voire la figure 3.4.18). Si le prix est trop bas, par ex.* 1.25, *la quantité demandée se monte à* $x$ *dans l'équation* $1.25 = -0.8x + 3$, *c. à d.* $x = 2.187\,5$, *tandis que la quantité offerte est* $x$ *dans l'équation* $1.25 = 1.2x + 0.2$, *à savoir* $x = 0.875$. *Il en résulte un surplus de demande de* $2.187\,5 - 0.875 = 1.312\,5$ *(voire la figure 3.4.19 ). Dans l'équilibre, la quantité demandée et offerte doivent être identique, alors il se trouve au point d'intersection des deux droites.*

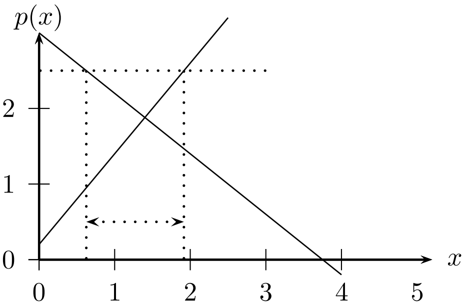


FIGURE 3.4.18 – Prix trop élevé : l'offre dépasse la demande. Le segment avec les flèches exprime le surplus d'offre

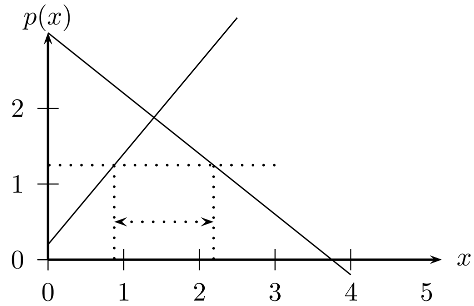


FIGURE 3.4.19 – Prix trop bas : la demande dépasse l'offre. Le segment avec les flèches exprime le surplus de demande

$\diamondsuit$

**Exemple 3.4.13.** *Par l'introduction d'une taxe l'équilibre de marché n'est plus le même. Posons la fonction de demande et d'offre suivante :*

$$p_D(x) = ax + b$$
$$p_O(x) = cx + d.$$

*On obtient le nouvel équilibre en soustrayant la taxe de la fonction de demande*

$$p_D(x) = ax + b - t$$

*et en cherchant l'intersection de la nouvelle droite avec l'ancienne fonction d'offre (proposition ). Il en résulte*

$$\begin{aligned} ax+b-t=cx+d &\Longleftrightarrow ax-cx=t-b+d \Longleftrightarrow \\ x\,(a-c)=t-b+d &\Longleftrightarrow \\ x &= \frac{t-b+d}{a-c}=\frac{b-t-d}{c-a}. \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

*On voit immédiatement qu'on peut tout aussi bien additionner la taxe à la fonction d'offre, puisque*

$$ax+b-t=cx+d \Longleftrightarrow ax+b=cx+d+t.$$

*On peut démontrer qu'il faut enlever la taxe à la fonction de demande par les réflexions suivantes : La quantité demandée au prix de $p$ est (fonction réciproque !) :*

$$p_D^{-1}(p)=x_D(p)=\frac{p-b}{a}.$$

*La quantité offerte au prix de $p$ est :*

$$p_O^{-1}(p)=x_O(p)=\frac{p-d}{c}.$$

*L'offrant n'obtient après l'introduction de la taxe d'un prix spécifique $p$ payé par le demandeur que $p-t$. La quantité offerte au prix obtenu $p-t$ est alors*

$$p_O^{-1}(p-t)=x_O(p-t)=\frac{p-t-d}{c}$$

*Au point d'équilibre du marché la quantité demandée est identique à la quantité offerte, alors si*

$$\frac{p-b}{a}=\frac{p-t-d}{c}.$$

*Nous obtenons le prix du marché $p$ - pour la quantité d'équilibre - suivant :*

$$\begin{aligned} \frac{p-b}{a}=\frac{p-t-d}{c} &\Longleftrightarrow \\ pc-bc=ap-at-ad &\Longleftrightarrow \\ pc-ap=bc-at-ad &\Longleftrightarrow \\ p\,(c-a)=bc-at-ad &\Longleftrightarrow \\ p=\frac{bc-at-ad}{c-a}. \end{aligned}$$

*Le prix obtenu par l'offrant pour cette quantité est*

$$p_o=p-t=\frac{bc-at-ad}{c-a}-t$$

*La quantité d'équilibre est alors :*

$$\begin{aligned} x_D\left(\frac{bc-at-ad}{c-a}\right) &= \frac{\frac{bc-at-ad}{c-a}-b}{a} \\ &= \frac{\frac{bc-at-ad-cb+ba}{c-a}}{a} \\ &= \frac{\frac{-at-ad+ba}{c-a}}{a} \\ &= \frac{b-t-d}{c-a} \end{aligned}$$

*Cela correspond à la formule (3.4.7).* ◊

**La droite de budget** Nous partons de l'idée qu'une personne a un certain budget $m$. Nous désignons la quantité achetée du bien $i$ par $x_i$ ainsi que son prix par $p_i$ ($i \in \{1, 2\}$, nous ne considérons que deux biens à la fois). Les dépenses pour l'achat d'une combinaison $(x_1, x_2)$ de ces biens se montent alors à

$$D(x_1, x_2) = x_1 p_1 + x_2 p_2.$$

Ces dépenses ne peuvent dépasser $m$, c. à d.

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 \leq m.$$

La droite qui est donnée par

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 = m \tag{3.4.8}$$

fournit les combinaisons $(x_1, x_2)$ qui mènent à la dépense de tout le budget face à des prix donnés. Car, en isolant $x_2$ on obtient

$$x_2 = \frac{m - x_1 p_1}{p_2} = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1. \tag{3.4.9}$$

Pour chaque $x_1$ on obtient un $x_2$ correspondant et unique, tel que la combinaison de $x_1$ et $x_2$ consomme tout le budget. (3.4.9) décrit alors une fonction et nous allons parfois écrire

$$x_2(x_1) = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1 \tag{3.4.10}$$

pour exprimer la dépendance de la quantité $x_2$ de $x_1$. La fonction affine décrite par (3.4.10) est appelée „droite de budget“.

**Remarque 3.4.14.** *La situation avec deux biens est d'ailleurs plus générale qu'on pourrait le penser. On peut considérer le deuxième bien comme un bien composé comprenant tous les autres biens. On peut décrire ce reste par l'argent qui peut acheter ce bien composé. $x_2$ est alors la quantité d'argent dans*

$$x_2 p_2 = m - x_1 p_1.$$

*En tenant compte du fait que le prix de l'argent est* 1 *(un franc coûte un franc) on obtient : $x_1 p_1 + x_2 = m$.* ♢

Lorsque la consommation se trouve sur la droite de budget et qu'on consomme une quantité supplémentaire $\Delta_1$ du bien 1 (p.ex. $\Delta_1 = 3$ unités), la quantité achetée du bien 1 est alors $x_1 + \Delta_1$. Les dépenses pour le bien 1 se montent à

$$p_1(x_1 + \Delta_1).$$

Pour compenser l'augmentation de la consommation du bien 1 il faut renoncer à une quantité $\Delta_2$ du bien 2. On peut alors affirmer ($\Delta_2$ sera négatif) :

$$p_1(x_1 + \Delta_1) + p_2(x_2 + \Delta_2) = m \tag{3.4.11}$$

En soustrayant l'équation (3.4.8) de l'équation (3.4.11) on obtient :

$$\begin{aligned} p_1(x_1 + \Delta_1) + p_2(x_2 + \Delta_2) - (x_1 p_1 + x_2 p_2) = 0 &\Longleftrightarrow \\ p_1 \Delta_1 + p_2 \Delta_2 = 0 &\Longleftrightarrow \\ \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = -\frac{p_2}{p_1} & \end{aligned}$$

Le quotient $\frac{\Delta_1}{\Delta_2}$ - le rapport de l'augmentation de la consommation du bien 1 à la réduction de la consommation du bien 2 - correspond à la pente de la droite de budget (voir équation (3.4.9)). Les économistes disent parfois que la pente de la droite de budget mesure les coûts d'opportunité de la consommation du bien 1 : le renoncement à la possibilité (= opportunité) de consommer une partie du bien 2 représente les coûts causées par la consommation supplémentaire du bien 1.

Si le revenu d'une personne augmente (le budget augmente) et si les prix restent inchangés, on voit - en inspectant (3.4.9) - qu'il en résulte seulement un changement de l'ordonnée à l'origine. La pente (coûts d'opportunité) reste inchangée. Si $p_1$ monte ($p_2$ et $m$ restant stables), l'ordonnée à l'origine reste inchangée et la pente devient plus négative (s'éloigne de l'horizontale). Si $p_2$ augmente ($p_1$ et $m$ restant stables) l'ordonnée à l'origine baisse et la pente augmente (s'approche de l'horizontale). Si les prix augmentent d'un facteur de $t > 0$ (inflation identique pour tous les biens sans changement des salaires), on peut constater un déplacement parallèle de la droite de budget vers la gauche, car

$$\begin{aligned} x_1tp_1 + x_2tp_2 &= m \Longleftrightarrow \\ t(x_1p_1 + x_2p_2) &= m \Longleftrightarrow \\ x_1p_1 + x_2p_2 &= \frac{m}{t} \end{aligned}$$

et on obtient

$$x_2(x_1) = \frac{m}{tp_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1,$$

à savoir une baisse de l'ordonnée à l'origine sans changement de la pente. Si les prix et le budget augmentent d'un facteur $t > 0$ identique (inflation identique pour tous les biens et compensation correspondante du revenu), la droite de budget reste invariée, car $t$ peut se réduire :

$$\begin{aligned} x_1tp_1 + x_2tp_2 &= tm \Longleftrightarrow \\ t(x_1p_1 + x_2p_2) &= tm \Longleftrightarrow \\ x_1p_1 + x_2p_2 &= m \end{aligned}$$

Pour un exemple chiffré de certains de ces faits voir les exercices.

**Fonction épargne** Si le revenu moyen augmente dans une économie nationale l'épargne augmente. D'une part c'est la somme absolue épargnée qui augmente. De l'autre côté c'est la part de l'épargne par rapport au revenu (= propension moyenne à épargner) qui augmente. Ainsi avec un revenu qui augmente sa portion utilisée pour la consommation diminue. Puisque la propension moyenne à épargner augmente en fonction du revenu l'épargne absolue n'augmente pas d'une manière proportionnelle au revenu (= d'une manière affine = selon une fonction affine). On ne peut par conséquent utiliser de tels polynômes pour représenter le lien entre le revenu national et l'épargne absolue. De l'autre côté la propension moyenne à épargner se développe éventuellement selon une fonction affine ce qui est à relever empiriquement (par l'expérience !).

**Exercices**

1. Nous savons qu'une fonction de coût total contient les points $(10, 18)$ et $(30, 32)$ (première composante exprime la quantité produite, la deuxième composante les coûts). Calculer une équation décrivant la fonction de coût total sous condition qu'il soit raisonnable de calculer une fonction affine à travers ces points. Indiquer les coûts fixes. Indiquer la fonction de coût fixe. Combien coûte la production de 25 unités d'un bien ? Quels sont les coûts variables et fixes de cette production ?
2. Soit la fonction d'offre suivante : $p_O(x) = 5 + 3x$.
   De plus la demande du même produit est décrite par l'équation $p_D(x) = 20 - 2x$.

   (a) Calculer la quantité et le prix d'équilibre.
   (b) A quel prix la quantité offerte est de 0 ?
   (c) A quel prix la quantité demandée est de 0 ?
   (d) Calculer la quantité offerte au prix de 6.
   (e) Calculer le prix auquel une quantité de 4 est offerte.

(f) Calculer la quantité demandée à un prix de 3.

(g) Calculer le prix, auquel la quantité demandée se monte à 4.

3. Les graphes des fonctions affines d'offre et de demande d'un certain bien contiennent deux points : le graphe de la fonction de demande $(100, 10)$ et $(50, 40)$, le graphe de la fonction d'offre $(90, 58)$ et $(30, 38)$ (à la première place des couples on trouve les quantités, à la deuxième les prix) Quel est le surplus de demande à un prix de 40 ? (le surplus de demande est défini par la quantité demandée qui n'est pas offerte).

4. Une entreprise peut acheter l'énergie nécessaire à sa production selon deux structures de tarif alternatives : tarif I : taxe de base 35 CHF/mois ; par kWh : 0.24 CHF/kWh
tarif II : taxe de base 13 CHF/mois ; par kWh : 0.38 CHF/kWh.

   (a) Calculer pour chaque structure de tarif la fonction de coût correspondante.

   (b) Dessiner les deux fonctions de coût dans le même système de coordonnées.

   (c) Calculer la consommation d'énergie ($= x_e$) qui même aux mêmes coûts pour les deux structures de tarif .

   (d) Quelle structure de tarif est meilleur marché pour des quantités supérieures à $x_e$, inférieur à $x_e$ ?

5. (examen de maturité professionnelle commerciale Brigue 2015) Une entreprise A produit des fours exclusifs en céramique. Les coûts fixes mensuels se montent à CHF 80000. Le seuil de profit est atteint lors d'une production de 125 pièces. La recette et les coûts se montent pour 125 pièces à CHF 415000. Le concurrent, l'entreprise B, atteint le seuil de profit avec une production et vente de 130 pièces. Les coûts variables par pièce se montent à CHF 2920, la recette par pièce à CHF 3520. On part de l'idée que les fonctions de coûts et de recette sont des fonctions linéaires ou affines ($x =$ nombre de pièces, $f(x)$ en CHF).

   (a) Calculer les fonctions de coût et de recette de l'entreprise A.

   (b) De combien les coûts fixes de B sont inférieurs à ceux de A ?

   (c) Une troisième entreprise C affronte les fonctions suivantes : $C_C(x) = 2850x + 200000$ et $R_C(x) = 3650x$. Déterminer la zone de profit de l'entreprise.

   (d) Par l'utilisation d'une matière première meilleur marché A peut réduire ses coûts variables par 15%. Déterminer le seuil de profit.

6. La demande mensuelle d'un vin mousseux vis-à-vis d'un commerçant peut être décrite par la fonction affine $p_D$, dont le graphe contient les points $(150, 37)$ et $(400, 32)$ (quantité à la première position) ; l'offre du commerçant suit la fonction affine $p_O$, dont le graphe est donné par la pente $m_f = \frac{3}{50}$ et le point $(550, 37)$ (quantité à la première position du couple).

   (a) Déterminer les équations décrivant les fonctions $p_D$ et $p_O$, si la limite de capacité s'élève à 600 bouteilles (dessiner la situation).

   (b) Calculer le prix et la quantité d'équilibre

   (c) Par l'augmentation de la taxe sur l'alcool de CHF 3.- par bouteille on veut augmenter le revenu fiscal de l'Etat et baisser la consommation d'alcool. Quelle est la baisse de consommation de vin mousseux due à cette augmentation ?

   (d) Quelle est l'augmentation absolue de l'impôt, si l'impôt s'élevait jusqu'ici à CHF 1.-.

7. Le budget d'une personne se monte à 5000 (salaire net par mois). Le bien 1 coûte CHF 5.- et le bien 2 coûte CHF 30.-.

   (a) Calculer la droite de budget.

   (b) Combien d'unités du bien 2 peut-on acheter au maximum si on a acheté 20 unités du bien 1 ?

(c) Nous supposons que $p_1$ monte de 5 à 7 (le budget et $p_2$ restent invariés). Indiquer la nouvelle droite de budget et examiner à l'aide de l'exemple les affirmations de la théorie par rapport au changement de $p_1$.

(d) Nous supposons que $p_2$ monte de 30 à 35 (le budget et $p_1$ restent invariés). Indiquer la nouvelle droite de budget et examiner à l'aide de l'exemple les affirmations de la théorie par rapport au changement de $p_2$.

(e) Si le prix de $p_1$ monte à 7, de combien faut-il réduire la quantité achetée du bien 1 pour que la quantité achetée du bien 2 reste invariée ?

8. Chercher un lien entre des phénomènes économiques qui puisse être décrit par une fonction affine.

**Solutions**

1. Nous calculons selon les méthodes introduites :

$$a_1 = \frac{32-18}{30-10} = \frac{7}{10} = 0.7$$
$$a_0 = 32 - 0.7 \cdot 30 = 11$$

ou le système d'équations :

$$18 = a_1 10 + a_0$$
$$32 = a_1 30 + a_0$$

avec les solutions $a_0 = 11, a_1 = \frac{7}{10}$.
On obtient la fonction de coût

$$C(x) = 0.7x + 11.$$

L'intersection avec l'axe des $y$ est $(0, 11)$, donc la fonction de coût fixe est $C_f(x) = 11$. La fonction de coût variable est par conséquent $C_v(x) = 0.7x$.
Lors d'une production de 25 unités les coûts se montent à $C(25) = 0.7 \cdot 25 + 11 = 28.5$. Les coûts fixes sont identiques pour tous les $x$ à savoir 11 unités monétaires. Les coûts variables s'élèvent à $C_v(25) = 0.7 \cdot 25 = 17.5$ unités monétaires.

(a) Nous trouvons le point d'intersection des deux droites par la résolution du système d'équations suivant

$$p_O(x) = 5 + 3x$$
$$p_D(x) = 20 - 2x$$

de sorte que $p_O(x) = p_D(x)$ et nous obtenons le point d'intersection $(3, 14)$. Par là, la quantité d'équilibre est de 3 unités et le prix d'équilibre de 14 unités monétaires.

(b) On remplace $x$ par 0 dans $p_O(x) = 5 + 3x$ et on obtient $p_O(0) = 5 + 3 \cdot 0 = 5$.

(c) On remplace $x$ par 0 dans $p_D(x) = 20 - 2x$ pour obtenir $p_D(0) = 20 - 2x = 20 - 2 \cdot 0 = 20$.

(d) La quantité offerte à un prix de 6 : $6 = 5 + 3x \Longrightarrow x = \frac{6-5}{3} = 0.333\,33$ unités du bien

(e) Le prix qui crée une offre de 4 : $p_O(4) = 5 + 3 \cdot 4 = 17$ unités monétaires

(f) La quantité demandée à un prix de 3 : $3 = 20 - 2x \Longrightarrow x = \frac{3-20}{-2} = \frac{17}{2} = 8.5$ unités du bien

(g) Le prix auquel on demande une quantité de 4. $p_D(4) = 20 - 2 \cdot 4 = 12$ unités monétaires

2.

$$\begin{aligned} 10 &= 100a + b \\ 40 &= 50a + b \end{aligned}$$

$\Longrightarrow a = -\frac{3}{5}, b = 70$ et $p_D(x) = -\frac{3}{5}x + 70$.

$$\begin{aligned} 58 &= 90a + b \\ 38 &= 30a + b \end{aligned}$$

$\Longrightarrow a = \frac{1}{3}, b = 28$ et $p_O(x) = \frac{1}{3}x + 28$.
quantité d'équilibre : $-\frac{3}{5}x + 70 = \frac{1}{3}x + 28 \Longrightarrow x = 45$
prix d'équilibre : $p_O(45) = \frac{1}{3} \cdot 45 + 28 = 43$
surplus de demande : $p_D(x) = -\frac{3}{5} \cdot x + 70 = 40 \Longrightarrow x_D = 50$
$p_O(x) = \frac{1}{3} \cdot x + 28 = 40 \Longrightarrow x_O = 36$
$x_D - x_O = 14$. (s. Abbildung 3.4.20)

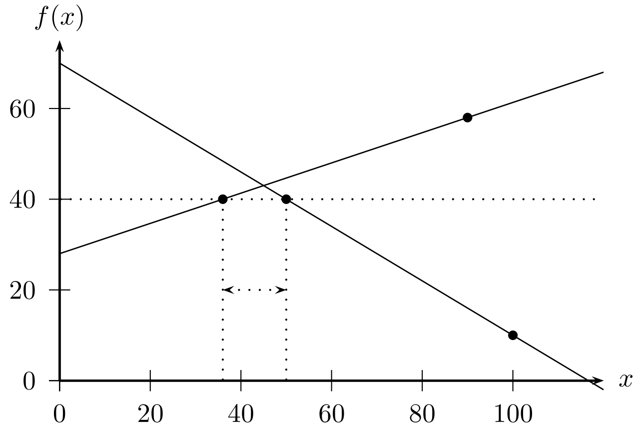


FIGURE 3.4.20 – représentation graphique de l'exercice avec les points donnés et les droites déterminées par ces points ; le surplus de demande est représenté par le segment avec les flèches

3. tarif I : taxe de base 35 CHF/mois ; par kWh : 0.24 CHF/kWh
   tarif II : taxe de base 13 CHF/mois ; par kWh : 0.38 CHF/kWh.

   (a) $C_1(x) = 35 + 0.24x$ und $C_2(x) = 13 + 0.38x$

   (b) On obtient :

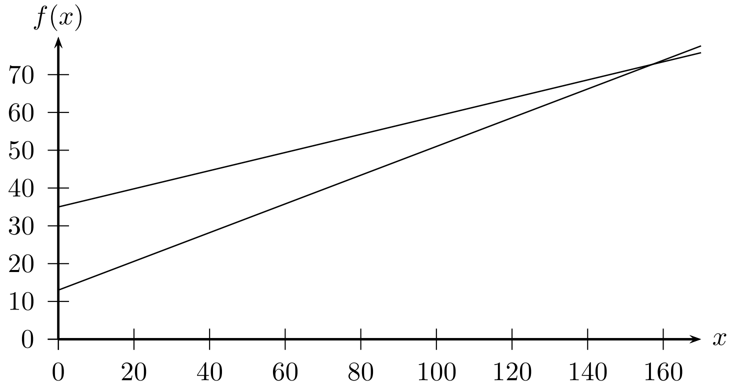


FIGURE 3.4.21 – Fonctions de coût de l'exercice

(c)

$$35 + 0.24x = 13 + 0.38x$$

solution : 157.14kWh.

(d) $C_1(158) = 35 + 0.24 \cdot 158 = 72.92$
$C_2(158) = 13 + 0.38 \cdot 158 = 73.04$
$C_2 > C_1$ pour $x > 157.14$kWh et $C_2 < C_1$ pour $x < 157.14$kWh.

4. On obtient : $C_A$ fonction de coût de l'entreprise $A$; $R_A$ fonction de recette de l'entreprise $A$; $C_f^B$ fonction de coût fixe de l'entreprise $B$.

(a) $C_A(x) = 80000 + xa$, $C_A(125) = 415000$; en remplaçant :

$$415000 = 80000 + 125a$$

solution : 2680; fonction de coût de l'entreprise $A$ : $C_A(x) = 80000 + 2680x$.
$R_A(x) = 415000x/125 = 3320x$

(b) $C_B(x) = C_f^B + 2920x$ ; $R_B(130) = 130 \cdot 3520 = 457\,600 = C_B(130)$.

$$457600 = C_f^B + 2920 \cdot 130$$

solution : $C_f^B = 78\,000$ : $C_B(x) = 78000 + 2920x$
différence des coûts fixes : $80000 - 78000 = 2000$

(c) Avec $C_C(x) = 2850x + 200000$ et $R_C(x) = 3650x$ : $P_C(x) = R_C(x) - C_C(x) = 3650x - (2850x + 200000) = 800x - 200\,000$

$$800x - 200\,000 > 0$$

pour $]250, \infty[$.

(d) $C_A(x) = 80000 + 2680 \cdot 0.85x = 2278x + 80000$; $R_A(x) = 3320x$

$$2278x + 80000 = 3320x$$

$x = \frac{80\,000}{1042} = 76.775$ ; On atteint le seuil de profit avec une production moindre.

5. On obtient les résultats suivants :

(a)

$$37 = 150a + b$$
$$32 = 400a + b$$

$\Longrightarrow a = -\frac{1}{50}, b = 40$ et $p_D(x) = -\frac{1}{50}x + 40$.

$$37 = \frac{3}{50} \cdot 550 + b$$

$\Longrightarrow b = 4$ et $p_O(x) = \frac{3}{50}x + 4$ pour $x \in [0, 600]$

(b) quantité d'équilibre : $-\frac{1}{50}x + 40 = \frac{3}{50}x + 4 \Longrightarrow x = 450$
prix d'équilibre : $p_D(450) = -\frac{1}{50} \cdot 450 + 40 = 31$.

(c) En utilisant le résultat de l'exemple 3.4.13 on obtient :

$$-\frac{1}{50}x + 37 = \frac{3}{50}x + 4$$

$x = \frac{825}{2} = 412.5 < 450$.

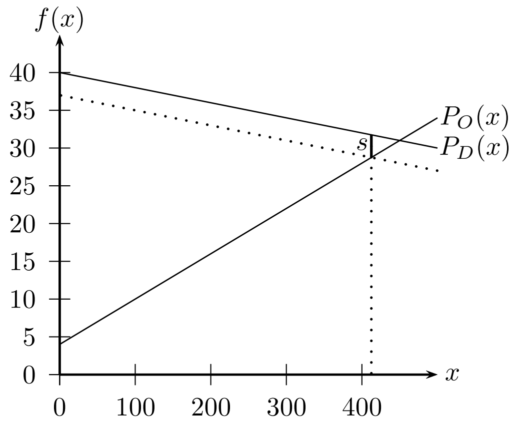


FIGURE 3.4.22 – Equilibre de marché avec taxe sur la consommation $s$

La baisse de la consommation d'alcool dans la forme de vin mousseux se monte à $450 - 412.5 = 37.5$ bouteilles.
Le prix obtenu par l'offrant s'élève à $p_O(412.5) = -\frac{1}{50} \cdot 412.5 + 37 = 28.75$. Le fournisseur est près à livrer une quantité de 412.5 à ce prix. Le consommateur doit ajouter au prix net de 28.75 une taxe de 3. Ainsi le produit coûte finalement $p_D(412.5) = -\frac{1}{50} \cdot 412.5 + 40 = 31.75$ (voir figure 3.4.22).

(d) taxe ancienne : $450 \cdot 1 = 450$. taxe nouvelle : $412.5 \cdot 4 = 1650$. différence : $1650 - 450 = 1200$. Par conséquent l'Etat peut atteindre les deux buts (augmentation du montant de l'impôt et baisse de la consommation d'alcool, au moins sous sa forme de vin mousseux).

6. On obtient :

(a) la droite de budget :

$$5x_1 + 30x_2 = 5000$$

ou en isolant $x_2$ :

$$\begin{aligned} x_2(x_1) &= \frac{5000}{30} - \frac{5}{30}x_1 \\ &= \frac{500}{3} - \frac{1}{6}x_1 \end{aligned}$$

(b) Si on consomme 20 unités du bien 1 on peut acheter au maximum

$$x_2(20) = \frac{500}{3} - \frac{1}{6} \cdot 20 = \frac{490}{3} = 163 + \frac{1}{3}$$

unités du deuxième bien.
contrôle $20 \cdot 5 + \left(163 + \frac{1}{3}\right) \cdot 30 = 5000$

(c) $p_1$ monte de 5 à 7. On obtient :

$$\begin{aligned} 7x_1 + 30x_2 &= 5000 \\ x_2(x_1) &= \frac{500}{3} - \frac{7}{30}x_1 \end{aligned}$$

L'ordonnée à l'origine ne change pas, la pente devient plus négative (s'éloigne de l'horizontale!), car $-\frac{7}{30} = -0.233\,33 < -\frac{5}{30} = -0.166\,67$.

(d) $p_2$ monte de 30 à 35. On obtient :

$$\begin{aligned} 5x_1 + 35x_2 &= 5000 \\ x_2(x_1) &= \frac{1000}{7} - \frac{1}{7}x_1 \end{aligned}$$

L'ordonnée à l'origine a baissé, car $\frac{1000}{7} < \frac{500}{3} = \frac{1000}{6}$. La pente a augmenté(plus proche de l'horizontale), car $-\frac{1}{7} = -0.142\,86 > -\frac{1}{6} = -0.166\,67$.

(e) On peut poser

$$163 + \frac{1}{3} = \frac{500}{3} - \frac{7}{30}x_1$$

solution : $x_1 = \frac{100}{7} = 14.286$
contrôle : $14.286 \cdot 7 + \left(163 + \frac{1}{3}\right) 30 = 5000$.

7. Un exemple de solution : à partir d'une somme de 100 unités monétaires l'entreprise offre un rabais de 5% par rapport au montant qui dépasse les 100 unités monétaires. En fonction du montant de la facture le rabais en argent absolu augmente d'une manière proportionnelle et peut par conséquent être représenté par une fonction affine qui passe par le point $(100, 0)$ et a une pente de 0.05 (pour un montant de la facture de 200 unités monétaires le rabais se monte à 5 unités monétaires. Par conséquent la pente s'élève à $\frac{5}{100} = 0.05$; ainsi on obtient $0 = 0.05 \cdot 100 + a_0$). L'équation de la droite a par conséquent la forme :

$$\text{Rabais du (montant de la facture)} = 0.05 \cdot \text{(montant de la facture)} - 5$$

pour montant de la facture $\in [100, \infty[$.

### 3.4.2 Polynômes linéaires

**Définition 3.4.15.** *$f$ est un polynôme linéaire si et seulement si*

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) &= a_1 x \text{ avec } a_1 \neq 0 \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

— Selon la définition pour un polynôme linéaire $a_0 = 0$. Dans un certain sens les polynômes linéaires sont des cas spéciaux des fonctions affines avec $a_0 = 0$, quoique nous avons exclu ce cas pour les fonctions affines. La raison en est le fait que les polynômes linéaires se distinguent par une qualité importantes des fonctions affines. :
Dans l'algèbre linéaire on définit les fonctions linéaires par les caractéristiques suivantes :

$$\begin{aligned} f(bx) &= bf(x) \\ f(x+y) &= f(x) + f(y) \end{aligned}$$

pour $b \in \mathbb{R}$. Cela est valable pour $f(x) = a_1 x$, comme on peut se convaincre :

$$\begin{aligned} f(bx) &= ba_1 x = bf(x) \\ f(x+y) &= a_1(x+y) = a_1 x + a_1 y = f(x) + f(y) \end{aligned}$$

Cela n'est cependant pas valable pour $f(x) = a_0 + a_1x$ avec $a_0 \neq 0 \neq a_1$. Par conséquent $f(x) = a_0 + a_1x$ n'est pas une fonction linéaire au sens de l'algèbre linéaire. De l'autre côté le graphe de $f(x) = a_0 + a_1x$ forme une droite, raison pour laquelle on appelle souvent $f(x) = a_0 + a_1x$ „fonction linéaire". Nous allons appeler les polynômes linéaires par la suite „fonctions linéaires", parfois „fonctions linéaires du $\mathbb{R}^2$" pour les différencier des autres fonctions linéaires, car les couples du graphe des polynômes sont éléments du $\mathbb{R}^2$.

— Le graphe de $f$ est $\{(x, a_1x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Le graphe contient un nombre infini non dénombrable de couples. Avec $a_1 = 5$, chaque couple a $5x$ pour deuxième composante de sorte que $x$ est la première composante du couple. Un sous-ensemble du graphe de $f(x) = 5x$ serait alors $\{(10, 50), (0.5, 2.5), (0.1, 0.5), (-200, -1000)\}$.
— La représentation graphique d'une fonction linéaire du $\mathbb{R}^2$ consiste en une droite de pente $a_1$. Elle coupe l'axe des $y$ en $(0, 0)$, comme $a_0 = 0$.
— Une fonction linéaire du $\mathbb{R}^2$ est déterminée par un point $(x_1, f(x_1))$, $x_1 \neq 0 \neq f(x_1)$, c.à d. si nous connaissons un point $(x_1, f(x_1))$ de la fonction de sorte que $x_1 \neq 0$, nous pouvons écrire l'équation correspondante et dessiner le graphe. On peut affirmer pour $(x_1, f(x_1))$

$$f(x) = \frac{f(x_1)}{x_1}x.$$

car en substituant dans l'équation $f(x) = a_1x$ on obtient

$$\begin{aligned} f(x_1) &= a_1x_1 \Longrightarrow \\ a_1 &= \frac{f(x_1)}{x_1} \end{aligned}$$

La représentation graphique du graphe est une droite à travers $(0, 0)$ et le point $(x_1, f(x_1))$ de pente $\frac{f(x_1)}{x_1}$ (voir figure 3.4.23)

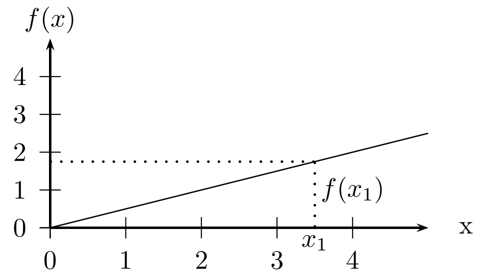


FIGURE 3.4.23 – Représentation graphique d'un polynôme linéaire

— Il y a pour chaque fonction affine une fonction linéaire parallèle. L'ensemble des couples des graphes des fonctions affines parallèles à une fonction linéaire du $\mathbb{R}^2$ est identique au plan $\mathbb{R}^2$.
— Les polynômes linéaires sont des bijections (argumentation analogue que par rapport aux polynômes de premier degré de type $f(x) = a_1x + a_0$, voir page 59). Comme pour un polynôme linéaire $f(x) = a_1x$, la fonction réciproque est donnée par $f^{-1}(x) = \frac{x}{a_1}$ ($y = a_1x$ si et seulement si $\frac{y}{a_1} = x$. En exprimant que $f^{-1}$ attribue $\frac{y}{a_1}$ à $y$ nous écrivons $f^{-1}(y) = \frac{y}{a_1}$. En remplaçant (facultativement) $y$ par $x$ on obtient $f^{-1}(x) = \frac{x}{a_1}$). La pente de la fonction réciproque de ces polynômes est alors $\frac{1}{a_1}$.
— La règle de trois ou la règle de proportionnalité consiste à calculer des points sur une fonction linéaire du $\mathbb{R}^2$ donnée par un point. Exemple : 5 unités d'un bien coûtent 7.5 - on donne alors le point $(5, 7.5)$. Combien coûtent 8 unités de ce bien ? Nous supposons qu'il n'y ait pas de rabais pour certaines quantités et que plus ou moins d'unités de ce bien coûtent proportionnellement plus ou moins. Rien coûte rien, la fonction passe alors par le point $(0, 0)$. Nous pouvons par conséquent utiliser la formule $f(x) = \frac{f(x_1)}{x_1}x$ pour calculer

les coûts de $x$ unités du bien, en l'occurrence $f(8) = \frac{7.5}{5} \cdot 8 = 12$ pour calculer les coûts de 8 unités. Ou selon la méthode éventuellement utilisée dans les écoles précédentes : si 5 unités du bien coûtent 7.5, une unité coûte 5 fois moins que 5 unités et 8 unités coûtent 8 fois plus qu'une unité. On obtient le même résultat qu'avant : $\frac{7.5}{5} \cdot 8$ .
La règle de trois inverse ne repose cependant pas sur une fonction linéaire. Exemple : 8 ouvriers ont besoin pour un travail de 5 journées. Combien de temps utilisent 10 ouvriers ? On suppose que les ouvriers ne s'entravent pas en travaillant ou qu'il n'y ait pas d'effet de synergie et que tous les ouvriers aient la même efficacité. Avec ces suppositions pas toujours réalistes on peut déduire : 1 ouvrier travaille 8 fois plus longtemps que 8 ouvriers $(8 \cdot 5)$, 10 ouvriers travaillent 10 fois moins longtemps qu'un ouvrier, alors $\frac{8 \cdot 5}{10}$, ou $f(10) = \frac{5 \cdot 8}{10} = 4$. Pour calculer le temps nécessaire pour $x$ ouvriers, nous calculons les valeurs de la fonction suivantes $f(x) = \frac{5 \cdot 8}{x}$ pour $x \neq 0$. Il ne s'agit pas d'un polynôme mais d'une fonction rationnelle qu'on traitera par la suite.

— Exemple économique : la fonction de coût variable (sans rabais pour certaine quantités ; pas d'économie d'échelle), déjà mentionné ci-dessus. Si l'on ne produit rien, il n'y a pas de coûts variables. La courbe passe alors par $(0, 0)$. Voir l'exemple graphique la figure 3.4.24)

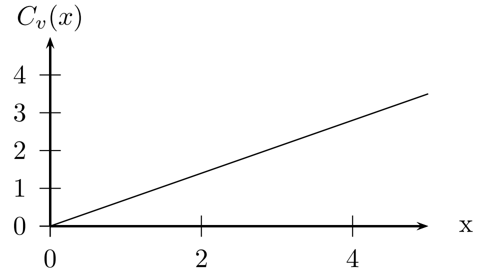


FIGURE 3.4.24 – Représentation graphique d'une fonction de coût variable

## 3.5 Polynômes du deuxième degré

**Définition 3.5.1.** *$f$ est un polynôme du deuxième degré si et seulement si*

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

*avec $a_2 \neq 0$. $a_0$ ou $a_1$ peuvent être identique à 0 („ou" s'utilise en mathématiques toujours au sens non exclusif, c. à d. comme „l'un ou l'autre ou les deux").* ◊

— On peut naturellement remplacer $a_i$ par d'autres variables pour les constantes pour obtenir p.ex. $f(x) = ax^2 + bx + c$.
— Une autre appellation des polynômes du deuxième degré est „polynômes quadratiques".
— On attribue à chaque nombre réel $x$ un nombre unique, à savoir $a_2x^2 + a_1x + a_0$. Le graphe de $f$ est alors $\{(x, a_0 + a_1x + a_2x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Avec $a_0 = 3; a_1 = 4, a_2 = 11$ on obtient $f(x) = 11x^2 + 4x + 3$. Un sous-ensemble du graphe de $f(x) = 3 + 4x + 11x^2$ serait alors $\{(10, 1143), (0.5, 7.75), (0.1, 3.51), (-200, 439203)\}$. (contrôler s.v.p. à l'aide d'Excel).
— La représentation graphique est une courbe qui coupe l'axe des $y$ en $(0, a_0)$. Si $a_2 > 0$, la courbe s'ouvre vers le haut, si $a_2 < 0$ la courbe s'ouvre vers le bas, on prouvera ces résultats plus tard avec des méthodes qu'on introduira par la suite (voir figures 3.5.25 et 3.5.26). On peut cependant facilement se rendre compte de ces résultats : le coefficient qui accompagne $x^2$ joue le rôle important puisque la valeur de $a_2x^2$ dépassera de loin les valeurs de $a_1x$ pour des $x$ assez grands pour $a_2 > 0$. $a_2x^2$ sera beaucoup plus petit pour $a_2 < 0$ que $a_1x$ pour des $x$ assez grands. Ainsi le terme $a_2x^2$ détermine le développement de la courbe vers le bas ou vers le haut.

— Les polynômes du deuxième degré ne sont pas surjectifs. Si $a_2 > 0$, ils ont un minimum. Toutes les valeurs plus petites que ce minimum ne sont pas attribuées. Si $a_2 < 0$ ils ont un maximum, et toutes les valeurs plus grandes que le maximum ne sont pas attribuées. Les polynômes du deuxième degré ne sont pas injectives, car on attribue un $y \in image\,(f)$ à deux $x$ différent. Si $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$, on peut en déduire $0 = a_2x^2 + a_1x + a_0 - y$ et par là (voir sous-chapitre suivant) $x_1 = \frac{-a_1+\sqrt{a_1^2-4(a_0-y)a_2}}{2a_2}$ et $x_2 = \frac{-a_1-\sqrt{a_1^2-4(a_0-y)a_2}}{2a_2}$ avec $f\,(x_1) = y$ et $f\,(x_2) = y$.

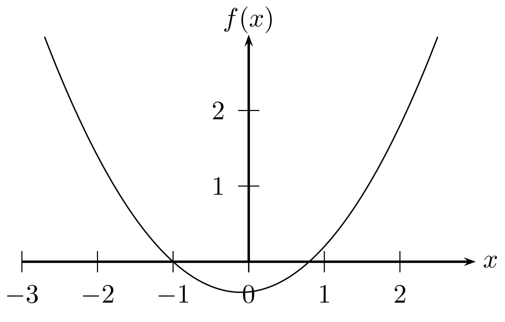


FIGURE 3.5.25 – Représentation graphique du graphe d'un polynôme du deuxième degré ouvert vers le haut $f(x) = 0.5x^2 + 0.1x - 0.4$ mit $a_2 > 0$

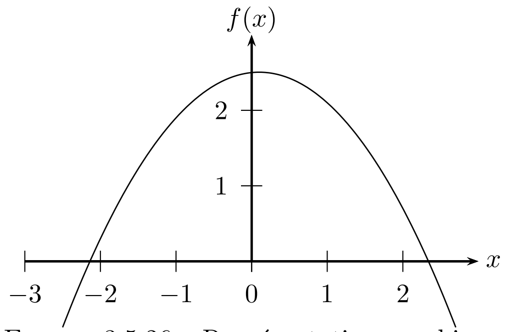


FIGURE 3.5.26 – Représentation graphique du graphe d'un polynôme du deuxième degré ouvert vers le bas $f(x) = -0.5x^2 + 0.1x + 2.5$ mit $a_2 < 0$

**Zéros d'un polynôme du deuxième degré**

Selon la définition 3.4.5 du zéro d'une fonction les zéros sont les $x$ résolvant

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \tag{3.5.12}$$

Pour une représentation graphique d'un exemple voir la figure 3.5.27 :

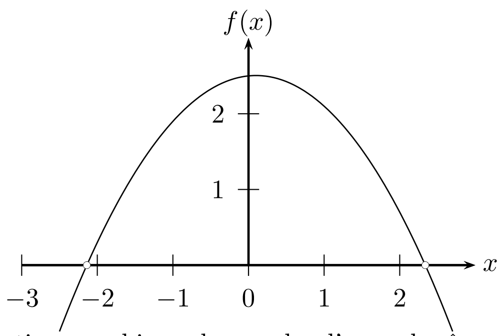


FIGURE 3.5.27 – Représentation graphique du graphe d'un polynôme du deuxième degré $f(x) = -0.5x^2 + 0.1x + 2.5$ avec ses zéros

En multipliant avec $\frac{1}{a_2}$ on obtient à partir de (3.5.12)

$$x^2 + \frac{a_1}{a_2}x + \frac{a_0}{a_2} = 0. \tag{3.5.13}$$

Nous retenons le résultat : $\left(x + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 = x^2 + \frac{a_1}{a_2}x + \frac{1}{4}\frac{a_1^2}{a_2^2}$. On peut en déduire (additionner

$-\frac{1}{4}\frac{a_1^2}{a_2^2}$ des deux côtés de l'équation)

$$\left(x+\frac{a_1}{2a_2}\right)^2-\frac{1}{4}\frac{a_1^2}{a_2^2}=x^2+\frac{a_1}{a_2}x.$$

Dans l'équation (3.5.13) nous pouvons alors substituer $x^2+\frac{a_1}{a_2}x$ par $\left(x+\frac{a_1}{2a_2}\right)^2-\frac{1}{4}\frac{a_1^2}{a_2^2}$ pour obtenir

$$\left(x+\frac{a_1}{2a_2}\right)^2-\frac{1}{4}\frac{a_1^2}{a_2^2}+\frac{a_0}{a_2}=0$$

Dans cette équation on peut facilement isoler le $x$ :

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{a_1}{2a_2}\right)^2&=\frac{1}{4}\frac{a_1^2}{a_2^2}-\frac{a_0}{a_2}\Longrightarrow\\ x+\frac{a_1}{2a_2}&=\pm\sqrt{\frac{1}{4}\frac{a_1^2}{a_2^2}-\frac{a_0}{a_2}}\Longrightarrow\\ x&=-\frac{a_1}{2a_2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}\frac{a_1^2}{a_2^2}-\frac{a_0}{a_2}}\end{aligned}$$

On peut transformer l'expression $\sqrt{\frac{1}{4}\frac{a_1^2}{a_2^2}-\frac{a_0}{a_2}}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{1}{4}\frac{a_1^2}{a_2^2}-\frac{a_0}{a_2}}&=\sqrt{\frac{1}{4}\frac{a_1^2}{a_2^2}-\frac{4a_0a_2}{4a_2^2}}\\ &=\frac{1}{2a_2}\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}\end{aligned}$$

On obtient alors le

**Théorème 3.5.2.** *Un polynôme du deuxième degré $f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$ a deux, un ou aucun zéros réels. Si $a_1^2-4a_0a_2>0$ il y a exactement deux zéros réels, à savoir*

$$\begin{aligned}x_{1,2}&=-\frac{a_1}{2a_2}\pm\frac{1}{2a_2}\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}\\ &=\frac{-a_1\pm\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}}{2a_2}\end{aligned}$$

*Si $a_1^2-4a_0a_2=0$, il y a exactement un zéro réel, à savoir $-\frac{a_1}{2a_2}$.*
*Si $a_1^2-4a_0a_2<0$, il n'y a pas de zéro réel.*

**Remarque 3.5.3.** *Avec $a:=a_2$, $b:=a_1$ et $c:=a_0$ on obtient pour $f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0=ax^2+bx+c$ :*

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$\lozenge$

**Exemple 3.5.4.** *Calculer les zéros du polynôme* $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$.
*Avec* $a_2 = 2, a_1 = 3$ *et* $a_0 = -4$ *on obtient :*

$$\begin{aligned}\frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 2}}{2 \cdot 2}\\ &= \pm\frac{1}{4}\sqrt{41} - \frac{3}{4}\\ &= -2.3508; 0.85078\end{aligned}$$

*(voir figure 3.5.28)* ♢

**Exemple 3.5.5.** *Calculer les zéros du polynôme* $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$
*Avec* $a_2 = 2, a_1 = 3$ *et* $a_0 = 4$ *on obtient :*

$$\frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2}}{2 \cdot 2}$$

*et* $3^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = 9 - 32 = -23 < 0$. *Il n'y a alors pas de solution réelle (voir figure 3.5.29)* ♢

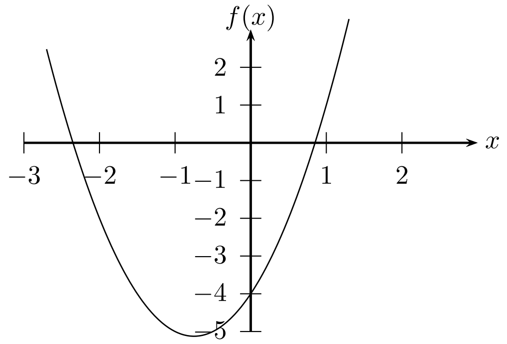


Figure 3.5.28 – Deux zéros réels (polynôme $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$)

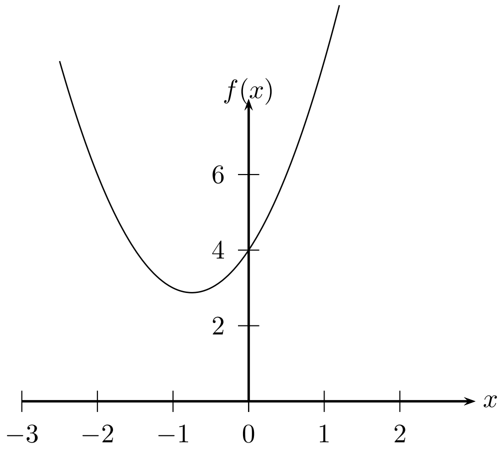


Figure 3.5.29 – Aucun zéro réel (polynôme $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$)

**Exemple 3.5.6.** *Calculer les zéros du polynôme* $f(x) = 2x^2 + 3x + \frac{9}{8}$
*Avec* $a_2 = 2, a_1 = 3$ *et* $a_0 = \frac{9}{8}$ *on obtient :*

$$\begin{aligned}\frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot \frac{9}{8} \cdot 2}}{2 \cdot 2}\\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 2}\\ &= \frac{-3}{4}\end{aligned}$$

*(voir figure 3.5.30)* ♢

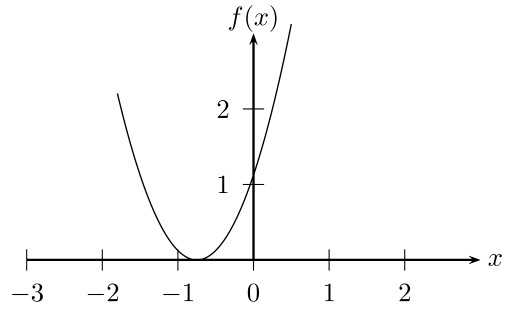


FIGURE 3.5.30 – Un seul zéro réel (polynôme $f(x) = 2x^2 + 3x + \frac{9}{8}$)

**Equations quadratiques et polynômes du deuxième degré**

Une équation quadratique, que nous appelons aussi „équation du deuxième degré", est composée d'expressions de la forme suivante : $a_i$, $a_j x$ et $a_k x^2$ relié par „+" ou „−". Ainsi

$$6x^2 - 2x + 4 - x^2 = 3x^2 + 15x + 8$$

est une équation du deuxième degré. Comme avec les équations du premier degré il s'agit de trouver l'ensemble des nombres, qui rendent vraie cette équation. Cet ensemble est l'ensemble solution. Le problème peut être réduit au calcul du zéro d'une fonction quadratique, parce qu'on peut transformer ce type d'équation à une équation de la forme

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0.$$

Pour l'exemple ci-dessus on obtient :

$$\begin{aligned} 5x^2 - 2x + 4 &= 3x^2 + 15x + 8 \Longrightarrow \\ 2x^2 - 17x - 4 &= 0 \end{aligned}$$

et l'ensemble solution :

$$\left\{\frac{17}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{321}, \frac{1}{4}\sqrt{321} + \frac{17}{4}\right\} = \{-0.22912, 8.7291\}.$$

Il faut vérifier, si ces nombres rendent effectivement vraie l'équation ci-dessus : avec 8.7291 :

$$\begin{aligned} 6x^2 - 2x + 4 - x^2 &: 6 \cdot 8.7291^2 - 2 \cdot 8.7291 + 4 - 8.7291^2 = 367.53 \\ 3x^2 + 15x + 8 &: 3 \cdot 8.7291^2 + 15 \cdot 8.7291 + 8 = 367.53 \end{aligned}$$

Avec $-0.22912$ :

$$\begin{aligned} 6x^2 - 2x + 4 - x^2 &: 6 \cdot (-0.22912)^2 - (2 \cdot -0.22912) + 4 - (-0.22912)^2 = 4.7207 \\ 3x^2 + 15x + 8 &: 3 \cdot (-0.22912)^2 + (15 \cdot -0.22912) + 8 = 4.7207 \end{aligned}$$

**Remarque 3.5.7.** *Strictement parlant* $\frac{17}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{321} \neq -0.22912$, *comme* $-0.22912$ *ne constitue qu'une approximation rationnelle au nombre réel non-rationnel* $\frac{17}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{321}$. *Nous allons cependant mettre dans ce texte toujours le signe de l'identité entre les nombres réels et leurs approximations rationnelles. On procédera de manière analogue pour les nombres rationnels ayant un nombre infini de chiffres différents de "0" après la virgule.* ♢

**Points d'intersection du polynôme quadratique avec des polynômes d'un degré inférieur ou égal à 2**

Lors du calcul des points d'intersection de deux polynômes quadratiques on est amené au calcul des zéros d'un polynôme du deuxième degré :

$$f(x) = 2x^2 + 0.2x - 2$$
$$g(x) = -0.5x^2 + 2x + 2$$

(voir figure 3.5.31)
Pour les points d'intersection $f(x) = g(x)$. Nous posons alors l'égalité entre les expressions à gauche des deux équations et nous obtenons :

$$2x^2 + 0.2x - 2 = -0.5x^2 + 2x + 2 \Longrightarrow$$
$$2.5x^2 - 1.8x - 4 = 0$$

avec les solutions : $-0.955\,14, 1.675\,1$. Il faut encore calculer les valeurs $f(x)$ (ou $g(x)$) des ces valeurs de $x$ :

$$f(-0.95514) = 2 \cdot (-0.955\,14)^2 + 0.2 \cdot (-0.955\,14) - 2 = -0.36643$$
$$f(1.6751) = 2 \cdot (1.675\,1)^2 + 0.2 \cdot 1.675\,1 - 2 = 3.9472$$

(pour $g(-0.95514)$ et $g(3.9472)$ on obtient les mêmes valeurs). L'ensemble des points d'intersection est alors $\{(-0.95514, -0.36643)\,(1.6751, 3.9472)\}$ (voir figure 3.5.31)

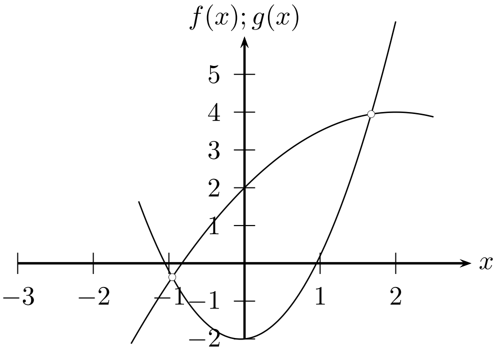


FIGURE 3.5.31 – Points d'intersection des polynômes $f(x) = 2x^2+0.2x-2$ et $g(x) = -0.5x^2+2x+2$

Puisque le calcul des points d'intersection passe par le calcul des zéros d'un polynôme quadratique on peut deviner qu'il y a deux, un ou aucun point d'intersection de deux polynômes quadratiques (voir pour le premier cas l'exemple de la figure 3.5.31). Pour les deux autres cas voir les exemples suivants 3.5.8 et 3.5.9 ainsi que les figures 3.5.32 et 3.5.33 :

**Exemple 3.5.8.**

$$f(x) = 2x^2 + 0.2x - 2$$
$$g(x) = -0.5x^2 + 2x - 2.324$$

*On obtient l'équation suivante :*

$$2.5x^2 - 1.8x + 0.324 = 0$$

*avec la solution unique* $x_0 = 0.36$.
$f(0.36) = 2 \cdot 0.36^2 + 0.2 \cdot 0.36 - 2 = -1.668\,8$. *Le seul point d'intersection est alors* $(0.36, -1.6688)$ *(voir figure 3.5.32).*

◊

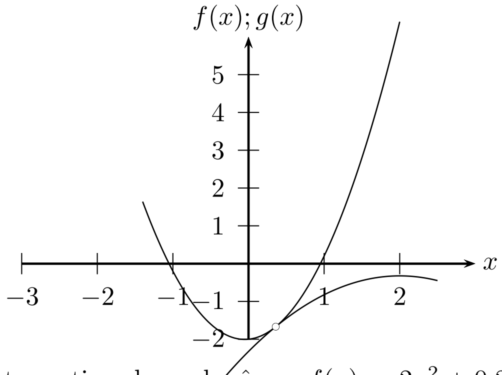


FIGURE 3.5.32 – Point d'intersection des polynômes $f(x) = 2x^2 + 0.2x - 2$ et $g(x) = -0.5x^2 + 2x - 2.324$

**Exemple 3.5.9.**

$$f(x) = 2x^2 + 0.2x + 1$$
$$g(x) = -0.5x^2 + 2x - 1.424$$

*mène à*

$$2.5x^2 - 1.8x + 2.424 = 0.$$

*Il n'y a pas de zéro réel(voir figure 3.5.33).*

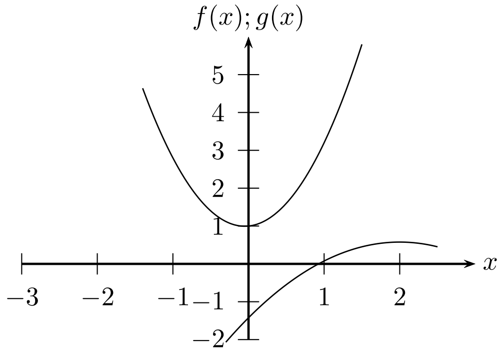


FIGURE 3.5.33 – Polynômes sans point d'intersection : $f(x) = 2x^2 + 0.2x + 1$ et $g(x) = -0.5x^2 + 2x - 1.424$

◊

Par rapport aux points d'intersection d'un polynôme quadratique avec des polynômes de degré inférieur (constants, linéaires ou affines) on peut constater des résultats similaires : pour chaque cas on est amené au calcul des zéros d'une fonction polynomiale du deuxième degré.

Pour le cas de la fonction constante $g(x) = b_0$ et un polynôme quadratique $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ nous obtenons par identification (les valeurs des fonctions sont identiques aux points d'intersection)

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = b_0 \Longrightarrow$$
$$a_2x^2 + a_1x + a_0 - b_0 = 0$$

Finalement, il faut calculer les valeurs de $f(x_0)$ ou de $g(x_0)$ pour les zéros $x_0$ - facilité par le fait que $g(x_0) = b_0$. Il y a de nouveau deux, un ou aucun point d'intersection. Ainsi pour le polynôme $f(x) = 2x^2 + 0.2x + 1.5$ et la constante $g(x) = 2.5$ il y a deux points d'intersection

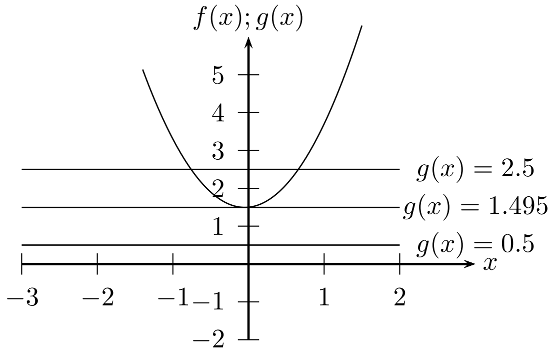


FIGURE 3.5.34 – Points d'intersection de $f(x) = 2x^2 + 0.2x + 1.5$ et de $g(x) = 2.5$ (deux points d'intersection) ; $g(x) = 1.495$ (un point d'intersection) et $g(x) = 0.5$ (aucun point d'intersection)

$(-0.758\,87, 2.5), (0.658\,87, 2.5))$, pour $g(x) = 1.495$ il y a un point d'intersection $(-0.05, 1.495)$ et pour $g(x) = 0.5$ il n'y a pas de points d'intersection (voir figure 3.5.34)

Pour le cas de la fonction affine $g(x) = b_1 x + b_0$ et d'un polynôme quadratique $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ nous obtenons en posant l'équation entre les deux expression

$$\begin{aligned} a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = b_1 x + b_0 &\Longrightarrow \\ a_2 x^2 + a_1 x + a_0 - b_1 x - b_0 = 0 &\Longrightarrow \\ a_2 x^2 + (a_1 - b_1)\, x + (a_0 - b_0) = 0 & \end{aligned}$$

Il y a de nouveau deux, un seul ou aucun point d'intersection. Ainsi pour les polynômes $f(x) = 2x^2 + 0.2x + 1.5$ et $g(x) = 0.8x + 3$ il y a deux points d'intersection $(-0.728\,92, 2.416\,9), (1.028\,9, 3.823\,1))$, pour $g(x) = 0.8x + 1.455$ un seul $(0.15, 1.575))$ et pour $g(x) = 0.8x + 1$ aucun. (voir figure 3.5.35)

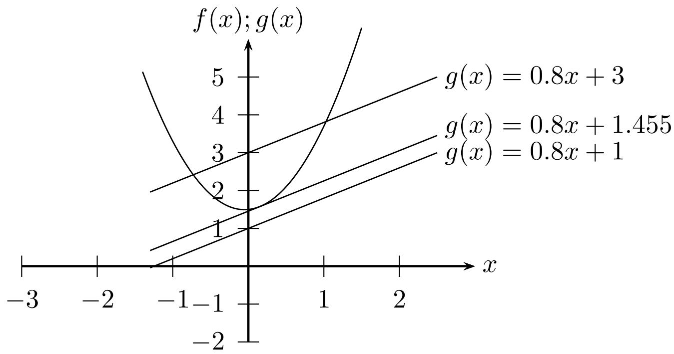


FIGURE 3.5.35 – Points d'intersection des polynômes $f(x) = 2x^2 + 0.2x + 1.5$ et $g(x) = 0.8x + 3$ (deux points d'intersection); $g(x) = 0.8x + 1.455$ (un point d'intersection); $g(x) = 0.8x + 1$ (aucun point d'intersection)

Pour le cas de la fonction linéaire $g(x) = b_1 x$ on obtient

$$\begin{aligned} a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = b_1 x &\Longrightarrow \\ a_2 x^2 + a_1 x + a_0 - b_1 x = 0 &\Longrightarrow \\ a_2 x^2 + (a_1 - b_1)\, x + a_0 = 0 & \end{aligned}$$

Il y a deux, un seul ou aucun point d'intersection. Ainsi pour $f(x) = 2x^2 + 0.2x + 1.5$ et $g(x) = 4x$ il y a deux points d'intersection $(0.559\,49, 2.238\,0), (1.3405, 5.362))$, pour $g(x) = 3.6641x$ un seul $(0.866\,03, 3.1732))$ et pour $g(x) = 2x$ aucun (voir figure 3.5.36)

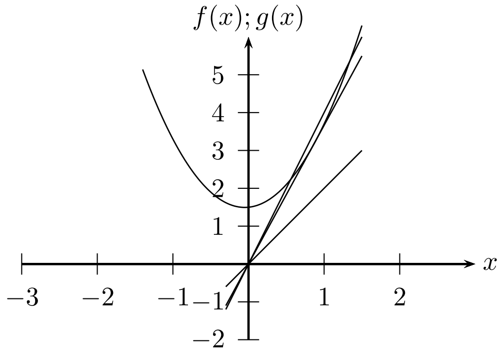


FIGURE 3.5.36 – Points d'intersection des polynômes $f(x) = 2x^2 + 0.2x + 1.5$ et $g(x) = 4x$ (deux points d'intersection ) ; $g(x) = 3.6641x$ (un point d'intersection) et $g(x) = 2x$ (aucun point d'intersection)

#### Calcul d'un polynôme quadratique à travers des points

Un polynôme du deuxième degré est donné par trois points $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2)), (x_3, f(x_3))$; $x_i, f(x_i) \in \mathbb{R}$; $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$, si l'équation ci-dessous a une solution unique (c. à d. si nous connaissons trois points du graphe de la fonction, nous pouvons calculer l'équation qui décrit le polynôme sous la réserve mentionnée). Le calcul se fait à l'aide du système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} f(x_1) &= a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0 \\ f(x_2) &= a_2x_2^2 + a_1x_2 + a_0 \\ f(x_3) &= a_2x_3^2 + a_1x_3 + a_0 \end{aligned} \tag{3.5.14}$$

Il faut le résoudre pour $a_0, a_1, a_2$ - les points $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2)), (x_3, f(x_3))$ sont donnés.

**Exemple 3.5.10.** *Calculer pour les points* $(1, 2)$, $(3, 8)$ *et* $(-3, 4)$ *l'équation du polynôme du deuxième degré qui passe par ces points. Nous pouvons poser :*

$$\begin{aligned} 2 &= a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0 \\ 8 &= a_2 \cdot 3^2 + a_1 \cdot 3 + a_0 \\ 4 &= a_2 \cdot (-3)^2 + a_1 \cdot (-3) + a_0 \end{aligned}$$

*La solution est :* $a_0 = \frac{3}{4}, a_1 = \frac{2}{3}, a_2 = \frac{7}{12}$ *(contrôler s.v.p.). L'équation est alors*

$$f(x) = \frac{3}{4} + \frac{2}{3}x + \frac{7}{12}x^2.$$

◊

#### Exemple économique

Un monopoliste se voit face à la fonction de prix, qui exprime le prix en fonction de la quantité offerte,

$$p(x) = 30 - 2x.$$

La recette , que le monopoliste réalise par la vente de ses produits, est alors :

$$R(x) = xp(x) = x(30 - 2x) = 30x - 2x^2$$

(= prix fois la quantité vendue). On donne aussi la fonction de coût suivante exprimant les coûts en fonction de la quantité produite :

$$C(x) = 1 + 4x.$$

Le profit (gain) (= recette moins les coûts) est alors

$$P(x) = R(x) - C(x) = 30x - 2x^2 - (1 + 4x) = 26x - 2x^2 - 1.$$

Déterminer la zone de profit (= l'ensemble des quantités pour lesquels il en résulte un profit). Il faut calculer les zéro du polynôme

$$P(x) = 26x - 2x^2 - 1$$

c. à d. nous calculons

$$-2x^2 + 26x - 1 = 0.$$

La solution est $\frac{13}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{167} = 3.8576 \times 10^{-2}$ et $\frac{1}{2}\sqrt{167} + \frac{13}{2} = 12.961$. La zone de profit est alors $]0.03857, 12.96[$, comme pour 2 p.ex. $G(2) = 26 \cdot 2 - 2 \cdot 2^2 - 1 = 43 > 0$. Il serait intéressant de savoir où le gain est maximal ainsi que son montant. On peut prouver - ce qu'on montrera plus tard -, que les polynômes quadratiques atteignent leur maximum ou minimum avec $x$ déterminé par :

$$x_{\max / \min} = -\frac{a_1}{2a_2}$$

Si $a_2 < 0$, la fonction est ouverte vers le bas et on aura donc un maximum. Ainsi dans notre exemple :

$$-\frac{26}{2 \cdot -2} = \frac{13}{2} = 6.5$$

ce qui signifie que le profit maximal est atteint avec une production de 6.5 unités du bien.

Le gain maximal se monte à

$$P(6.5) = 26 \cdot 6.5 - 2 \cdot 6.5^2 - 1 = 83.5$$

(voir pour la représentation graphique de l'exemple la figure 3.5.37).

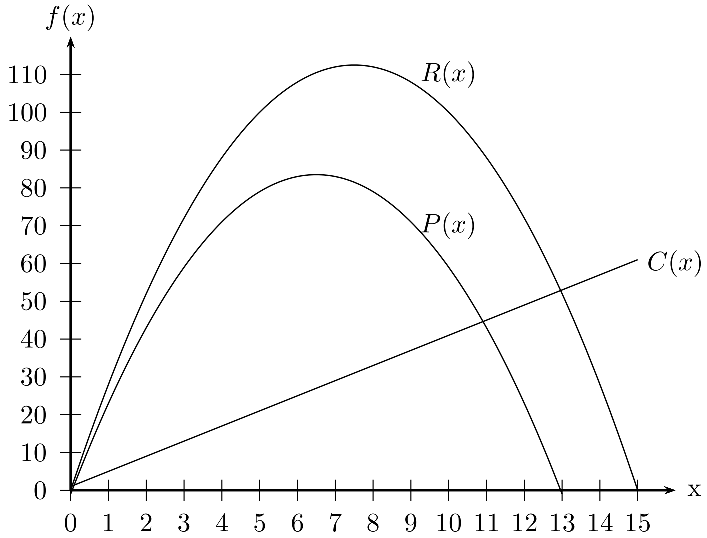


FIGURE 3.5.37 – Représentation graphique de la fonction de coût $C(x)$, de la fonction de recette $R(x)$ et de la fonction de profit $P(x)$ de l'exemple économique

**Remarque 3.5.11.** *Si l'on représente plusieurs fonctions dans un seul graphique il faut garantir que les arguments et les valeurs de la fonction sont mesurés chacun avec les mêmes unités comme c'est le cas dans l'exemple ci-dessus. On ne peut cependant pas dessiner la fonction de prix dans le même système de coordonnées cartésiennes que la fonction de recette, de coût et de profit, puisque les prix sont mesurés en unités d'argent divisées par des unités du bien et sont alors p.ex. mesurés par $\frac{CHF}{kg}$, tandis que le profit, les coûts et la recette sont mesurés en francs.* $\diamondsuit$

**Exercices**

1. Calculer un polynôme du deuxième degré passant par les points $(5, 6)$, $(8, 9)$ et $(50, 7)$. Indiquer les points d'intersection avec l'axe des $y$. Calculer les zéros du polynôme. Calculer l'ensemble des points d'intersection avec le polynôme suivant $g(x) = 0.5x + 2$.
2. Calculer les points d'intersection des polynômes suivants :
$$f(x) = 2x^2 + 0.1x + 2$$
$$g(x) = 0.02x^2 + 0.1x + 3$$
3. Calculer la valeur de la fonction suivante en $x = 20$ :
$$f(x) = 2x^2 + 0.1x + 2$$
4. Un monopoliste se voit face à la fonction de prix suivante :
$$p(x) = 40 - 3x.$$
De plus, il est confronté à la fonction de coût suivante :
$$C(x) = 0.5 + 3.5x.$$
Calculer la zone de profit, la production qui génère le profit maximal et le profit maximal.
5. Supposons que le marché d'un bien soit décrit par la fonction de demande et d'offre suivantes :
$$p_O(x) = 3(x + 0.5)$$
$$p_D(x) = 0.6(35 - 0.2x^2)$$

Fixer le domaine économique raisonnable.
Calculer le prix et la quantité d'équilibre.

**Solutions**

1. Il faut résoudre le système d'équations suivant (nous utilisons les coefficients $a$, $b$, $c$ pour alléger l'écriture) :

$$\begin{aligned} 6 &= 5^2a + 5b + c \\ 9 &= 8^2a + 8b + c \\ 7 &= 50^2a + 50b + c \end{aligned}$$

On obtient : $a = -\frac{22}{945}, b = \frac{1231}{945}, c = \frac{13}{189}$
L'intersection du polynôme avec l'axe des $y$ est $\left(0, \frac{13}{189}\right)$
Les zéros du polynôme se calculent par la solution de l'équation suivante :

$$-\frac{22}{945}x^2 + \frac{1231}{945}x + \frac{13}{189} = 0$$

$x_{0_1} = \frac{1231}{44} - \frac{3}{44}\sqrt{169\,009} = -5.\,275\,3 \times 10^{-2}$
$x_{0_2} = \frac{3}{44}\sqrt{169\,009} + \frac{1231}{44} = 56.\,007$

Le point d'intersection avec $g(x) = 0.5x+2$ est donné par la solution de l'équation suivante :

$$0.5x + 2 = -\frac{22}{945}x^2 + \frac{1231}{945}x + \frac{13}{189}$$

Il en résulte : $x_1 = 2.602\,5, x_2 = 31.875$ et $g(x_1) = 0.5 \cdot 2.602\,5 + 2 = 3.\,301\,3$
$g(x_2) = 0.5 \cdot 31.875 + 2 = 17.\,938$. L'ensemble des points d'intersection est alors
$\{(2.602\,5, 3.\,301\,3), (31.875, 17.\,938)\}$.

2. 

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + 0.1x + 2 \\ g(x) &= 0.02x^2 + 0.1x + 3 \end{aligned}$$

de sorte que $f(x) = g(x)$. L'ensemble des points d'intersection :
$\{(-0.710\,67, 2.\,939)\,(0.710\,67, 3.081\,2)\}$.

3. Il faut calculer : $f(20) = 2 \cdot 20^2 + 0.1 \cdot 20 + 2 = 804$

4. $R(x) = x(40 - 3x) = 40x - 3x^2$
$P(x) = R(x) - C(x) = 40x - 3x^2 - (0.5 + 3.5x) = 36.\,5x - 3x^2 - 0.5$
Il faut calculer les zéros de la fonction de profit :
$x_{0_1} = 0.01371\,4, x_{0_2} = 12.153$. Comme la fonction de profit s'ouvre vers le bas (car $a_2 < 0$) la fonction de profit est positive entre les deux zéros. Par conséquent la zone générant un profit est située entre ces deux points. Le profit maximal se réalise avec une production de

$$-\frac{36.5}{2 \cdot (-3)} = 6.0833,$$

Le profit maximal est :

$$G(6.0833) = 36.5 \cdot 6.0833 - 3 \cdot 6.0833^2 - 0.5 = 110.52$$

(voir figure 3.5.38).

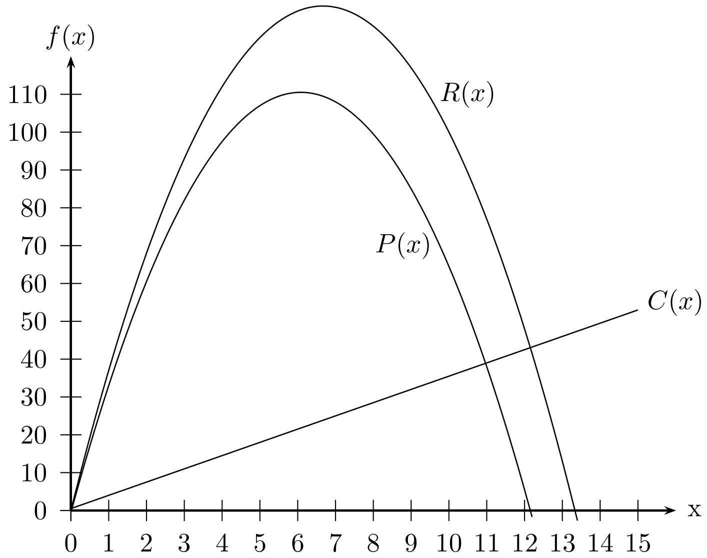


FIGURE 3.5.38 – Représentation graphique de la fonction de coût $C(x)$, de la fonction de recette $R(x)$ et de la fonction de profit $P(x)$ de l'exercice

5. Comme $p_D$ n'a de sens que dans un domaine où la fonction est croissante, il faut déterminer le maximum de la fonction $p_D(x) = 21.0 - 0.12x^2$ : il se trouve en

$$\frac{0}{2 \cdot -0.12} = 0$$

Puisque la fonction s'ouvre vers le bas, la fonction descend dans le premier quadrant. De plus les valeurs de la fonction doivent être positives. Nous calculons alors les zéros de $p_D$ : On obtient $13.229, -13.229$. Par conséquent le domaine économiquement raisonnable de la fonction de demande se trouve entre 0 et 13.229. Nous calculons maintenant le domaine économiquement raisonnable de la fonction d'offre. Le zéro de la fonction $p_O$ est $-0.5$. C'est pourquoi la fonction de demande est partout positive à droite de 0 (car $p_O$ est une droite qui monte !). C'est pourquoi le domaine raisonnable se situe entre 0 et 13.229.
La quantité d'équilibre se calcule avec l'équation

$$3(x + 0.5) = 0.6(35 - 0.2x^2)$$

Ensemble solution : $\{-30.354, 5.3536\}$. La deuxième solution seule se trouve dans le domaine raisonnable. La quantité d'équilibre est alors 5.3536 unités du bien. Le prix d'équilibre est

$$p_O(5.3536) = 3(5.3536 + 0.5) = 17.561$$

## 3.6 Polynômes du troisième degré

**Définition 3.6.1.**

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) := a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

*avec des nombres réelles $a_i$. $a_3 \neq 0$; $a_0$, $a_1$ ou $a_2$ peuvent être* 0. ◊

— On attribue de la sorte à chaque nombre $x$ réel un nombre unique, à savoir $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Le graphe de $f$ est alors $\{(x, a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Avec p.ex. $a_0 = 3; a_1 = 4, a_2 = 11, a_3 = -2 : f(x) = -2x^3+11x^2+4x+3$. Un sous-ensemble du graphe de $f(x) = -2x^3+11x^2+4x+3$ serait $\{(10, -857), (0.5, 7.5), (0.1, 3.508), (-200, 16'439'203)\}$.

- La fonction coupe l'axe des $y$ en $(0, a_0)$.
- Les polynômes du troisième degré sont surjectifs. Il y a des polynômes du troisième degré qui sont bijectifs et d'autres qui ne le sont pas. Pour différencier ces ceux cas, on développera des moyens techniques plus tard.

### Les zéros d'un polynôme du troisième degré

Pour les polynômes du troisième et du quatrième degré il est possible de développer des formules pour trouver leurs zéros. Pour les polynômes d'un degré supérieur, ce n'est plus possible. Puisque le développement de ces formules et leur application est plutôt pénible et qu'on utilise pour des polynômes d'un degré supérieur à 4 de toute façon d'autres méthodes applicables à beaucoup de types de fonctions nous introduisons une de ces méthodes sans attendre. Nous introduisons une des méthodes d'approximation qu'on peut retrouver dans la littérature. Pour la justifier d'abord un théorème, dont le sens intuitif est le suivant : la moyenne arithmétique $m$ de $a$ et $b$ ($b > a$) est plus proche d'un $x \in ]a, b[$ que $a$ ou $b$ (ou que les deux).

**Théorème 3.6.2.** *Si $a < b$ et $m := \frac{a+b}{2}$, alors pour tout $x \in ]a, b[$ :*
*(1) $x = m$ ou $a < x < m$ ou $m < x < b$.*
*(2) i) Si $x = m$, $x - m = 0 < b - x$*
*ii) Si $a < x < m$ alors $m - x < b - x$*
*iii) Si $m < x < b$ alors $x - m < x - a$ (voir figure 3.6.39 pour les cas ii et iii)*


FIGURE 3.6.39 – Exemple graphique pour l'idée du théorème 3.6.2 cas *ii*) et *iii*) .

*Démonstration.* D'abord nous pouvons retenir pour $a < b$ que $a < \frac{a+b}{2} < b$, car

$$\begin{aligned} a < \frac{a+b}{2} < b &\Longleftrightarrow 2a < a + b < 2b \\ &\Longleftrightarrow 2a - a < 2b - b \\ &\Longleftrightarrow a < b. \end{aligned}$$

alors $m := \frac{a+b}{2} \in ]a, b[$. On peut en conclure sans autre (1).
Le premier cas de (2) est évident. Pour ii) : comme $x < m$ et $m < b$ : $m - x < b - x$. Pour iii) : comme $m < x$ et $a < m$ : $x - m < x - a$. □

Après cette préparation nous passons à l'algorithme d'approximation du zéro d'une fonction polynomiale. Nous nous limitons au cas où la fonction coupe l'axe des $x$, c.à d. les signes de la fonction sont opposés des deux côtés du zéro dans un intervalle autour du zéro. On cherche deux nombres $x_1$ et $x_2$, $x_1 < x_2$, sur l'axe des $x$ tel que $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$. Cela est valable si et seulement si $f(x_1)$ et $f(x_2)$ ont des signes opposés. De plus il faut veiller à ce qu'il n'y ait pas plus d'un zéro entre $x_1$ et $x_2$, ce qui se contrôle à l'aide d'une représentation graphique ou d'un tableau des valeurs de la fonction. Par la suite nous calculons la moyenne arithmétique de $x_1$ et $x_2$ :

$$x_3 := \frac{x_1 + x_2}{2}$$

La moyenne arithmétique doit se trouver plus près du zéro recherché que $x_1$ ou $x_2$ (ou que les deux) selon le théorème 3.6.2. Pour $f(x_3)$ il y a trois possibilité : $f(x_3) = 0$ ou $f(x_3) > 0$ ou $f(x_3) < 0$. Pour le premier cas $f(x_3) = 0$, on a trouvé le zéro entre $x_1$ et $x_2$. Pour les deux autres cas on choisit parmi les nombres $\{x_1, x_2, x_3\}$ les plus proches du zéro recherché, mais de sorte que ces nombres se trouvent toujours des deux côtés du zéro recherché, ce qui est le cas si $f(x_i)\,f(x_j) < 0$. Nous choisissons alors $x_1$ et $x_3$, si $x_3$ se trouve à droite du zéro (ce qui est équivalent à $f(x_1)\,f(x_3) < 0$), autrement nous choisissons $x_3$ et $x_2$. Pour les nombres choisis nous calculons de nouveau la moyenne arithmétique. Le choix des nombres et le calcul de la moyenne arithmétique peuvent être décrits par :

$$x_4 := \begin{cases} \frac{x_1+x_3}{2} & \text{si et seulement si } f(x_1)f(x_3) < 0 \\ \frac{x_2+x_3}{2} & \text{autrement} \end{cases} .$$

De la sorte on continue, jusqu'à ce qu'on ait trouvé une approximation satisfaisante $x_i$. „Satisfaisante“ dépend des besoins de celui qui calcule le zéro et peut être spécifiée d'avance par un $k > 0$. On termine le processus d'approximation quand $|f(x_i)| < k$. ($|f(x_i)|$ pour la valeur absolue de $f(x_i)$, c. à d. $|f(x_i)| = f(x_i)$, si $f(x_i) > 0$, autrement $|f(x_i)| = -f(x_i)$)

**Exemple 3.6.3.** *Déterminer les zéros du polynôme suivant tel que* $|f(x_i)| < 0.00001$.

$$f(x) = 0.9x^3 - 2x^2 - 3x + 4$$

*Nous étudions d'abord une représentation graphique :*

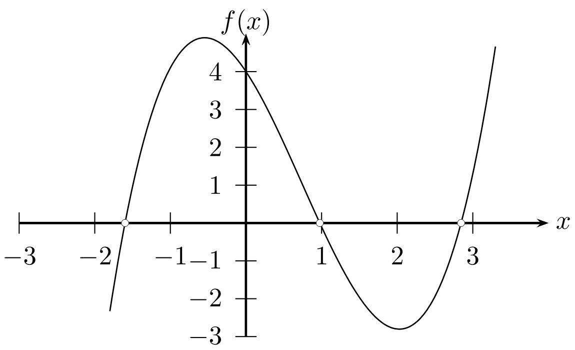


FIGURE 3.6.40 – Représentation graphique du polynôme $f(x) = 0.9x^3 - 2x^2 - 3x + 4$

*Un des zéros se trouve évidemment entre* $x_1 = 2.5$ *et* $x_2 = 3$. *On obtient*

$$f(2.5) = -1.9375$$
$$f(3) = 1.3$$

*et par là* $f(2.5)f(3) < 0$. *Nous calculons la moyenne arithmétique*

$$x_3 = \frac{2.5+3}{2} = 2.75.$$

*Nous contrôlons le signe de* $f(2.75)$ *:*

$$f(2.75) = -0.657\,81 < 0$$

*Ainsi* $f(2.75)\,f(3) < 0$. *Le zéro recherché se trouve alors entre* 2.75 *et* 3 *(*$x_3$ *et* $x_2$*).*
*Nous calculons la moyenne arithmétique :*

$$x_4 = \frac{2.75+3}{2} = 2.875$$

*Pour le signe de* $f\,(2.875)$ :

$$f(2.\,875) = 0.231\,05 > 0$$

*Ainsi* $f\,(2.75)\,f\,(2.875) < 0$ *et le zéro recherché se trouve entres* 2.75 *et* 2.875.
*Nous calculons la moyenne arithmétique :*

$$x_5 = \frac{2.75 + 2.875}{2} = 2.\,812\,5$$

*et*

$$f(2.8125) = -0.235\,23.$$

$f\,(2.8125)\,f\,(2.875) < 0$. *Nous calculons :*

$$\frac{2.8125 + 2.875}{2} = 2.\,843\,8$$

*etc. La procédure est un peu pénible, à l'aide Excel le calcul se fait vite (voir tableau Excel Nullstellen501.xls). On obtient* 2.844772366 *pour le zéro recherché (avec* $f(2.844772366) = 0$ *arrondi à 15 chiffres après la virgule, ici uniquement les premiers 9 de ces chiffres sont indiqués).* $\Diamond$

Nous retenons sans preuve :

**Théorème 3.6.4.** *Un polynôme du troisième degré à au moins un zéro réel et tout au plus trois zéros réels.*

Voir la figure 3.6.40 pour le cas de trois zéros, la figure 3.6.41 pour le cas d'un seul zéro et la figure 3.6.42 pour le cas de deux zéros.

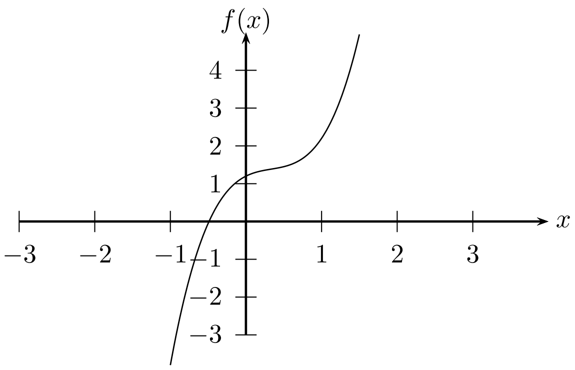


FIGURE 3.6.41 – Exemple d'un polynôme du troisième degré avec un seul zéro. $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + x + 1.2$

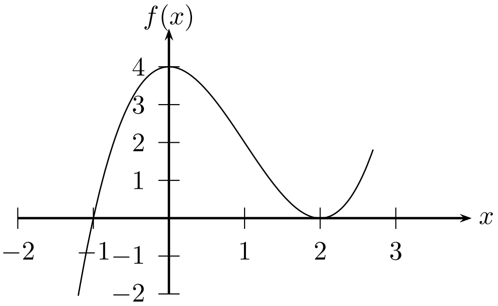


FIGURE 3.6.42 – Exemple pour un polynôme du troisième degré avec deux zéros : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

L'importance des zéros de fonctions continues (ce sont des fonctions qu'on peut tracer sans lever le crayon ; on va fournir une définition mathématique plus tard) est, entre autre, que leur connaissance permet de savoir où les valeurs de fonction sont positives ou négatives.

**Définition 3.6.5.**

1. *La valeur de fonction $f(x)$ est positive en $x$ ($f$ est positive en $x$) si et seulement si $f(x) > 0$.*
2. *Les valeurs de fonction sont positives sur l'intervalle $]a, b[$ ($f$ est positive sur $]a, b[$) si et seulement si pour tout $x \in ]a, b[ \,:\, f(x) > 0$.*
3. *La valeur de fonction $f(x)$ est négative en $x$ ($f$ est négative en $x$) si et seulement si $f(x) < 0$.*
4. *Les valeurs de fonction sont négatives sur l'intervalle $]a, b[$ ($f$ est négative sur $]a, b[$) si et seulement si pour tout $x \in ]a, b[ \,:\, f(x) < 0$.*

$\diamondsuit$

Entre deux zéros avoisinants toutes les valeurs de fonction ont le même signe pour des fonctions continues. A gauche du zéro le plus petit $x_g$, les valeurs de fonction ont toutes le même signe sur $]-\infty, x_g[$. De même à droite du zéro le plus grand $x_d$, les valeurs de fonction ont toutes le même signe sur $]x_d, \infty[$ (voir figure 3.6.43).

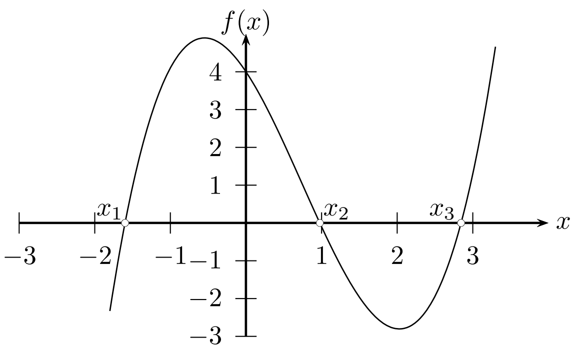


FIGURE 3.6.43 – A gauche du zéro le plus petit $x_1$, sur l'intervalle $]-\infty, x_1[$, les valeurs de fonction sont partout négatives, sur l'intervalle $]x_1, x_2[$, les valeurs de fonction sont partout positives, sur l'intervalle $]x_2, x_3[$ les valeurs de fonction sont partout négatives et sur l'intervalle $]x_3, \infty[$ les valeurs de fonction sont partout positives.

### Equations du troisième degré et polynômes du troisième degré

Une équation du troisième degré ne contient que des expressions du type $a_ix^3, a_jx^2, a_kx, a_m$, reliées par „+“ ou „−“, p.ex.

$$4x^3 + 2x^2 - 0.5x + 14 = 18x^3 - 14.5x^2 + 1.5x + 9x^3$$

A l'aide des transformations introduites on peut réduire cette équation au calcul des zéros d'un polynôme du troisième degré :

$$\begin{aligned} 4x^3 - 18x^3 - 9x^3 + 2x^2 + 14.5x^2 - 0.5x - 1.5x + 14 = 0 \Longrightarrow \\ -23x^3 + 16.5x^2 - 2x + 14 = 0 \end{aligned}$$

Seule solution réelle : $1.122\,8$

### Points d'intersection d'un polynôme du troisième degré avec des polynômes d'un degré inférieur ou égal

En posant l'égalité entre les parties droites des équations décrivant les deux fonctions on obtient une équation qui mène par les transformations mentionnées au problème du calcul des zéros d'un polynôme du troisième degré. On calcule ainsi les premières composantes des points d'intersection. Par la suite, il faut encore calculer les deuxièmes composantes en calculant les valeurs des zéros $x_i$ d'une des fonctions. Il y a au moins un point d'intersection, au maximum trois points d'intersection - sauf si l'équation qui résulte des transformations est d'un degré inférieur à 3.

**Exemple 3.6.6.**

$$\begin{aligned} g(x) &= 14x^3 - 2x^2 + x - 14 \\ f(x) &= 5 \end{aligned}$$

*mène à*

$$14x^3 - 2x^2 + x - 19 = 0$$

*et la solution réelle* $1.134\,4$. *Ainsi le point d'intersection est* $(1.1344, 5)$ ◊

**Exemple 3.6.7.**

$$\begin{aligned} g(x) &= 14x^3 - 2x^2 + x - 14 \\ f(x) &= 5x + 2 \end{aligned}$$

*produit*

$$14x^3 - 2x^2 - 4x - 16 = 0$$

*et la seule solution réelle* $1.19$. *Le point d'intersection est alors* $(1.19, 7.95)$ ◊

**Exemple 3.6.8.**

$$\begin{aligned} g(x) &= 14x^3 - 2x^2 + x - 14 \\ f(x) &= 5x^2 + 2x \end{aligned}$$

*implique*

$$14x^3 - 7x^2 - x - 14 = 0$$

*et la seule solution réelle* $1.224\,9$. *Le point d'intersection avec* $f(1.2249) = 9.9517$ *est alors* $(1.2249, 9.9517)$ ◊

### Calcul d'un polynôme du troisième degré à travers des points

Un polynôme de ce degré est déterminé par quatre points $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, $(x_3, f(x_3)), (x_4, f(x_4))$ avec $x_i, f(x_i)) \in \mathbb{R}$, $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$, pourvu que le système d'équations ci-dessous ait une solution unique. Nous isolons $a_0, a_1, a_3, a_4$ dans

$$\begin{aligned} f(x_1) &= a_3x_1^3 + a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0 \\ f(x_2) &= a_3x_2^3 + a_2x_2^2 + a_1x_2 + a_0 \\ f(x_3) &= a_3x_3^3 + a_2x_3^2 + a_1x_3 + a_0 \\ f(x_4) &= a_3x_4^3 + a_2x_4^2 + a_1x_4 + a_0 \end{aligned}$$

**Exemple 3.6.9.** *Supposons que* $(1, 2)$, $(3, 8)$, $(-3, 4)$ *et* $(-8, -5)$ *soient des éléments du graphe d'un polynômes du troisième degré. Chercher l'équation qui décrit cette fonction. Nous posons :*

$$\begin{aligned} 2 &= a_31^3 + a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0 \\ 8 &= a_33^3 + a_2 \cdot 3^2 + a_1 \cdot 3 + a_0 \\ 4 &= a_3(-3)^3 + a_2 \cdot (-3)^2 + a_1 \cdot (-3) + a_0 \\ -5 &= a_3(-8)^3 + a_2 \cdot (-8)^2 + a_1 \cdot (-8) + a_0 \end{aligned}$$

*La solution est :* $a_0 = \frac{79}{55}, a_1 = -\frac{13}{660}, a_2 = \frac{251}{495}, a_3 = \frac{151}{1980}$ *(Contrôler s.v.p.) On exécute en général de tels calculs à l'aide d'un logiciel. Il vaut cependant la peine d'avoir résolu une fois un tel système d'équations à la main. L'équation de la fonction est alors* $f(x) = \frac{151}{1980}x^3 + \frac{251}{495}x^2 - \frac{13}{660}x + \frac{79}{55}$*.(voir Figure 3.6.44)*

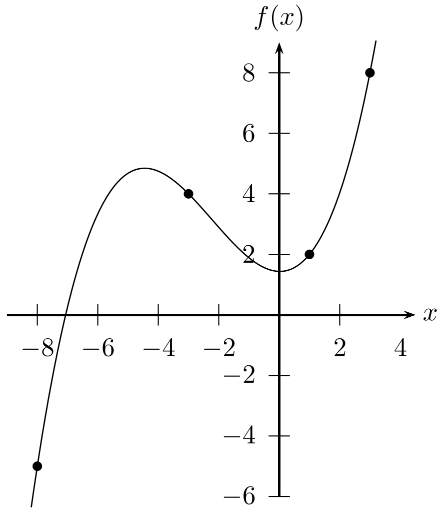


FIGURE 3.6.44 – Représentation graphique pour l'exemple : les points données et le polynôme du troisième degré calculé à travers ces points

◊

### Exemple économique

Un monopoliste se voit face à la fonction de prix suivante :

$$p(x) = 500 - 20x.$$

La recette est alors
$$R(x) = xp(x) = x(500 - 20x) = 500x - 20x^2.$$
De plus, il affronte la fonction de coût suivante
$$C(x) = 0.2x^3 - 6x^2 + 80x + 100.$$
La fonction de profit est alors
$$\begin{aligned} P(x) = R(x) - C(x) &= 500x - 20x^2 - \left(0.2x^3 - 6x^2 + 80x + 100\right) \\ &= 420x - 14x^2 - 0.2x^3 - 100. \end{aligned}$$

Déterminer la zone de profit.
Solution : Il faut trouver les zéros du polynôme $P(x) = 420x - 14x^2 - 0.2x^3 - 100$, c.à d. nous calculons
$$420x - 14x^2 - 0.2x^3 - 100 = 0$$
Les solutions sont : $22.470, 0.240\,02, -92.710$. La fonction de profit coupe l'axe des $x$ trois fois. Nous calculons la valeur de la fonction de profit entre 0.24002 et 22.47 pour un nombre quelconque (p.ex. $x = 10$) : $420 \cdot 10 - 14 \cdot 10^2 - 0.2 \cdot 10^3 - 100 = 2500$ ($P(0) = -100; P(25) = -1475$). Ainsi la zone où les valeurs de la fonction de profit sont positives est l'intervalle $]0.24002, 22.47[$. Il serait intéressant de savoir quelle quantité produit un profit maximal. On abordera la solution de ce problème plus tard. Pour la représentation graphique de l'exemple voir la figure 3.6.45.

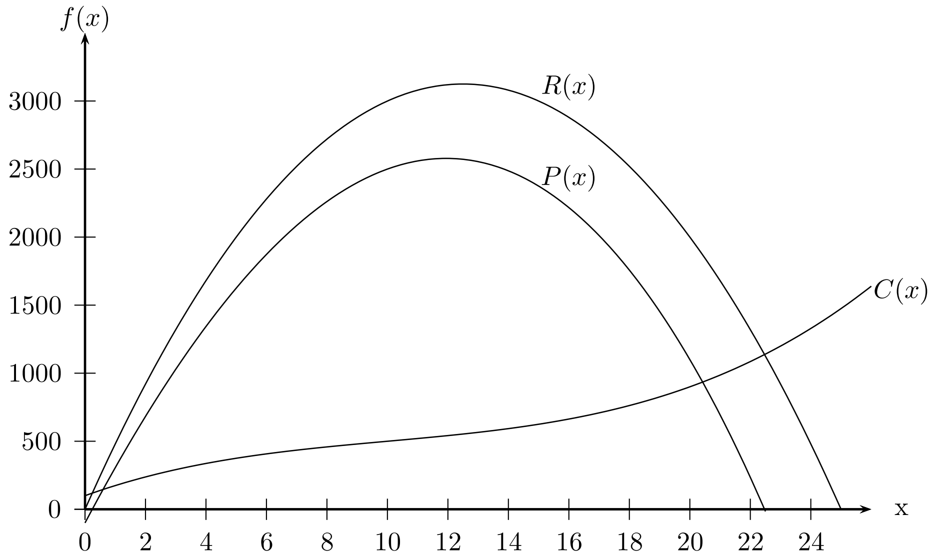


FIGURE 3.6.45 – Représentation graphique de la fonction de coût $C(x)$, de la fonction de recette $R(x)$ et de la fonction de profit $P(x)$ de l'exemple économique

**Remarque 3.6.10.** *On appelle des fonctions de coût qui montent d'abord de moins en moins et par la suite de plus en plus „fonctions de coût selon la loi des rendements non-proportionnels“ (réfléchir pourquoi cette forme de la courbe est raisonnable dans certains domaines de l'économie - l'origine du concept est l'économie agricole).* ◊

**Exercices**

1. Calculer pour un polynôme du troisième degré qui passe par les points $(5, 6)$, $(8, 9)$, $(50, 7)$ et $(100, 30)$ l'équation qui le décrit. Indiquer le point d'intersection avec l'axe des $y$. Indiquer les zéros du polynôme (utiliser la méthode d'approximation introduite, contrôler le résultat

à l'aide d'un logiciel). Calculer la valeur de la fonction en 70 et en 50. Pourrait-il s'agir d'une fonction de coût selon la loi des rendements non-proportionnels ?

2. Calculer les points d'intersection du polynôme $f(x) = 0.02x^3 - 2x^2 + x - 2$ avec $g(x) = 2x - 1000$.
3. Un monopoliste affronte la fonction de coût suivante :

$$C(x) = 0.2x^3 - 0.9x^2 + 4x + 2$$

   De plus il sait que $p(x) = -0.02x + 4$ (fonction de prix).
   Calculer la zone de profit
   Les coûts en $x = 3$
   La recette en $x = 3$
   Le profit en $x = 3$.
4. Une fonction de production exprime la quantité $x$ de biens produits en fonction de la quantité de matières premières ou de produits intermédiaires $r$. Une fonction de production respectant la loi des rendements non-proportionnels monte d'abord de plus en plus, ensuite de moins en moins et finalement elle baisse.
   Examiner graphiquement si la fonction de production suivante suit cette loi.

$$x(r) = -0.4r^3 + 1.3r^2 + 5r$$

   Calculer le domaine de définition raisonnable de cette fonction.
   Calculer $x(5)$.
5. Résoudre l'équation suivante

$$5x^3 + 2x^2 - 4x^2 - 4 = 15x^2 + 5x^2 + 2$$

**Solutions**

1.

$$\begin{aligned} 6 &= 5^3 a_3 + 5^2 a_2 + 5a_1 + a_0 \\ 9 &= 8^3 a_3 + 8^2 a_2 + 8a_1 + a_0 \\ 7 &= 50^3 a_3 + 50^2 a_2 + 50a_1 + a_0 \\ 30 &= 100^3 a_3 + 100^2 a_2 + 100a_1 + a_0 \end{aligned}$$

$a_0 = -\frac{44\,393}{82\,593} = -0.537\,49\,;\ a_1 = \frac{542\,891}{359\,100} = 1.\,511\,8$

$a_2 = -\frac{3500\,131}{82\,593\,000} = -4.\,237\,8 \times 10^{-2};\ a_3 = \frac{25\,037}{82\,593\,000} : 3.\,031\,4 \times 10^{-4}$

L'équation de la fonction est

$$f(x) = 0.00030314x^3 - 0.042378x^2 + 1.5118x - 0.53749$$

L'intersection avec l'axe des $y$ : $(0, -0.53749)$
zéros : un seul zéro réel : $0.359\,14$
valeur de la fonction en 70 : $f(70) = 0.00030314 \cdot 70^3 - 0.042378 \cdot 70^2 + 1.5118 \cdot 70 - 0.53749 = 1.\,613\,3$
valeur de la fonction en 50 : puisque que $(50, 7)$ est un des points par lesquels on a calculé la fonction, on peut affirmer sans calculer $f(50) = 7$ (sauf si on veut contrôler si la fonction trouvée passe effectivement par ce point).
La fonction devrait passer par 0, pour être une fonction de production (sans matières premières, pas de biens produits).

2. $f(x) = 0.02x^3 - 2x^2 + x - 2$ avec $g(x) = 2x - 1000$.

$$2x - 1000 = 0.02x^3 - 2x^2 + x - 2$$

trois zéros réels : 25.55667, -20.55355, 94.99688. Les deuxièmes composantes des couples qui correspondent aux points : avec : g(polyroot(c(998,-1,-2,0.02))) on obtient -948.8867, -1041.1071, -810.0062. Les couples sont alors : $(25.55667, -948.8867), (-20.55355, -1041.1071), (94.99688, -810$

3. $R(x) = p(x)x = -0.02x^2 + 4x$
$P(x) = R(x) - C(x) = -0.02x^2 + 4x - \left(0.2x^3 - 0.9x^2 + 4x + 2\right)$
$= 0.88x^2 - 0.2x^3 - 2$
Zéros de la fonction de profit : $3.649\,0, 2.073, -1.322\,0$
Nous vérifions où la fonction de profit est positive à droite de 0 :
$P(3) = 0.88 \cdot 3^2 - 0.2 \cdot 3^3 - 2 = 0.52 > 0$. La zone de profit est alors : $]2.073, 3.6490[$.
Les coûts en $x = 3$ : $C(3) = 0.2 \cdot 3^3 - 0.9 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 2 = 11.3$
La recette en $x = 3$ : $R(3) = -0.02 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 = 11.82$
Le profit en $x = 3$ : $11.82 - 11.3 = 0.52$.

4. Pour l'examen des caractéristiques d'une fonction de production selon la loi des rendements non-proportionnels voir la figure 3.6.46

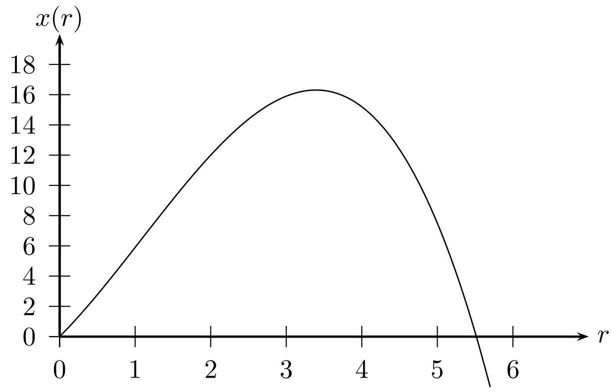


FIGURE 3.6.46 – Représentation graphique de la fonction de production respectant la loi des rendements non-proportionnels de l'exercice

La courbe monte d'abord de plus en plus, ensuite de moins en moins et finalement elle baisse. Les conditions d'une telle fonction sont alors remplies.
Le premier zéro se trouve en $r = 0$; le deuxième en $5.\,516\,1$ (le troisième n'est pas à droite de 0). Le domaine de définition raisonnable du point de vue économique est alors $[0, 5.5161]$.
$x(5) = -0.4 \cdot 5^3 + 1.3 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 = 7.\,5$

5. Ensemble solution : $\{4.460\,3\}$

## 3.7 Polynômes du n-ième degré

**Définition 3.7.1.** *$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ avec $a_n \neq 0$ est un polynôme du $n$-ième degré.* ♢

— Un polynôme de cette forme est déterminé par $n+1$ points $(x_i, y_i)$ avec $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ et $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$, pourvu que le système d'équations correspondant ait une solution unique.
— L'intersection du polynôme avec l'axe des $y$ est $(0, a_0)$.
— Un polynôme du $n$-ième degré a tout au plus $n$ zéros réels.

— Un polynôme d'un degré impair a au moins un zéro réel.
— Un polynôme d'un degré pair peut n'avoir aucun zéro réel.
— Les zéros d'un polynôme d'un degré supérieur à 4 doivent être calculé avec une méthode d'approximation.
— Un polynôme d'un degré pair n'est ni surjectif ni injectif. Un polynôme d'un degré impair est surjectif. Il y a des polynômes d'un degré impair qui sont injectifs et d'autre qui ne le sont pas.

**Exercices**

1. Calculer la valeur de la fonction $f(x) = 17x^{10} + 6x^3 - 2$ en $x = 3$.
2. Développer le système d'équations par lequel on peut calculer les coefficients d'un polynôme qui passe par les points suivants : $(5, 10), (6, 12), (7, 5), (8, 3), (9, 20), (10, 50)$.
3. Calculer les points d'intersection des polynômes suivants :
$$\begin{aligned} f(x) &= 12x^5 + 6x^2 - 2 \\ g(x) &= 5x^7 - 2x^3 + 4x + 4 \end{aligned}$$
4. Trouver les solutions réelles de l'équation suivante :
$$20x^9 - 10x^4 + 2x + 4 = 14x^6 + 12x^5$$

**Solutions**

1. $f(3) = 1003\,993$
2. Il y a 6 points. On peut alors poser un polynôme du degré 5 de la forme $f(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$
$$\begin{aligned} 10 &= 5^5a_5 + 5^4a_4 + 5^3a_3 + 5^2a_2 + 5a_1 + a_0 \\ 12 &= 6^5a_5 + 6^4a_4 + 6^3a_3 + 6^2a_2 + 6a_1 + a_0 \\ 5 &= 7^5a_5 + 7^4a_4 + 7^3a_3 + 7^2a_2 + 7a_1 + a_0 \\ 3 &= 8^5a_5 + 8^4a_4 + 8^3a_3 + 8^2a_2 + 8a_1 + a_0 \\ 20 &= 9^5a_5 + 9^4a_4 + 9^3a_3 + 9^2a_2 + 9a_1 + a_0 \\ 50 &= 10^5a_5 + 10^4a_4 + 10^3a_3 + 10^2a_2 + 10a_1 + a_0 \end{aligned}$$
La solution du système d'équations : $a_0 = 1895, a_1 = -\frac{9467}{6} = -1577.8$,
$a_2 = \frac{1523}{3} = 507.67, a_3 = -\frac{157}{2} = -78.5, a_4 = \frac{35}{6} = 5.8333$,
$a_5 = -\frac{1}{6} = -0.16667$
L'équation du polynôme est alors : $f(x) = 1895 - \frac{9467}{6}x + \frac{1523}{3}x^2 - \frac{157}{2}x^3 + \frac{35}{6}x^4 - \frac{1}{6}x^5$.
(voir figure 3.7.47)

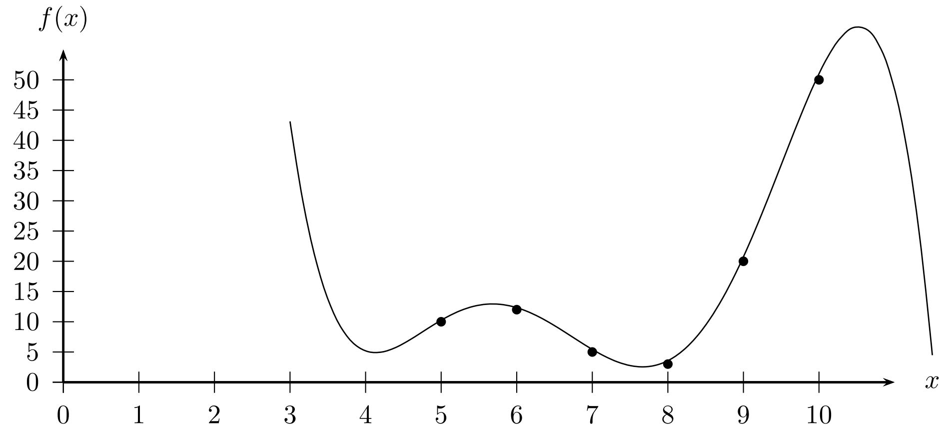


FIGURE 3.7.47 – Représentation graphique pour l'exemple : les points donnés et le polynôme du 5ième degré à travers ces points. On voit qu'à l'extérieur des points la fonction reprend des formes qui n'ont rien à voir avec une tendance éventuelle qui se trouverait dans les points

3. On peut réduire le problème au problème du calcul des zéros de la fonction :

$$5x^7 - 12x^5 - 2x^3 - 6x^2 + 4x + 6 = 0$$

Les zéros réels sont 0.8539979, $-1.4893849$ et 1.6159621
$f(0.8539979) = 7.826\,7$. Un des points d'intersection est alors $(0.8539979, 7.8267)$
$f(-1.4893849) = -76.636$. Un autre point d'intersection est $(-1.4893849, -76.636)$
$f\,(1.6159621) = 145.9$. Le dernier point d'intersection est $(1.6159621, 145.9)$

4. Nous cherchons les zéros :

$$20x^9 - 14x^6 - 12x^5 - 10x^4 + 2x + 4 = 0$$

Un élément de l'ensemble solution est : 0.70471345
D'autres zéros : -0.6904269 ; 1.1368600

## 3.8 Objectifs d'apprentissage

— Connaître la définition d'un polynôme du $n$-ième degré.
— Arriver à calculer le point d'intersection d'un polynôme avec l'axe des $y$.
— Arriver à calculer les zéros d'un polynôme (pour les polynômes du deuxième degré à l'aide d'une formule, pour les polynômes d'un degré supérieur à l'aide d'une méthode d'approximation. Arriver à utiliser un logiciel pour calculer l'approximation. Arriver à utiliser un logiciel pour trouver les zéros d'un polynôme).
— Arriver à calculer les points d'intersection de polynômes.
— Arriver à calculer l'équation d'un polynôme du $n$-ième degré à travers $n + 1$ points (pour $n > 3$ à l'aide d'Excel ou de R).
— Arriver à résoudre des équations du $n$-ième degré à une variable.
— Arriver à résoudre des exercices du type des exercices ci-dessus.

# Chapitre 4

# D'autres fonctions réelles élémentaires

A part les polynômes, d'autres fonctions réelles élémentaires jouent un rôle dans l'analyse économique. Nous étudions quelques uns de ces types de fonctions et fournissons des exemples économiques.

## 4.1 Fonctions rationnelles

**Définition 4.1.1.** *$f$ est une fonction rationnelle si et seulement si il y a des fonctions polynomiales $g$ et $h$ tel que*

$$f : \mathbb{R} \backslash \{x \mid h(x) = 0\} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) := \frac{g(x)}{h(x)}.$$

*Il faut parfois restreindre le domaine de définition de $h$ pour éviter une division par 0. Nous appelons une expression du type $\frac{g(x)}{h(x)}$ „expression rationnelle“.*

$\diamond$

**Exemple 4.1.2.** *Supposons que $C$ soit une fonction de coût (p.ex. $C : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$; $C(x) = 5x + 2$). Alors la fonction de coût unitaire est*

$$c(x) = \frac{5x + 2}{x} = 5 + \frac{2}{x}.$$

*La fonction de coût unitaire exprime les coûts par unité d'un bien en dépendance de la quantité produite. Elle est définie dans le domaine $\mathbb{R}_+ \backslash \{0\} = ]0, \infty[$ (voir figure 4.1.1).*

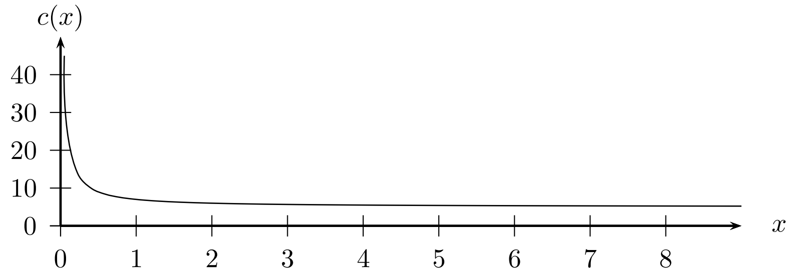


FIGURE 4.1.1 – Représentation graphique de la fonction de coût unitaire $c(x) = \frac{C(x)}{x}$ de l'exemple économique

$\diamondsuit$

**Remarque 4.1.3.** *Raison pour l'interdiction de la division par* $0$ *: Nous commençons par une définition :*
***Définition :*** $\frac{a}{b} = c$ *si et seulement si* $a = bc$ *(pour* $a, b, c \in \mathbb{R}, b \neq 0$*).*
*La raison pour l'exclusion de* $b = 0$ *se montre facilement : si pour chaque* $a \in \mathbb{R}$ *il existait un* $c \in \mathbb{R}$*, tel que* $\frac{a}{0} = c$*, on pourrait en déduire pour tout* $a \neq 0$*, selon la définition,* $0 \cdot c = a$*. Comme* $0 \cdot c = 0$ *il en résulterait la contradiction* $0 = a \neq 0$*.*
*Une division par zéro peut se faire de manière inconsciente en appliquant mécaniquement les règles de calcul.*

$$\begin{aligned}
5x + 6 &= 4x + 3 \\
x^2 + 5x + 6 &= x^2 + 4x + 3 \\
(x+2)(x+3) &= (x+1)(x+3) \\
x + 2 &= x + 1 \\
2 &= 1
\end{aligned}$$

$-3$ *est une solution de* $5x + 6 = 4x + 3$*, car*

$$\begin{aligned}
5 \cdot (-3) + 6 &= -9 \\
4 \cdot (-3) + 3 &= -9.
\end{aligned}$$

*C'est pour quoi il y a de la ligne 4 à la ligne 5 une division implicite par zéro* ($-3 + 3 = 0$)*. Cela permet de produire à la dernière ligne une proposition qui contredit le théorème* $2 \neq 1$*. Un exemple plus explicite où la division par zéro est évidente est le suivant :*

$$\begin{aligned}
x &= x \\
x^2 &= x^2 \\
x^2 - x^2 &= x^2 - x^2 \\
x(x - x) &= (x - x)(x + x) \\
x &= x + x = 2x \\
1 &= 2.
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

### 4.1.1 Zéros d'une fonction rationnelle

Lors du calcul des zéros d'une fonction rationnelle il faut veiller à contrôler que la fonction soit définie aux zéros éventuels. Ainsi

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\} \to \mathbb{R} \\ f(x) &:= \frac{5x-2.5}{x-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

n'est pas défini en $\frac{1}{2}$ (division par zéro). Si nous résolvons l'équation

$$\frac{5x-2.5}{x-\frac{1}{2}} = 0,$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} 5x - 2.5 = 0 &\Longrightarrow \\ x &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Comme la fonction n'est pas définie en $\frac{1}{2}$, on ne peut pas affirmer $f(\frac{1}{2}) = 0$. Par conséquent la fonction $f$ n'a pas de zéro, mais dans l'exemple un trou. De tels trous se produisent par rapport aux fonctions rationnelles, si l'on peut réduire les équations les déterminant de manière à ce qu'il en résulte un polynôme. Dans l'exemple on peut réécrire

$$\begin{aligned} \frac{5x-2.5}{x-\frac{1}{2}} &= \frac{5(x-0.5)}{x-\frac{1}{2}} \\ &= 5. \end{aligned}$$

(voir figure 4.1.2)

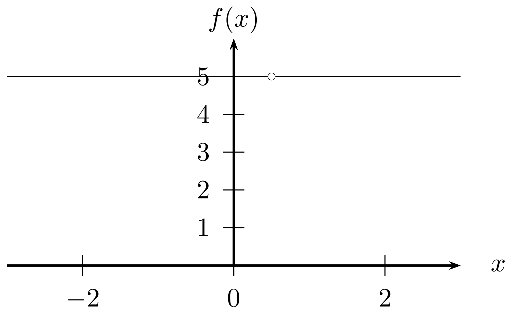


FIGURE 4.1.2 – Représentation graphique de la fonction $f(x) = \frac{5x-2.5}{x-\frac{1}{2}}$, qui n'est pas définie en 0.5. La fonction a en 0.5 un trou.

A part des trous on peut observer par rapport aux fonctions rationnelles des pôles - des points sur l'axe des $x$ où la fonction va vers l'infini ou vers moins l'infini en s'approchant de ces points. Ces pôles se trouvent aux zéros du polynôme du dénominateur de l'équation décrivant la fonction rationnelle (voir figure 4.1.3 et 4.1.4).

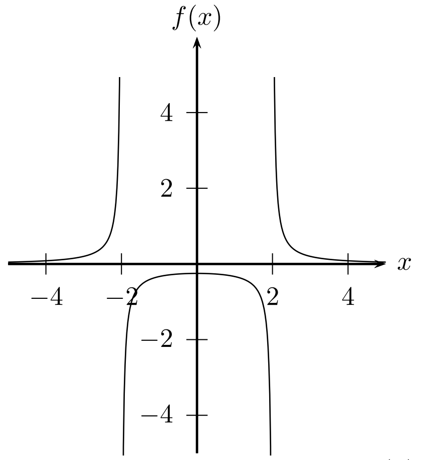


FIGURE 4.1.3 – Fonction rationnelle $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$ avec un pôle en $x = -2$ et $x = 2$

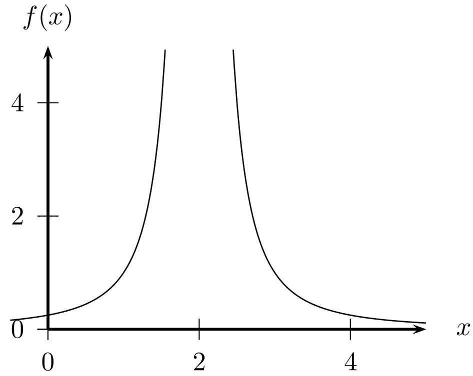


FIGURE 4.1.4 – Fonction rationnelle $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ avec un pôle en $x = 2$

On voit que les fonctions rationnelles ne peuvent changer le signe des valeurs de fonction pas uniquement au zéro de la fonction, mais aussi aux points, où la fonction n'est pas définie.

### 4.1.2 Equations avec des expressions rationnelles

La solution d'équations ne contenant que des expressions rationnelles et des expressions du $n$-ième degré, mène au calcul des zéros d'un polynôme. De plus, il faut veiller à ce que les zéros trouvés ne mène pas à une division par zéro. Si nous multiplions p. ex.

$$\frac{5x+2}{x-\frac{1}{2}} = \frac{4+x}{x-\frac{1}{2}} \tag{4.1.1}$$

des deux côtés par $x - \frac{1}{2}$ et que nous réduisons, nous obtenons

$$\begin{aligned} &5x + 2 = 4 + x \Longrightarrow \\ &4x - 2 = 0, \end{aligned}$$

tel que le zéro de $f(x) = 4x - 2$ est $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{2}$ n'est cependant pas une solution de (4.1.1) , puisque le remplacement de $x$ par $\frac{1}{2}$ mène à une division par zéro - c.à d. $\frac{1}{2}$ n'est pas élément du domaine de définition de $g(x) = \frac{5x+2}{x-\frac{1}{2}}$. C'est pourquoi il faut - avant de résoudre de telles équations - déterminer l'ensemble des objets pouvant être éléments de l'ensemble solution - les zéros du dénominateur ne peuvent pas faire partie de l'ensemble solution.

Petit rappel :

**Définition 4.1.4.** *Pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, n \in \mathbb{N}^*$ on définit*

$$x^{-n} := \frac{1}{x^n}$$

$\diamondsuit$

**Théorème 4.1.5.** $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ *pour* $m \neq n$ *et* $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} = x^0 = 1$ *pour* $m = n$.

*Démonstration.* (a) (par induction) : (1)

$$\begin{aligned} \frac{x^1}{x^2} &= \frac{x}{xx} = \frac{1}{x} = x^{-1} = x^{1-2} \\ \frac{x^2}{x} &= \frac{xx}{x} = x = x^{2-1} \end{aligned}$$

(2) On pose $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$. Avec cela

$$\frac{x^{m+1}}{x^n} = \frac{x^m x}{x^n} = x^{m-n}x = x^{m-n+1} = x^{m+1-n}$$
$$\frac{x^m}{x^{n+1}} = \frac{x^m}{x^n x} = \frac{x^{m-n}}{x} = \frac{x^{m-n-1}x}{x} = x^{m-n-1} = x^{m-(n+1)}$$

(b) On pose $\frac{x^n}{x^n} = 1$. Avec cela

$$\frac{x^{n+1}}{x^{n+1}} = \frac{x^n x}{x^n x} = \frac{x^n}{x^n}\frac{x}{x} = 1 \cdot 1 = 1 = x^{n+1-(n+1)} = x^0.$$

□

Le résultat $x^0 = 1$ se comprend facilement. On voit p.ex. que $\frac{x^4}{x^4} = \frac{xxxx}{xxxx} = 1$ et que $\frac{x^4}{x^4} = x^4x^{-4} = x^{4-4} = x^0$. Pour $x = 0$ on définit souvent $0^0 = 1$ pour que $x^0 = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Certain livres définissent par contre $0^0 = 0$ pour que $0^x = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Il y a des auteurs qui renoncent à une définition de $0^0$. R fournit 1, Excel une erreur. Nous posons ici $0^0 = 1$.

**Exercices**

1. Calculer $f(24)$ pour
$$f(x) = \frac{15x + 2x^2}{4x^2 + 5x + 3}$$
Indiquer le domaine de définition de la fonction.
2. Le coût trimestriel $C$ pour l'énergie électrique d'une entreprise se compose des taxes trimestrielles se montant à 150 UM (unités monétaires) et un prix de 0.17 UM par kWh. Calculer la fonction de coût total $C$, la fonction de coût variable $C_v$, la fonction de coût fixe $C_f$ et la fonction de coût unitaire $c$.
3. Supposons la fonction de coût total
$$C(x) = 0.06x^3 - 1.8x^2 + 70x + 265$$
Dessiner cette fonction à l'aide d'Excel ou d'un autre logiciel. Indiquer les équations définissant $C_v$, $C_f$ et $c$. Calculer $c(25)$. Calculer la fonction de profit unitaire sous condition que la fonction de prix soit donnée par $p(x) = -2x + 4$ (monopole).
4. Trouver les zéros des fonctions données par
a)
$$f(x) = \frac{2x^2 + 5x - 2x}{3x^2 + 4}$$
b)
$$f(x) = \frac{2x^2 + 5x - 2x}{4x^2 - 9}$$
5. Résoudre les équations suivantes :
a)
$$5x^2 + 3x - 5 = \frac{3x^2 - 4x + 5}{2x^2}$$
b)
$$\frac{10x^2 + 4x + 5}{2x + 3} = 4x + 14$$
6. Calculer les points d'intersection des fonctions suivantes :
$$f(x) = \frac{5x^2 + 2x - 5}{3x^2 - 1}$$
$$g(x) = 14x + 4$$

**Solutions**

1. Nous commençons par calculer le domaine de définition de la fonction en cherchant les zéros du dénominateur du terme à droite $g(x) = 4x^2 + 5x + 3$. Il n'y a pas de zéros réels. Par conséquent $f$ est définie sur $\mathbb{R}$.

$$f(24) = \frac{15 \cdot 24 + 2 \cdot 24^2}{4 \cdot 24^2 + 5 \cdot 24 + 3} = 0.622\,99$$

2. 

$$\begin{aligned} C(x) &= 0.17x + 150 \\ C_v(x) &= 0.17x \\ C_f(x) &= 150 \\ c(x) &= 0.17 + \frac{150}{x} \end{aligned}$$

On peut affirmer alors

$$C(x) = C_v(x) + C_f(x)$$

3. Figure :

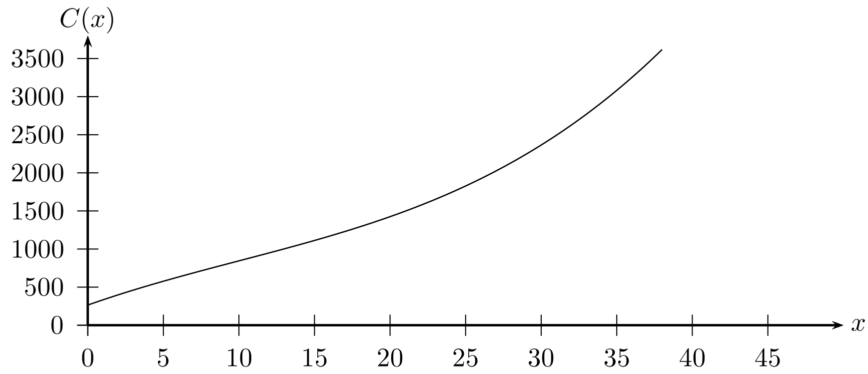


FIGURE 4.1.5 – Représentation graphique de la fonction $C(x) = 0.06x^3 - 1.8x^2 + 70x + 265$

$$\begin{aligned} C_v(x) &= 0.06x^3 - 1.8x^2 + 70x \\ C_f(x) &= 265 \\ c(x) &= \frac{0.06x^3 - 1.8x^2 + 70x + 265}{x} \\ &= 0.06x^2 - 1.8x + 70 + \frac{265}{x} \end{aligned}$$

Le domaine de définition de $c$ est $\mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$.

$$\begin{aligned} c(25) &= 0.06 \cdot 25^2 - 1.8 \cdot 25 + 70 + \frac{265}{25} \\ &= 73.1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R(x) &= xp(x) = -2x^2 + 4x \\
P(x) &= R(x) - C(x) \\
&= -2x^2 + 4x - \left(0.06x^3 - 1.8x^2 + 70x + 265\right) \\
&= -0.06x^3 - 0.2x^2 - 66x - 265 \\
p_{profit}(x) &= \frac{-0.06x^3 - 0.2x^2 - 66x - 265}{x} \\
&= -0.06x^2 - 0.2x - 66 - \frac{265}{x}
\end{aligned}
$$

4. a) Nous déterminons les zéros de $g(x) = 3x^2 + 4$. Ce polynôme n'a pas de zéros. Par conséquent $f$ est définie sur $\mathbb{R}$. Il faut résoudre

$$
\begin{aligned}
\frac{2x^2 + 5x - 2x}{3x^2 + 4} &= 0 \Longrightarrow \\
2x^2 + 5x - 2x &= 0 \Longrightarrow
\end{aligned}
$$

Ensemble solution : $\left\{0, -\frac{3}{2}\right\}$
b)

$$
f(x) = \frac{2x^2 + 5x - 2x}{4x^2 - 9}
$$

Les zéros de $g(x) = 4x^2 - 9$ sont $\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$. Ainsi le domaine de définition de $f$ est $\mathbb{R}\backslash\{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\}$.

$$
\begin{aligned}
\frac{2x^2 + 5x - 2x}{4x^2 - 9} &= 0 \Longrightarrow \\
2x^2 + 5x - 2x &= 0
\end{aligned}
$$

Les zéros de $g(x) = 2x^2 + 5x - 2x$ sont $\left\{0, -\frac{3}{2}\right\}$. Par conséquent l'ensemble solution est $\{0\}$ – car $-\frac{3}{2}$ ne fait pas partie du domaine de définition de $f$.

5. a) Les solutions doivent être des éléments de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, car $2x^2 = 0$ pour $x = 0$. On obtient alors pour $x \neq 0$ :

$$
\begin{aligned}
5x^2 + 3x - 5 &= \frac{3x^2 - 4x + 5}{2x^2} \Longrightarrow \\
2x^2 \left(5x^2 + 3x - 5\right) &= 3x^2 - 4x + 5 \Longrightarrow \\
10x^4 + 6x^3 - 10x^2 &= 3x^2 - 4x + 5 \Longrightarrow \\
10x^4 + 6x^3 - 13x^2 + 4x - 5 &= 0
\end{aligned}
$$

c.à d. 0.937752327 et −1.6479071.
contrôle :

$$
\begin{aligned}
5 \cdot 0.937752327^2 + 3 \cdot 0.937752327 - 5 &= 2.210\,2 \\
\frac{3 \cdot 0.937752327^2 - 4 \cdot 0.937752327 + 5}{2 \cdot 0.937752327^2} &= 2.210\,2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
5 \cdot (-1.6479071)^2 + 3\,(-1.6479071) - 5 &= 3.\,634\,3 \\
\frac{3 \cdot (-1.6479071)^2 - 4 \cdot (-1.6479071) + 5}{2 \cdot (-1.6479071)^2} &= 3.\,634\,3
\end{aligned}
$$

b) Les éléments de l'ensemble solution doivent être différents de $-\frac{3}{2}$, car pour $2x+3=0$ on obtient $x=-\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{10x^2+4x+5}{2x+3} &= 4x+14 \Longrightarrow \\ 10x^2+4x+5 &= (4x+14)(2x+3) \\ &= 40x+8x^2+42 \Longrightarrow \\ 2x^2-36x-37 &= 0 \end{aligned}$$

$9-\frac{1}{2}\sqrt{398}=-0.974\,97$; $\frac{1}{2}\sqrt{398}+9=18.975$. Ainsi l'ensemble solution est

$$\{-0.974\,97, 18.975\}$$

Nous contrôlons le résultat en substituant dans l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{10\cdot(-0.974\,97)^2+4\cdot -0.974\,97+5}{2\cdot -0.974\,97+3} &= 10.\,1 \\ 4\cdot -0.974\,97+14 &= 10.\,1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{10\cdot 18.975^2+4\cdot 18.975+5}{2\cdot 18.975+3} &= 89.\,9 \\ 4\cdot 18.975+14 &= 89.\,9 \end{aligned}$$

6. Détermination du domaine de définition de $f$ :
Il faut éviter une division par 0 : $3x^2-1=0$, Solutions : $\frac{1}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{3}$ avec $-\frac{1}{3}\sqrt{3}=-0.577\,35$. Il faut alors enlever ces zéros du domaine de définition :

$$\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3}\right\}$$

Pour chercher les intersections, nous identifions

$$\begin{aligned} \frac{5x^2+2x-5}{3x^2-1} &= 14x+4 \Longrightarrow \\ 5x^2+2x-5 &= (14x+4)\left(3x^2-1\right) \\ &= 42x^3+12x^2-14x-4 \Longrightarrow \\ 42x^3+7x^2-16x+1 &= 0 \end{aligned}$$

On obtient les zéros :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= 0.5 \\ -\frac{1}{21}\sqrt{70}-\frac{1}{3} &= -0.731\,742863 \\ \frac{1}{21}\sqrt{70}-\frac{1}{3} &= 0.065076243 \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} 14\cdot 0.5+4 &= 11 \\ 14\cdot -0.731\,742863+4 &= -6.244\,4 \\ 14\cdot 0.065076243+4 &= 4.911\,1 \end{aligned}$$

on obtient l'ensemble des points d'intersection suivant : (voir la représentation graphique 4.1.6) :

$$\{(-0.731742863, -6.244\,4), (0.065076243, 4.911\,1), (0.5, 11)\}$$

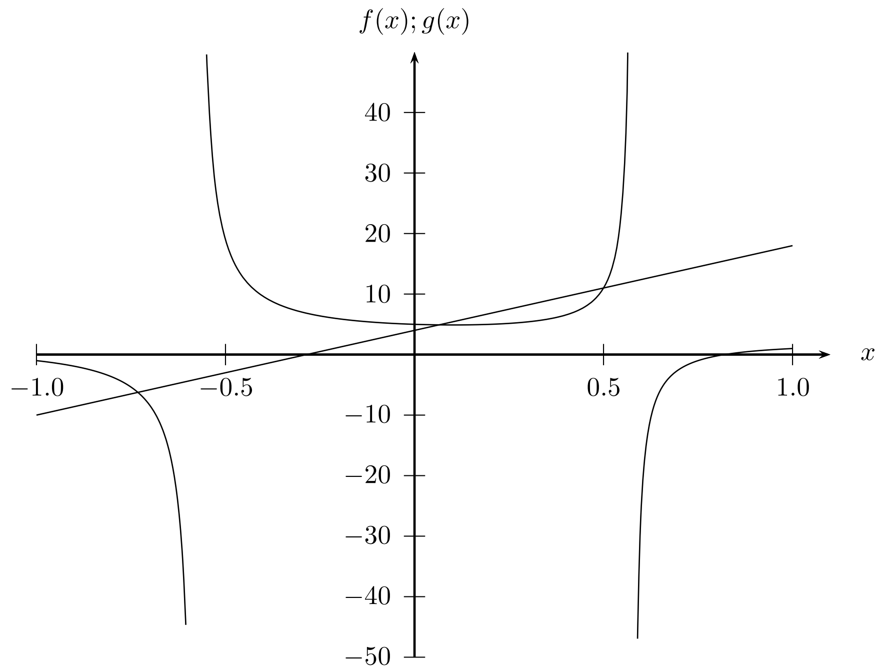


FIGURE 4.1.6 – Points d'intersection des fonctions $f(x) = \frac{5x^2+2x-5}{3x^2-1}$ et $g(x) = 14x + 4$

## 4.2 Fonctions racine ; composition de fonctions

**Définition 4.2.1.** *Supposons que $f$ soit une fonction réelle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dans ce cas nous appelons $g : E \to \mathbb{R}$ avec $E \subset \mathbb{R}$ et $f(x) = g(x)$ pour $x \in E$ la „restriction de $f$ sur $E$“.*

$\lozenge$

Souvent on restreint le domaine des valeurs d'une fonction pour obtenir une surjection.

Les polynômes $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ avec $f(x) = x^n$ sont injectifs. Leur image est $\mathbb{R}_+$. Par conséquent $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une bijection et la fonction réciproque existe. Nous introduisons une notation spécifique pour les désigner :

**Définition 4.2.2.** *Pour $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ avec $y := f(x) = x^n$, nous définissons :*

$$\sqrt[n]{y} := f^{-1}(y)$$

*pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$. Nous appelons les applications*

$$g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$$
$$g(x) := \sqrt[n]{x}$$

*fonctions racine.* $\lozenge$

**Théorème 4.2.3.** *Si $f^{-1}$ est la fonction réciproque de $f$ on peut affirmer („$\Longleftrightarrow$“ pour „si et seulement si“) :*

$$f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow f(x) = y$$

*Démonstration.* Nous posons $f(x) = y$. Avec cela $(x, y)$ est élément du graphe der la fonction $f$ - selon de définition de $f(x) = y$. Par conséquent $(y, x)$ est élément du graphe de la fonction réciproque $f^{-1}$, c. à d. $f^{-1}(y) = x$. De l'autre côté nous posons $f^{-1}(y) = x$. Ainsi $(y, x)$ est élément du graphe de la fonction réciproque de $f^{-1}$ et $(x, y)$ est élément de fonction $f$, c. à d. $f(x) = y$. □

**Théorème 4.2.4.** $\sqrt[n]{y} = x \Longleftrightarrow x^n = y$

*Démonstration.* Les fonctions racine sont les fonction réciproques des fonctions $x^n$. Ainsi le théorème suit immédiatement du théorème 4.2.3. □

**Exemple 4.2.5.**

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

◊

**Exemple 4.2.6.** *Le produit national $Y$ d'un pays dépend du travail $A$ investi dans le processus de production. Supposons que le lien soit donné par la fonction suivante :*

$$Y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$
$$Y(A) := \sqrt[5]{A}.$$

*(voir figure 4.2.7).*

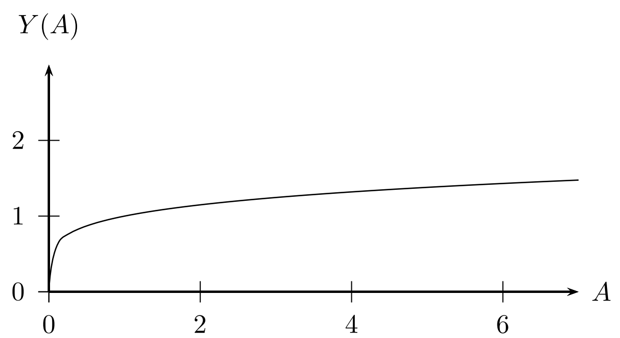


FIGURE 4.2.7 – Représentation graphique de la fonction $Y(A) = A^{0.2}$

*Lors d'une masse de travail de 200 unités le produit national se monterait à*

$$Y(200) = 200^{0.2} = 2.885\,4$$

*unités monétaires.* ◊

On peut formuler le

**Théorème 4.2.7.** *Le zéro d'une fonction racine est* 0

*Démonstration.* $\sqrt[n]{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt[n]{x}^n = 0^n \Leftrightarrow x = 0$ □

Pour les répéter nous retenons quelques théorèmes (règles de calcul) :

**Théorème 4.2.8.** *Pour $x, y \geq 0$ et $n, m \in \mathbb{N}^*$*

| *notations racine* | *notations puissance* |
|---|---|
| $\sqrt[n]{x^n} = x$ | $(x^n)^{\frac{1}{n}} = x$ |
| $\sqrt[n]{x}^n = x$ | $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x$ |
| $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$ | $(xy)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}}$ |
| $\sqrt[n]{\frac{1}{y}} = \frac{1}{\sqrt[n]{y}}\quad (y > 0)$ | $\left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{y^{\frac{1}{n}}}\ (y > 0)$ |
| $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}\ (y > 0)$ | $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{x^{\frac{1}{n}}}{y^{\frac{1}{n}}}\ (y > 0)$ |
| $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$ | $\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{1}{nm}}$ |
| $\sqrt[n]{x}\,\sqrt[m]{x} = \sqrt[nm]{x^{m+n}}$ | $x^{\frac{1}{n}} x^{\frac{1}{m}} = (x^{m+n})^{\frac{1}{nm}} = x^{\frac{m+n}{nm}}$ |
| $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x^{m-n}}\ (x > 0)$ | $\frac{x^{\frac{1}{n}}}{x^{\frac{1}{m}}} = x^{\frac{m-n}{mn}}\ (x > 0)$ |

**Remarque 4.2.9.** *Les polynômes $f(x) = x^{2n+1}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ sont bijectifs sur $\mathbb{R}$. Ainsi leurs fonctions réciproques sont définies sur $\mathbb{R}$ sans restriction. Malgré ce fait, on définit en général les fonctions racine pour des raisons d'un traitement unifié aussi pour ce cas sur $\mathbb{R}_+$. Par là on ne veut pas dire que les fonctions réciproques de $f(x) = x^{2n+1}$ ne soient pas définies pour des $x$ négatifs, mais qu'on réserve les notations $x^{\frac{1}{n}}$ et $\sqrt[n]{x}$ à des $x$ positifs. Le calcul des valeurs des fonctions réciproques $f(x) = x^{2n+1}$ pour des $x$ négatifs s'exprime à la l'aide de la notation pour les racines par $-\left(\sqrt[2n+1]{|x|}\right)$ ou $-\left(|x|^{\frac{1}{2n+1}}\right)$. Si on définissait les fonctions racine avec un exposant impair sur les nombres réelles, la règle $a^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{2n}{2m}}$ p.ex. ne serait plus valable sans restriction, comme montre l'exemple suivant :*

$$-2 \underset{faux}{=} \sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$$

*(contradiction !). Il faut relever trois points : (1) Le premier pas dans le développement ci-dessus est faux selon la définition des fonctions racine adoptée ici. Il y a des livres qui définissent les fonctions racine différemment en différenciant entre exposant pair et impair - les mathématiciens n'apprécient pas la tentative de leur imposer des définitions spécifiques. La faute dans le calcul ci-dessus se ferait alors dans le troisième pas. (2) Excel avec „=(-8)ˆ(1/3)“ et d'autres logiciels (mais pas R) et certaines calculatrices donnent pour $\sqrt[3]{-8}$ un résultat, à savoir le même que pour $-\sqrt[3]{8}$ (Excel : =– (8ˆ (1/3))). Dans ce cas on peut regarder $\sqrt[3]{-8}$ comme une notation alternative de $-\sqrt[3]{8}$. (3) Pour les solutions de $x^2 = 4$ nous écrirons $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$, puisque et $-2$ et $2$ rendent l'équation $x^2 = 4$ vraie.* ♢

### 4.2.1 La composition de fonctions

On peut construire de nouvelles applications par la composition des applications $f$ par $g$. La composition de $f$ par $g$ se construit en attribuant aux arguments de $g$ les valeurs de fonction de $f$. Par obtenir une application sur le domaine de définition de $g$ vers le domaine des valeurs de $f$ l'image de $g$ doit être un sous-ensemble du domaine de définition de $f$. Autrement il faut restreindre le domaine de définition de $g$ de sorte que cette exigence soit remplie. On peut appliquer plusieurs fois l'opération de la composition.

**Définition 4.2.10.** *La composition de $f$ par $g$ pour les deux applications*

$$g : A \to B$$
$$f : D \to C$$

*tel que Image*$(g) \subset D$ *est définie par*

$$h : A \to C$$
$$h(x) = f(g(x))$$

*Nous lisons* $f(g(x))$ *comme „*$f$ *de* $g$ *de* $x$*". Souvent on introduit pour la composition une notation spécifique :* $f \circ g$*. Nous nous limiterons à écrire* $f(g)$ *et nous lisons cela comme „*$f$ *de* $g$*" ou „*$f$ *composée par* $g$*".* $\Diamond$

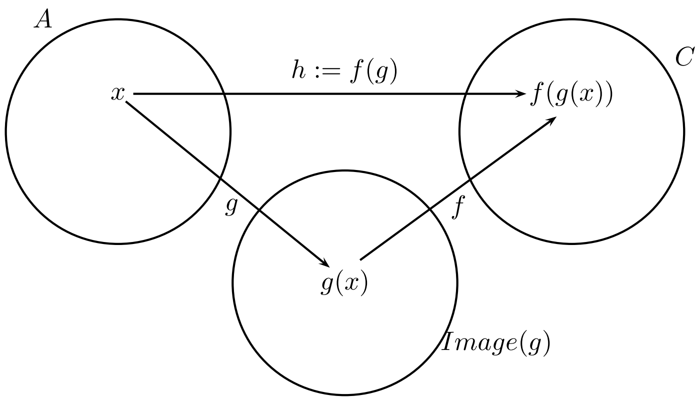


FIGURE 4.2.8 – Explication graphique de la composition $h$ de $f$ par $g$

Pour calculer les valeurs de fonction de $h(x) = f(g(x))$ nous calculons d'abord $g(x)$ et ensuite $f(g(x))$.

**Exemple 4.2.11.** *Supposons que*

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$
$$f(x) := \sqrt{x}$$

*et*

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$g(x) := 2x^2$$

*En l'occurrence Image*$(g) = \mathbb{R}_+$ *et avec cela*

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$h(x) := f(g(x))$$

*est défini. Si nous voulons calculer* $h(5)$ *nous déterminons* $g(5)$ *:*

$$g(5) = 2 \cdot 5^2 = 50$$

*et par la suite* $f(50)$

$$f(50) = \sqrt{50} = 7.071\,1.$$

$\Diamond$

Si l'on a des équations décrivant les fonctions, on obtient une équation décrivant la composition, en substituant $g(x)$ pour dans $f(g(x))$. Dans l'exemple 4.2.11 nous obtenons avec $g(x) = 2x^2$ et $f(x) = \sqrt{x}$ pour $h(x) = f(g(x))$ :

$$h(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}\,|x|$$

La composition n'est pas commutative, bien que pour des cas spéciaux $f(g)$ puisse être identique à $g(f)$.

**Exemple 4.2.12.** *Pour l'exemple 4.2.11 avec* $g(x) = 2x^2$ *et* $f(x) = \sqrt{x}$ *on obtient* $f(g(x)) = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}\,|x|$*, tandis que* $g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}^2 = 2x$ *pour* $x \geq 0$ *- deux résultats différents. Pour* $g(f)$ *le domaine de définition est* $\mathbb{R}_+$*, pour* $f(g)$ *cependant* $\mathbb{R}$*.* ♢

**Remarque 4.2.13.** *Détermination du domaine de définition : La fonction racine n'est définie que pour des nombres non-négatifs. Si on tire la racine d'une autre expression, par exemple du polynôme* $f(x) = x^4 - 27x^2 - 14x + 120$*, la fonction* $\sqrt{f(x)} = \sqrt{x^4 - 27x^2 - 14x + 120}$ *n'est définie que pour les* $x$ *tel que les valeurs de fonction* $f(x)$ *sont non-négatives* $(f(x) \geq 0)$*. Il faut alors vérifier sur quels intervalles sur l'axe des* $x$ *le polynôme est non-négatif (voir figure 4.2.9).*

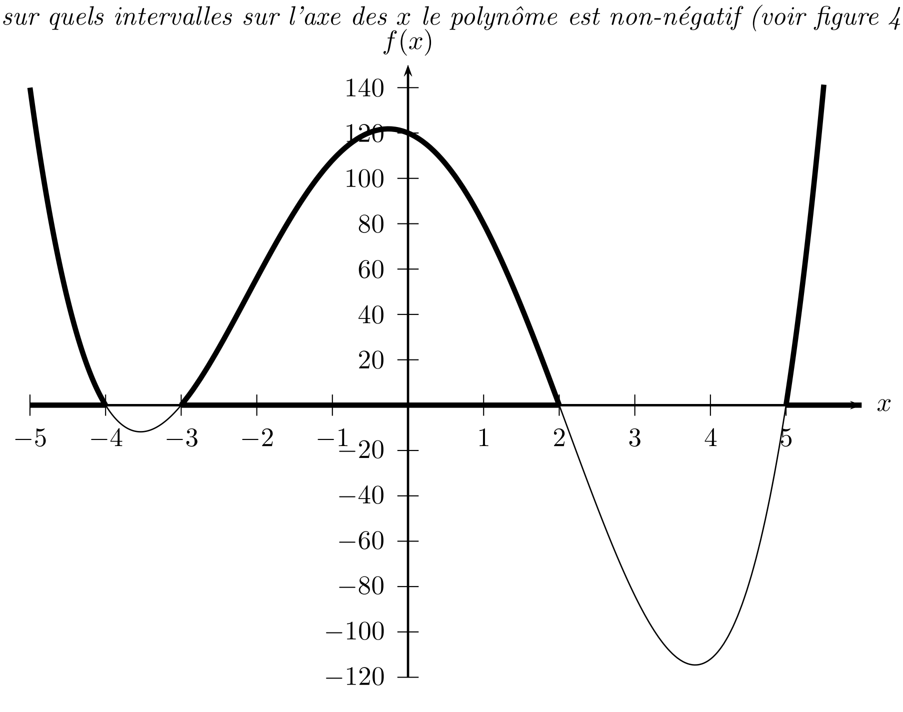


FIGURE 4.2.9 – Détermination du domaine de définition. La racine de $f(x)$ n'est définie que pour des $x$ tel que $f(x) \geq 0$.

*Pour cela nous calculons les zéros du polynôme :*

$$x^4 - 27x^2 - 14x + 120 = 0$$

*et on obtient* $-4, -3, 2, 5$*. Pour savoir si le polynôme est positif ou négatif entre deux zéros avoisinants on calcule une valeur de fonction de* $f$ *quelconque entre ces zéros (d'une manière efficace avec Excel ou R). De même avant le premier et après le dernier zéros on calcule une valeur de* *fonction de $f$ quelconque. On obtient par exemple :*

| | |
|---|---|
| $-5 \in\ ]-\infty, -4[$ | $f\,(-5) = 140$ |
| $-3.5 \in\ ]-4, -3[$ | $f(-3.5) = -11.6875$ |
| $0 \in\ ]-3, 2[$ | $f(0) = 120$ |
| $3 \in\ ]2, 5[$ | $f(3) = -84$ |
| $6 \in\ ]5, \infty[$ | $f(6) = 360$ |

*Comme la fonction polynomiale ne fait pas de saut, on peut alors savoir que la fonction $f$ est non-négative sur ]-$\infty, -4$] $\cup$ [$-3, 2$] $\cup$ [5 ,$\infty$[, ce qui est le domaine de définition de $\sqrt{f\,(x)}$.* $\Diamond$

La composition est un instrument efficace pour construire à partir des fonctions introduites jusqu'ici d'autres fonctions qui ne sont pas couvertes par les définitions des polynômes, des fonctions rationnelles et des fonctions racine.

**Exemple 4.2.14.** *Supposons que*

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) &= 5x^3 - 3x^4 + 5x \\ g &: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ g(x) &= \sqrt{x^5}. \end{aligned}$$

*Avec cela*

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= 5\sqrt{x^5}^3 - 3\sqrt{x^5}^4 + 5\sqrt{x^5} \\ &= \sqrt{x^5}\left(5\sqrt{x^5}^2 - 3\sqrt{x^5}^3 + 5\right) \\ &= \sqrt{x^5}\left(5x^{\frac{5\cdot 2}{2}} - 3x^{\frac{5\cdot 3}{2}} + 5\right) = \sqrt{x^5}\left(5x^5 - 3x^{\frac{15}{2}} + 5\right) \end{aligned}$$

*Comme $g$ est définie sur $\mathbb{R}_+$, $f\,(g)$ est défini sur $\mathbb{R}_+$. $g(f(x)) = \sqrt{(5x^3 - 3x^4 + 5x)^5}$ n'est par contre pas défini sans restriction du domaine de définition de $f$, comme dans certains intervalles $f(x) < 0$ et que $g$ n'est définie que dans des domaines non-négatifs. Pour garantir que $f(x) \geq 0$ nous cherchons les zéros de $f(x) = 5x^3 - 3x^4 + 5x$ ($5x^3 - 3x^4 + 5x \geq 0 \Longleftrightarrow \left(5x^3 - 3x^4 + 5x\right)^5 \geq 0$), qui sont 0 et $2.059\,6$. Comme $f(1) = 5 - 3 + 5 = 7 > 0$, $f\,(-1) = 5\,(-1)^3 - 3\,(-1)^4 + 5\,(-1) = -13$ et $f\,(3) = 5\,(3)^3 - 3\,(3)^4 + 5\,(3) = -93$, cette fonction n'est non-négative que dans l'intervalle $[0, 2.0596]$. Nous restreignons alors le domaine de définition de $f$ à $[0, 2.0596]$ et nous obtenons une application $g\,(f) : [0, 2.0596] \to \mathbb{R}$.* $\Diamond$

**Exemple 4.2.15.** *Supposons que*

$$h(x) = \sqrt[4]{2x^2 - 5x - 2}.$$

*Cette fonction est une composition de*

$$f(x) = \sqrt[4]{x}$$

*par*

$$g(x) = 2x^2 - 5x - 2,$$

*car*

$$h\,(x) = f\,(g\,(x)) = \sqrt[4]{g\,(x)} = \sqrt[4]{2x^2 - 5x - 2}.$$

*La fonction $g$ est ouverte vers le haut. Les zéros sont*

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{5}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{41} = -0.350\,78 \\ x_2 &= \frac{1}{4}\sqrt{41} + \frac{5}{4} = 2.\,850\,8. \end{aligned}$$

*Par là la fonction $g$ a des valeurs négatives sur l'intervalle* $]\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{41},\frac{1}{4}\sqrt{41}+\frac{5}{4}[$. *Par conséquent le domaine de définition $D$ de $h$ est*

$$D = \quad \left]-\infty, \frac{5}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{41}\right] \quad \cup \quad \left[\frac{1}{4}\sqrt{41}+\frac{5}{4}, \infty\right[.$$

$\diamondsuit$

Lors du calcul des zéros de fonctions composées il faut vérifier si le candidat trouvé pour un zéro fait partie du domaine de définition.

**Exemple 4.2.16.** *On cherche le zéro de* $f(x)=\sqrt[4]{\frac{x^2-5x+4}{(x-4)}}$. *Il faut que* $x-4\neq 0$ *et* $\frac{x^2-5x+4}{(x-4)}\geq 0$. $x-4=0$ *si et seulement si* $x=4$. *De plus*

$$\begin{aligned}\frac{x^2-5x+4}{(x-4)} &= 0 \Longleftrightarrow \\ x^2-5x+4 &= 0 \Longleftrightarrow \\ & x_1 = 4 \text{ ou } x_2 = 1.\end{aligned}$$

$g(x)=x^2-5x+4$ *est ouvert vers le haut. Par conséquent le domaine de définition de $f$ est*

$$]-\infty,1]\cup]4,\infty[.$$

*Si nous calculons les zéros nous obtenons :*

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{\frac{x^2-5x+4}{(x-4)}} &= 0 \Longleftrightarrow \\ \frac{x^2-5x+4}{(x-4)} &= 0 \Longleftrightarrow \\ x^2-5x+4 &= 0 \Longleftrightarrow \\ & x_1 = 4 \text{ ou } x_2 = 1.\end{aligned}$$

*Puisque 4 n'est pas élément du domaine de définition, le seul zéro est* $1$. $\diamondsuit$

**Exemple 4.2.17.** *Trouver le domaine de définition de la fonction*

$$f(x)=\sqrt{\frac{4x^3+2x-8}{17x^2+4x-2}}$$

*La fonction qui englobe (la fonction extérieure ou externe) est* $\sqrt{}$. *La fonction englobée (intérieure ou interne) est*

$$g(x)=\frac{4x^3+2x-8}{17x^2+4x-2}$$

*Pour éviter une division par 0, il faut calculer les zéros du dénominateur, qui ne font pas partie du domaine de définition :*

$$17x^2+4x-2=0$$

$0.244\,97$ , $-0.480\,26$ *(deux zéros réels). Ensuite il faut déterminer les intervalles sur lesquels $g$ est non-négative (la racine n'est définie que que pour des nombres non-négatifs). Nous cherchons les zéros de $g$ :*

$$\frac{4x^3+2x-8}{17x^2+4x-2}=0 \Longleftrightarrow 4x^3+2x-8=0$$

*Un seul zéro réel :* $1.128\,2$. *Aux zéros du dénominateur (en gris, endroits où la fonction n'est pas définie) et aux zéros de $g$, la fonction $g$ peut changer de signe. Nous mettons ces points critiques* *en ordre croissant et nous calculons une valeur de fonctions avant le premier point critique, entre des points critiques avoisinants et après le dernier point critique pour analyser le signe des valeurs de fonction de g :*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $-$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ |
| *points critiques* | $-0.480\,26$ | | $0.244\,97$ | | $1.128\,2$ | |
| $g\,(-1) = -1.273$ | | $g\,(0) = 4$ | | $g\,(1) = -0.105$ | | $g\,(2) = 0.378$ |

*Le domaine de définition est alors :* $]-0.480\,26, 0.244\,97[\ \cup\ [1.128\,2, \infty[$ *(Attention à la direction des crochets : comme* $-0.480\,26, 0.244\,97$ *sont des zéros du dénominateur, il faut les enlever. Comme* $1.128\,2$ *n'est pas un zéro du dénominateur et que la racine de* $g\,(1.128\,2) = 0$ *est définie,* $1.128\,2$ *fait partie du domaine de définition.*
*Avec R : zd=polyroot(c(-2,4,17)) ; zn=polyroot(c(-8,2,0,4)) ; zt=c(zd,zn[1]) #on choisit dans zn le premier nombre qui est le seul zéro réel).*
*zt=zt[order(zt)].*
*g=function(x) ((4*x^3+2*x-8)/(17*x^2+4*x-2))*
*g(c(-1,0,1,2))* ◊

Pour résoudre des équations avec ces expressions qui définissent des fonctions composées, il faut vérifier que les éléments possibles de l'ensemble solution sont effectivement des solutions. L'expression à droite et à gauche de l'équation définissent des fonctions. L'ensemble solution doit être un sous-ensemble de l'intersection des domaines de définitions de ces fonctions.

**Exemple 4.2.18.**

$$\sqrt[2]{3x^3+5x^2+5} = \frac{2x^3+2}{4x^2-2}$$

$f\,(x) = \sqrt[2]{3x^3+5x^2+5}$ *et* $g\,(x) = \frac{2x^3+2}{4x^2-2}$ *définissent des fonctions sur des domaines de définitions spécifiques et l'ensemble solution est l'ensemble des* $x$ *tel que* $f\,(x) = g\,(x)$*. Par conséquent ces* $x$ *doivent être éléments des domaines de définition de* $f$ *et de* $g$*. Par rapport à* $f$ *il faut que* $5x^2+3x^3+5 \geq 0$*. Nous calculons les zéros :* $3x^3+5x^2+5 = 0$*. Il n'y a qu'un seul zéro :* $-2.059576504$*. A gauche du zéro la fonction est négative, à droite positive. Le domaine de définition de* $f$ *est alors* $[-2.059576504, \infty[$*. Par rapport à* $g$ *on peut constater : l'expression mène à une division par 0 pour* $x_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} = -0.707\,11$ *et* $x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}. = 0.707\,11$*. Le domaine de définition de* $g$ *est alors* $\mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\}$*. L'intersection de ces deux domaines de définition est*

$$[-2.059576504, \infty[\ \cap\ \left(\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\}\right) = [-2.059576504, \infty[\ \setminus\ \{-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\}$$

*et l'ensemble solution doit être un sous-ensemble de cette intersection. Pour l'exemple nous obtenons :*

$$\begin{aligned}
3x^3+5x^2+5 = \frac{\left(2x^3+2\right)^2}{\left(4x^2-2\right)^2} = \frac{4x^6+8x^3+4}{16x^4-16x^2+4} &\Longrightarrow \\
\left(3x^3+5x^2+5\right)\left(16x^4-16x^2+4\right) = 4x^6+8x^3+4 &\Longrightarrow \\
48x^7+80x^6-48x^5+12x^3-60x^2+20 = 4x^6+8x^3+4 &\Longrightarrow \\
48x^7+76x^6-48x^5+4x^3-60x^2+16 = 0 &
\end{aligned}$$

*Avec polyroot(c(16,0,-60,4,0,-48,76,48)) on obtient les solutions réelles : 0.5296681, -0.5806644, 0.8673963, -0.7767448, -2 ; et on peut constater que* $\{0.5296681, -0.5806644, 0.8673963, -0.7767448, -2\} \subset [-2.059576504, \infty[\ \setminus\ \{-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\}$*. Ainsi* $\{0.5296681, -0.5806644, 0.8673963, -0.7767448, -2\}$ *est l'ensemble solution* ($-\frac{1}{2}\sqrt{2} = -0.707\,11$). ◊

**Exemple 4.2.19.** *Nous obtenons pour $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$; $f(x) := x^n$ et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$; $g(x) := \sqrt[m]{x}$ pour la composition de $f$ par $g$*

$$f(g(x)) = \left(\sqrt[m]{x}\right)^n$$

*et pour la composition de $g$ par $f$*

$$g(f(x)) = \sqrt[m]{x^n}.$$

*Dans ce cas spécifique on peut alors affirmer*

$$f(g(x)) = g(f(x))$$

◊

**Théorème 4.2.20.**

$$\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$$
$$\left(\sqrt[m]{x}\right)^n = x^{\frac{n}{m}}$$

*Démonstration.*

$$\sqrt[m]{x^n} = (x^n)^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{n}{m}}$$
$$\left(\sqrt[m]{x}\right)^n = \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^n = x^{\frac{n}{m}}$$

□

Les zéros des fonctions composées se calculent en général en utilisant une méthode d'approximation pourvu qu'il existe un intervalle autour du zéro de la fonction sans sauts, pôles ou trous de celle-ci. La méthode d'approximation introduite dans le contexte des polynômes du troisième degré peut s'utiliser aussi pour ces autres fonctions.

### 4.2.2 Fonctions réciproques et composition

Si nous composons une fonction par sa fonction réciproque, nous obtenons une fonction qui attribue $x$ à $x$. On appelle cette fonction *fonction identité.*

**Théorème 4.2.21.** *$f^{-1}$ : Image($f$) $\to \mathbb{R}$ est la fonction réciproque de $f : D \to \mathbb{R}$ si et seulement si $f^{-1}(f(x)) = x$ pour tout $x \in D \subset \mathbb{R}$.*

*Démonstration.* Selon la définition $f(x) = y :\Longleftrightarrow (x, y) \in g_f$ ($g_f$ est le graphe de la fonction $f$) et de la définition de la fonction réciproque on obtient :

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) = x &\Longleftrightarrow (f(x), x) \in g_{f^{-1}} \\ &\Longleftrightarrow (x, f(x)) \in g_f \\ &\Longleftrightarrow f(x) = f(x) \end{aligned}$$

Comme $f(x) = f(x)$ est logiquement vrai (chaque objet est identique à lui-même), $f^{-1}(f(x)) = x$ est démontré. □

**Exemple 4.2.22.** *Supposons que*

$$f(x) = 5x + 3.$$

*Comme déjà montré $f$ est une bijection et la fonction réciproque existe. Nous calculons la fonction réciproque :*

$$\begin{aligned} y = 5x + 3 &\Longrightarrow \\ y - 3 = 5x &\Longrightarrow \\ x = \frac{y-3}{5} & \end{aligned}$$

*On peut vérifier :*

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= \frac{(5x+3)-3}{5} = \\ &= \frac{5x}{5} = x. \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

**Exemple 4.2.23.** *Supposons que $f(x) = x^n$ et $g(x) = \sqrt[n]{x}$. $g$ est alors la fonction réciproque de $f$.*

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= \sqrt[n]{x^n} \\ &= x^{\frac{n}{n}} \\ &= x. \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

**Remarque 4.2.24.** *Si nous dessinons la fonction*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ f(x) &:= x^2 \end{aligned}$$

*et sa fonction réciproque*

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

*dans un système de coordonnées cartésiennes on peut voir que la formation de la réciproque correspond à une réflexion par rapport à la droite $h(x) = x$. Cela est assez évident, car la fonction réciproque a comme graphe l'ensemble des couples dont on a renversé l'ordre. Ainsi $(1.5, 1.5^2) \in g_f$ devient $(1.5^2, 1.5) \in g_{f^{-1}}$. De l'autre côté on peut aussi le démontrer formellement. La droite $d(x) = ax + b$ à travers $(x_1, x_2) \in g_f$ et $(x_2, x_1) \in g_{f^{-1}}$ a la pente $\frac{x_1 - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{x_1 - x_2}{-(x_1 + x_2)} = -1$, est alors perpendiculaire à la droite $h(x) = x$, qui a la pente 1. Comme le point $(x_1, x_2) \in d$, on obtient*

$$x_2 = -1 \cdot x_1 + b$$

*L'ordonnée à l'origine $b$ de la droite $d$ est alors $x_1 + x_2$. On obtient l'équation suivante pour $d$ :*

$$d(x) = -x + x_1 + x_2.$$

*La position $x_0$ sur l'axe des $x$ du point d'intersection de $d$ avec $h$ est à cause de*

$$h(x) = x = -x + x_1 + x_2 = d(x) :$$

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

*Avec cela $h\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \frac{x_1+x_2}{2}$. L'intersection de $h$ et de $d$ est alors*

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}\right).$$

*La distance entre $(x_1, x_2)$ et $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}\right)$ est*

$$\sqrt{\left(x_1 - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2}$$

*et entre $(x_2, x_1)$ et $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}\right)$ de même*

$$\sqrt{\left(x_2 - \frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 + \left(x_1 - \frac{x_1+x_2}{2}\right)^2}.$$

*Ainsi la droite $h$ coupe le segment entre les points $(x_1, x_2)$ et $(x_2, x_1)$ en deux et on obtient $(x_2, x_1)$ à partir de $(x_1, x_2)$, en reflétant le point $(x_1, x_2)$ par rapport à la droite $h$ (voir figure 4.2.10).*

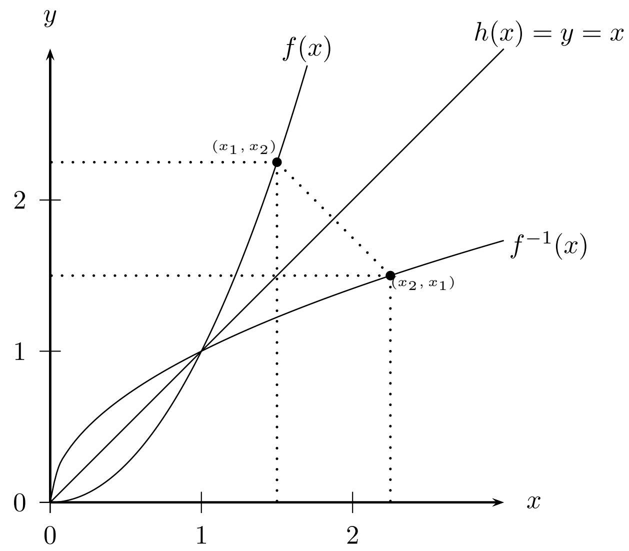


FIGURE 4.2.10 – Représentation graphique de la fonction $f(x) = x^2$ et sa fonction réciproque $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ comme réflexion par rapport à la droite $h(x) = x$

◊

**Théorème 4.2.25.** *Si $f^{-1}$ est la fonction réciproque de $f$, alors $f$ est la fonction réciproque de $f^{-1}$.*

*Démonstration.* Supposons que $f^{-1}$ est la fonction réciproque de $f$. Comme $f$ a une fonction réciproque, $f$ est injective, c. à d. pour $(x, y)$, $(z, r) \in g_f$ (= graphe de la fonction $f$) et $x \neq z$ on peut affirmer $y \neq r$. Par conséquent pour ces $(y, x)$ et $(r, z) \in g_{f^{-1}}$ : si $y \neq r$, alors $x \neq z$. $f^{-1}$ est alors injective. $f^{-1}$ est surjective sur le domaine de définition de $f$, car $f$ est une application : pour tout $x \in A$ il existe un $(x, y) \in g_f$ et pour ce couple $(y, x) \in g_{f^{-1}}$. Par conséquent toutes les valeurs de $x \in A$ sont des éléments de l'image de $f^{-1}$. Comme de plus pour $f = (A, B, g_f)$ : $f^{-1} = \left(B, A, g_{f^{-1}}\right)$, il n'y a pas de valeurs qui sont des éléments du domaine des valeurs de $f^{-1}$, sans être élément de $A$. Avec cela $f^{-1}$ est bijective et $f^{-1}$ possède une fonction réciproque $\left(f^{-1}\right)^{-1}$. Nous posons $(x, y) \in g_f$. Avec cela $(y, x) \in g_{f^{-1}}$ et $(x, y) \in g_{(f^{-1})^{-1}}$. Nous posons $(x, y) \in g_{(f^{-1})^{-1}}$. Avec cela $(y, x) \in g_{f^{-1}}$ et $(x, y) \in g_f$. Par conséquent $(x, y) \in g_f$ si et seulement si $(x, y) \in g_{(f^{-1})^{-1}}$. Par conséquent $g_f = g_{(f^{-1})^{-1}}$. Les domaines de définition et des valeurs de $f$ et $\left(f^{-1}\right)^{-1}$ sont identiques : car pour la fonction réciproque de $f = (A, B, g_f)$ on a $f^{-1} = \left(B, A, g_{f^{-1}}\right)$. Pour la fonction réciproque de $f^{-1}$ on obtient alors $\left(f^{-1}\right)^{-1} = \left(A, B, g_{(f^{-1})^{-1}}\right)$. Puisque $g_f = g_{(f^{-1})^{-1}}$, $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$. □

### 4.2.3 Monotonie

Une fonction peut avoir dans certains intervalles ou sur $\mathbb{R}$ des valeurs de fonction croissantes, des valeurs de fonction décroissantes ou des valeurs de fonction constantes pour des $x$ croissants.

Nous dirons que la fonction croît, décroît ou est constante dans $I \subset \mathbb{R}$. Ainsi la fonction $f(x) = x^2$ croît dans l'intervalle $]0, \infty[$, et elle décroît dans l'intervalle $]-\infty, 0[$. La fonction $g(x) = 2x + 5$ croît sur $\mathbb{R}$, tandis que $h(x) = -2x + 5$ décroît sur $\mathbb{R}$. Nous précisions d'une manière plus formelle :

**Définition 4.2.26.** *Supposons que $f : D \to \mathbb{R}$ soit une fonction réelle et que $I \subset D \subset \mathbb{R}$ soit un intervalle ouvert*

- *$f$ croît sur $I$ d'une manière strictement monotone ($f$ est strictement croissante) si et seulement si pour tout $x, y \in I$ avec $x > y$ : $f(x) > f(y)$.*
- *$f$ croît sur $I$ d'une manière monotone ($f$ est croissante) si et seulement si pour tout $x, y \in I$ avec $x > y$ : $f(x) \geq f(y)$.*
- *$f$ décroît sur $I$ d'une manière strictement monotone ($f$ est strictement décroissante) si et seulement si pour tout $x, y \in I$ avec $x > y$ : $f(x) < f(y)$.*
- *$f$ décroît sur $I$ d'une manière monotone ($f$ est décroissante) si et seulement si pour tout $x, y \in I$ avec $x > y$ : $f(x) \leq f(y)$.*
- *Si $f$ croît d'une manière (strictement) monotone sur $I$ ou décroît d'une manière (strictement) monotone sur $I$, nous appelons $f$ „(strictement) monotone".*

$\Diamond$

(voir les figures 4.2.11 et 4.2.12 pour des représentations graphiques).

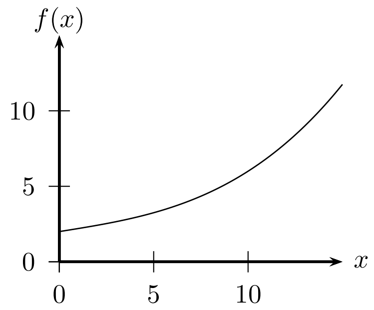


FIGURE 4.2.11 – Exemple d'une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ : $f(x) = 0.002x^3 + 0.2x + 2$

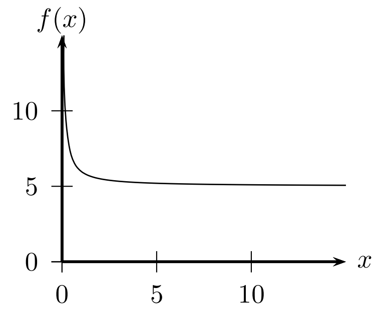


FIGURE 4.2.12 – Exemple d'une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ : $f(x) = \frac{1}{x} + 5$

**Exemple 4.2.27.** *Démonstration de la croissance strictement monotone pour $g(x) = 2x + 5$. Supposons que $y > x$. Alors $2y > 2x$ et $2y + 5 > 2x + 5$. C'est pourquoi $f(y) > f(x)$.* $\Diamond$

**Exemple 4.2.28.** *Démonstration de la croissance strictement monotone pour $f(x) = x^2$ avec $x \in ]0, \infty[$. Supposons que $y > x$ et $y, x > 0$. Alors $y^2 > x^2$ et par conséquent $f(y) > f(x)$.* $\Diamond$

**Exemple 4.2.29.** *Démonstration de la décroissance strictement monotone pour $f(x) = x^2$ avec $x \in ]-\infty, 0[$. Supposons que $y > x$ et $y, x < 0$. Alors $y^2 < x^2$. Par conséquent $f(y) < f(x)$.* $\Diamond$

La démonstration de la croissance strictement monotone d'une fonction dans un intervalle peut être pénible. Est–ce que la fonction décrite par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 5$ est sur $]5, 6[$ croissante ou décroissante ? Il faudrait montrer p.ex. pour la croissance strictement monotone que $x^3 - 3x^2 + 4x + 5 > y^3 - 3y^2 + 4y + 5$ pour tout $x > y$ et $x, y \in ]5, 6[$, ce qui n'est pas facile. C'est pourquoi on introduira plus tard des méthodes plus pratiques pour de telles démonstrations.

**Remarque 4.2.30.** *Une fonction peut être croissante sur un intervalle, décroissante sur un intervalle suivant, de nouveau croissante, etc. Les polynômes de degré $n \geq 1$ sont partout soit strictement croissants soit strictement décroissants sauf aux points où la fonction devient décroissante (après avoir été croissante) ou l'inverse (s. figure 4.2.13).*

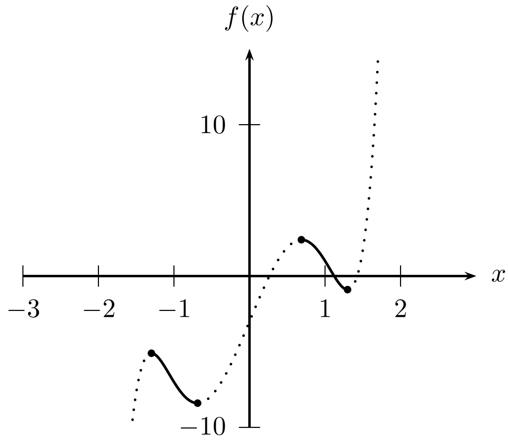


Figure 4.2.13 – les parties avec une ligne en pointillé sont strictement croissantes, les parties avec une ligne pleine sont strictement décroissantes ; aux points la fonction n'est ni croissante ni décroissante

$\diamondsuit$

Les fonctions économiques spécifiques doivent parfois être croissantes ou décroissantes dans certains intervalles. Ainsi une fonction de coût doit être croissante : plus on produit, plus ça coûte. La valeur actuelle d'un capital décroît en fonction de l'éloignement du moment de la réalisation du capital. On ne peut alors accepter que des fonctions décroissantes pour décrire le développement de la valeur actuelle en fonction du temps.

**Théorème 4.2.31.** *Une fonction strictement monotone sur un intervalle ouvert $I$ y est injective.*

*Démonstration.* Nous supposons que $f$ ne soit pas injective. Il existe alors $x \neq y, x, y \in I$ tel que $f(x) = f(y)$. Par conséquent $x < y$ ou $x > y$. Si $x > y$, à cause de la monotonie stricte $f(x) > f(y)$ ou $f(x) < f(y)$. Par conséquent $f(x) \neq f(y)$. D'une manière analogue on argumente pour $x < y$. Ainsi $f(x) \neq f(y)$, ce qui contredit $f(x) = f(y)$. On peut en conclure que $f$ est injective. $\square$

### 4.2.4 Concavité et convexité

Une fonction est concave dans l'intervalle ouvert $I$ si elle croît de moins en moins ou qu'elle décroît de plus en plus. Une fonction est convexe dans l'intervalle ouvert $I$ si elle croît de plus en plus ou qu'elle décroît de moins en moins (voir les figures 11.0.1 et 11.0.4 pour des représentations graphiques).

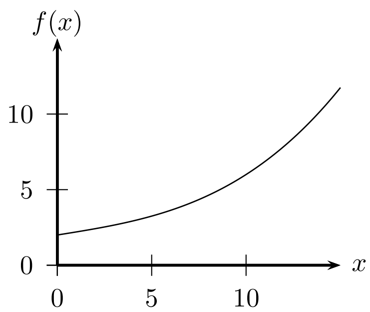


Figure 4.2.14 – Croissance convexe

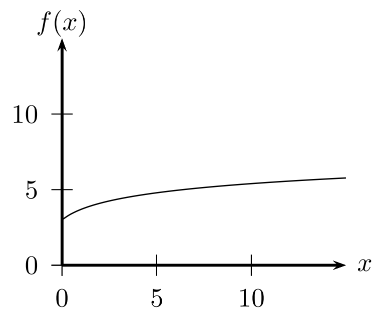


Figure 4.2.15 – Croissance concave

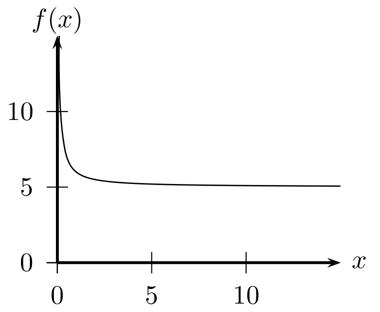


FIGURE 4.2.16 – Décroissance convexe

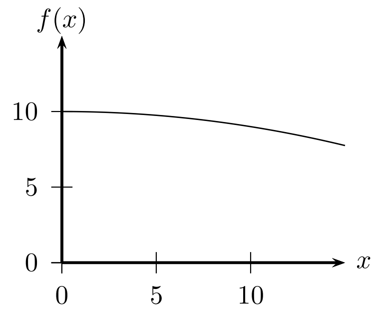


FIGURE 4.2.17 – Décroissance concave

Définitions plus formelles :

**Définition 4.2.32.** *Supposons que $f : D \to \mathbb{R}$, avec intervalle ouvert $I \subset D \subset \mathbb{R}$.*
*$f$ est strictement concave sur $I$ si et seulement si pour tout $x, y \in I$ avec $y > x$ et la droite $g$ à travers $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ : $g(z) < f(z)$ pour $z \in\ ]x, y[$.*
*$f$ est strictement convexe sur $I$ si et seulement si pour tout $x, y \in I$ avec $y > x$ et la droite $g$ à travers $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$. $g(z) > f(z)$ pour $z \in\ ]x, y[$ (voir pour une interprétation graphique de la définition les figures 4.2.18 et 4.2.19).* ♢

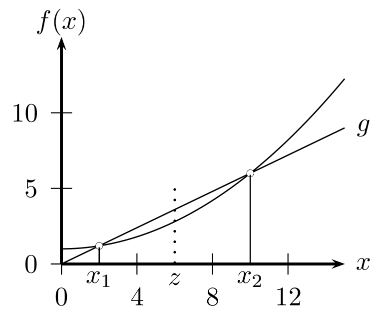


FIGURE 4.2.18 – Fonction convexe sur $]0, 16[$; pour tout $x_2 > x_1$ avec $x_2, x_1 \in\ ]0, 16[$ : $g(z) > f(z)$ pour tout $z \in ]x_1, x_2[$

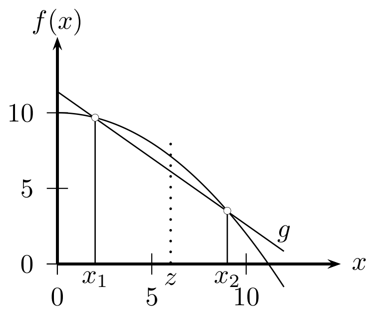


FIGURE 4.2.19 – Fonction concave sur $]0, 12[$; pour tout $x_2 > x_1$ avec $x_2, x_1 \in\ ]0, 12[$ : $g(z) < f(z)$ pour tout $z \in ]x_1, x_2[$

Il est assez difficile de démontrer à l'aide des définitions fournies la concavité ou la convexité. C'est pourquoi on introduira plus tard des méthodes plus pratiques. Pour le moment il suffit d'arriver à comprendre les définitions et à pouvoir indiquer dans des graphiques les parties convexes ou concaves de fonctions.

**Remarque 4.2.33.** *Une fonction peut être concave sur un intervalle, convexe sur un intervalle suivant, de nouveau concave, etc. Les polynômes de degré $n \geq 2$ sont partout soit strictement concaves soit strictement convexes sauf aux points où la fonction devient convexe (après avoir été concave) ou l'inverse (s. figure 4.2.20).*

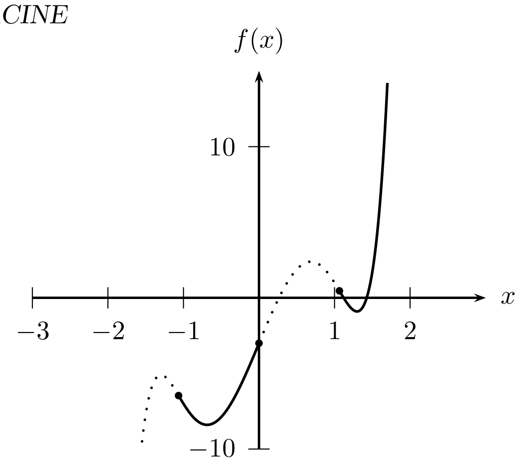


FIGURE 4.2.20 – les parties avec une ligne en pointillé sont strictement concaves, les parties avec une ligne pleine sont strictement convexes ; aux points la fonction n'est ni concave ni convexe

◊

La concavité et la convexité jouent un rôle important par rapport à certaines fonctions économiques. La fonction de coût respectant la loi des rendements non-proportionnels (voir figure 3.6.45 à la page 98), doit d'abord suivre une courbe concave et ensuite une courbe convexe - les coûts montent toujours, mais d'abord de moins en moins et ensuite de plus en plus.

Nous retenons sans preuve :

**Théorème 4.2.34.** *Les fonctions racine croissent d'une manière strictement monotone et elles sont concaves sur* $\mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$.

**Exercices**

1. On sait que les gens investissent plus dans le secteur immobilier si le taux d'intérêt $i$ est bas - ou formulé d'une manière différente : plus le taux d'intérêt $i$ est élevé, plus les investissements immobiliers $I$ sont bas - nous distinguerons entre le taux d'intérêt $i$ et le taux d'intérêt en pourcent $p$ avec $i = \frac{p}{100}$. Nous supposons que nous avons une fonction $I(i) := \frac{5}{\sqrt{i}} - 9$, qui décrit ce lien entre le taux d'intérêt et les investissements. Calculer les investissements à un taux d'intérêt de 0.01 et de 0.1. Calculer le zéro dans l'intervalle $i \in ]0, \infty[$. Donner une interprétation économique de ce zéro.
2. Calculer le domaine de définition maximal de
$$f(x) = \sqrt[4]{x^3 - 4}$$
3. Supposons qu'une entreprise affronte la fonction de production suivante, qui décrit le lien entre la quantité du facteur de production $r$ nécessaire à la production d'une certaine quantité de biens :
$$x(r) = \sqrt{3r - 80} - 20$$

   a) Calculer le domaine de définition mathématique et le domaine de définition économique.
   b) La quantité produite se monte à 60 unités. Calculer les coûts de cette production si le facteur de production coûte 6 UM par unité. Calculer la recette si le prix du marché s'élève à 170 UM par unité des biens produits.
   c) Calculer la fonction de coût $C$, qui exprime les coûts en fonction de la quantité de biens produite (coûts du facteur de production 6 UM par unité).
   d) Quelle quantité de biens doit être produite (et vendue) pour que l'entreprise réalise un profit (indiquer l'intervalle de profit).

4. Calculer les points d'intersection des fonctions réelles après avoir déterminé le domaine de définition

$$f(x) = 2\sqrt[2]{x-1} + 2$$
$$g(x) = 2x^2 - 3$$

5. Trouver les zéros de la fonction réelle suivante après avoir déterminé le domaine de définition

$$f(x) = \sqrt[2]{5x^2 - 2x + 5} - 2$$

6. Résoudre l'équation suivante après avoir déterminé l'ensemble dont l'ensemble solution doit être un sous-ensemble

$$\frac{2x^2 - 2x + 5}{3x^2 + 2} = \sqrt[2]{2x-1}$$

7. Indiquer le domaine de définition de

$$f(x) = \sqrt{\frac{7x^4 - 2x^2 + 4x - 8}{13x^3 - 5x^2 - 10x + 2}}$$

8. Démontrer le théorème 4.2.8 (facultatif).

**Solutions**

1. $I(0.01) = \frac{5}{\sqrt{0.01}} - 9 = 41$, $I(0.1) = \frac{5}{\sqrt{0.1}} - 9 = 6.811$.
   Zéro :$\frac{5}{\sqrt{i}} - 9 = 0 \Longrightarrow i = \frac{25}{81} = 0.308\,64$. Interprétation : A partir d'un taux d'intérêt en pourcentage de 30.864% les gens retireraient leurs investissements immobiliers (pour la représentation graphique voir la figure 4.2.21).

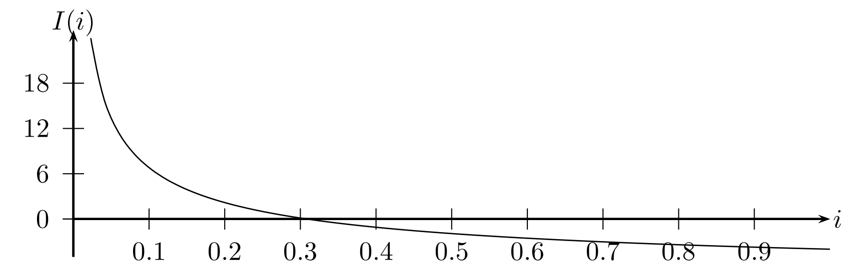


FIGURE 4.2.21 – Fonction d'investissement - investissements $I$ en fonction du taux d'intérêt $i$

2. Nous déterminons les zéros de $x^3 - 4$ : $\sqrt[3]{4} = 1.587\,4$. La fonction croît d'une manière monotone. Par conséquent le domaine de définition est $[1.5874, \infty[$
3. a) Pour le domaine mathématique : $3r - 80 \geq 0$, c. à d. $r \geq \frac{80}{3} = 26.667$. Alors l'ensemble de définition est $[\frac{80}{3}, \infty[$. En économie une production négative n'a pas de sens. Par conséquent

$$\sqrt{3r - 80} - 20 \geq 0$$

   Cela est valable pour $r \geq 160$. Le domaine économique est alors $[160, \infty[$. Evidemment $[160, \infty[ \subset [\frac{80}{3}, \infty[$ (un domaine économique raisonnable doit être un sous-ensemble d'un domaine mathématique permis)
   b)

$$\sqrt{3r - 80} - 20 = 60 \Longrightarrow$$
$$r = 2160$$

2160 se trouve dans le domaine de définition économiquement raisonnable. Les coûts sont alors

$$2160 \cdot 6 = 12960 \text{ UM}$$

La recette est

$$60 \cdot 170 = 10200$$

Avec cette quantité produite, l'entreprise ferait une perte.
c) Nous devons savoir de combien d'unités du facteur de production $r$ nous avons besoins pour une production de $x$ unités du bien. Par conséquent, nous devons calculer la fonction réciproque $r(x)$ de $x(r)$ - $r(x)$ est injective dans le domaine de définition Image$(f) = \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned}\sqrt{3r-80} - 20 = x(r) &\Longrightarrow \\ r(x) &= \frac{1}{3}(x+20)^2 + \frac{80}{3}\end{aligned}$$

Nous n'échangeons pas les variables car celles-ci ont une interprétation économique. La fonction de coût est alors $C : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ avec

$$\begin{aligned}C(x) := 6r(x) &= 6\left(\frac{1}{3}(x+20)^2 + \frac{80}{3}\right) \\ &= 2(x+20)^2 + 160 \\ &= 2x^2 + 80x + 960\end{aligned}$$

d) La fonction de recette est $R : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ avec $R(x) := 170x$.
Avec cela

$$\begin{aligned}P(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 170x - \left(2x^2 + 80x + 960\right) \\ &= -2x^2 + 90x - 960\end{aligned}$$

Les zéros sont : $x_1 = \frac{45}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{105} = 17.377$
$x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{105} + \frac{45}{2} = 27.623$. Nous contrôlons si ces $x_i$ se trouvent dans le domaine de définition économique

$$\begin{aligned}r(17.377) &= \frac{1}{3}(17.377+20)^2 + \frac{80}{3} \\ &= 492.35 \\ r(27.623) &= \frac{1}{3}(27.623+20)^2 + \frac{80}{3} \\ &= 782.65\end{aligned}$$

Les deux quantités se trouvent dans le domaine avec une interprétation économique raisonnable. Comme la courbe s'ouvre vers la bas, la zone de profit se trouve entre ces $x_i$ $]17.377, 27.623[$.

4. Domaine de définition : $f : x - 1 \geq 0$ si et seulement si $x \in [1, \infty[$.

$$\begin{aligned}2\sqrt[2]{x-1} + 2 = 2x^2 - 3 &\Longrightarrow \\ \sqrt[2]{x-1} = x^2 - 2.5 &\Longrightarrow \\ x - 1 = \left(x^2 - 2.5\right)^2 &\Longrightarrow \\ x - 1 = x^4 - 5x^2 + 6.25 &\Longrightarrow \\ -x^4 + 5x^2 + x - 7.25 = 0 &\end{aligned}$$

Avec polyroot(c(-7.25,1,5,0,-1)) on obtient 1.374159 et 1.849827. Les deux nombre font partie du domaine de définition de $f$ et on obtient comme point d'intersection avec $2 \cdot 1.374159^2 - 3 = 0.776\,63$ et $2 \cdot 1.849827^2 - 3 = 3.843\,7$ : $(1.374159, 0.776\,63)$ et $(1.849827, 3.843\,7)$.

5. $5x^2 - 2x + 5$ n'a pas de zéros réels. Puisque $5 > 0$ , $5x^2 - 2x + 5 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \sqrt[2]{5x^2 - 2x + 5} - 2 = 0 &\Longrightarrow \\ \sqrt[2]{5x^2 - 2x + 5} = 2 &\Longrightarrow \\ 5x^2 - 2x + 5 = 4 &\Longrightarrow \\ 5x^2 - 2x + 1 = 0 & \end{aligned}$$

Pas de solution réelle. Il n'y a pas de zéro de la fonction.

6. Il est nécessaire que $2x - 1 \geq 0$, c. à d. $x \in [\frac{1}{2}, \infty[$. De plus il faut que $3x^2 + 2 \neq 0$. Cela est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$. On obtient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{2x^2 - 2x + 5}{3x^2 + 2}\right)^2 &= 2x - 1 \Longrightarrow \\ \frac{4x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 20x + 25}{9x^4 + 12x^2 + 4} &= 2x - 1 \Longrightarrow \\ 4x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 20x + 25 &= (2x - 1)\left(9x^4 + 12x^2 + 4\right) \\ &= 18x^5 - 9x^4 + 24x^3 - 12x^2 + 8x - 4 \Longrightarrow \\ 0 &= -18x^5 + 13x^4 - 32x^3 + 36x^2 - 28x + 29 \end{aligned}$$

Il y a un zéro réel en $x = 1$. L'ensemble solution est alors $\{1\}$. Nous contrôlons le résultat :

$$\left(\frac{2 \cdot (1)^2 - (2) + 5}{3 \cdot 1^2 + 2}\right)^2 = (1)^2 = 1$$

$$\sqrt[2]{2 \cdot 1 - 1} = 1$$

7.

$$f(x) = \sqrt{\frac{7x^4 - 2x^2 + 4x - 8}{13x^3 - 5x^2 - 10x + 2}}$$

Il faut enlever les zéros du dénominateur de

$$g(x) = \frac{7x^4 - 2x^2 + 4x - 8}{13x^3 - 5x^2 - 10x + 2}$$

$$13x^3 - 5x^2 - 10x + 2 = 0$$

trois zéros réels : $0.190\,83$ , $-0.806\,21$ et $1$

Il faut déterminer les intervalles sur lesquels la fonction $g$ est non-négative (la racine n'est définie que pour des nombres non-négatifs).

$$\begin{aligned} \frac{7x^4 - 2x^2 + 4x - 8}{13x^3 - 5x^2 - 10x + 2} = 0 &\Longleftrightarrow \\ 7x^4 - 2x^2 + 4x - 8 = 0 & \end{aligned}$$

Deux solutions réelles : $-1.2282295$, $0.9623093$. On met les points critiques grossièrement arrondis sur une ligne (en gris les zéros du dénominateur) :

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ |
| pts crit. | $-1.23$ | | $-0.81$ | | $0.19$ | | $0.96$ | | $1$ | |
| $g(-2)$ | | $g(-1)$ | | $g(0)$ | | $g(0.5)$ | | $g(0.98)$ | | $g(2)$ |
| $= -0.8$ | | $= 1.1$ | | $= -4$ | | $= 2.3$ | | $= -1.2$ | | $= 1.6$ |

Le domaine de définition est alors :$[-1.2282295, -0.806\,21[\cup]0.190\,83, 0.9623093]\cup]1,\infty[$ (attention à la direction des crochets ! Les zéros du dénominateur ne font pas partie du domaine de définition, les zéros du numérateur, qui ne sont pas des zéros du dénominateur en font partie).
Avec R : zd=polyroot(c(2,-10,-5,13)) ; zn=polyroot(c(-8,4,-2,0,7))
zt=c(zd,zn[c(2,4)]) #ramasser les zéros réels
zt=zt[order(zt)]
g=function(x) ((7*x^4-2*x^2+4*x-8)/(13*x^3-5*x^2-10*x+2))
g(c(-2,-1,0,0.5,0.98,2))

8. On peut montrer :

   (a) $\sqrt[n]{x^n} = x$ : $\sqrt[n]{y} = x$ si et seulement si $x^n = y$ (thèorème 4.2.4). Si on remplace $y$ par $x^n$, on obtient : $\sqrt[n]{x^n} = x$ si et seulement si $x^n = x^n$. Alors $\sqrt[n]{x^n} = x$

   (b) $\sqrt[n]{x}^n = x$ : Nous posons $x^n = y$ et en concluons avec le théorème 4.2.4 $\sqrt[n]{y} = x$. On obtient - en mettant $\sqrt[n]{y}$ pour $x$ dans $x^n = y$ - $\sqrt[n]{y}^n = y$.

   (c) $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$ : $(xy)^n = x^n y^n$. Alors $\left(\sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}\right)^n = \sqrt[n]{x}^n\,\sqrt[n]{y}^n = xy = \sqrt[n]{xy}^n$ et par conséquent $\sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$.

   (d) $\sqrt[n]{\frac{1}{y}} = \frac{1}{\sqrt[n]{y}}$ : $\sqrt[n]{\frac{1}{y}}\,\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{\frac{1}{y}y} = \sqrt[n]{1} = 1$ et alors $\sqrt[n]{\frac{1}{y}} = \frac{1}{\sqrt[n]{y}}$

   (e) $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$ : $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \sqrt[n]{x\frac{1}{y}} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{\frac{1}{y}} = \sqrt[n]{x}\frac{1}{\sqrt[n]{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

   (f) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}$ : On peut affirmer $\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}\right)^{nm} = (\sqrt[m]{x})^m = x = (\sqrt[n]{x})^n = \left(\sqrt[m]{(\sqrt[n]{x})^n}\right)^m$ et $x = (\sqrt[mn]{x})^{mn}$ et avec cela la proposition à démontrer.

   (g) $\sqrt[n]{x}\,\sqrt[m]{x} = \sqrt[nm]{x^{m+n}}$ : $(\sqrt[n]{x}\,\sqrt[m]{x})^{nm} = \sqrt[n]{x}^{nm}\,\sqrt[m]{x}^{nm} = x^m x^n = x^{m+n} = \left(\sqrt[nm]{x^{m+n}}\right)^{nm}$. Alors $\sqrt[n]{x}\,\sqrt[m]{x} = \sqrt[nm]{x^{m+n}}$.

   (h) $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x^{m-n}}$ : $\left(\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[m]{x}}\right)^{nm} = \frac{\sqrt[n]{x}^{nm}}{\sqrt[m]{x}^{nm}} = \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} = \left(\sqrt[nm]{x^{m-n}}\right)^{nm}$. Donc $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x^{m-n}}$.

   Le côté droit (notations puissance) on l'obtient par l'application de la définition $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$. On peut observer la comptabilité du règles valables pour les puissances avec les règles pour les racines en constatant

$$x^{\frac{n}{n}} = x^1 = x = (x^n)^{\frac{1}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n$$
$$\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{mn}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}$$
$$x^{\frac{1}{n}}x^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} = x^{\frac{m}{mn}+\frac{n}{mn}} = x^{\frac{m+n}{mn}}$$
$$\frac{x^{\frac{1}{n}}}{x^{\frac{1}{m}}} = x^{\frac{1}{n}}x^{-\frac{1}{m}} = x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}} = x^{\frac{m}{mn}-\frac{n}{mn}} = x^{\frac{m-n}{mn}}$$

## 4.3 Fonctions exponentielles et fonctions logarithme

### 4.3.1 Fonctions exponentielles

**Définition 4.3.1.** *$f$ est une fonction exponentielle de base $a$, $a \in \mathbb{R}_+\backslash\{0\}$, si et seulement si*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) := a^x$$

$\diamondsuit$

Pour la représentation graphique de

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) := 2^x$$

voir la figure 4.3.22

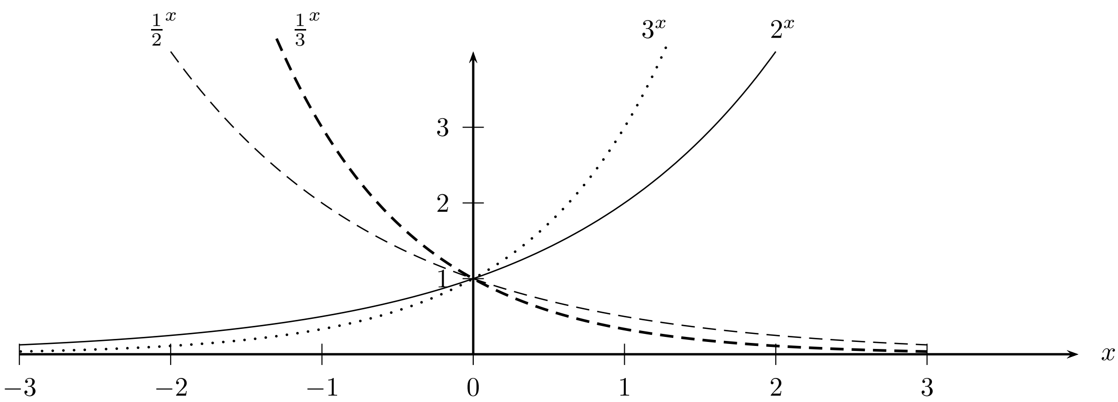


FIGURE 4.3.22 – Représentation graphique du graphe de $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3^x$, $h(x) = \frac{1}{3}^x$, $c(x) = \frac{1}{2}^x$

**Remarque 4.3.2.** *Nous n'admettons que des bases positives, puisqu'il en résulterait autrement des racines de nombres négatifs. Par ex.* $(-3)^{0.5} = (-3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{-3}$. $\diamondsuit$

**Remarque 4.3.3.** *Un sous-ensemble du graphe de* $3^x$ *est p. ex. :*
$\{\left(-4, 3^{-4}\right), (-3, 3^{-3}), (-2, 3^{-2})(-1, 3^{-1}), (-0.5, 3^{-0.5}), (0, 3^0), (1, 3^1), (1.5, 3^{1.5}), (2, 3^2), (3, 3^3)\} =$
$\{\left(-4, \frac{1}{3^4}\right), (-3, \frac{1}{3^3}), (-2, \frac{1}{3^2}), (-1, \frac{1}{3}), (-0.5, \frac{1}{3^{0.5}}), (0, 1), (1, 3), (1.5, 3^{\frac{3}{2}}), (2, 9), (3, 27)\} =$
$\{(-4, 0.012345679), (-3, 0.037037), (-2, 0.11111), (-1, 0.333333), (-0.5, 0.577\,35), (0, 1), (1, 3),$
$(1.5, 5.196\,2), (2, 9), (3, 27)\}$ $\diamondsuit$

**Remarque 4.3.4.** *Nous appelons* $x$ *dans* $2^x$ *l'exposant et* $2$ *la base.* $\diamondsuit$

Le cas spécial $a = e$, $e$ étant le nombre d'Euler, est d'une importance particulière. On définit :

**Définition 4.3.5.** $e^x := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
*avec* $k! = k\,(k-1)\,(k-2)\,.....2 \cdot 1$ *et* $0! = 1! = 1$. $k!$ *est appelé „la factorielle de k", „k factorielle" ou „factorielle k"* $\diamondsuit$

Les premiers 7 termes de la somme définissant $e^x$ :

$$\begin{aligned} e^x &= \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + .... \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + ... \end{aligned}$$

Il s'agit d'une somme infinie de polynômes du type $\frac{x^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$.

**Théorème 4.3.6.** $e^1 = e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

En calculant la somme pour les premiers 17 termes de la somme, à savoir

$$\begin{aligned} e &\approx \frac{1^0}{0!} + \frac{1^1}{1!} + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^4}{4!} + \frac{1^5}{5!} + \frac{1^6}{6!} + ... + \frac{1^{17}}{17!} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + ... + \frac{1}{17!}, \end{aligned}$$

on obtient :

$$e \approx 2.71828182845905.$$

**Définition 4.3.7.**

$$\begin{aligned} \exp(x) &:= e^x \\ \exp_a(x) &:= a^x \end{aligned}$$

◊

**Théorème 4.3.8.** *Pour les fonctions exponentielles $f$ tel que $a, b > 0$ on peut affirmer :*
- *$f(0) = 1$, car $f(0) = a^0 = 1$.*
- *Image($f$) $= ]0, \infty[$, car les nombres positifs puissance un nombre quelconque sont positifs.*
- *Si $a > 1$, alors $f$ est strictement croissante, car avec $a > 1 : a^x > a^y$ pour $x > y$.*
- *Si $0 < a < 1$, alors $f$ est strictement décroissante, car avec $0 < a < 1 : a^x < a^y$ pour $x > y$.*
- *$f$ est convexe.*
- *$a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$ (symétrie par rapport à l'ordonnée de $a^x$ et de $\left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$, car $\left(\frac{1}{a}\right)^{-x} = \frac{1}{a^{-x}} = a^x$, on obtient p.ex. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$ par réflexion de $3^x$ à l'ordonnée, voir figure 4.3.22)*
- *$a^x a^y = a^{x+y}$*
- *$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$*
- *$(a^x)^y = a^{xy}$*
- *$a^x b^x = (ab)^x$*
- *$1^x = 1$ ($\Longrightarrow 1^0 = 1$)*

**Exemple 4.3.9.**

$$\begin{aligned} C &: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ C(t) &= C_0(1+i)^t \end{aligned}$$

*est le produit de la constante $C_0$ (capital initial) et de la fonction exponentielle de base $(1+i)$ tel que i est le taux d'intérêt. A l'aide de cette fonction on peut calculer la valeur nominale d'un capital $C_0$ après t années (intérêts composés). A l'intérieur des années cette formule ne produit pas les intérêts usuels, puisque les banques calculent à l'intérieur des années d'une manière linéaire (règle de trois), tandis que la fonction $C$ est convexe. Ainsi elle produit à l'intérieur d'une année un capital final inférieur.*

◊

On obtient d'autres fonctions si l'on accepte comme base des fonctions exponentielles à part les constantes des fonctions $f$, dont on a restreint le domaine de définition tel que l'image de $f$ devient un sous-ensemble des nombres réels positifs (sans zéro).

**Exemple 4.3.10.** *Supposons que $g(x) = 5x + 2$; $5x + 2 > 0$ pour $]-\frac{2}{5}, \infty[$. Par conséquent*

$$\begin{aligned} g &: ]-\frac{2}{5}, \infty[ \ \to \mathbb{R} \\ g(x) &= (5x+2)^x \end{aligned}$$

*est une application bien définie.* ◊

Par la composition d'une fonction exponentielle par des fonctions du type introduit jusqu'ici nous obtenons de nouvelles fonctions. Il faut de nouveau veiller à ce que le domaine de définition soit choisi correctement.

**Exemple 4.3.11.** *Pour les fonctions*

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) &= 5^x \\ g &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ g(x) &= 3x + 2 \end{aligned}$$

*on obtient*

$$\begin{aligned} f(g) &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(g(x)) &= 5^{3x+2} \end{aligned}$$

*ou*

$$\begin{aligned} g(f) &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ g(f(x)) &= 3 \cdot 5^x + 2 \end{aligned}$$

*Dans cet exemple, il ne faut pas restreindre les domaines de définition.* ◊

**Exemple 4.3.12.** *Pour*

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}_+ \backslash \{0\} \to \mathbb{R} \\ f(x) &= (5x)^x \\ g &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ g(x) &= 3x + 2 \end{aligned}$$

*on obtient pour* $f\left(g\left(x\right)\right)$

$$\begin{aligned} f(g) &: \ \left] -\frac{2}{3}, \infty\right[ \ \to \mathbb{R} \\ f(g(x)) &= (5(3x+2))^{3x+2} \end{aligned}$$

*car :* $5(3x+2) > 0$ *si et seulement si* $x \in ]-\frac{2}{3}, \infty[$. ◊

### 4.3.2 Fonctions logarithme

Les fonctions exponentielles $f := a^x$ avec $a > 0$ et $a \neq 1$ sont strictement monotones et par là injectives tel que le domaine de définition est $\mathbb{R}$ et l'image de $f$ est $\mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$. La fonction réciproque existe alors et il s'agit d'une application de $\mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$ vers $\mathbb{R}$. En raison de leur importance nous introduisons pour les fonctions réciproques des fonctions exponentielles une notation spécifique :

**Théorème 4.3.13.** *Pour* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}$ *;* $f\left(x\right) := a^x$ *avec* $a > 0$ *et* $a \neq 1$*, nous définissons*

$$\log_a(y) := f^{-1}\left(y\right)$$

*Nous appelons les applications*

$$\begin{aligned} g &: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ g(x) &:= \log_a\left(x\right) \end{aligned}$$

*fonctions logarithme.*

„$\log_a$“ se lit comme „logarithme de base $a$“, „$\log_a(y) = x$“ se lit comme „le logarithme de base $a$ de $y$ est $x$“. Le logarithme $x$ est l'exposant, à la puissance duquel il faut élever la base $a$ pour obtenir $y$ - les logarithmes sont alors des exposants ! Au lieu de $\log_a(y)$ nous écrivons en général $\log_a y$.

**Théorème 4.3.14.**

$$\log_a(y) = x \Longleftrightarrow a^x = y$$

*Démonstration.* Suit immédiatement du théorème 4.2.3. □

Pour la base $e$ on écrit (sauf dans la littérature anglo-saxonne où l'on utilise $\log x := \log_e x$) :

**Définition 4.3.15.**

$$\ln x := \log_e x$$

*On appelle* $\ln x$ *„logarithme naturel“ (ou logarithme népérien d'après John Napier, en France appelé Neper, 1550 - 1617, théologien, physicien, astronome et mathématicien écossais).* ♢

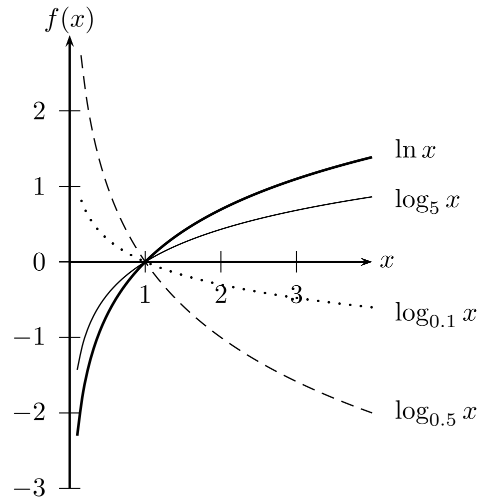


FIGURE 4.3.23 – Représentation graphique de fonctions logarithme

**Remarque 4.3.16.** *Un sous-ensemble du graphe de la fonction* ln *:*
$\{(0.1, -2.302585093), (0.5, -0.693147181), (1, 0), (2, 0.693147181), (3, 1.098612289), (4, 1.386294361), (5, 1.609437912), (6, 1.791759469)\}$ ♢

Nous retenons le

**Théorème 4.3.17.** *Pour les fonctions logarithme* $\log_a$ *avec* $a > 0$ *:*
- *Le zéro unique des fonctions logarithme est 1, car* $\log_a y = 0$ *si et seulement si* $y = a^0 = 1$.
- *Les fonctions logarithme sont strictement croissantes pour* $a > 1$.
- *Les fonctions logarithme sont concaves pour* $a > 1$.
- *Si* $a > 1$, *alors pour* $x > 1 : \log_a x > 0$ *et pour* $0 < x < 1 : \log_a x < 0$.
- *Les fonctions logarithme sont strictement décroissantes pour* $0 < a < 1$.
- *Si* $0 < a < 1$, *alors pour* $x > 1 : \log_a x < 0$ *et pour* $0 < x < 1 : \log_a x > 0$.
- *Les fonctions logarithme sont convexes pour* $0 < a < 1$.

Nous prouvons quelques théorèmes utiles pour calculer :

**Théorème 4.3.18.** $\log_a a^x = x$

*Démonstration.* Puisque $\log_a x$ est la fonction réciproque de $a^x$, le théorème est impliqué immédiatement - voir théorème 4.2.21 à la page 119. On peut cependant aussi procéder de la manière suivante : Selon le théorème 4.3.14 et par remplacement mécanique de $y$ par $a^x$ on obtient :

$$\log_a a^x = x \Longleftrightarrow a^x = a^x.$$

Comme le côté gauche est une vérité logique (chaque objet est identique à lui-même) on peut en conclure

$$\log_a a^x = x.$$

□

**Remarque 4.3.19.** *Intuitivement la proposition se comprend facilement. A quelle puissance faut-il élever la base a pour obtenir $a^x$ ? A la puissance $x$ naturellement !* ♢

**Théorème 4.3.20.** $a^{\log_a x} = x$

*Démonstration.* Comme $a^x$ est la fonction réciproque de $\log_a x$ le théorème est évident. Un autre raisonnement : Nous remplaçons d'une manière mécanique dans le théorème 4.3.14 $x$ par $\log_a x$ et $y$ par $x$ pour obtenir :

$$\log_a x = \log_a x \Longleftrightarrow x = a^{\log_a x}.$$

Puisque $\log_a x = \log_a x$, on peut en conclure $x = a^{\log_a x}$. □

**Remarque 4.3.21.** *Réflexion intuitive : comme $\log_a x$ est la puissance à laquelle il faut élever la base $a$ pour obtenir $x$, $a$ puissance $\log_a x$ est identique à $x$.* ♢

**Remarque 4.3.22.** *Pour la base e, on peut affirmer à cause des théorèmes 4.3.18 et 4.3.20 et à l'aide des notations introduites :*

$$\begin{aligned} \ln(\exp x) &= x \\ \exp(\ln x) &= x \end{aligned}$$

♢

**Théorème 4.3.23.** $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

*Démonstration.* Selon le théorème 4.3.20 on peut affirmer

$$\begin{aligned} a^{\log_a(xy)} &= xy \\ a^{\log_a x} &= x \\ a^{\log_a y} &= y \end{aligned}$$

En remplaçant dans la première équation $xy$ par $a^{\log_a x} a^{\log_a y}$ (en utilisant les deux autres équations) on obtient

$$\begin{aligned} a^{\log_a xy} &= a^{\log_a x} a^{\log_a y} \\ &= a^{\log_a x + \log_a y}. \end{aligned}$$

Comme les bases sont identiques on peut en conclure l'identité des exposants, c.à d.

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y.$$

□

On peut démontrer les théorèmes suivants d'une manière analogue : La preuve du premier est un exercice :

**Théorème 4.3.24.** $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

**Théorème 4.3.25.** $\log_a x^y = y \log_a x$

*Démonstration.* Selon le théorème 4.3.20 on peut affirmer :

$$\begin{aligned} a^{\log_a x^y} &= x^y \\ a^{\log_a x} &= x \end{aligned}$$

En remplaçant dans la première équation dans le terme à droite $x$ par $a^{\log_a x}$ (deuxième équation) on obtient

$$\begin{aligned} a^{\log_a x^y} &= \left(a^{\log_a x}\right)^y \\ &= a^{y \log_a x} \end{aligned}$$

Comme les bases sont identiques, on peut en conclure l'identité des exposants :

$$\log_a x^y = y \log_a x$$

□

**Théorème 4.3.26.** $\log_a a = 1$

*Démonstration.* Selon le théorème 4.3.14 et en remplaçant $y$ par $a$ et $x$ par 1 on obtient

$$\log_a a = 1 \Longleftrightarrow a = a^1$$

Comme $a = a$ on peut en déduire $\log_a a = 1$ (réflexion intuitive : A quelle puissance faut-il élever la base $a$ pour obtenir $a$ ?) □

**Remarque 4.3.27.** *Pour la base* $e$ *on peut affirmer* $\ln e = 1$. ◊

Pour résoudre des équations on utilise souvent la règle „prendre le logarithme des deux côtés de l'équation“. Pour le faire, il faut choisir la même base pour les deux côtés de l'équation, le choix de la base est arbitraire. Le théorème suivant justifie cette manière de procéder.

**Théorème 4.3.28.** *Pour des fonctions réelles* $f$ *et* $g$ *avec* $f(x) = g(x)$ *et* $f(x), g(x) > 0$ *on peut affirmer*

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} \log_a f(x) = \log_a g(x) &\Longleftrightarrow \\ \exp_a(\log_a f(x)) = \exp_a(\log_a g(x)) &\Longleftrightarrow \\ f(x) = g(x) & \end{aligned}$$

ou d'une manière plus intuitive : Si $f(x) = g(x)$, il faut élever la base $a$ à la même puissance pour maintenir la vérité de l'équation. □

**Théorème 4.3.29.** $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

*Démonstration.* Selon le théorème 4.3.20 :

$$b^{\log_b x} = x$$
$$a^{\log_a x} = x$$

Avec cela on obtient

$$b^{\log_b x} = a^{\log_a x}.$$

En logarithmant les deux côtés ($b^{\log_b x}, a^{\log_a x} > 0$) on obtient :

$$\log_b b^{\log_b x} = \log_b a^{\log_a x}$$

et avec le théorème 4.3.25

$$\log_b x \cdot \log_b b = \log_a x \cdot \log_b a.$$

Comme $\log_b b = 1$ il en résulte

$$\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a.$$

Par conséquent

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

□

Avec cela on peut transformer des logarithmes de base quelconque en logarithmes de base différente quelconque. En particulier on peut affirmer :

**Théorème 4.3.30.** $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

**Théorème 4.3.31.** $a^x = e^{x \ln a}$

*Démonstration.* $e^{x \ln a} = \exp(\ln a^x) = a^x$ □

**Exemple 4.3.32.** *Nous voulons savoir après combien de temps un capital initial de $C_0$ à un taux d'intérêt $i$ atteint un capital final $C(t)$. Il s'agit d'isoler $t$ dans l'équation*

$$C_t := C(t) = C_0(1+i)^t$$

*On obtient :*

$$\frac{C_t}{C_0} = (1+i)^t \iff$$
$$\ln \frac{C_t}{C_0} = t \ln(1+i) \iff$$
$$t = \frac{\ln C_t - \ln C_0}{\ln(1+i)}.$$

*Le deuxième pas est justifié par le fait que $\frac{C_t}{C_0} > 0$ pour $C_t, C_0 > 0$. Il faut mentionner le fait que par là on ne calcule qu'une approximation au méthodes coutumières de calcul, puisque en général on calcule d'une manière linéaire à l'intérieur des années. Le calcul ci-dessus est identique aux résultats coutumiers pour $t \in \mathbb{N}$.*
◊

On peut composer les fonctions logarithme par d'autres fonctions introduites et l'inverse. Il faut veiller à contrôler les domaines de définition en jeu. Les fonctions logarithme ne sont définies que pour le domaine $\mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$.

**Exemple 4.3.33.** *Quel est le domaine de définition de* $\ln(f(x)) = \ln\left(x^4 - 27x^2 - 14x + 120\right)$ $(f(x) = x^4 - 27x^2 - 14x + 120)$*. C'est l'ensemble des* $x$*, tel que* $f(x) > 0$*, car* $\ln(f(x))$ *n'est défini que pour des* $f(x)$ *positif. Voir le graphique 4.2.9 et les calculs de la remarque 4.2.13 à la page 115. Solution :*

$$D = ]-\infty, -4[\ \cup\ ]-3, 2[\ \cup\ ]5, \infty[$$

*(par opposition à* $\sqrt{f(x)}$*, pour domaine de définition de* $\ln(f(x))$ *tous les intervalles sont ouverts).* $\Diamond$

**Exemple 4.3.34.** *Supposons deux fonctions avec*

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}_+\backslash\{0\} \to \mathbb{R} \\ f(x) &:= \ln x \\ g &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ g(x) &:= 5x + 2 \end{aligned}$$

*Alors*

$$f(g(x)) = \ln(5x + 2)$$

*n'est définie que pour* $x \in\ ]-\frac{2}{5}, \infty[$ *- puisque* $5x + 2$ *doit être supérieure à* $0$*. De l'autre côté*

$$g(f(x)) = 5\ln x + 2$$

*est définie sur* $\mathbb{R}_+\backslash\{0\}$*.* $\Diamond$

On peut calculer les valeurs de fonction logarithme (= les logarithmes) à l'aide d'une méthode d'approximation. Un exemple peut montrer la méthode. Nous voulons calculer $\log_3 5$. Il s'agit de trouver un nombre $x$ tel que $3^x = 5$. Nous commençons avec deux nombres $x_1$ et $x_2$ tel que $3^{x_1} < 5$ et $3^{x_2} > 5$. Ainsi $3^1 = 3 < 5$ et $3^2 = 9 > 5$. Dans un deuxième pas nous calculons $3^{\frac{x_1+x_2}{2}} = 3^{1.5} = 5.196\,2$. Ce nombre est supérieur à 5. Nous mettons $x_2 := 1.5$ et calculons de nouveau $3^{\frac{x_1+x_2}{2}} = 3^{\frac{1+1.5}{2}} = 3^{1.25} = 3.948\,2$. Ce nombre est plus petit que 5 et nous mettons $x_1 := 1.25$. Nous calculons $3^{\frac{x_1+x_2}{2}} = 3^{\frac{1.25+1.5}{2}} = 3^{1.375} = 4.5294$. Nous savons que le logarithme recherché se trouve entre 1.375 et 1.5. Nous continuons de la sorte pour trouver un nombre assez précis. A l'aide d'Excel, la méthode peut être appliquée d'une manière efficace.

**Remarque 4.3.35.** *Nous avons expliqué jusqu'ici* $f(x) = a^x$ *pour* $x \in \mathbb{Q}$*, mais pas pour* $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$*. On peut définir avec nos moyens nouveaux :* $a^x := \exp(x \ln a)$ *pour* $x \in \mathbb{R}$ *et* $a > 0$*. Nous avons défini d'une manière claire* exp *(définition 4.3.6) et avec cela la fonction réciproque de* exp*, à savoir* ln*. On n'a pas démontré par là cependant p.ex. la règle* $a^x a^y = a^{x+y}$*, que nous avons utilisée pour la démonstration d'une des règles pour les logarithmes. Sa preuve suppose des moyens technique qui ne sont pas à disposition dans ce cour.* $\Diamond$

### Exercices

1. Calculer sans moyens techniques les logarithmes suivants :
   $\log_2 4 =$
   $\log_2 8 =$
   $\log_3 27 =$
   $\log_4 4 =$
   $\log_5 625 =$
   $\log_{10} 10000000 =$
2. Calculer les valeurs de fonction suivantes :
   $f(5)$ et $f(-3)$ pour $f(x) = e^x$

$f(5)$, $f(0.5)$, $f(0)$ et $f(-5)$ pour $f(x) = \ln x$
$f(5)$ et $f(0.5)$ pour $f(x) = \log_2 x$
$f(5)$ et $f(0.5)$ pour $f(x) = \log_{0.2} x$

3. Calculer la valeur finale d'un capital $C = 500$ à $i = 0.025$ pour 5.5 années avec la formule ci-dessus $K(t) = K_0 (1+i)^t$ et avec la méthode qui travaille à l'intérieur de l'année avec $(t-n)(K_{n+1} - K_n)$ pour $n \leq t \leq n+1$ et $n \in \mathbb{N}$ - comparer les résultats.
4. Combien de temps faut-il placer un capital de 1000 UM pour un capital final de 5000 UM à un taux d'intérêt de 0.03 (intérêts composés ; calculer avec une fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}_+$). Combien de temps si vous calculez d'une manière linéaire à l'intérieur des années ?
5. A quel taux d'intérêt faut-il placer un capital de 1000 UM pour obtenir après 6 ans un capital final de 4000 UM (intérêts composés)
6. Déterminer le domaine de définition maximal pour les fonctions suivantes :
$$f(x) = \ln \left(5x^2 + 3x - 5\right)$$
$$g(x) = \frac{5x^2 + 4}{\ln\left(\frac{5x-3}{4x^2-2}\right)}$$
7. Une économie nationale croît à un taux moyen de 1.8%. Après combien d'années le produit national brut a-t-il doublé ?
8. Deux balles en caoutchouc tombent par terre et remontent. La balle A atteint après chaque choc par terre 90% de la hauteur de laquelle elle est tombée. Pour la balle B cette valeur se monte à 86%.
   (a) Quelle est l'équation qui décrit la hauteur des sauts de la balle A en fonction du nombre de choc (x = nombre de chocs, f(x) = hauteur en cm), si la balle tombe la première fois d'une hauteur de 3 m ?
   (b) Quelle est la hauteur de A après 8 chocs ?
   (c) Après combien de chocs la hauteur de A se monte à 45 cm ?
   (d) B tombe d'une hauteur de 6.5 m. Calculer après combien de chocs les balles montent à la même hauteur.
9. L'initiative populaire Ecopop (votation le 30 novembre 2014 ) réclamait que la croissance de la population en Suisse soit limitée à 0.2% par année (0.2% calculé sur la base de chaque année précédente). De combien la population aurait-t-elle crû (en pourcent, calculé sur la base de l'année 2014) en 20 ans, si l'initiative avait été acceptée et que la croissance avait atteint la croissance permise par la limite proposée ?
   Dans les années 00 la population en Suisse connaissait une croissance de 0.880114592% (moyenne géométrique des 11 ans de 2000 à 2011, les pourcentages calculés sur la base de chaque année précédente). De combien de pourcent la population croîtrait-t-elle (calculé sur la base de l'année 2014) dans 20 ans, si cette moyenne était atteinte ces prochaines années. Si la population suisse comprend en 2014 8 millions d'habitants, combien en chiffres absolus selon ces deux scénarios après 20 ans ?
10. Calculer le domaine de définition maximal de la fonction donnée par l'équation $f(x) = \ln\left(3x + 6 + \ln x^2\right)$.
11. Une voiture perd chaque année 20% de sa valeur par rapport à l'année précédente. Aujourd'hui la voiture a une valeur de 30% de sa valeur initiale. Quel est l'âge de la voiture ? Quelle est sa demie-vie ? (= durée dans laquelle la voiture perd la moitié de sa valeur).
12. On affronte la fonction de production suivante $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ; $x(r) = \sqrt{r}$ (la quantité produite $x$ en tant que fonction des ressources utilisées $r$). $r$ coûte par unité 10 CHF.

(a) Calculer la fonction de coût qui exprime les coûts en fonction de la quantité produite $(x)$. (remarque : la fonction réciproque $r(x)$ de $x(r)$ exprime les ressources nécessaires $r$ à la production de la quantité $x$.)

(b) Calculer les coûts pour une quantité produite de $x = 12$.

(c) Calculer la fonction de profit (fonction de demande qui exprime le prix en fonction de la quantité offerte $x$ : $p(x) = -0.3x^2 + 110$)

(d) Calculer la zone de profit (l'intervalle où la fonction de profit est positive).

(e) Calculer (a)-(b) pour $x(r) = \ln r$.

13. Les fonctions de production expriment la production (output) d'une entreprise en fonction des biens achetés pour la production (input). Nous partons de la situation simple qu'une entreprise ne produit qu'un seul type de bien et qu'elle n'a besoin que d'un seul type de bien comme input. Nous supposons qu'on puisse exprimer pour une production spécifique la quantité produite $x$ en fonction de l'input $r$ de la manière suivante :

$$x(r) = \ln(r+1)$$

(a) Déterminer les zéros de la fonction $x$. Indiquer l'intervalle sur lequel la fonction est positive

(b) Donner le domaine de définition maximal du point de vue mathématique

(c) Donner le domaine de définition maximal du point de vue économique

(d) Une unité de l'input $r$ coûte 8 unités monétaires. Indiquer la fonction de coût $C$ du produit $x$.

(e) La fonction de prix exprimant le prix $p$ en fonction de la quantité vendue $x$ est données par $p(x) = 260$ (concurrence parfaite). Calculer la fonction de profit et l'intervalle des $x$, pour lesquels la production est profitable.

14. La représentation graphique de $\log_{\frac{1}{a}}(x)$ est la réflexion de la représentation graphique de $\log_a(x)$ par rapport à l'axe des $x$, ce qui veut dire que

$$\log_a(x) = -\log_{\frac{1}{a}}(x)$$

Démontrer cette équation.

15. Démontrer $\log_a \frac{c}{b} = -\log_a \frac{b}{c}$.

**Solutions**

1. $\log_2 4 = 2$, car $2^2 = 4$.
$\log_2 8 = 3$, car $2^3 = 8$.
$\log_3 27 = 3$, car $3^3 = 27$.
$\log_4 4 = 1$, car $4^1 = 4$.
$\log_5 625 = 4$, car $5^4 = 625$.
$\log_{10} 10\,000\,000 = 7$, car $10^7 = 10\,000\,000$.

2. $e^5 = 148.41$
$e^{-3} = \frac{1}{e^3} = 0.049787$
$\ln 5 = 1.6094$
$\ln 0.5 = -0.69315$
$\ln 0$ n'est pas défini
$\ln(-5)$ n'est pas défini
$\log_2 5 = 2.3219 = \frac{\ln 5}{\ln 2}$
$\log_2 0.5 = -1.0 = \frac{\ln 0.5}{\ln 2}$
$\log_{0.2} 5 = -1.0 = \frac{\ln 5}{\ln 0.2}$
$\log_{0.2} 0.5 = 0.43068 = \frac{\ln 0.5}{\ln 0.2}$

3. Selon la formule exponentielle :

$$\begin{aligned} C(5.5) &= 500(1+0.025)^{5.5} \\ &= 572.73 \end{aligned}$$

Selon la méthode linéaire à l'intérieur des années :

$$\begin{aligned} C(5.5) &= C(5) + (5.5-5)\left(C\left(6\right) - C\left(5\right)\right) \\ &= 500(1+0.025)^5 + \frac{500(1+0.025)^6 - 500(1+0.025)^5}{2} \\ &= 572.78 \end{aligned}$$

La différence se monte à 5 centimes.

4.

$$\begin{aligned} 5000 &= 1000\left(1+0.03\right)^t \implies \\ \ln 5000 &= \ln 1000 + t\ln 1.03 \implies \\ t &= \frac{\ln 5000 - \ln 1000}{\ln 1.03} \\ &= 54.449 \end{aligned}$$

54 ans et $0.449 \cdot 360 = 161.64$ jours.
Avec la méthode linéaire à l'intérieur des années : pour les années entières on obtient :

$$C(54) = 1000\left(1.03\right)^{54} = 4934.1$$

La différence au capital recherché se monte à

$$5000 - 4934.1 = 65.9$$

et l'intérêt annuel pour l'an 55

$$\begin{aligned} C(55) - C(54) &= 1000\left(1.03\right)^{55} - 1000\left(1.03\right)^{54} \\ &= 148.02 \end{aligned}$$

Nous obtenons $\frac{65.9 \cdot 360}{148.02} = 160.28$ jours pour l'an 54. Da différence entre les deux méthodes se monte à $161.64 - 160.28 = 1.36$ jours.

5.

$$\begin{aligned} 4000 &= 1000\left(1+i\right)^6 \implies \\ \ln 4000 &= \ln 1000 + 6\ln(1+i) \implies \\ \frac{\ln 4000 - \ln 1000}{6} &= \ln(1+i) \implies \\ \exp\left(\frac{\ln 4000 - \ln 1000}{6}\right) &= \exp\ln\left(1+i\right)) \\ &= 1+i \implies \\ i &= \exp\left(\frac{\ln 4000 - \ln 1000}{6}\right) - 1 \\ &= 0.259\,92 \end{aligned}$$

(en pourcent : 25.992%)
La méthode est un peu compliquée : en fait on peut calculer :

$$\begin{aligned} 4000 &= 1000\,(1+i)^6 \\ \frac{4000}{1000} &= (1+i)^6 \\ \sqrt[6]{\frac{4000}{1000}} &= 1+i \\ i &= \sqrt[6]{\frac{4000}{1000}} - 1 \end{aligned}$$

6. a) $5x^2+3x-5>0$ si et seulement si

$$x \in \left]-\infty, -\frac{1}{10}\sqrt{109}-\frac{3}{10}\right[ \quad \cup \quad \left]\frac{1}{10}\sqrt{109}-\frac{3}{10}, \infty\right[$$

Cet ensemble constitue le domaine de définition maximal

b)$\frac{5x-3}{4x^2-2}$ est défini pour $4x^2-2\neq 0$.
$4x^2-2=0 \Longleftrightarrow 4x^2=2 \Longleftrightarrow x^2=\frac{1}{2} \Longleftrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.
$\frac{5x-3}{4x^2-2}$ est défini alors défini pour $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$
$\ln\frac{5x-3}{4x^2-2}$ est défini pour $\frac{5x-3}{4x^2-2}>0$ et $x\notin\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.
Pour déterminer les $x$ tel que $\frac{5x-3}{4x^2-2}>0$ il faut distinguer deux cas :
$4x^2-2>0$ ou $4x^2-2<0$.

$4x^2-2>0$ sur $]-\infty,-\frac{1}{2}\sqrt{2}[\,\cup\,]\frac{1}{2}\sqrt{2},\infty[$
$\frac{5x-3}{4x^2-2}>0 \Longrightarrow 5x-3>0 \Longrightarrow 5x>3 \Longrightarrow x>\frac{3}{5}$.
$\frac{5x-3}{4x^2-2}$ est alors positif sur $\{x|x>\frac{3}{5}\}\cap\left(]-\infty,-\frac{1}{2}\sqrt{2}[\ \cup\ ]\frac{1}{2}\sqrt{2},\infty[\right) = \quad ]\frac{1}{2}\sqrt{2},\infty[$

$4x^2-2<0$ sur $]-\frac{1}{2}\sqrt{2},\frac{1}{2}\sqrt{2}[$
$\frac{5x-3}{4x^2-2}>0 \Longrightarrow 5x-3<0 \Longrightarrow 5x<3 \Longrightarrow x<\frac{3}{5}$. (en multipliant par un nombre négatif, $>$ change en $<$).
$\frac{5x-3}{4x^2-2}$ est positif sur $\{x|x<\frac{3}{5}\}\cap]-\frac{1}{2}\sqrt{2},\frac{1}{2}\sqrt{2}[\,=\,]-\frac{1}{2}\sqrt{2},\frac{3}{5}[$

En tout l'expression $\frac{5x-3}{4x^2-2}$ est positive sur $]-\frac{1}{2}\sqrt{2},\frac{3}{5}[\,\cup\,]\frac{1}{2}\sqrt{2},\infty[$

$\ln\frac{5x-3}{4x^2-2}$ est alors défini pour

$$x \in \left]-\frac{1}{2}\sqrt{2},\frac{3}{5}\right[ \quad \cup \quad \left]\frac{1}{2}\sqrt{2},\infty\right[$$

De plus $\ln\frac{5x-3}{4x^2-2}$ doit être différent de 0 pour éviter une division par 0.
$\ln x=0$ si et seulement si $x=1$.
$\frac{5x-3}{4x^2-2}$ doit alors être différent de 1.
$\frac{5x-3}{4x^2-2}=1 \Longleftrightarrow 5x-3=4x^2-2 \Longleftrightarrow -4x^2+5x-1=0 \Longleftrightarrow x\in\left\{1,\frac{1}{4}\right\}$

Le domaine de définition maximal est alors ($\frac{1}{2}\sqrt{2}=0.707\,11$).

$$\left(\left]-\frac{1}{2}\sqrt{2},\frac{3}{5}\right[ \quad \cup \quad \left]\frac{1}{2}\sqrt{2},\infty\right[\right)\setminus\left\{1,\frac{1}{4}\right\}$$

7. En première année

$$PNB(1)=PNB_0(1+0.018) \tag{4.3.2}$$

En deuxième

$$PNB(2) = PNB(1)(1 + 0.018) \tag{4.3.3}$$

et en remplaçant (4.3.2) dans (4.3.3)

$$\begin{aligned} PNB(2) &= PNB_0(1 + 0.018)(1 + 0.018) \\ &= PNB_0(1 + 0.018)^2 \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

En troisième année

$$PNB(3) = PNB(2)(1 + 0.018) \tag{4.3.5}$$

et en substituant (4.3.4) dans (4.3.5)

$$\begin{aligned} PNB(3) &= PNB_0(1 + 0.018)^2(1 + 0.018) \\ &= PNB_0(1 + 0.018)^3 \end{aligned}$$

D'une manière générale :

$$BNP(n) = BNP_0\,(1 + 0.018)^n$$

et si nous définissons cette fonction sur $\mathbb{R}_+$ au lieu de $\mathbb{N}$ :

$$BNP(t) = BNP_0\,(1 + 0.018)^t$$

Dans l'exemple nous pouvons affirmer à cause du dédoublement du $BNP_0$ : $BNP(t) = 2BNP_0$. Avec cela on obtient

$$\begin{aligned} 2BNP_0 &= BNP_0\,(1 + 0.018)^t \Longrightarrow \\ 2 &= (1 + 0.018)^t \Longrightarrow \\ \ln 2 &= t \ln(1 + 0.018) \Longrightarrow \\ t &= \frac{\ln 2}{\ln(1 + 0.018)} \\ &= 38.854 \end{aligned}$$

8. On obtient
   (a) $f(x) = 300 \cdot (0.9)^x$ (3 m = 300 cm)
   (b) $f(8) = 300 \cdot (0.9)^8 = 129.14$ cm
   (c) $f(x) = 45$; $300 \cdot (0.9)^x = 45$; $x = \frac{\ln \frac{45}{300}}{\ln 0.9} = 18.006$ (18 chocs)
   (d) $g(x) = 650 \cdot 0.86^x = f(x) = 300 \cdot 0.9^x$
   $\frac{0.86^x}{0.9^x} = \frac{300}{650}$
   $x \ln (0.86) - x \ln 0.9 = \ln \left(\frac{300}{650}\right)$
   $x = \frac{\ln\left(\frac{300}{650}\right)}{\ln(0.86) - \ln(0.9)} = 17.007$ (17 chocs)
9. $1.002^{20} = 1.040\,8$ (de 4.08% ; en 20 ans $8 \cdot 1.0408 = 8.326$ millions ($= 8 \cdot 1.002^{20} = 8.326$) $1.00880114592^{20} = 1.191\,5$ (de 19.15% ; en 20 ans $8 \cdot 1.1915 = 9.532$ millions ($= 8 \cdot 1.00880114592^{20} = 9.532$) (remarque : il est risqué d'extrapoler des tendances d'une manière purement mathématique sans tenir compte des conditions cadre politiques et économiques européennes et globales futures - qu'on ne connaît pas !).

10. $f(x) = \ln\left(3x + 6 + \ln x^2\right)$ ; $\ln f(x)$ n'est défini que pour $f(x) > 0$. Ainsi il faut enlever pour $\ln x^2$ le nombre 0 du domaine de définition. Pour la même raison il faut que $3x+6+\ln x^2 > 0$.
Nous cherchons les zéros, par exemple avec R :
f=function(x) 3*x+6+log(xˆ2)
plot(f,xlim=c(-5,5))
Sur la base du graphique il y a 3 zéros : deux proche de 0 et un troisième entre -2 et -4.
uniroot(f,c(-4,-2)) : résultat : $-2.649605$
uniroot(f,c(-2,-0.000000000001)) : résultat : $-0.05399684$
uniroot(f,c(0.000000000001,2)) : résultat : 0.0464659
$f(-3) = -0.8027754$
$f(-2) = 1.386294$
Ainsi entre $-2.649605$ et $-0.05399684$ la fonction donnée par $3x + 6 + \ln x^2$ est positive .
$f(-0.01) = -3.24034$
$f(0.01) = -3.18034$
$f(1) = 9$
Ainsi sur $]0.0464659, \infty[$ la fonction est positive.
Le domaine de définition maximal est alors
$\mathbb{R}\setminus(]-\infty, -2.649605] \cup [-0.05399684, 0.0464659]) = ]-2.649605, -0.05399684[ \cup ]0.0464659, \infty[$
11. $V_i$ pour „valeur initiale“. On pose l'équation suivant : $0.3V_i = V_i\,(1-0.2)^t$ . En isolant $t$ on obtient :
$0.3 = (1-0.2)^t$
$\ln(0.3) = t\ln(0.8)$
$t = \frac{\ln 0.3}{\ln 0.8} = 5.395\,5$
Ou : Après une année, la voiture a une valeur de $V_1 := 0.8V_i$
Après la deuxième année, la voiture a une valeur de $V_2 := 0.8V_1 = 0.8\,(0.8V_i) = 0.8^2V_i$
Après la troisième année, la voiture a une valeur de $V_3 := 0.8V_2 = 0.8^3V_i$, etc.
formule générale pour un taux d'amortisation de 20% : $V_n = 0.8^nV_i$. En passant a une fonction exponentielle (temps continu) :
$V(t) = 0.8^tV_i$. Comme $V(t) = 0.3V_i$ on obtient $0.3V_i = V_i\,(0.8)^t$.

$V(t) = 0.5V_i$. $0.5V_i = V_i\,(0.8)^t$
$t = \frac{\ln 0.5}{\ln 0.8} = 3.106\,3$
12. On obtient :
    (a) fonction réciproque de $x(r)$ : $r(x) = x^2$.
    puisque le prix d'une unité de $r$ se monte à 10, on obtient : $C(x) = 10 \cdot r(x) = 10x^2$ (fonction de coût)
    (b) Les coûts d'une quantité de $x = 12$ : $C(12) = 10 \cdot 12^2 = 1440$
    (c) fonction de profit avec $p(x) = -0.3x^2 + 110)$ :
    $R(x) = xp(x) = x\left(-0.3x^2 + 110\right) = 110x - 0.3x^3$
    $P(x) = R(x) - C(x) = 110x - 0.3x^3 - \left(10x^2\right) = -0.3x^3 - 10x^2 + 110x$
    (d) zone de profit :
    $-0.3x^3 - 10x^2 + 110x = 0$, solutions : $8.719\,2, -42.053, 0$
    $G(1) = -0.3 - 10 + 110 = 99.7 > 0$.
    zone de profit : $]0, 8.7192[$
    (e) pour $x(r) = \ln r$ ; fonction réciproque : $\exp(x(r)) = r \quad (r(x) = e^x)$.
    fonction de coût : $K(x) = 10e^x$
    fonction de profit : $G(x) = 110x - 0.3x^3 - 10e^x$
    zone de profit : $110x - 0.3x^3 - 10e^x = 0$
    (zéro avec uniroot de R - f = function(x) $110 * x - 0.3 * x\hat{\ }3 - 10 * \exp(x)$
    plot(f,xlim=c(-2,4)) (trouver l'intervalle utile en essayant)
    uniroot(f,c(-2,3)) : 0.1005251 (l'intervalle trouvé sur la base du graphique)
    uniroot(f,c(3,10)) : 3.657509 (l'intervalle trouvé sur la base du graphique)

$f(0) = -10$; $f(1) = 82.51718 > 0$; $f(4) = 110 \cdot 4 - 0.3 \cdot 4^3 - 10e^4 = -125.18$;
zone de profit : $]0.1005251, 3.657509[$

13. On obtient :

   (a) Les zéros de la fonction : $\ln(1) = 0$ ; le zéro se trouve alors en $r + 1 = 1 \Longrightarrow r = 0$. Les fonctions logarithme de base supérieure à 1 sont strictement croissante. A droite du zéro, la fonction est alors positive sur $]0, \infty[$.

   (b) domaine de définition maximal du point de vue mathématique : $r + 1 > 0 \Longleftrightarrow r > -1$. Alors : $D_x = ]-1, \infty[$

   (c) domaine de définition économique $]0, \infty[$ . Un input et un output négatif n'ont pas de sens. L'input est positif après 0 et l'output aussi (voir a).

   (d) Une unité de l'input $r$ coûte 8 unités monétaires. Indiquer la fonction de coût $C$ du bien produit $x$. Pour calculer l'input nécessaire pour $x$ unité du bien à produire il faut calculer la fonction réciproque de la fonction de production :

$$\begin{aligned} \exp(x) &= \exp(\ln(r+1)) = r + 1 \\ &\Longrightarrow r(x) = e^x - 1 \end{aligned}$$

   Le coûts de la quantité produite $x$ se montent au produit prix*quantité d'input nécessaire à la production de $x$ :

$$C(x) = 8r(x) = 8\left(e^3 - 1\right) = 8e^x - 8$$

   (e) La fonction de prix est donnée par $p(x) = 260$ (concurrence parfaite). La fonction de profit $P$ est alors

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) \\ &= xp(x) - C(x) \\ &= 260x - (8e^x - 8) \\ &= 260x - 8e^x + 8 \end{aligned}$$

   premier zéro : 0, car $260 \cdot 0 + 8e^0 - 8 = 8 \cdot 1 - 8 = 0$
   deuxième zéro avec uniroot de R :
   f=function(x) 260*x-8*exp(x)+8 ; plot(f,xlim=c(0,6)) ; abline(h=0)
   On voit qu'il y a un zéro entre 5 et 6. Avec uniroot(f,c(5,6)) on obtient le zéro : 5.120478
   Puisque $P(1) = 250 - 8e + 8 = 236.25 > 0$
   et $P(6) = 250 \cdot 6 - 8e^6 + 8 = -1719.4 < 0$, la zone de profit est $]0,\ 5.120478[$.

14. $\log_a \frac{c}{b} = \log_a c - \log_a b = -(\log_a b - \log_a c) = -\log_a \frac{b}{c}$.

15. On peut développer

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{a}}(x) &= \frac{\log_a(x)}{\log_a \frac{1}{a}} \quad \text{(théorème 4.3.29)} \\ &= \frac{\log_a(x)}{-\log_a a} \quad \text{(exercice 14).} \\ &= -\log_a(x) \end{aligned}$$

   Un exemple graphique : $\log_3 x = -\log_{\frac{1}{3}} x$

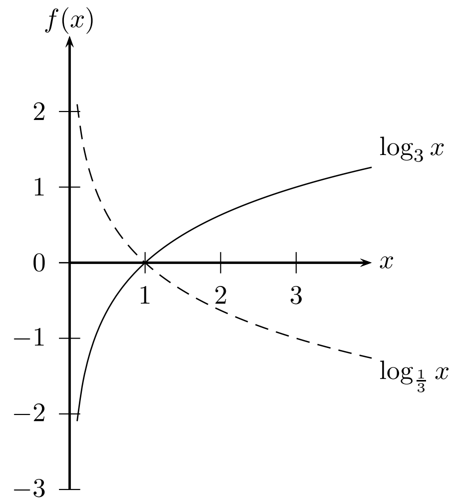


FIGURE 4.3.24 – Représentation graphique de $\log_3 x = -\log_{\frac{1}{3}} x$

## 4.4 Fonctions définies par intervalles

Nous supposons que $D$ soit l'union de $n$ intervalles réels $I_i$ tel que $I_i \cap I_j = \emptyset$ pour $i \neq j$ et $i, j \in \mathbb{N}_n^*$. De plus nous considérons les fonctions $f_i : I_i \to \mathbb{R}$. Nous appelons la fonction $f : D \to \mathbb{R}$ „définie par intervalles $I_i$ par $f_i$" si et seulement si $f$ est identique à $f_i$ sur $I_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}_n^*$. On fournit les fonctions définies par intervalles en général en indiquant une expression définissant $f_i$ pour chaque intervalle $I_i$ après une accolade. Si l'on veut calculer la valeur de la fonction $f$ de $x$ il faut d'abord vérifier dans quel intervalle $x$ se trouve. Si $x \in I_i$, alors $f(x) = f_i(x)$.

**Exemple 4.4.1.** *fonction valeur absolue (voir graphique 4.4.25) :*

$$
\begin{aligned}
|| &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\
|x| &:= \begin{cases} x & \textit{pour } x \geq 0 \\ -x & \textit{pour } x < 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

*Ainsi*

$$
\begin{aligned}
|5| &= 5 \\
|-5| &= 5 \\
|-20| &= 20.
\end{aligned}
$$

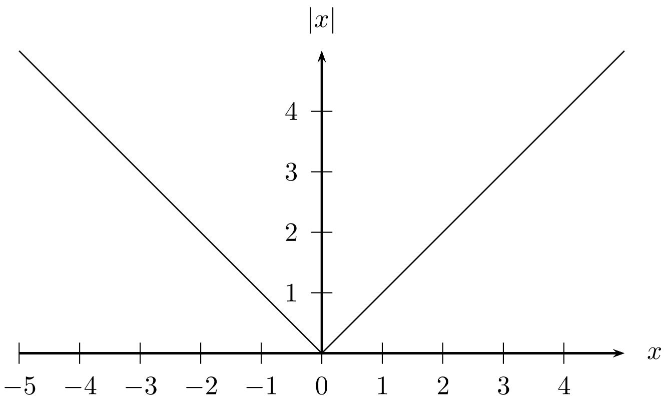


FIGURE 4.4.25 – Représentation graphique de la fonction valeur absolue

◊

**Théorème 4.4.2.** $|x|^2 = x^2$

*Démonstration.* Pour $x \geq 0$, $|x| = x$ et par conséquent $|x|^2 = x^2$. Pour $x < 0$, $|x| = -x$ et par conséquent $|x|^2 = (-x)^2 = x^2$. □

**Théorème 4.4.3.** $|x|\,|y| = |xy|$

*Démonstration.* Si $x = 0$ ou $y = 0$, alors $|x|\,|y| = 0 = |xy|$. Supposons que $x < 0$ et $y > 0$. Alors $-x = |x|$ et $|y| = y$. Par conséquent $|x|\,|y| = -xy$. De plus $-xy > 0$ et selon la définition $|-yx| = -yx$. On en déduit : $|x|\,|y| = |xy|$. On utilise la même argumentation pour $x > 0$ et $y < 0$. Si $x, y > 0$, $x = |x|$ et $|y| = y$, par conséquent $xy = |x|\,|y|$. De plus $xy > 0$, alors $|yx| = yx$. On obtient $|x|\,|y| = |xy|$. Finalement pour $x, y < 0$, $-x = |x|$ et $|y| = -y$. Par conséquent $|x|\,|y| = (-x)(-y) = xy > 0$. Comme $xy > 0$, $|yx| = yx$. Alors $|x|\,|y| = |yx|$. □

**Théorème 4.4.4.** $|x + y| \leq |x| + |y|$

*Démonstration.* Comme $|x + y|, |x|, |y| \geq 0$,

$$\begin{aligned} |x+y| \leq |x| + |y| &\iff |x+y|^2 \leq (|x| + |y|)^2 \\ &\iff (x+y)^2 \leq |x|^2 + 2\,|x|\,|y| + |y|^2 = x^2 + 2\,|xy| + y^2 \end{aligned}$$

Or $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. Comme $xy \leq |x|\,|y| = |xy|$, le théorème est démontré. □

**Exemple 4.4.5.** *fonction caractéristique (ou fonction indicatrice)*

$$1_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \textit{pour } x \in A \\ 0 & \textit{pour } x \notin A \end{cases}$$

*pour $A \subset \mathbb{R}$. Avec la fonction indicatrice on peut exprimer des fonctions définies par intervalles sans la notation avec l'accolade. La fonction valeur absolue peut être exprimée par :* $|x| = -x \cdot 1_{]-\infty,0[}(x) + x \cdot 1_{[0,\infty[}(x)$ ◊

**Exemple 4.4.6.** *Supposons que*

$$f_1 : ]-\infty, 5] \to \mathbb{R}$$
$$f_1(x) = 2x$$

*et*

$$f_2 : ]5, \infty[ \to \mathbb{R}$$
$$f_2(x) = 5x^2 + e^x.$$

*La fonction $f$ définie par intervalle par $f_1$ et $f_2$ peut être décrite par :*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{pour } x \in \ ]-\infty, 5] \\ 5x^2 + e^x & \text{pour } x \in \ ]5, \infty[ \end{cases}$$

*ou aussi par*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{pour } -\infty < x \leq 5 \\ 5x^2 + e^x & \text{pour } 5 < x < \infty \end{cases} .$$

*Dans l'exemple* $D = \ ]-\infty, 5] \cup \ ]5, \infty[ \ = \mathbb{R}$.
*Les valeurs de fonction de* $3$ *et* $6$ *:*

$$f(3) = f_1(3) = 2 \cdot 3 = 6$$
$$f(6) = f_2(6) = 5 \cdot 6^2 + e^6 = 583.43.$$

$\diamondsuit$

**Exemple 4.4.7.** *Supposons que*

$$f_1 : ]0, 3] \to \mathbb{R}$$
$$f_1(x) = 2\ln(x)$$

$$f_2 : ]3, 10[ \to \mathbb{R}$$
$$f_2(x) = e^x$$

*et*

$$f_3 : ]11, 15[ \to \mathbb{R}$$
$$f_3(x) = \frac{3}{x}$$

*La fonction $f$ définie par intervalle par $f_1$, $f_2$ et $f_3$ peut être décrite par :*

$$f : ]3, 10] \cup \ ]11, 15[ \ \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} 2\ln(x) & \text{pour } x \in \ ]0, 3] \\ e^x & \text{pour } x \in \ ]3, 10[ \\ \frac{3}{x} & \text{pour } x \in \ ]11, 15[ \end{cases}$$

*Dans l'exemple* $D = \ ]0, 10] \cup \ ]11, 15[$. $\diamondsuit$

**Exemple 4.4.8.** *Une option européenne (en anglais aussi „Vanilla Option“) est une sorte de contrat qui donne le droit de vendre (option de vente, en anglais „put option“) ou d'acheter (option d'achat, en anglais „call option“) un actif sous-jacent (en anglais „underlying“) (actions, obligations, métaux précieux, marchandises, devises, etc.) à un certain moment $T$ (= échéance = maturité, en anglais „maturity“ ou „strike“) à un certain prix $k$ (= prix d'exercice, en anglais*

*„exercice price", „strike price"). Les options sont des produits dérivés standardisés et cotés en bourse. Celui qui achète le droit d'acheter ou de vendre l'actif sous-jacent est appelé „acheteur de l'option". L'acheteur de l'option doit payer au vendeur une prime c. Les options sont alors une sorte d'assurance qui permettent de réaliser un certain prix pour l'actif sous-jacent dans l'avenir (Put Option) ou de pouvoir acheter l'actif sous-jacent dans l'avenir à un certain prix (Call Option). Les options peuvent par conséquent servir à s'assurer p.ex. contre des risques de change ou des risques dus aux changements des prix de vente de certains biens ou des prix d'achat de certaines matières premières. A part ça les options peuvent aussi servir à des buts spéculatifs. Une option est exercée quand l'actif sous-jacent est échangé à $T$. (voir le tableau 4.4.1).*

| A l'échéance | option d'achat | option de vente | |
|---|---|---|---|
| l'acheteur de l'option a le droit de | acheter | vendre | l'actif sous-jacent |
| le vendeur a l'obligation de | vendre | acheter | l'actif sous-jacent |

TABLE 4.4.1 – Option d'achat et de vente vu de l'acheteur et du vendeur

*Une option de vente est exercée par un acheteur maximisant son profit si le prix de marché $S_T$ de l'actif sous-jacent en $T$ est plus bas que le prix d'exercice $k$.*

1. *Pour un acheteur qui utilise l'option comme assurance contre un prix de marché en $T$ trop bas, peut vendre au prix plus élevé $k$. La différence $k - S_T$ moins la prime $c$ est l'argent qu'il gagne en n'étant pas obligé de vendre au prix de marché plus bas.*
2. *Un spéculateur peut acheter l'actif sous-jacent aux prix $S_T$ et le vendre aux prix $k$. Il fait un profit de $k - S_T - c$.*

*Si $S_T \geq k$, un acheteur d'une option de vente n'exercera pas l'option. L'acheteur paie la prime $c$ indépendamment du prix de marché de l'actif.*

*On peut représenter graphiquement ces résultats par des „diagrammes des résultats à l'échéance", qui représentent les résultats nets à l'échéance $f(S_T)$ en fonction du développement du prix du marché $S_T$ de l'actif sous-jacent et de la constante $c$ dans le système des coordonnées cartésiennes (sans taxes de la part de l'Etat, de la bourse ou de la banque). Par là on obtient pour $S_T$ dans le domaine $[0, k[$ - là $S_T < k$ et l'option est exercée - comme fonction des résultats à l'échéance*

$$f(S_T) = k - S_T - c,$$

*et dans le domaine $[k, \infty[$, dans lequel l'option n'est pas exercée, $f(S_T) = -c$. Avec la notation introduite on obtient :*

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$
$$f(S_T) = \begin{cases} k - S_T - c & \text{pour } 0 \leq S_T < k \\ -c & \text{pour } k \leq S_T < \infty \end{cases} .$$

*Pour dessiner la fonction nous observons que $f(S_T) = k - S_T - c$ sur $[0, k[$ est une droite (polynôme affine) avec l'ordonnée à l'origine $k - c$ et la pente $-1$ ainsi que le zéro : $f(S_T) = k - S_T - c = 0 \Longrightarrow -S_T = -k + c \Longrightarrow S_T = k - c$.*

*La différence $k - S_T$ compense une partie de la prime pour $k - S_T < c$. $c$ est exactement compensé, si $k - S_T = c$, et il en résulte un profit net si $k - S_T > c$. Pour $k = 60$ et $c = 5$ on obtient la représentation graphique 4.4.26 de la fonction*

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$
$$f(S_T) = \begin{cases} 60 - S_T - 5 & \text{pour } 0 \leq S_T < 60 \\ -5 & \text{pour } 60 \leq S_T < \infty \end{cases} :$$

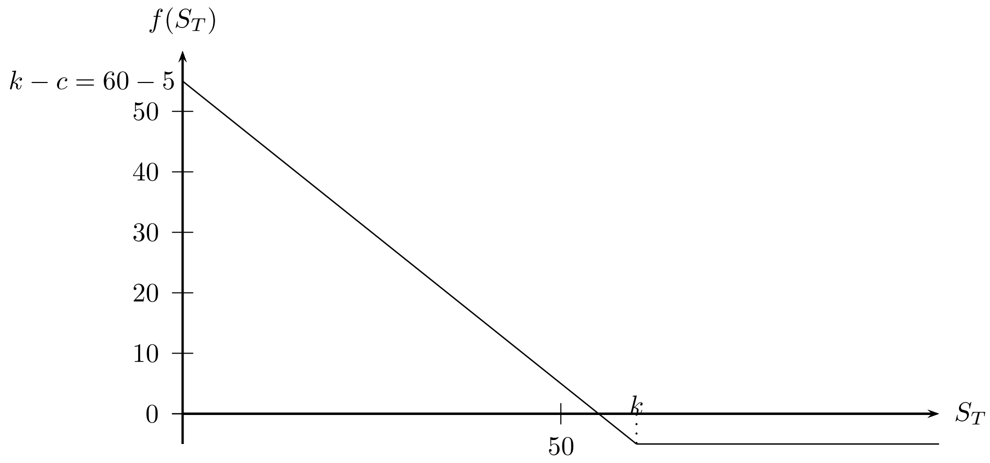


FIGURE 4.4.26 – Diagramme des résultats à l'échéance pour l'acheteur d'une option de vente avec le prix d'exercice $k = 60$ et la prime $c = 5$

*Le résultat à l'échéance pour* $S_T = 30$ *est* $f(30) = 60 - 30 - 5 = 25$. *Le résultat pour* $S_T = 70$ *est* $f(70) = -5$ *- on observe une perte de la prime. Le résultat pour* $S_T = 58$ *est* $f(58) = 60 - 58 - 5 = -3$. *Il y a perte d'une partie de la prime.*

*Pour le vendeur d'une option de vente (put) on peut aussi dessiner un diagramme des résultats à l'échéance. Il gagne quand l'acheteur perd et vice versa. Son diagramme est par conséquent la réflexion de la fonction de l'acheteur par rapport à l'axe des* $x$. *On obtient pour l'exemple 4.4.26 :*

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$
$$f(S_T) = \begin{cases} S_T - 55 & \text{pour } 0 \leq S_T < 60 \\ 5 & \text{pour } 60 \leq S_T < \infty \end{cases}$$

$\Diamond$

**Exemple 4.4.9.** *Un acheteur exerce une option d'achat (call) si le prix de marché* $S_T$ *en* $T$ *est supérieur au prix d'exercice* $k$ *de l'option, c. à d. pour* $S_T > k$ *ou pour* $S_T \in ]k, \infty[$.

1. *Un acheteur qui voulait s'assurer contre un prix d'achat trop élevé gagne* $S_T - k - c$, *l'argent qu'il n'est pas obligé de payer pour un prix d'achat de marché plus élevé que* $k$.
2. *Un spéculateur peut acheter l'actif sous-jacent au prix d'exercice et le vendre au prix de marché en réalisant un profit de* $S_T - k - c$.

*Sur* $]k, \infty[$ *on obtient alors* $f(S_T) = S_T - k - c$ *et sur* $[0, k]$ $f(S_T) = -c$. *Le zéro de la fonction avec* $S_T - k - c = 0$ *est* $k + c$. *A l'aide de notre notation on obtient la fonction des résultats à l'échéance suivante :*

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$
$$f(S_T) = \begin{cases} -c & \text{pour } 0 \leq S_T \leq k \\ S_T - k - c & \text{pour } k < S_T < \infty \end{cases}$$

*Pour* $k = 70$ *et* $c = 6$ *on obtient*

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$
$$f(S_T) = \begin{cases} -6 & \text{pour } 0 \leq S_T \leq 70 \\ S_T - 76 & \text{pour } 70 < S_T < \infty \end{cases}$$

*et graphiquement (voir figure 4.4.27) :*

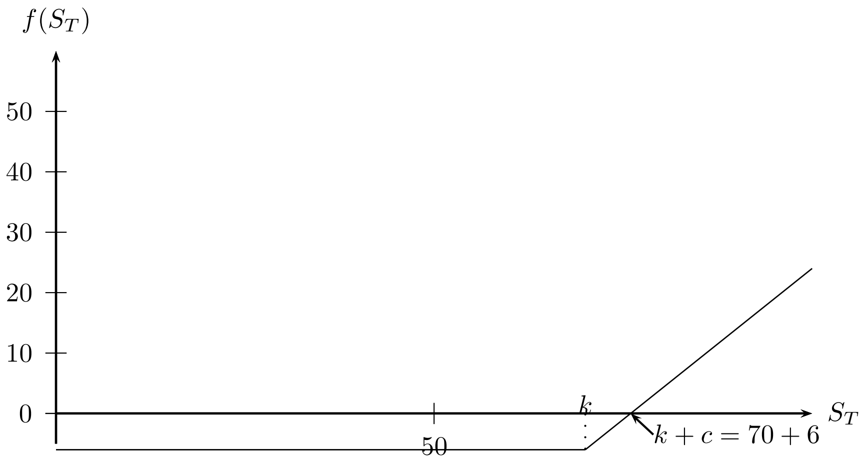


FIGURE 4.4.27 – Diagramme des résultats à l'échéance pour un acheteur d'une option d'achat avec le prix d'exercice $k = 70$ et la prime $c = 6$

*Le diagramme des résultats à l'échéance du vendeur d'une option d'achat (call) consiste en la réflexion de la fonction de la figure 4.4.27 par rapport à l'axe des x. On obtient pour l'exemple*

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$
$$f(S_T) = \begin{cases} 6 & \textit{pour } 0 \leq S_T \leq 70 \\ 76 - S_T & \textit{pour } 70 < S_T < \infty \end{cases} .$$

$\Diamond$

**Remarque 4.4.10.** *On utilise une option de vente en tant qu'assurance, si on part de l'idée qu'on aura au moment $T$ l'actif sous-jacent à sa disposition (p.ex. un paysan sa récolte ou une entreprise sa production). On veut s'assurer contre une chute des prix du produit sur le marché. L'option de vente est utilisée comme instrument de spéculation, si on ne pense pas avoir l'actif sous-jacent en $T$. On espère que l'actif sous-jacent aura en $T$ un prix inférieur aux prix d'exercice $k$. Dans l'exemple ci-dessus*

$$f(S_T) = \begin{cases} 60 - S_T - 5 & \textit{pour } 0 \leq S_T < 60 \\ -5 & \textit{pour } 60 \leq S_T < \infty \end{cases}$$

*et avec un prix de marché de* 52 *on exercerait l'option. On achèterait le produit à 52 et le vendrait à 60 en exerçant l'option. On gagne après la déduction de la prime 3. Cela correspond à un profit de* $\frac{3}{5} \cdot 100 = 60\%$ *- la prime est le seul investissement ! (on appelle ce phénomène „effet de levier“). Si le prix de marché n'est pas en-dessous de 60, on perd 100% de l'investissement. L'utilisation spéculative des options est alors très risquée.*
*On utilise une option d'achat en tant qu'assurance, si on veut acheter l'actif sous-jacent au moment $T$, p.ex. parce qu'on en a besoin pour sa production (matières premières). On veut s'assurer contre une hausse des prix des matières premières. L'option d'achat est utilisée comme instrument spéculatif, si on n'a pas l'intention d'acheter le l'actif sous-jacent en $T$. On s'attend à ce que le prix du marché de l'actif sous-jacent soit en $T$ supérieur au prix d'exercice. En ce cas on exerce l'option et on vend l'actif sous-jacent aux prix du marché supérieur. Dans l'exemple ci-dessus*

$$f(S_T) = \begin{cases} -6 & \textit{pour } 0 \leq S_T \leq 70 \\ S_T - 76 & \textit{pour } 70 < S_T < \infty \end{cases}$$

*on exercerait l'option en face d'un prix du marché de* 78*. En exerçant l'option on achète l'actif sous-jacent au prix de* 70 *et on le vend sur le marché à* 78*. Le profit se monte après la déduction de la prime à* $\frac{2}{6} \cdot 100 = 33.333\%$*. Evidemment l'utilisation spéculative des options d'achat est aussi risquées que celle des options de vente.* $\diamondsuit$

**Exercices**

1. Dessiner la fonction suivante définie par intervalles sur $]-10, 10[$ :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} 0.2x & \text{pour } x \in \ ]-\infty, 3] \\ \frac{1}{x} & \text{pour } x \in \ ]3, 7[ \\ \ln\left(x^2\right) & \text{pour } x \in \ ]7, \infty[ \end{cases}$$

   et calculer $f(-5)$, $f(4), f(8)$.

2. Indiquer la fonction des résultats à l'échéance de l'acheteur de l'option de vente (put) suivante : prix d'exercice = 40 ; prime = 4. Dessiner la fonction. Calculer le résultat pour les prix du marché de l'actif sous-jacent suivants : $S_T = 30; S_T = 38; S_T = 50$.
   Indiquer et dessiner la fonction des résultats de la même option pour le vendeur.

3. Indiquer et dessiner la fonction des résultats à l'échéance pour l'acheteur de l'option d'achat suivante : prix d'exercice = 45 ; prime = 3.5. Indiquer et dessiner la fonction des résultats à l'échéance de la même option pour le vendeur.

**Solutions**

1. La représentation graphique est :

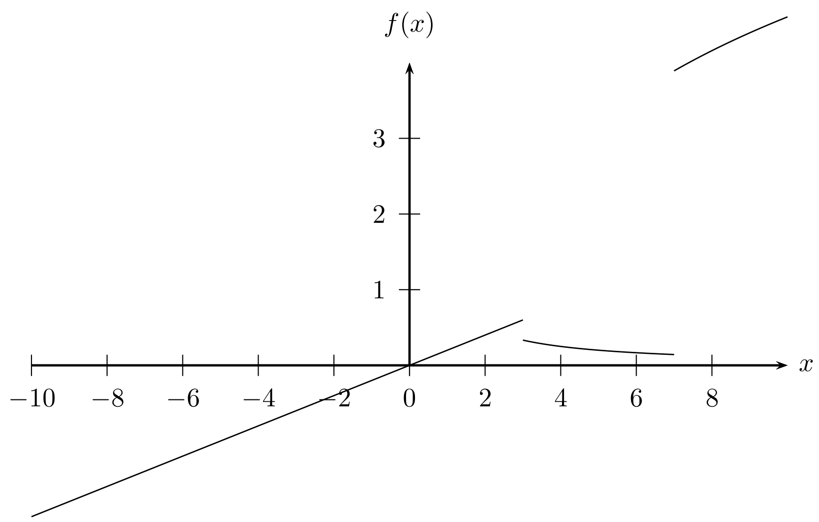


FIGURE 4.4.28 – Représentation graphique de la fonction de l'exercice

Avec R :
plot(1,type="n",xlim=c(-1,10),ylim=c(-1,6)) #Nécessaire pour avoir une surface adaptée au problème
f1=function(x) 0.2*x
curve(f1,xlim=c(-1,3),add=T)

```
f2=function(x) 1/x
curve(f2,xlim=c(3,7),add=T)
f3=function(x) log(x^2)
curve(f3,xlim=c(7,10),add=T)
```

$f(-5) = 0.2 \cdot -5 = -1$
$f(4) = 1/4$
$f(8) = \ln\left(8^2\right) = 4.1589$

2. La fonction des résultats à l'échéance d'un acheteur de l'option de vente (put ; $c = 4; k = 40$) :

$$f_L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$
$$f_L\left(S_T\right) = \begin{cases} 40 - S_T - 4 & \text{pour } 0 \leq S_T < 40 \\ -4 & \text{pour } \infty > S_T \geq 40 \end{cases}$$

Pour le vendeur :

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$
$$f_S(S_T) = \begin{cases} -(40 - S_T - 4) & \text{pour } 0 \leq S_T < 40 \\ 4 & \text{pour } 40 \leq S_T < \infty \end{cases}$$

Représentation graphique :

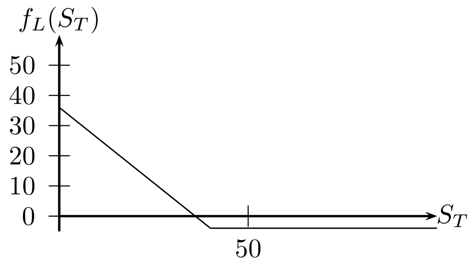


FIGURE 4.4.29 – Diagramme des résultats à l'échéance pour l'acheteur d'une option de vente avec le prix d'exercice $k = 40$ et la prime $c = 4$

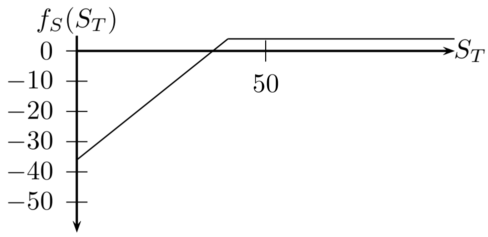


FIGURE 4.4.30 – Diagramme des résultats à l'échéance pour le vendeur d'une option de vente avec le prix d'exercice $k = 40$ et la prime $c = 4$

$f_L(30) = 40 - 30 - 4 = 6$
$f_L(38) = 40 - 38 - 4 = -2$
$f_L(50) = -4$
Le $L$ dans $f_L(x)$ rappelle qu'on appelle en anglais l'achat d'une option „going long", tandis que sa vente est appelée „going short" - pour cela le $S$ dans $f_S(x)$.

3. La fonction des résultats à l'échéance d'un acheteur de l'option d'achat (call, $k = 45, c = 3.5$)

$$f_L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$
$$f_L\left(S_T\right) = \begin{cases} -3.5 & \text{pour } 0 \leq S_T \leq 45 \\ S_T - 45 - 3.5 & \text{pour } \infty > S_T > 45 \end{cases}$$

$$f_S : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$
$$f_S\left(S_T\right) = \begin{cases} 3.5 & \text{pour } 0 \leq S_T \leq 45 \\ -\left(S_T - 45 - 3.5\right) & \text{pour } \infty > S_T > 45 \end{cases}$$

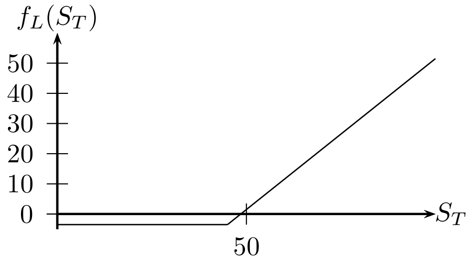


FIGURE 4.4.31 – Diagramme des résultats à l'échéance pour l'acheteur d'une option d'achat avec le prix d'exercice $k = 45$ et la prime $c = 3.5$

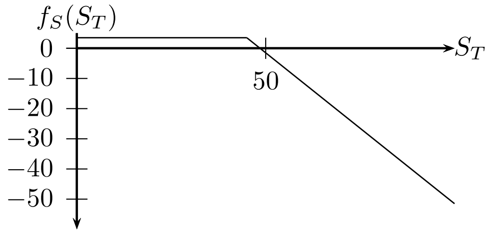


FIGURE 4.4.32 – Diagramme des résultats à l'échéance pour le vendeur d'une option d'achat avec le prix d'exercice $k = 45$ et la prime $c = 3.5$

## 4.5 Objectifs d'apprentissage

— Arriver à définir les fonctions introduites (fonction rationnelle, fonction racine, fonction exponentielle et fonction logarithme). Arriver à déterminer les domaines de définition et à calculer les zéros de telles fonctions.
— Arriver à expliquer le concept de la composition de fonctions. Arriver à développer des équations décrivant des compositions de fonctions à partir des équations décrivant les fonctions à composer. Arriver à calculer les valeurs de fonctions composées.
— Arriver à appliquer le concept de la fonction réciproque aux types de fonctions traitées. Savoir que la composition de la fonction réciproque par la fonction inversée attribue aux arguments de la fonction inversées ces arguments comme valeur. Savoir que la fonction logarithme est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.
— Connaître et savoir appliquer correctement les concepts de la monotonie (stricte), de la croissance (stricte) et de la décroissance (stricte). Connaître est savoir appliquer correctement les concepts de la concavité et de la convexité.
— Savoir appliquer dans des calculs les théorèmes démontrés pour les fonctions logarithme.
— Connaître et savoir appliquer le concept de la fonction définie par intervalles. Comprendre et savoir calculer les exemples économiques donnés (options d'achat et de vente).
— Arriver à résoudre des devoirs du type des exercices.

# Chapitre 5

# Limites d'une fonction réelle

Le concept de la „pente“ joue un rôle important dans la théorie de l'optimisation. En fait beaucoup de fonctions réelles atteignent un maximum ou un minimum là où la courbe a la pente 0. Jusqu'ici nous pouvions uniquement calculer la pente des polynômes du premier degré. La pente d'un polynôme du premier degré $y = ax + b$ est en chaque point $(x, f(x))$ la même, à savoir $a$. D'autres fonctions peuvent avoir en chaque point une autre pente - p.ex. $y = x^2$. Il s'agit par la suite de définir et de calculer la pente en $(x, f(x))$ pour certaines classes de fonctions réelles. Pour le faire nous avons besoins du concept de la limite d'une fonction, dont nous introduirons dans ce chapitre différentes variantes : nous examinons des limites qui permettent de décrire le comportement de fonctions si $x$ tend vers l'infini positif ou négatif. De plus nous introduisons une limite qui permet de décrire le comportement de certaines fonctions au voisinage d'un nombre réel.

## 5.1 La limite d'une fonction pour „$x$ vers l'infini“

Nous examinons des fonctions $f$ avec $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $I \to \mathbb{R}$ ($I$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, qui n'est pas borné à droite, c. à d. il n'existe pas de nombre réel $a$ tel que $x < a$ pour tout $x \in I$). Comment se comportent p.ex. les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$ si $x$ tend vers l'infini ? (voir la figure 5.1.1)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} \\ g(x) &= \frac{1}{x^2} \\ h(x) &= 1 + \frac{1}{x^2} \\ k(x) &= \frac{3x-1}{x} \end{aligned}$$

$f(x) = \frac{1}{x}$ s'approche de 0, $g(x) = \frac{1}{x^2}$ s'approche de 0. $h(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$ s'approche de 1, $k(x)$ s'approche de 3. Par „$f(x)$ s'approche de $a$“ nous entendons que la distance entre les valeurs de la fonction $f$ et le nombre $a$ tend vers 0 si $x$ tend vers l'infini.

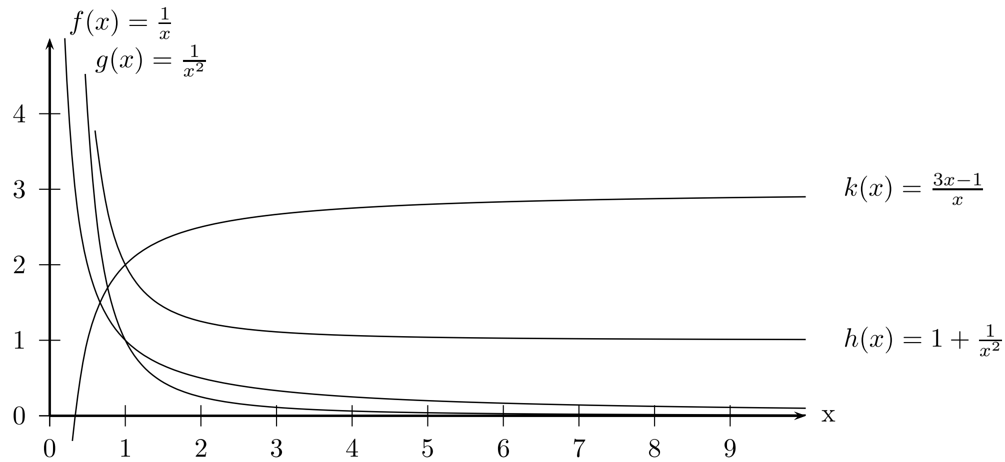


FIGURE 5.1.1 – Comportement d'une fonction pour $x$ tendant vers l'infini

Le nombre dont une fonction s'approche pour $x$ tendant vers l'infini est appelé „limite de la fonction (pour $x$ tendant vers l'infini)".

D'un autre côté il y a des fonctions qui tendent vers l'infini si $x$ tend vers l'infini (p.ex. $f(x) = 3x + 2$ tend vers $+\infty$ pour $x$ tendant vers $+\infty$, tandis que $f(x) = -3x + 2$ tend vers $-\infty$ si $x$ tend vers $+\infty$). Dans un premier pas nous allons définir de manière précise ce premier concept de la limite d'une fonction. Il s'agit de préciser la tournure „la fonction s'approche de $a$, si $x$ tend vers l'infini". $\infty$ et $-\infty$ sont des nombres non-réels. Par rapport au calcul des limites ils montrent souvent un comportement très différent des nombres réels.

### 5.1.1 Définitions et théorèmes

**Définition 5.1.1.** *Pour „$a$ est la limite de la fonction $f$ pour $x$ vers l'infini" on écrit :*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a$$

◊

L'abréviation provient du mot latin „limes" pour „limite", „frontière". Pour „$\lim_{x\to\infty} f(x) = a$" nous écrivons entre autre aussi „$f(x) \to a$ pour $x \to \infty$" (à lire comme „$f(x)$ tend vers $a$ pour $x$ qui tend vers l'infini").

**Définition 5.1.2.** $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ *si et seulement si pour tout $k > 0$, il existe un $x'$ tel que pour tout $x$ : si $x > x'$, alors $|f(x) - a| < k$*
*($f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle ; $D$ n'est pas borné à droite ; $x, x' \in D; a \in \mathbb{R}$).* ◊

$k$ est un nombre réel positif quelconque. La définition reflète la signification intuitive de „$f(x)$ s'approche de $a$, si $x$ tend vers l'infini", car si $a$ est la limite de $f$, nous pouvons choisir un $k$ positif aussi petit que souhaité. Nous trouverons toujours un $x'$ tel que pour tout $x$ : si $x > x'$, alors $|f(x) - a| < k$. Cela veut dire, qu'après ce $x'$ le segment entre les valeurs de la fonction et la limite est partout plus petit que $k$.

Nous illustrons la définition à l'aide de l'exemple 5.1.3.

**Exemple 5.1.3.** *La limite de la fonction $f(x) = \frac{2x-1}{x}$ ($x > 0$) est pour $x$ tendant vers l'infini le nombre 2. Si nous déterminons un $k > 0$, p.ex. $k = 0.5$, il y a sur l'axe des $x$ un $x'$ (p. ex. 3), tel que pour tout $x > x' = 3$ : $|f(x) - 2| < k$. Ainsi $f(4) = \frac{2\cdot4-1}{4} = 1.75$ et $2 - 1.75 = 0.25 < 0.5$. (voir figure 5.1.2)*

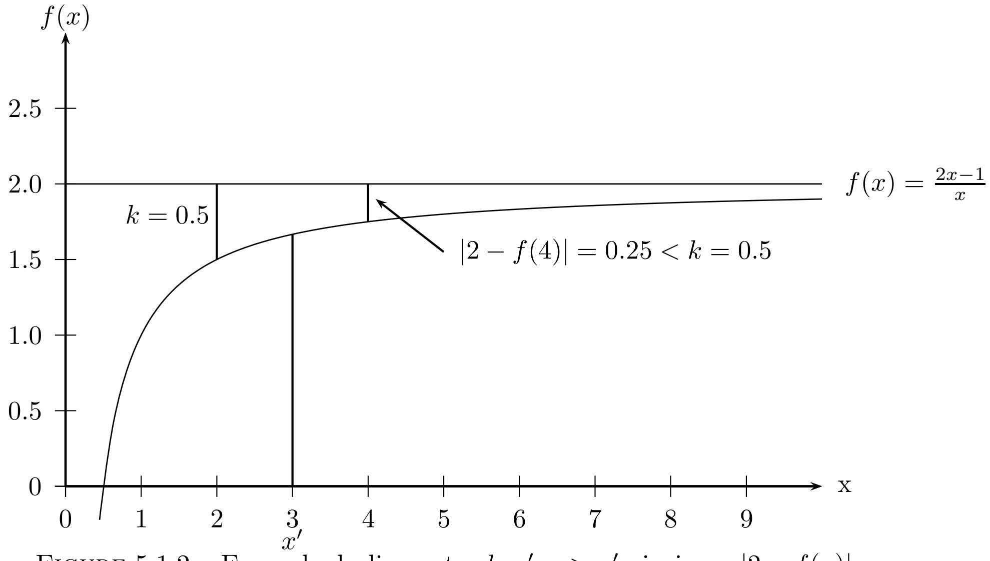


FIGURE 5.1.2 – Exemple du lien entre $k, x', x > x'$ ainsi que $|2 - f(x)|$

$\Diamond$

**Remarque 5.1.4.** *Le choix de $x'$ n'est pas déterminé d'une manière unique. Dans l'exemple on pourrait aussi choisir un $x'' < x'$ (p.ex. $2.5, 2.1, 2.00001$), tel que pour $x > x''$ : $|f(x) - 2| < k$. On pourrait aussi choisir le plus petit $x''$ possible. Dans l'exemple cela serait $f^{-1}(a - k) = f^{-1}(2 - 0.5) = 2$. De l'autre côté on pourrait choisir des nombres plus grands. Cela ne joue aucun rôle. Il suffit de trouver pour chaque $k > 0$ au moins un $x'$ tel que pour tout $x > x'$ : $|f(x) - 2| < k$. Dans l'exemple on a choisi $x' = f^{-1}(a - k) + 1$* $\Diamond$

**Remarque 5.1.5.** *Par la définition, la limite réelle d'une fonction est déterminée uniquement si elle existe. Nous l'illustrons à l'aide de l'exemple ci-dessus. Aucun nombre supérieur à 2 est une limite de cette fonction. Ainsi 3 n'est pas une limite de la fonction étudiée $f(x) = \frac{2x-1}{x}$ pour $x \to \infty$. Car il n'y a pas pour tout $k > 0$ un $x'$, tel que pour tout $x > x'$ : $|f(x) - 3| < k$. Nous choisissons pour le démontrer $k = 0.002$. Puisqu'il n'y a pas de $f(x) > 2$, il n'est pas possible que $|f(x) - 3| < 0.002$, car $|f(x) - 3| > 1$ pour tout $x$. Cette réflexion est valable pour des nombres autant petits que l'on veut mais supérieurs à 2. D'une manière analogue on peut montrer pour des nombres inférieurs à 2 qu'il n'est pas possible qu'ils soient la limite de la fonction. Ainsi 1.9 n'est pas la limite de $f(x)$ pour $x \to \infty$. Car pour $k = 0.01$ pour tout $x > 5000$ : $|f(x) - 1.9| > 0.01$, parce que $f(5000) = \frac{2 \cdot 5000 - 1}{5000} = 1.999\,8$ et donc $|1.9 - 1.9998| = 0.099\,8 > 0.01$. Ces réflexions montrent que la limite réelle d'une fonction est un nombre déterminé de manière unique, si la fonction tend vers une limite réelle (voir figures 5.1.3 et 5.1.4)*

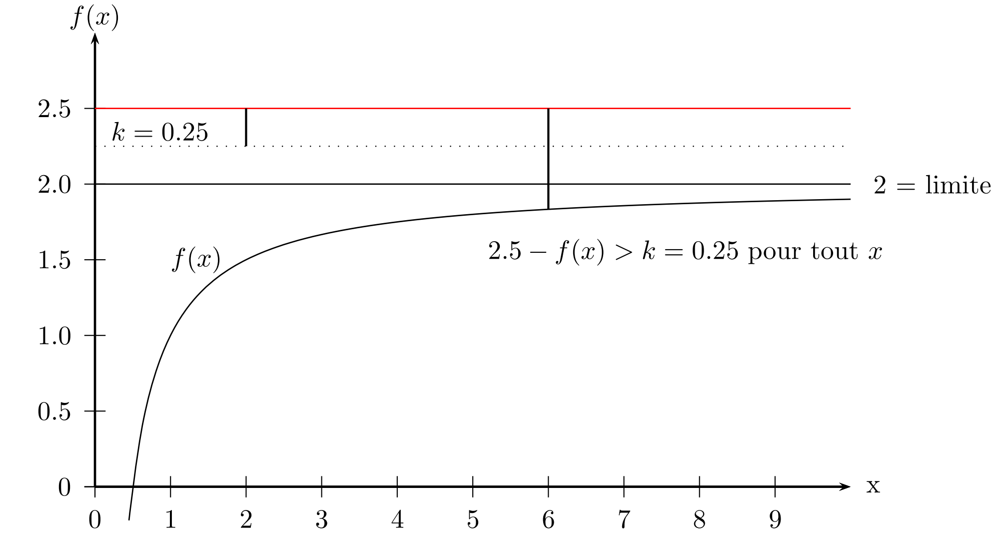


FIGURE 5.1.3 – Illustration du fait que la limite réelle d'une fonction est unique. $f(x)$ s'approche de 2.5, car $2.5 - f(x)$ devient plus petit pour des $x$ croissants - mais 2.5 n'est pas une limite de $f$. Pour $k = 0.25$ il n'existe aucun $x'$ tel que pour tout $x > x'$, $2.5 - f(x) < 0.25$. Cette différence est toujours plus grande que 0.5.

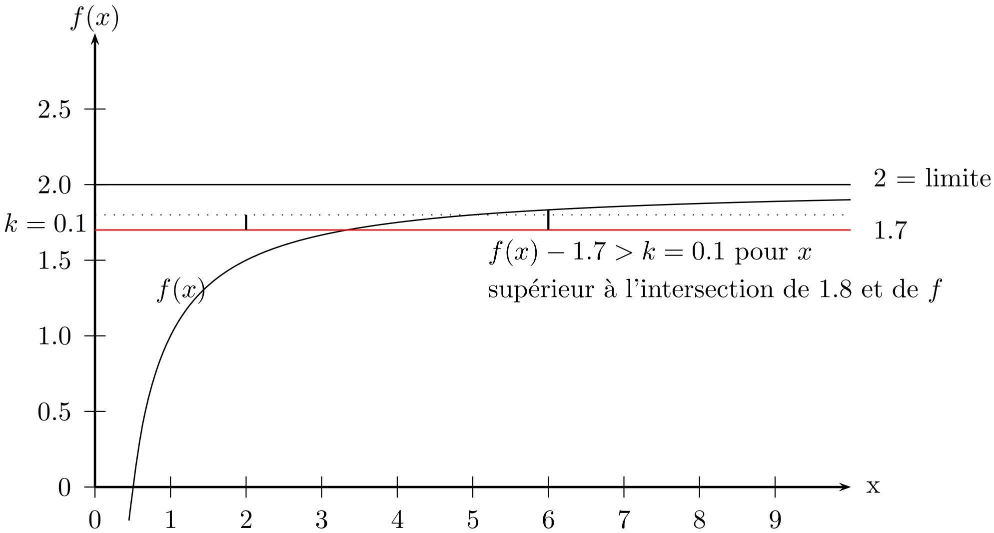


FIGURE 5.1.4 – Illustration du fait que la limite réelle d'une fonction est unique. 1.7 par exemple n'est pas une limite de $f$. $f(x)$ s'éloigne après l'intersection avec 1.7 de 1.7 et pour un $k$ assez petit, par exemple 0.1, il n'existe aucun $x'$ tel que pour tout $x > x'$, $f(x) - 1.7 < 0.1$. A partir de l'intersection de la fonction et de la constante $1.7 + 0.1$, cette différence est toujours plus grande que 0.1.

$\Diamond$

**Remarque 5.1.6.** *Si $a$ est la limite de $f$ pour $x \to \infty$, $f$ peut reprendre pour certains $x$ la limite $a$ ou non. La valeur d'une fonction constante est identique à la limite de la fonction en tout $x$. Dans l'exemple avec la figure 5.1.2 la limite de la fonction est une asymptote. Il n'y a aucune valeur de fonction identique à sa limite, mais les valeurs de fonction s'en approchent de plus en plus. Pour une fonction oscillante (voire figure 5.1.6) la fonction reprend sa limite en un nombre infini de points. Entre les points il y a des intervalles, où les valeurs de fonction sont différentes* *de la limite de la fonction.* ♢

**Remarque 5.1.7.** *On utilise la valeur absolue de la différence $f(x) - a$ dans la définition pour la raison suivante : une fonction peut - entre autre - s'approcher de la limite a d'en bas (voir figure 5.1.2), d'en haut (voir figure 5.1.5) ou d'une manière oscillante des deux côtes (voir figure 5.1.6). Si la fonction s'approche d'en haut, $f(x) - a > 0$, si elle s'approche d'en bas, $f(x) - a < 0$. Pour une fonction oscillante il y a des segments où $f(x) - a > 0$ et où $f(x) - a < 0$. In peut tenir compte de toutes ces variantes en utilisant la valeur absolue de la différence $f(x) - a$.*

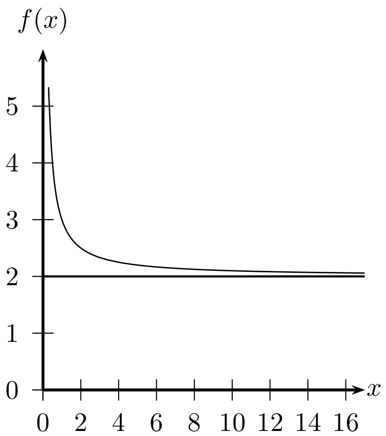


FIGURE 5.1.5 – La fonction s'approche d'en haut de la limite. Pour la limite $a = 2$ : $f(x) - a > 0$, tandis que pour l'exemple de la figure 5.1.2 $f(x) - a < 0$.

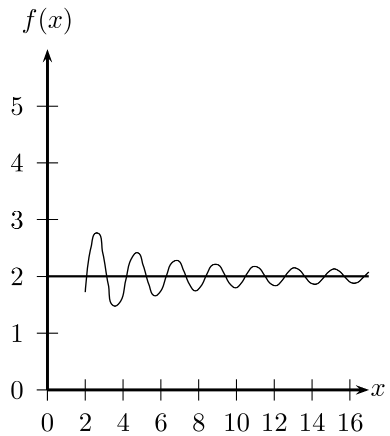


FIGURE 5.1.6 – Fonction oscillante avec la limite $a = 2$. Parfois $f(x) - a > 0$, parfois $f(x) - a < 0$, tandis que $|f(x) - a| \geq 0$ pour tout $x > 2$.

♢

**Remarque 5.1.8.** *Il faut souligner que les limites réelles sont des nombres et non pas une approximation à un nombre. Dans les mathématiques appliquées on utilise souvent des méthodes d'approximation. Pour calculer numériquement avec $\pi$ ou $\sqrt{2}$ nous utilisons des nombres qui s'approche suffisamment de ces nombres, comme nous ne pouvons souvent pas les utiliser eux-mêmes. Pour calculer de tels nombres approximatifs nous utilisons des méthodes d'approximation. La limite n'est pas identique au résultat d'une telle méthode. Il s'agit d'un nombre uniquement déterminé et peut p.ex. être un nombre non-rationnel comme $\pi, \sqrt{2}$ ou $e$.* ♢

**Remarque 5.1.9.** *Si nous connaissons la limite a d'une fonction $f$ (pour $x$ vers l'infini), nous pouvons montrer à l'aide de la définition que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$. Ces démonstrations sont cependant souvent exigeantes de sorte que nous y renonçons en général. Nous allons par contre mentionner certains théorèmes qui permettent de calculer la limite pour certaines fonctions.* ♢

**Remarque 5.1.10.** *A part $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c \in \mathbb{R}$ il existe la possibilité de n'avoir aucune limite pour une fonction, même si celle-ci est bornée. Une fonction est bornée si il existe un nombre positif réel a tel que $|f(x)| < a$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Nous donnons un exemple. Supposons que pour $x \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned} \lfloor\rfloor &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \lfloor x \rfloor &:= \max\{z | z \leq x \text{ et } z \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

*$\lfloor x \rfloor$ est alors le nombre z entier ($z \in \mathbb{Z}$) qu'on obtient en biffant les chiffres après la virgule (commande Excel : „=tronque" pour „tronquer"). Ainsi $\lfloor 5.53 \rfloor = 5$ ($\lfloor\rfloor$ est alors une fonction réelle !). A l'aide de cette fonction nous définissions une autre fonction réelle*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \textit{pour } \frac{\lfloor x \rfloor}{2} \in \mathbb{Z} \\ -1 & \textit{autrement} \end{cases}$$

*Nous attribuons 1 au nombre réel x si $\lfloor x \rfloor$ est divisible par deux dans le domaine des nombres entiers, autrement nous attribuons $-1$. Ainsi $f(3.3) = -1$, car $\frac{3}{2} = 1.5 \notin \mathbb{Z}$ et $f(6.8) = 1$, car $\frac{6}{2} = 3 \in \mathbb{Z}$. Pour le graphique de la fonction on obtient (voir figure 5.1.7) :*

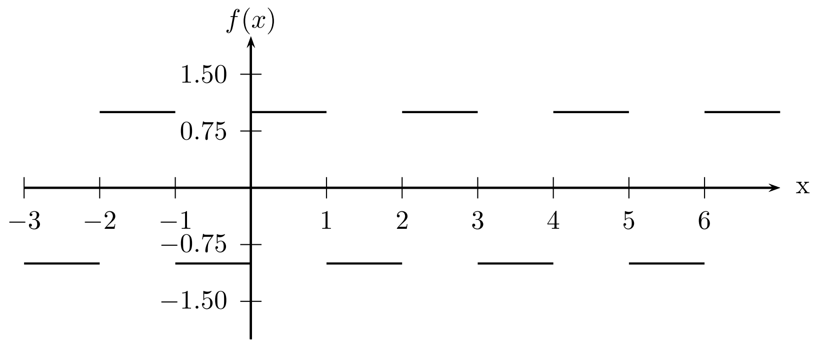


FIGURE 5.1.7 – Exemple d'une fonction bornée qui n'a pas de limite.

$\Diamond$

Si $f$ tend vers l'infini (pour $x \to \infty$) (p.ex. $y = x^2$) nous écrivons : $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$. Si la fonction tend vers $-\infty$ pour $x$ vers l'infini nous écrivons $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = -\infty$.

**Définition 5.1.11.** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ *si et seulement si pour tout $k > 0$ il existe un $x'$ tel que pour tout $x$ : si $x > x'$, alors $f(x) > k$.*
*($f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle ; $D$ n'est pas borné à droite ; $x, x' \in D; a \in \mathbb{R}$).* $\Diamond$

Nous donnons un exemple du fonctionnement de la définition :

**Exemple 5.1.12.** *Nous voulons examiner comment se comporte $f(x) = 0.5x - 1$ pour $x$ vers l'infini. Il est possible de trouver pour tout $k > 0$ un $x'$ tel que pour tout $x > x'$ : $f(x) > k$. Pour $k = 5$ on peut calculer un tel $x'$ facilement par $f^{-1}(k)+1$ (dans l'exemple on pourrait aussi choisir $f^{-1}(k)$, voir figure 5.1.8).*

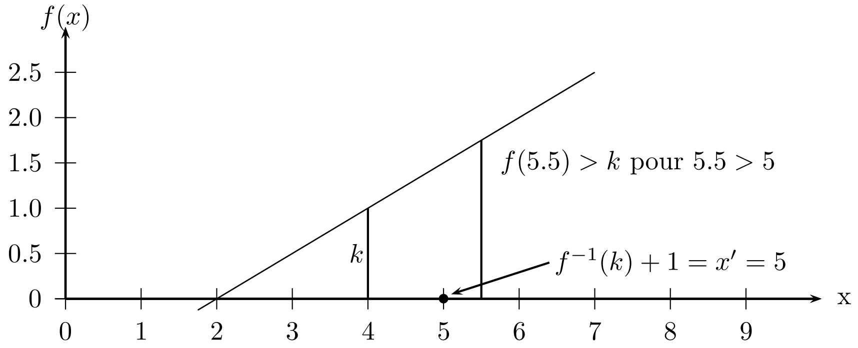


FIGURE 5.1.8 – Exemple du lien entre $k, x', x > x'$ : $f(x) > k$ pour $x > 5$

$\Diamond$

**Définition 5.1.13.** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ *si et seulement si pour tout* $k < 0$ *il existe un* $x'$ *tel que pour tout* $x$ *: si* $x > x'$*, alors* $f(x) < k$.
($f : D \to \mathbb{R}$ *est une fonction réelle ;* $D$ *n'est pas borné à droite ;* $x, x' \in D; a \in \mathbb{R}$). $\Diamond$

Faire pour la définition un graphique similaire à la figure 5.1.8 !

Nous introduisons maintenant des théorèmes qui permettent le calcul des limites de certaines fonctions réelles pour $x \to \infty$. Quelques preuves données à titre d'exemples se trouvent dans le dernier sous-chapitre.

**Théorème 5.1.14.** *Si* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x), \lim\limits_{x\to\infty} g(x) \in \mathbb{R}$, *alors*

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} g(x),$$

**Théorème 5.1.15.** *Si* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x), a \in \mathbb{R}$, *alors*

$$a \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (af(x))$$

**Théorème 5.1.16.** *Si* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x), \lim\limits_{x\to\infty} g(x) \in \mathbb{R}$, *alors*

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to\infty} f(x) \cdot \lim_{x\to\infty} g(x)$$

**Théorème 5.1.17.** *Si* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x), \lim\limits_{x\to\infty} g(x) \in \mathbb{R}$ *et* $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) \neq 0$, *alors*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to\infty} g(x)}$$

**Théorème 5.1.18.** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a}{x^n} = 0$ *(*$n > 0, a \in \mathbb{R}$*).*

**Théorème 5.1.19.** $\lim\limits_{x\to\infty} a = a$ *pour* $a \in \mathbb{R}$

Si nous utilisons ces règles il faut garantir que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ désignent des nombres réelles. L'art du calcul des limites consiste souvent en la stratégie suivante : en augmentant ou en réduisant nous essayons

1. de transformer le dénominateur de l'expression de sorte qu'on évite une division par 0.

2. de transformer les partie d'une expression pour qu'on obtienne des expressions de type $\lim_{x\to\infty} \frac{a}{x^n}$ $(n > 0, a \in \mathbb{R})$ qu'on peut remplacer par 0 en formant la limite et
3. de transformer les parties d'une expression pour qu'on obtienne des termes de la forme $\lim_{x\to\infty} a$, $a \in \mathbb{R}$, qu'on peut remplacer par $a$ en formant la limite.

Nous donnons pour 2. et 3. un premier exemple (pour 1. les exemples suivront).

**Exemple 5.1.20.** *Dans l'exemple*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2+x}{1+2x}$$

*le dénominateur et le numérateur tendent vers l'infini pour $x$ vers l'infini. Nous ne pouvons appliquer les règles introduites que si les expressions désignent des nombres réels. Nous pouvons cependant appliquer les règles en augmentant la fraction par $\frac{1}{x}$ :*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{2+x}{1+2x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}(2+x)}{\frac{1}{x}(1+2x)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x}+1}{\frac{1}{x}+2} \\
&= \frac{\lim_{x\to\infty}(\frac{2}{x}+1)}{\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{x}+2)} \\
&= \frac{\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x} + \lim_{x\to\infty} 1}{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} + \lim_{x\to\infty} 2} \\
&= \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

*L'équation* $\frac{\lim_{x\to\infty}(\frac{2}{x}+1)}{\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{x}+2)} = \frac{\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}+\lim_{x\to\infty}1}{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\lim_{x\to\infty}2}$ *est correcte, parce que* $\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}, \lim_{x\to\infty}1, \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}, \lim_{x\to\infty}2 \in \mathbb{R}$. *Par là le pas* $\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+1}{\frac{1}{x}+2} = \frac{\lim_{x\to\infty}(\frac{2}{x}+1)}{\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{x}+2)}$ *est justifié, car* $\lim_{x\to\infty}(\frac{2}{x}+1), \lim_{x\to\infty}(\frac{1}{x}+2) \in \mathbb{R}$. *Nous devons contrôler l'application correcte des règles en quelque sorte à reculons.* $\diamondsuit$

Nous retenons encore sans démonstration :

**Théorème 5.1.21.**
— *Pour* $a \in \mathbb{R}$ : $\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{pour } a > 1 \\ 1 & \text{pour } a = 1 \\ 0 & \text{pour } 0 < a < 1 \end{cases}$
— *Pour* $a \in \mathbb{R}$ : $\lim_{x\to\infty} a^{-x} = \begin{cases} 0 & \text{pour } a > 1 \\ 1 & \text{pour } a = 1 \\ \infty & \text{pour } 0 < a < 1 \end{cases}$
— *Si* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, *alors* $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$.
— $\lim_{x\to\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$
— *Pour* $a \in \mathbb{R}$ : $\lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty \quad (a > 1)$ *et* $\lim_{x\to\infty} \log_a x = -\infty \quad (0 < a < 1)$
— *Si* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ *et* $a \in \mathbb{R}$, *alors* $\lim_{x\to\infty} (af(x)) = \begin{cases} \infty & \text{pour } a > 0 \\ -\infty & \text{pour } a < 0 \end{cases}$
— *Si* $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ *et* $a \in \mathbb{R}$, *alors* $\lim_{x\to\infty} (af(x)) = \begin{cases} \infty & \text{pour } a < 0 \\ -\infty & \text{pour } a > 0 \end{cases}$
— *Si* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ *et* $a \in \mathbb{R}$, *alors* $\lim_{x\to\infty} (a + f(x)) = \infty$
— *Si* $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ *et* $a \in \mathbb{R}$, *alors* $\lim_{x\to\infty} (a + f(x)) = -\infty$
— $\lim_{x\to\infty} (f(x)^n) = \left(\lim_{x\to\infty} f(x)\right)^n$ *(*$n \in \mathbb{N}$*)*

— $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{g(x)} = \sqrt{\lim\limits_{x\to\infty} g(x)}$ *(pour* $(x) \geq 0)$

— $\lim\limits_{x\to\infty} e^{f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)}$

— $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(f(x)) = \ln(\lim\limits_{x\to\infty} f(x))$ *(pour* $f(x) > 0$*)*

— *Si* $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = -\infty$ *alors* $\lim\limits_{x\to\infty} a^{g(x)} = 0.$ $(a > 1, a \in \mathbb{R})$

— *Si* $f$ *est un polynôme du n-ième degré* $(n > 0)$,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} \infty & \textit{pour } a_n > 0 \\ -\infty & \textit{pour } a_n < 0 \end{cases}$$

### 5.1.2 Exercices

1. Calculer les limites suivantes :

   (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4-x}{2+x}$

   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(4 - \frac{8}{x}\right)$

   (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+3}{5x^2-1}$

   (d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+3}{x^2+3}$

   (e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2-11x-20}{3x+4}$

   (f) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{20x^2-7x-6}{4x-3}$

   (g) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{21x^2-6x-5}{3x-3}$

   (h) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{210x^3-34x^2-80x+24}{7x-3}$

2. Pour le revenu d'une branche économique en expansion on prédit le développement suivant : ($t = 0$ le moment actuel) :
   $Y(t) = \frac{210}{0.1+20e^{-0.5t}}$
   Décrire le comportement de la fonction pour $t$ tendant vers l'infini.
   Comment peut-on interpréter la limite économiquement ?

3. Supposons que la consommation $C$ de denrées dans un ménage soit une fonction du revenu $Y$ du ménage décrite par $C(Y) = \frac{40Y-140}{Y+8}$, $Y > 0$. Déterminer la limite pour $Y$ vers l'infini.

4. Calculer les limites suivantes :

   (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3-\frac{1}{x}}{5-\frac{2}{x^2}}$

   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-\frac{5}{x}}$

   (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{6x^3+4x^2-7}{x^3+x}$

   (d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{-a-b}{2x+d}\right)^3$

### 5.1.3 Solutions

1. On obtient :

   (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4-x}{2+x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}(4-x)}{\frac{1}{x}(2+x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{4}{x}-\frac{x}{x}}{\frac{2}{x}+\frac{x}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{4}{x}-1}{\frac{2}{x}+1} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4}{x}-1\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}+1\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}1}{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}1} =$
   $\frac{4\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-1}{2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+1} = \frac{(4\cdot0)-1}{(2\cdot0)+1} = -1$

   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(4 - \frac{8}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} 4 - \lim\limits_{x\to\infty} \frac{8}{x} = 4 - 8 \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 4 - (8 \cdot 0) = 4$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+3}{5x^2-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2+\frac{3}{x^2}}{5-\frac{1}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{3}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5-\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 2+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty} 5-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}} =$
$\frac{2+3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{5-0} = \frac{2+(3\cdot 0)}{5} = \frac{2}{5}$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+3}{x^2+3} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{3}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2}\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty} 1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}} =$
$\frac{2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{1+3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}} = \frac{(2\cdot 0)+(3\cdot 0)}{1+(3\cdot 0)} = 0$

(e) Pour pouvoir réduire la fraction il faut essayer de factoriser le numérateur tel que le dénominateur devient un des facteurs. Nous calculons alors la division polynomiale suivante : $\big(3x^2-11x-20\big) : \big(3x+4\big) = x-5$

$$\begin{array}{l}
-3x^2-4x \\ \hline
\quad -15x-20 \\
\quad\ \ 15x+20 \\ \hline
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Nous obtenons alors : $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-11x-20}{3x+4} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3x+4)(x-5)}{3x+4} = \lim\limits_{x\to\infty}(x-5) = \infty$

(f) $\big(20x^2-7x-6\big) : \big(4x-3\big) = 5x+2$

$$\begin{array}{l}
-20x^2+15x \\ \hline
\qquad 8x-6 \\
\quad\ -8x+6 \\ \hline
\qquad\quad 0
\end{array}$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{20x^2-7x-6}{4x-3} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{(4x-3)(5x+2)}{4x-3} = \lim\limits_{x\to\infty}(5x+2) = \infty$

(g) $\big(21x^2-6x-5\big) : \big(3x-3\big) = 7x+5+\dfrac{10}{3x-3}$

$$\begin{array}{l}
-21x^2+21x \\ \hline
\qquad 15x-5 \\
\quad\ -15x+15 \\ \hline
\qquad\quad 10
\end{array}$$

Comme le numérateur n'est pas divisible par $3x-3$ sans reste, nous ne pouvons pas calculer la limite avec les méthodes introduites.

(h) $\big(210x^3-34x^2-80x+24\big) : \big(7x-3\big) = 30x^2+8x-8$

$$\begin{array}{l}
-210x^3+90x^2 \\ \hline
\qquad 56x^2-80x \\
\quad\ -56x^2+24x \\ \hline
\qquad\quad -56x+24 \\
\qquad\qquad 56x-24 \\ \hline
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{210x^3-34x^2-80x+24}{7x-3} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(30x^2+8x-8\right)(7x-3)}{7x-3} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(30x^2+8x-8\right) = \infty$

2. $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{210}{0.1+20e^{-0.5t}} = \frac{\lim\limits_{t\to\infty} 210}{\lim\limits_{t\to\infty}(0.1+20e^{-0.5t})} = \frac{210}{\lim\limits_{t\to\infty} 0.1+\lim\limits_{t\to\infty} 20e^{-0.5t}} =$
$\frac{210}{0.1+20\lim\limits_{t\to\infty} e^{-0.5t}} = \frac{210}{0.1+(20\cdot 0)} = 2100$

3. $\lim\limits_{Y\to\infty}\frac{40Y-140}{Y+8} = \lim\limits_{Y\to\infty}\frac{40-\frac{140}{Y}}{1+\frac{8}{Y}} = \frac{\lim\limits_{Y\to\infty}\left(40-\frac{140}{Y}\right)}{\lim\limits_{Y\to\infty}\left(1+\frac{8}{Y}\right)} = \frac{\lim\limits_{Y\to\infty} 40-\lim\limits_{Y\to\infty}\frac{140}{Y}}{\lim\limits_{Y\to\infty} 1+\lim\limits_{Y\to\infty}\frac{8}{Y}} =$
$\frac{40-140\lim\limits_{Y\to\infty}\frac{1}{Y}}{1+8\lim\limits_{Y\to\infty}\frac{1}{Y}} = \frac{40-(140\cdot 0)}{1+(8\cdot 0)} = 40$

4. On obtient :

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x}}{5-\frac{2}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\frac{1}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5-\frac{2}{x^2}\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 3-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty} 5-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}} = \frac{3-0}{5-2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}} = \frac{3}{5-(2\cdot 0)} = \frac{3}{5}$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-\frac{5}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} -\frac{5}{x}} = e^{-5\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}} = e^{-5\cdot 0} = e^0 = 1$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^3+4x^2-7}{x^3+x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3\left(6+\frac{4}{x}-\frac{7}{x^3}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{6+\frac{4}{x}-\frac{7}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(6+\frac{4}{x}-\frac{7}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} =$
$\frac{\lim\limits_{x\to\infty}6+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}} = \frac{6+4\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-7\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}{1+0} = \frac{6+(4\cdot0)-(7\cdot0)}{1+0} = \frac{6+0-0}{1} = 6$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-a-b}{2x+d}\right)^3 = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-\frac{a}{x}-\frac{b}{x}}{2+\frac{d}{x}}\right)^3 = \left(\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-\frac{a}{x}-\frac{b}{x}}{2+\frac{d}{x}}\right)^3 = \left(\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{a}{x}-\frac{b}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{d}{x}\right)}\right)^3 =$
$\left(\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{a}{x}\right)-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{b}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}2+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{d}{x}}\right)^3 = \left(\frac{-a\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-b\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}{2+d\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}\right)^3 = \left(\frac{(-a\cdot0)-(b\cdot0)}{2+(d\cdot0)}\right)^3 = \left(\frac{0-0}{2+0}\right)^3 = 0$

## 5.2 La limite d'une fonction pour $x \to -\infty$

**Définition 5.2.1.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$ *si et seulement si pour tout* $k > 0$ *il existe un* $x'$ *tel que pour tout* $x$ *: si* $x < x'$*, alors* $|f(x) - a| < k$.
*(*$f : D \to \mathbb{R}$ *est une fonction réelle ;* $D$ *n'est pas borné à gauche ;* $x, x' \in D; a \in \mathbb{R}$*).* ◊

Cette définition correspond à la définition *5.1.2*. Uniquement la direction du symbole d'inégalité dans l'expression „$x < x'$" a changé.

Nous examinons un exemple :

**Exemple 5.2.2.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = y = \frac{2x-1}{x}$ $(x < 0)$. $f(x)$ *s'approche de* 2*, si* $x$ *diminue* $(x < 0)$. *Nous écrivons :* $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{x} = 2$. *(voir figure 5.2.9).*

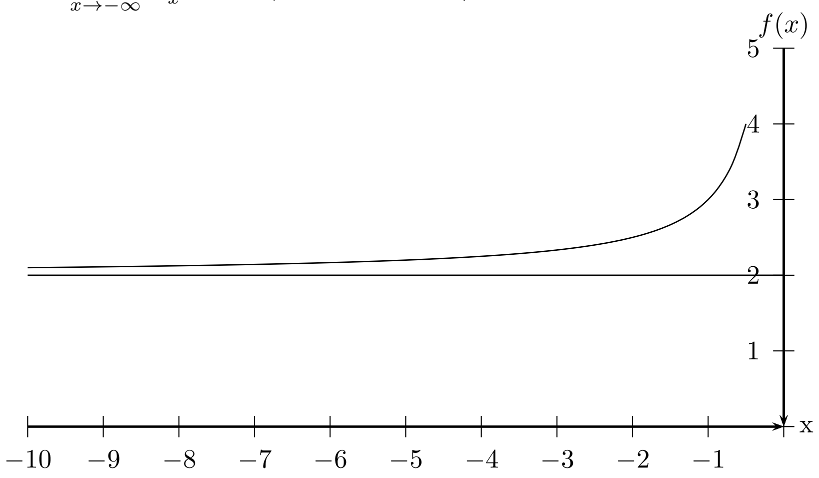


FIGURE 5.2.9 – Exemple d'une fonction avec une limite réelle pour $x \to -\infty$

◊

Pour calculer la limite pour $x \to -\infty$ nous appliquons de nouveau des théorèmes. En général les théorème formulés pour $x \to \infty$ restent valables. Il faut changer $\lim\limits_{x\to\infty}$ par $\lim\limits_{x\to-\infty}$. Parfois il faut reformuler les théorèmes. Exercice : réfléchir quels théorèmes sont valables pour $\lim\limits_{x\to-\infty}$ et après quelles reformulations.

Comme nous pouvons constater dans l'exemple 5.2.9 :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{x} = 2$$

Cela n'est pas valable pour toutes les fonctions ce que montre l'exemple suivant :

**Exemple 5.2.3.** $f(x) = \frac{2x+\sqrt{x^2+1}}{x}$ :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{2x+\sqrt{x^2+1}}{x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x}+\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}{\frac{x}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}{1} \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(2+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} 2 + \lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 2+\sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} \\
&2+\sqrt{\lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}} \\
&= 2+\sqrt{1+0} = 2+1 = 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+\sqrt{x^2+1}}{x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2x}{x}+\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}{\frac{x}{x}} \overset{*}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2-\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}{1} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\left(2-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) \\
&= \lim_{x\to-\infty} 2 - \lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 2-\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} \\
&= 2-\sqrt{\lim_{x\to-\infty} 1 + \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}} \\
&= 2-\sqrt{1+0} = 2-1 = 1
\end{aligned}$$

*(voir figure 7.3.4). (* remarque pour le passage de la deuxième à la troisième équation : pour* $x < 0$ *:* $-\sqrt{x^2} = x$*)*

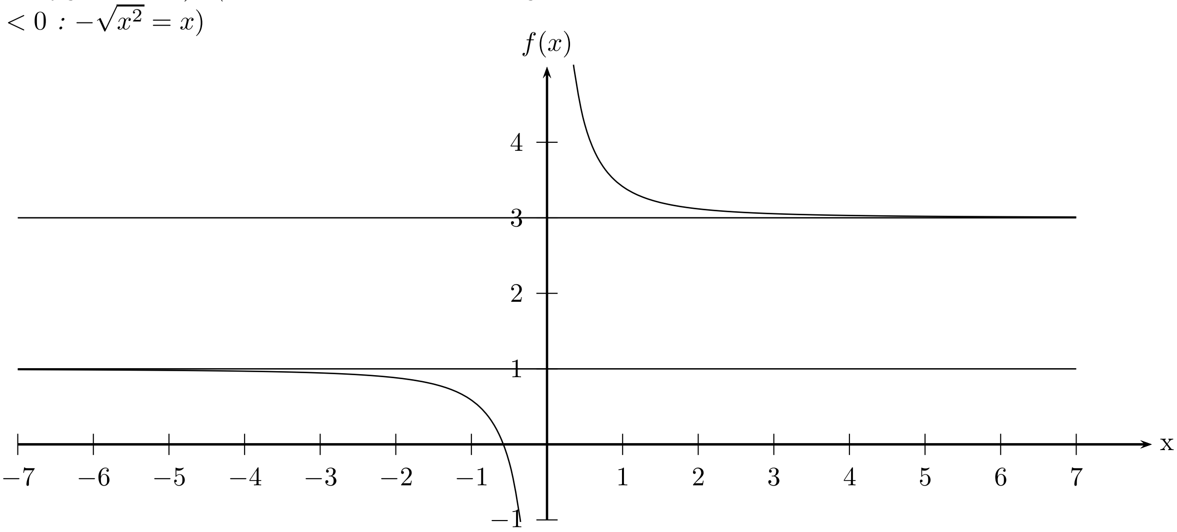


FIGURE 5.2.10 – Exemple d'une fonction avec des limites différentes pour $x \to \infty$ et pour $x \to -\infty$

◊

Pour $x \to -\infty$ la fonction $f$ peut de nouveau tendre vers $-\infty$ ou vers $\infty$ :

**Définition 5.2.4.** $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ *si et seulement si pour tout* $k > 0$ *il existe un* $x'$ *tel que pour tout* $x < x'$ : $f(x) > k$.
($f : D \to \mathbb{R}$ *est une fonction réelle ;* $x, x' \in D$ *;* $D$ *n'est pas borné à gauche).* ♢

**Définition 5.2.5.** $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ *si et seulement si pour tout* $k < 0$ *il existe un* $x'$ *tel que pour tout* $x < x'$ : $f(x) < k$.
($f : D \to \mathbb{R}$ *est une fonction réelle ;* $x, x' \in D$ *;* $D$ *n'est pas borné à gauche).* ♢

**Exemple 5.2.6.** $f(x) = x^3$ *tend pour* $x \to -\infty$ *vers* $-\infty$, *tandis que* $f(x) = -x^3 + 3$ *tend pour* $x \to -\infty$ *vers* $\infty$ *(voir figure 5.2.11).*

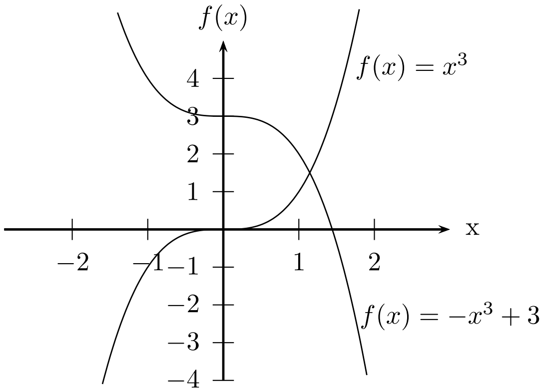


FIGURE 5.2.11 – Exemples de comportements de fonctions pour $x \to \infty$ et $x \to -\infty$

♢

**Théorème 5.2.7.** *Pour un polynôme* $f$ *du* $n$*-ième degrés* $(n > 0)$ *on peut affirmer :*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} \infty & \text{pour } a_n > 0 \text{ et } n \text{ pair} \\ -\infty & \text{pour } a_n < 0 \text{ et } n \text{ pair} \\ -\infty & \text{pour } a_n > 0 \text{ et } n \text{ impair} \\ \infty & \text{pour } a_n < 0 \text{ et } n \text{ impair} \end{cases}$$

## 5.3 La limite d'une fonction pour $x \to x_0$

Pour étudier le comportement d'une fonction à l'intérieur d'un intervalle ou au voisinage d'un point $x_0$, nous avons besoin du concept de la limite d'une fonction réelle $f$ pour $x \to x_0$. Nous définissons d'abord le terme „voisinage"

**Définition 5.3.1.** *Un voisinage de* $x_0$ *est un intervalle* $]x_0 - r; x_0 + r[$ *avec* $r > 0$. *On écrit souvent pour un voisinage de* $x_0$ : $V(x_0)$ *et si le voisinage est spécifié par un* $r$ : $V_r(x_0)$ ♢

**Définition 5.3.2.** $x_0 \in \mathbb{R}$ *est un point d'accumulation d'un ensemble* $D \subset \mathbb{R}$ *si et seulement si dans tout voisinage de* $x_0$ *il existe un* $x \in D$, $x_0 \neq x$. *La définition ne réclame pas que* $x_0 \in D$ *mais ne l'exclue pas.* ♢

**Exemple 5.3.3.** $5 \notin ]5, 10]$, *mais* $V_r(5) = ]5-r; 5+r[ \cap ]5, 10] \neq \emptyset$ *pour tout* $r > 0$. *Par conséquent 5 est un point d'accumulation de* $]5, 10]$, *sans être élément de cet ensemble.* ♢

Nous pouvons maintenant passer à la définition de la limite d'une fonction réelle $f : D \to \mathbb{R}$ pour $x \to x_0$. Elle exprime que les valeurs de la fonction $f(x)$ s'approchent de la limite $a$ si l'on considère des éléments $x$ de voisinages de $x_0$ de plus en plus restreints. „de plus en plus restreints" signifie que le $r$ en $V_r(x_0)$ décroît.

**Définition 5.3.4.** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ *si et seulement si pour tout* $k > 0$ *il existe un* $r > 0$ *tel que pour tout* $x$ *avec* $0 < |x_0 - x| < r : |f(x) - a)| < k$
*(*$f : D \to \mathbb{R}$ *est une fonction réelle ;* $x \in D; a \in \mathbb{R}$ *;* $x_0$ *est un point d'accumulation de* $D$ *;* $x_0$ *peut, mais ne doit pas être élément de* $D$ *;* $k, r \in \mathbb{R}$*).* $\lozenge$

**Remarque 5.3.5.** *La condition* $0 < |x_0 - x| < r$ *est équivalente à* $x_0 - r < x < x_0 + r$ *pour* $x \neq x_0$. $\lozenge$

**Remarque 5.3.6.** *Avec la notion du voisinage et* $f(A) := \{f(x) : x \in A\}$ *on peut définir d'une manière équivalente :* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ *si et seulement si pour tout* $k > 0$ *il existe un* $r > 0$ *tel que* $f(V_r(x_0) \setminus \{x_0\}) \subset V_k(a)$. $\lozenge$

Pour montrer le fonctionnement de la définition à l'aide d'un graphique nous étudions l'

**Exemple 5.3.7.** *Nous regardons la fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^2$ *en* $x_0 = 3$. *On peut affirmer* $\lim\limits_{x \to 3} x^2 = 9$ *(voir figure 5.3.12).*

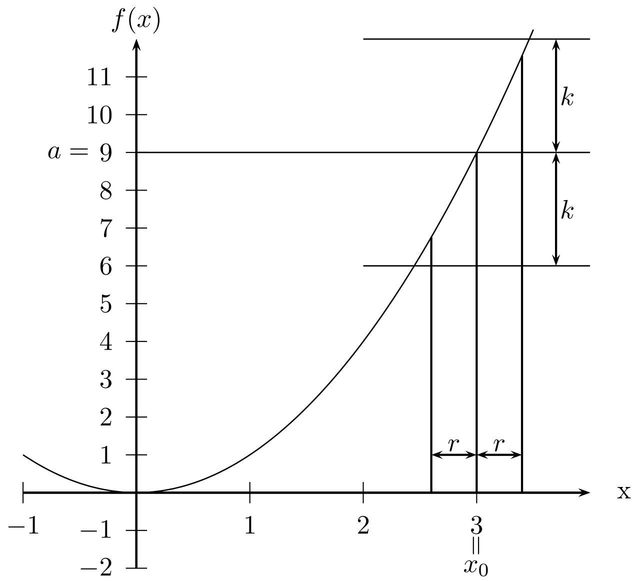


FIGURE 5.3.12 – Pour $k > 0$ il existe un $r > 0$, tel que $|f(x) - a| < k$ pour $|x - x_0| < r$

$\lozenge$

**Remarque 5.3.8.** $x_0$ *peut être élément du de domaine de définition* $D$ *ou non.* $\lozenge$

**Remarque 5.3.9.** *Tandis qu'une fonction a tout au plus une limite pour* $x \to \infty$ *et* $x \to -\infty$*, une fonction peut avoir une limite pour* $x \to x_0$ *en tout* $x_0 \in \mathbb{R}$ *! Pour* $y = x^2$ *on peut même affirmer que pour tout* $x_0 \in \mathbb{R}$ *:*

$$\lim_{x \to x_0} x^2 = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = x_0^2$$

*(p.ex.* $\lim\limits_{x\to 4} x^2 = 16 = 4^2$; $\lim\limits_{x\to 11} x^2 = 121 = 11^2$*). C'est pourquoi on pourrait sur la base de cet exemple penser que l'expression* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *n'apporte rien. L'affirmation* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ *n'est cependant pas un théorème - elle vaut seulement pour certaines fonctions et pour certaines fonctions uniquement dans certains intervalles. Examinons un exemple concret : Pour* $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-2}$*, on peut montrer que* $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x-2} = 1$*, bien que* $f(2)$ *n'existe pas dans les nombres réelles (division par* $0$ *(*$= 2-2$*) et par conséquent* $2 \notin D$*). La fonction* $f$ *a en* $x = 2$ *un trou. Malgré ce fait on peut trouver pour tout* $k > 0$ *un* $r > 0$ *tel que pour* $|2-x| < r : |f(x)-1| < k$*. La fonction* $f$ *a pour* $x \to x_0$ *en* $x_0 = 2$ *la limite* $1$*. On verra des exemples supplémentaires par la suite.* ♢

**Remarque 5.3.10.** *Il vaut la peine de montrer pour des fonctions qui n'ont pas de limite en* $x_0$ *pour* $x$ *tendant vers* $x_0$*, comment la définition fonctionne et comment elle mène au refus de l'hypothèse qu'il s'y trouve une limite (voir figure 5.3.13 et 5.3.14).*

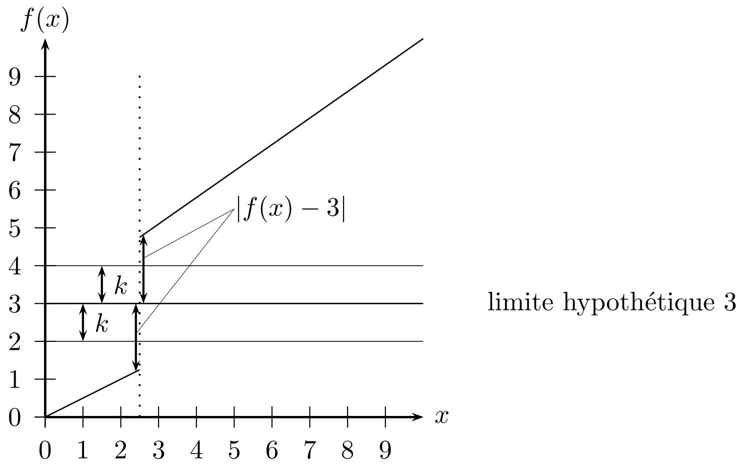


FIGURE 5.3.13 – En $x_0$=2.5 la limite n'existe pas pour la fonction définie par intervalles $f(x) = 0.5x$ en $[0, 2.5]$ et $f(x) = 0.7x + 3$ in $]2.5, \infty[$ pour $x$ vers 2.5, car il n'y a pas de $r$ pour des $k$ assez petits tel que pour tout $x$ avec $|x - x_0| < r : |f(x) - 3| < k$, car dans ce cas $|f(x) - 3| > k$. cela est valable pour des limites hypothétiques arbitraires entre 1.25 et 4.75 et encore plus pour les valeurs à l'extérieur de cet intervalle.

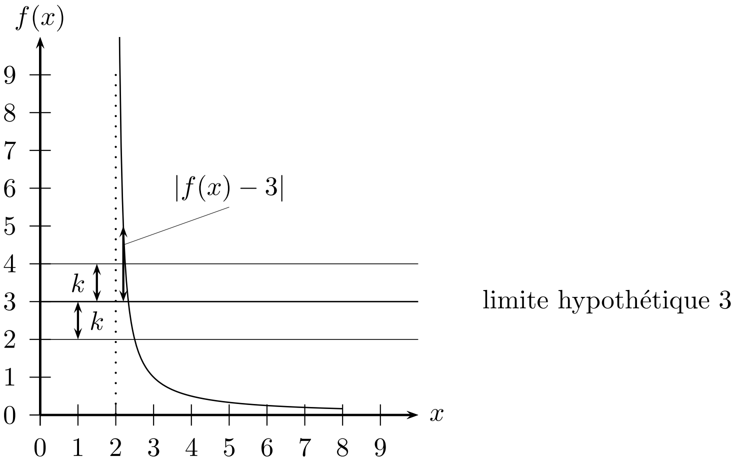


FIGURE 5.3.14 – En $x_0 = 2$ il n'y a pas de limite réelle pour la fonction $f(x) = \frac{1}{x-2}$ pour $x$ tendant vers 2, car pour des $k$ assez petits il n'y a pas de $r$ tel que pour tout $x$ avec $|x - x_0| < r$ : $|f(x) - 3| < k$, car on peut retenir dans ce cas $|f(x) - 3| > k$. Cela est valable pour des limites hypothétiques arbitraires.

$\diamondsuit$

Comme par rapport aux limites pour $x \to \infty$ et pour $x \to -\infty$ nous utilisons des théorèmes pour calculer la limite pour $x \to x_0$ de la fonction $f$. A cause de l'importance de certains théorèmes pour la suite nous fournissons les preuves des sept premiers dans le dernier sous-chapitre.

**Théorème 5.3.11.** $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ *pour* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x), \lim\limits_{x \to x_0} g(x) \in \mathbb{R}$

**Théorème 5.3.12.** $\lim\limits_{x \to x_0} (bf(x) = b \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *pour* $b, \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$

**Théorème 5.3.13.** $\lim\limits_{x \to x_0} a = a$ *(pour* $a \in \mathbb{R}$*)*

**Théorème 5.3.14.** $\lim\limits_{x \to x_0} fg\,(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \lim\limits_{x \to x_0} g\,(x)$ *pour* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x), \lim\limits_{x \to x_0} g(x) \in \mathbb{R}$

**Théorème 5.3.15.** $\lim\limits_{x \to x_0} x^n = x_0^n$ *pour* $x, x_0 \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$

Sur la base de ces théorèmes on peut affirmer pour les polynômes que $\lim\limits_{x \to x_0} f\,(x) = f\,(x_0)$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$.

**Théorème 5.3.16.** $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$ *pour* $\lim\limits_{x \to x_0} g\,(x) \neq 0$ *et* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x), \lim\limits_{x \to x_0} g(x) \in \mathbb{R}$.

**Théorème 5.3.17.** *Si* $f$ *est bijective et* $\lim\limits_{x \to x_0} f\,(x) = a \in \mathbb{R}$, *alors* $\lim\limits_{y \to a} f^{-1}\,(y) = x_0$.

**Théorème 5.3.18.** $\lim\limits_{x \to x_0} f\,(x) = f\,(x_0)$ *vaut pour les fonctions exponentielles, pour les fonctions rationnelles ainsi que pour les fonctions racine et logarithme à l'intérieur de leurs domaines de définition („intérieur" veut dire, qu'on ne considère pas les bords du domaine de définition).*

**Théorème 5.3.19.** *Si* $\lim\limits_{x \to x_0} f\,(x) = a$ *et* $\lim\limits_{x \to a} g\,(x) = b$, *alors* $\lim\limits_{x \to x_0} g\,(f\,(x)) = b$, *pour* $a, b \in \mathbb{R}$ *(composition)*

Il faut souligner que cette règle de composition n'est pas valable pour $x \to \pm\infty$.

**Théorème 5.3.20.** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h)$

Pour „$x$ tend vers $x_0$“ on peut tout aussi bien dire que la différence $h := x - x_0$ tend vers 0. C'est pourquoi on peut remplacer dans les théorèmes cités d'abord $x \to x_0$ par $h \to 0$ et ensuite „$x$“ par „$x_0 + h$“. Cela se fait dans beaucoup de livres. On utilise au lieu de $h$ souvent $\Delta$ (= le delta grec pour „différence“)

Un exemple de calcul :

**Exemple 5.3.21.** $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-3x+2}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-1)(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2}(x-1) = \lim\limits_{x \to 2} x - \lim\limits_{x \to 2} 1 = 2 - 1 = 1$
*Il faut souligner que la distribution de $\lim\limits_{x \to 2}$ sur la première fraction, à savoir*

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} \underset{faux\,!!!!}{=} \frac{\lim\limits_{x \to 2} \left(x^2 - 3x + 2\right)}{\lim\limits_{x \to 2} (x - 2)},$$

*ne serait pas correcte, car $\lim\limits_{x \to 2}(x-2) = \lim\limits_{x \to 2} x - \lim\limits_{x \to 2} 2 = 2 - 2 = 0$ et la division par 0 n'est pas définie dans les nombres réelles. C'est pourquoi pour la même fonction et pour un $x_0$ spécifique une reformulation (augmentation, factorisation et réduction, etc.) peut s'imposer sans être nécessaire pour d'autres $x_0$ :*

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} \underset{correct\,!}{=} \frac{\lim\limits_{x \to 3} \left(x^2 - 3x + 2\right)}{\lim\limits_{x \to 3} (x - 2)} &= \frac{\lim\limits_{x \to 3} x^2 - \lim\limits_{x \to 3} 3x + \lim\limits_{x \to 3} 2}{\lim\limits_{x \to 3} x - \lim\limits_{x \to 3} 2} \\
&= \frac{9 - 3 \lim\limits_{x \to 3} x + 2}{3 - 2} = \frac{9 - 3 \cdot 3 + 2}{1} = 2
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

### 5.3.1 Exercices

Trouver les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{5x^3-4}{x^2}$
2. $\lim\limits_{y \to 12} \frac{2y+1}{5y^5-y}$
3. $\lim\limits_{y \to \infty} \frac{2y+1}{5y^5-y}$
4. $\lim\limits_{y \to -\infty} \frac{2y+1}{5y^5-y}$ (facultatif)
5. $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x^3}{8}$
6. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3}{8}$
7. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{8}{x^3}$
8. $\lim\limits_{x \to 5} \frac{8}{x^3}$
9. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{8}{x^3}$
10. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+3x-4}{2x^2-9x+7}$
11. $\lim\limits_{x \to \frac{4}{5}} \frac{3x+8}{15x^2+28x-32}$
12. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{15x^2+28x-32}{3x+8}$
13. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{4}} \frac{168x^3+206x^2-30x-8}{56x^2-6x-2}$
14. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{168x^3+206x^2-30x-8}{56x^2-6x-2}$

### 5.3.2 Solutions

1. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{5x^3-4}{x^2} = \frac{\lim\limits_{x\to 3}\left(5x^3-4\right)}{\lim\limits_{x\to 3} x^2} = \frac{\lim\limits_{x\to 3} 5x^3 - \lim\limits_{x\to 3} 4}{9} = \frac{5\lim\limits_{x\to 3} x^3 - 4}{9} = \frac{(5\cdot 27)-4}{9} = \frac{131}{9}$

2. $\lim\limits_{y\to 12} \frac{2y+1}{5y^5-y} = \frac{\lim\limits_{y\to 12}(2y+1)}{\lim\limits_{y\to 12}(5y^5-y)} = \frac{\lim\limits_{y\to 12} 2y + \lim\limits_{y\to 12} 1}{\lim\limits_{y\to 12} 5y^5 - \lim\limits_{y\to 12} y} = \frac{2\lim\limits_{y\to 12} y + 1}{5\lim\limits_{y\to 12} y^5 - 12} =$
$\frac{(2\cdot 12)+1}{(5\cdot 12^5)-12} = \frac{25}{1244\,148}$

3. $\lim\limits_{y\to\infty} \frac{2y+1}{5y^5-y} = \lim\limits_{y\to\infty} \frac{\frac{2}{y^4}+\frac{1}{y^5}}{5-\frac{1}{y^4}} = \frac{\lim\limits_{y\to\infty}\left(\frac{2}{y^4}+\frac{1}{y^5}\right)}{\lim\limits_{y\to\infty}\left(5-\frac{1}{y^4}\right)} = \frac{\lim\limits_{y\to\infty}\frac{2}{y^4} + \lim\limits_{y\to\infty}\frac{1}{y^5}}{\lim\limits_{y\to\infty} 5 - \lim\limits_{y\to\infty}\frac{1}{y^4}} =$
$\frac{2\lim\limits_{y\to\infty}\frac{1}{y^4}+0}{5-0} = \frac{(2\cdot 0)+0}{5-0} = 0$

4. $\lim\limits_{y\to -\infty} \frac{2y+1}{5y^5-y} = \lim\limits_{y\to -\infty} \frac{\left(\frac{2}{y^4}\right)+\left(\frac{1}{y^5}\right)}{5-\left(\frac{1}{y^4}\right)} = \frac{\lim\limits_{y\to -\infty}\left(\frac{2}{y^4}+\frac{1}{y^5}\right)}{\lim\limits_{y\to -\infty}\left(5-\frac{1}{y^4}\right)} =$
$\frac{\lim\limits_{y\to -\infty}\left(\frac{2}{y^4}\right) + \lim\limits_{y\to -\infty}\left(\frac{1}{y^5}\right)}{\lim\limits_{y\to -\infty} 5 - \lim\limits_{y\to -\infty}\left(\frac{1}{y^4}\right)} = \frac{2\lim\limits_{y\to -\infty}\left(\frac{1}{y^4}\right)+0}{5-0} = \frac{(2\cdot 0)}{5} = 0$

5. $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x^3}{8} = \frac{1}{8}\lim\limits_{x\to 5} x^3 = \frac{1}{8}5^3 = \frac{125}{8}$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3}{8} = \frac{1}{8}\lim\limits_{x\to 0} x^3 = \frac{1}{8}0^3 = 0$

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{8}{x^3} = 8\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^3} = 8\cdot 0 = 0$

8. $\lim\limits_{x\to 5} \frac{8}{x^3} = 8\lim\limits_{x\to 5} \frac{1}{x^3} = 8\frac{\lim\limits_{x\to 5} 1}{\lim\limits_{x\to 5} x^3} = 8\frac{1}{5^3} = \frac{8}{125}$

9. $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{8}{x^3} = 8\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$

10. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+3x-4}{2x^2-9x+7} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x+4)(x-1)}{(2x-7)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x+4)}{(2x-7)} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(x+4)}{\lim\limits_{x\to 1}(2x-7)} = \frac{\lim\limits_{x\to 1} x + \lim\limits_{x\to 1} 4}{\lim\limits_{x\to 1} 2x - \lim\limits_{x\to 1} 7} =$
$\frac{1+4}{2\lim\limits_{x\to 1} x - 7} = \frac{5}{(2\cdot 1)-7} = -1$

11. En remplaçant $x$ par $\frac{4}{5}$ dans le dénominateur il en résulterait une division par 0. Nous essayons de factoriser le dénominateur, pour pouvoir réduire la fraction.
$$\begin{array}{l}
\big(\quad 15x^2 + 28x - 32\big) : \big(3x+8\big) = 5x-4 \\
\underline{-\,15x^2 - 40x} \\
\qquad\quad -\,12x - 32 \\
\qquad\quad \underline{\quad 12x + 32} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$
$\lim\limits_{x\to\frac{4}{5}} \frac{3x+8}{15x^2+28x-32} = \lim\limits_{x\to\frac{4}{5}} \frac{3x+8}{(5x-4)(3x+8)} = \lim\limits_{x\to\frac{4}{5}} \frac{1}{(5x-4)}$ Comme $5\cdot\frac{4}{5}-4 = 0$, il n'y a pas de solution avec les méthodes introduites.

12. $3\cdot 3+8 = 17$. Nous pouvons - en sautant l'application de quelques règles - remplacer directement $x$ par 3 : $\lim\limits_{x\to 3} \frac{15x^2+28x-32}{3x+8} = \frac{15\cdot 3^2+28\cdot 3-32}{3\cdot 3+8} = 11$

13. En remplaçant $x$ par $\frac{1}{4}$ dans le dénominatgeur : $56\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 6\cdot\frac{1}{4} - 2 = 0$
Nous essayons de factoriser :
$$\begin{array}{l}
\big(\quad 168x^3 + 206x^2 - 30x - 8\big) : \big(56x^2 - 6x - 2\big) = 3x+4 \\
\underline{-\,168x^3 \;\; + 18x^2 \;\; + 6x} \\
\qquad\qquad\quad 224x^2 - 24x - 8 \\
\qquad\qquad \underline{-\,224x^2 + 24x + 8} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$
On obtient : $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}} \frac{168x^3+206x^2-30x-8}{56x^2-6x-2} = \lim\limits_{x\to\frac{1}{4}} \frac{\left(56x^2-6x-2\right)(3x+4)}{56x^2-6x-2} = \lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}(3x+4) = \frac{19}{4}$

14. $56 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 - 2 = 210$. Nous pouvons - en sautant l'application de quelques règles - remplacer :
$\lim\limits_{x \to 2} \frac{168x^3+206x^2-30x-8}{56x^2-6x-2} = \frac{168 \cdot 2^3+206 \cdot 2^2-30 \cdot 2-8}{56 \cdot 2^2-6 \cdot 2-2} = 10$

## 5.4 Limites à droite et à gauche en $x_0$

Une fonction peut tendre vers l'infini positif ou négatif pas uniquement pour $x \to \infty$, mais aussi pour $x \to x_0$.

**Exemple 5.4.1.** *La fonction* $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ *tend vers l'infini pour* $x \to 2$ *(voir figure 5.4.15).*

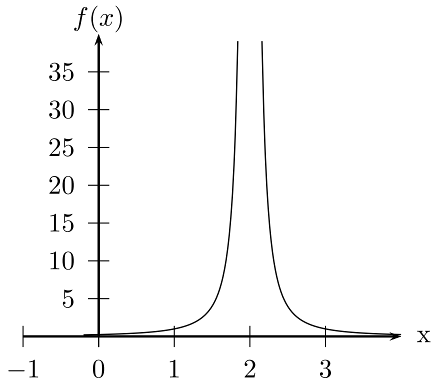


FIGURE 5.4.15 – Exemple d'une fonction qui tend vers l'infini pour $x$ tendant vers $x_0 = 2$

◊

De plus une fonction peut faire preuve d'un comportement différent à gauche et à droite d'un $x_0$ selon qu'on s'approche de $x_0$ par la gauche ou par la droite :

**Exemple 5.4.2.** *La fonction* $f(x) = \frac{1}{(x-2)^3}$ *tend vers* $-\infty$, *si l'on s'approche de* 2 *par la gauche et vers* $\infty$, *si l'on s'approche de* 2 *par la droite (voir figure 5.4.16).*

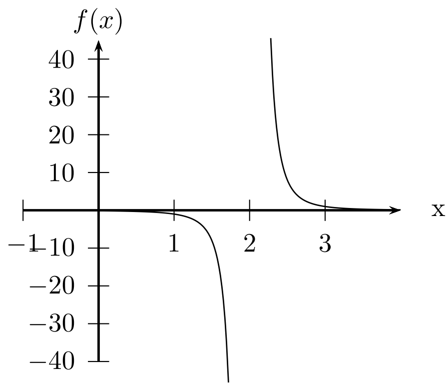


FIGURE 5.4.16 – Exemple d'une fonction qui pour $x$ tendant vers $x_0 = 2$ fait preuve de comportements différents à droite et à gauche

◊

Pour détecter de tels comportements nous avons besoin des concepts de la limite à droite et à gauche.

**Définition 5.4.3.** $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a$ *si et seulement si pour tout* $k > 0$ *il existe un* $r > 0$ *tel que :* *si* $0 < x - x_0 < r$, *alors* $|f(x) - a| < k$.
($f : D \to \mathbb{R}$ *est une fonction réelle ;* $x \in D; a \in \mathbb{R}$ *;* $x_0$ *est un point d'accumulation de* $D\cap\ ]x_0, \infty[$ *pouvant être élément de* $D$ *ou non*). ♢

" $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a$" se lit comme : „la limite à droite de $f$ pour $x$ vers $x_0$ est égale à $a$." ou „$f(x)$ tend vers $a$ pour $x$ tendant vers $x_0$ à droite".

**Définition 5.4.4.** $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = a$ *si et seulement si pour tout* $k > 0$ *il existe un* $r > 0$ *tel que :* *si* $0 < x_0 - x < r$, *alors* $|f(x) - a| < k$.
($f : D \to \mathbb{R}$ *est une fonction réelle ;* $x \in D; a \in \mathbb{R}$ *;* $x_0$ *est un point d'accumulation de* $D \cap\ ] - \infty, x_0[$ *pouvant être élément de* $D$ *ou non*). ♢

" $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = a$" se lit comme „la limite à gauche de $f$ pour $x$ vers $x_0$ est égal à $a$" ou „$f(x)$ tend vers $a$ pour $x$ tendant vers $x_0$ à gauche".

**Définition 5.4.5.** *Pour* $f : D \to \mathbb{R}$ *est une fonction réelle ;* $x \in D$, $x_0$ *est un point d'accumulation de* $D \cap\ ]x_0, \infty[$ *pour* $x \to x_0^+$ *et de* $D \cap\ ] - \infty, x_0[$ *pour* $x \to x_0^-$ *pouvant être élément de* $D$ *ou non :*

— $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$ *si et seulement si pour tout* $k > 0$ *il existe un* $r > 0$ *tel que : si* $0 < x - x_0 < r$, *alors* $f(x) > k$.
— $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$ *si et seulement si pour tout* $k < 0$ *il existe un* $r > 0$ *tel que : si* $0 < x - x_0 < r$, *alors* $f(x) < k$.
— $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$ *si et seulement si pour tout* $k > 0$ *il existe un* $r > 0$ *tel que : si* $0 < x_0 - x < r$, *alors* $f(x) > k$.
— $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ *si et seulement si pour tout* $k < 0$ *il existe un* $r > 0$ *tel que : si* $0 < x_0 - x < r$, *alors* $f(x) < k$.

♢

Pour les limites à droite et à gauche de $f$ pour $x$ vers $x_0$, des théorèmes similaires à ceux pour $x \to x_0$ sont valables.
De plus nous pouvons retenir :

**Théorème 5.4.6.** $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = \infty$

**Théorème 5.4.7.** $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \textit{pour } n \textit{ pair} \\ -\infty & \textit{pour } n \textit{ impair} \end{cases}$

**Théorème 5.4.8.** $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$ *pour* $a > 1$ *et* $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = \infty$ *pour* $0 < a < 1$.

**Définition 5.4.9.** *L'intérieur des intervalles* $[a, b]$, $]a, b]$, $[a, b[$ *et* $]a, b[$ *est* $]a, b[$. *Si le domaine de définition est un intervalle l'intérieur du domaine de définition est l'intérieur de cet intervalle. Si le domaine de définition comprend plusieurs intervalles, l'intérieur du domaine de définition est l'union des intérieurs de ces intervalles).* ♢

**Théorème 5.4.10.** *A l'intérieur du domaine de définition :* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *existe si et seulement si* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ *existent et que* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$. *Si* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *existe, alors* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

*Démonstration.* (i) Si les limites à gauche et à droite de $x_0$ ne sont pas identiques, il n'y a pas pour tout $k > 0$ un $r > 0$ tel que : si $|x_0 - x| < r$, alors $|f(x) - a| < k$. Pour trouver un tel $k$ pour lequel il n'existe pas de $r > 0$ tel que pour $|x_0 - x| < r$ : $|f(x) - a| < k$, il suffit de choisir un $k$ assez petit qui satisfait la condition $k < \left| \lim_{x \to x_0^+} f(x) - \lim_{x \to x_0^-} f(x) \right|$. C'est pourquoi $\lim_{x \to x_0} f(x)$ n'existe pas. (ii) Si $\lim_{x \to x_0} f(x)$, $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ et $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ existent, alors l'équation $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)$ résulte immédiatement des définitions des limites à gauche et à droite. □

**Pour les polynômes, les fonctions rationnelles, les fonctions racine, les fonctions exponentielles et les fonctions logarithme** la limite en $x_0$ est selon le théorème 5.3.18 identique à la valeur de la fonction $f(x_0)$ à l'intérieur de leur domaine de définition $D$ de ces fonctions. Avec le théorème 5.4.10 on obtient alors pour des $x_0$ à l'intérieur du domaine de définition

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Pour calculer la limite il suffit de calculer la valeur de fonction. Comme exercice on va calculer quand même dans les devoirs la limite pour de telles fonctions en $x_0 \in D$.

**Pour les fonctions rationnelles,** le domaine de définition ne comprend pas les zéros éventuels $x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n$ du dénominateur et $f(x_i)$, $1 \le i \le n$, n'est pas définie. Les zéros $x_i$ du dénominateur sont pourtant des points d'accumulation de $D$ sans appartenir à $D$. Il faut calculer $\lim_{x \to x_i^-} f(x)$ et $\lim_{x \to x_i^+} f(x)$ pour savoir si ces valeurs limites sont réelles ou pas et pour contrôler si les deux valeurs limites coïncide ou pas. Si elles coïncident la valeur limite $\lim_{x \to x_i} f(x)$ existe (réelle ou non-réelle), autrement pas. Si p.ex. $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \to x_0} f(x)$ n'existe pas !

De la même manière on procède pour d'autres types de fonction, qui ne sont pas définie en certains points d'accumulation de leur domaine de définition (p.ex. $f(x) = \frac{x}{|x|}$ avec le point d'accumulation 0 de $D$, qui n'est pas un élément du domaine de définition $D = \mathbb{R} \backslash \{0\}$).

**Pour les fonctions définies par intervalles** (voir page 145) il faut étudier $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ et $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ pour les nombres $x_0$ où les intervalles pour lesquelles les fonctions sont définies se touchent. Si ces deux valeurs existent et coïncident alors $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe et est identique à $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$. Si les deux limites ne coïncident pas $\lim_{x \to x_0} f(x)$ n'existe pas (p.ex. Si $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = 3$ et $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = 2$, $\lim_{x \to x_0} f(x)$ n'existe pas ! ).

**Exemple 5.4.11.**

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \textit{pour } x \ge 2 \\ \frac{1}{2}x + 1 & \textit{pour } x < 2 \end{cases}$$

2 *est le* $x_0$ *critique.*
2 *est un point d'accumulation du domaine de définition et en fait partie.*
$f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ *est défini.*
$\lim_{x \to 2} f(x)$ *existe-t-elle ?*
*Nous calculons* $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ *et* $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ *: à gauche de* 2 *la fonction est définie par* $\frac{x}{2} + 1$. *Nous*

*calculons :* $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ *à l'aide de nos théorèmes :* $\lim\limits_{x\to 2^-}(\frac{x}{2}+1) = \lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x}{2} + \lim\limits_{x\to 2^-} 1 = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 2^-} x + 1 = \left(\frac{1}{2}\cdot 2\right) + 1 = 2$
*À droite de* 2 *la fonction est définie par* $\frac{x}{2}$. *Nous calculons :* $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 2^+} x = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1.$
*La limite à gauche et à droite ne coïncident pas. La fonction fait un saut en* $x_0 = 2$ : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ *n'existe pas (voir figure 5.4.17).* $f(2)$ *ne peut pas coïncider avec une limite qui n'existe pas en* 2.

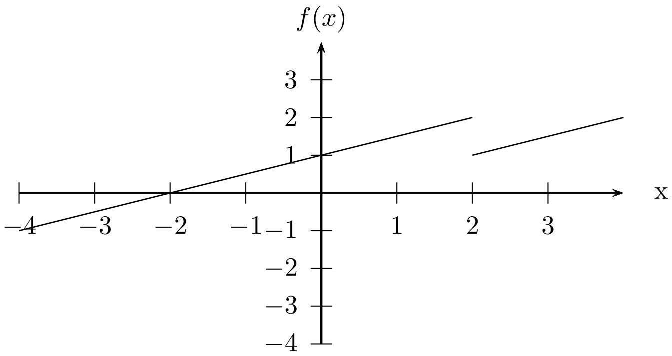


FIGURE 5.4.17 – Exemple de limites différentes à gauche et à droite 2 (saut). $f$ est défini en 2.

*En tout autre point* $x_0$ *(à part* $x_0 = 2$*) la fonction est définie par un polynôme du premier degré. Selon nos règles, la limite existe pour tout* $x_0$ *et coïncide avec la limite à gauche et à droite, p.ex.* $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} f(x) = 2.5$. *La limite* $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ *existe et coïncide avec la valeur de la fonction en* $x_0$. ♢

Si une fonction est définie par intervalles tel que deux de ces intervalles se touchent en $x_0$ alors $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ est possible.

**Exemple 5.4.12.**

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} 3x - 7 & \textit{pour } x \leq 3 \\ -4x + 14 & \textit{pour } x > 3 \end{cases}$$

3 *est le* $x_0$ *critique.*
3 *est un point d'accumulation du domaine de définition et en fait partie.*
$f(3) = 3\cdot 3 - 7 = 2$ *est défini.*
*Nous voulons examiner si* $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ *existe. Nous calculons :*
$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+}(-4x+14) = \lim\limits_{x\to 3^+}(-4x) + \lim\limits_{x\to 3^+} 14 = -4\lim\limits_{x\to 3^+} x + 14 = (-4\cdot 3) + 14 = 2$
$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-}(3x-7) = \lim\limits_{x\to 3^-}(3x) - \lim\limits_{x\to 3^-} 7 = 3\lim\limits_{x\to 3^-} x - 7 = (3\cdot 3) - 7 = 2$
*On peut en déduire :* $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 2 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 3} f(x) = 2$ *existe (voir figure 5.4.18). De plus on peut affirmer :* $f(3) = \lim\limits_{x\to 3} f(x)$. *La représentation graphique du graphe a en* $x_0 = 3$ *un changement de direction abrupt.*

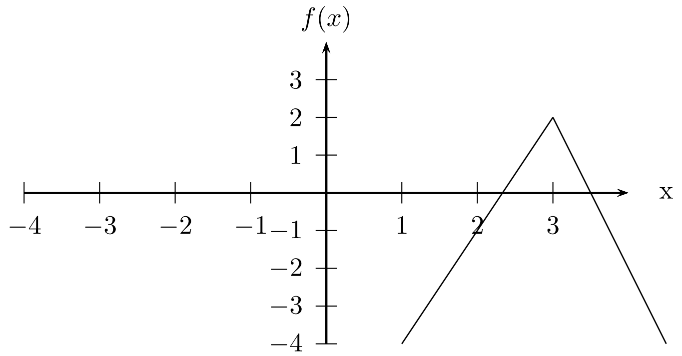


FIGURE 5.4.18 – Exemple d'une fonction définie par intervalles avec des limites à droite et à gauche identiques en 3. $f$ est définie en 3.

$\Diamond$

**Exemple 5.4.13.** $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ *;* $y = f(x) = \frac{|x|}{x}$*. Cette formule est équivalente à*

$$f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x}{x} & \textit{pour } x > 0 \\ -\frac{x}{x} & \textit{pour } x < 0 \end{array} \right.$$

0 *est le* $x_0$ *critique.*
0 *est un point d'accumulation du domaine de définition sans en faire partie.*
$f(0)$ *n'est pas défini.*
*Nous voulons examiner si* $\lim_{x\to 0} f(x)$ *existe.*
*Nous calculons :* $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$ *et* $\lim_{x\to 0^-} \left(-\frac{x}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-} (-1) = -1$*. Les limites à gauche et à droite ne coïncident pas en* $x_0 = 0$*.* $\lim_{x\to 0} f(x)$ *n'existe pas.* $f$ *n'est pas définie en* 0*. Pour tout autre* $x_0$ *la fonction est une constante (polynôme du degré 0). Les limites à gauche et à droite ainsi que la valeur de la fonction y coïncident (voir figure 5.4.19).*

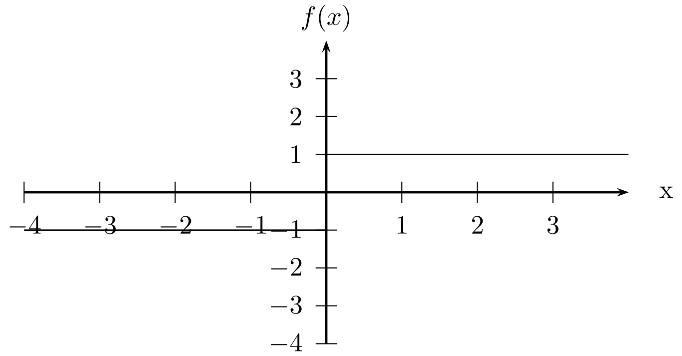


FIGURE 5.4.19 – Exemple de limites différentes à gauche et à droite en 0 (saut). $f$ n'est pas définie en 0.

$\Diamond$

**Exemple 5.4.14.**

$$f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

0 *est le* $x_0$ *critique.*
0 *est un point d'accumulation du domaine de définition sans en faire partie.*
$f(0)$ *n'est pas défini.*
*Nous voulons savoir si* $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ *existe. C'est pourquoi nous calculons les limites à gauche et à droite .*
$\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{x^2}\right) = \infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x^2}\right) = \infty$
*La fonction a en* $x_0 = 0$ *la limite non-réelle* $\infty$ *(voir figure 5.4.20) qui ne peu pas coïncider avec une valeur de fonction qui n'existe pas en* 0*.*

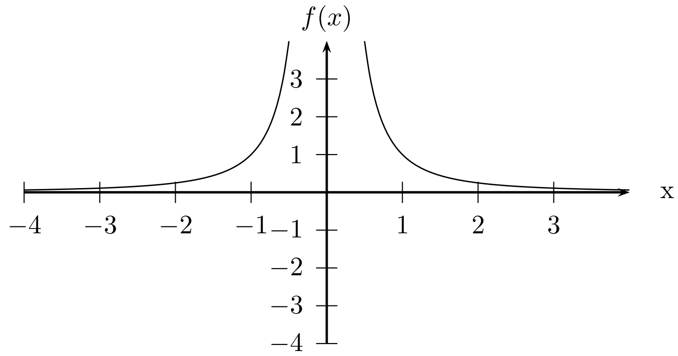


FIGURE 5.4.20 – Exemple pour des limites identiques à gauche et à droite mais non-réelles. La limite en 0 est $\infty$ (pôle). $f$ n'est pas définie en 0 .

◊

**Exemple 5.4.15.**

$$f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{8}{x^3}$$

0 *est le* $x_0$ *critique.*
0 *est un point d'accumulation du domaine de définition sans en faire partie.*
$f(0)$ *n'est pas défini.*
*Nous voulons savoir si* $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ *existe.*
*Nous calculons :*
$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{8}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(8\frac{1}{x^3}\right) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{8}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(8\frac{1}{x^3}\right) = \infty$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{8}{x^3}$ *n'est pas définie (voir figure 5.4.21).*

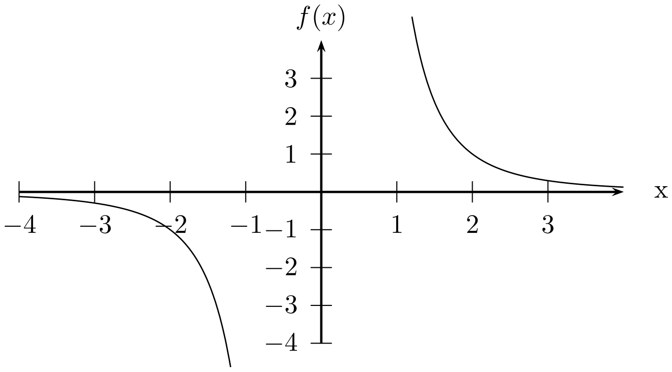


FIGURE 5.4.21 – Exemple de limites à gauche et à droite différentes en 0 (pôle). La limite et $f$ ne sont pas définies en 0.

$\Diamond$

**Exemple 5.4.16.**

$$f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$$

1 *est le* $x_0$ *critique.*
1 *est un point d'accumulation du domaine de définition sans en faire partie.*
$f(1)$ *n'est pas défini.*
*Nous voulons savoir si* $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ *existe. Nous calculons :*
$\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} (x+1) = \lim\limits_{x\to 1^+} x + \lim\limits_{x\to 1^+} 1 = 1+1 = 2$
$\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} (x+1) = \lim\limits_{x\to 1^-} x + \lim\limits_{x\to 1^-} 1 = 1+1 = 2$
*Par conséquent :* $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = 2 = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1}$ .
$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$ *est un nombre réel bien que* $f(1)$ *ne soit pas défini et* $1 \notin D$ *par conséquent (voir figure 5.4.22).*

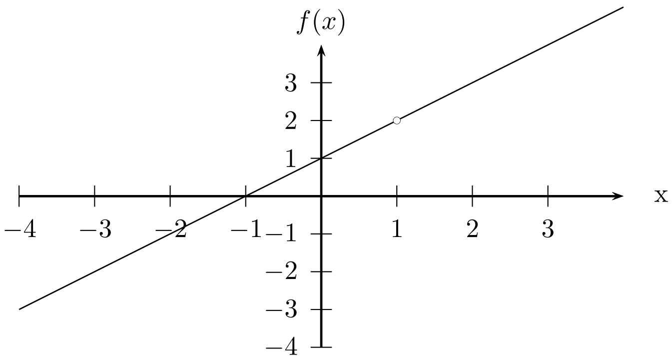


FIGURE 5.4.22 – Exemple d'une valeur de fonction non définie en 1 et de l'existence d'une limite en 1 (trou)

$\Diamond$

**En résumé, nous pouvons retenir :**

- Dans les exemples 5.4.11 et 5.4.13 (fonctions définies par intervalles), la fonction fait un saut. Il y a un $x_0$, tel que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ n'est pas définie ($x_0$ = nombre où les intervalles de définition se touchent). La fonction $f$ est définie en $x_0$ pour l'exemple 5.4.11 et n'est pas définie pour l'exemple 5.4.13.
- Dans l'exemple 5.4.12 (fonction définie par intervalles), $f$ change de pente d'une manière abrupte. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ est définie pour tout $x_0$, car $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ pour tout $x_0$. La fonction $f$ est définie en $x_0$.
- Dans l'exemple 5.4.14 la fonction $f$ n'est pas définie en $x_0 = 0$ et la fonction reprend la limite non-réelle $\infty$. Nous disons que la fonction $f$ a en $x_0$ un pôle.
- Dans l'exemple 5.4.15 la fonction $f$ n'est pas définie en $x_0 = 0$ et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ n'est pas définie, car $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$. Nous disons que la fonction $f$ a en $x_0$ un pôle.
- Dans l'exemple 5.4.16, $f$ n'est pas définie en $x_0$. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ est définie, car $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$. Nous disons que $f$ a en $x_0$ un trou.

| exemple | $f(x_0)$ définie | $\lim\limits_{x \to x_0} f(x_0)$ définie |
|---|---|---|
| 5.4.12 | oui | oui |
| 5.4.11 | oui | non |
| 5.4.16 | non | oui |
| 5.4.15 | non | non |

**Valeurs limite aux points précédés ou suivis d'un intervalle qui ne fait pas parti du domaine de définition :** Pour les fonctions racines $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ avec $f(x) = \sqrt[n]{x}$ le nombre 0 n'est pas un point d'accumulation de $]-\infty, 0] \cap D = \{0\}$ ($D = \mathbb{R}_+$). La limite à gauche n'est alors pas définie. La limite à droite par contre est définie et coïncide dans ce cas avec $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Car 0 est un point d'accumulation de $]0, \infty[ \cap D$. On peut par conséquent affirmer que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0$. La valeur limite existe et est identique à la valeur de fonction qui est définie.

D'une manière plus générale on peut retenir :

**Théorème 5.4.17.** *Si un intervalle $I = [a, x_0[$ ou $I = ]a, x_0[$ existe tel que $x_0$ n'est pas un point d'accumulation de $D \cap I$ et que $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ existe, alors $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ ($D$ est le domaine de définition de $f$).*

Pour les fonctions logarithme on peut alors affirmer

$$\lim_{x \to 0} \log_a x = \lim_{x \to 0^+} \log_a x.$$

La limite $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = \lim\limits_{x \to 0} \log_a x$ existe et la valeur de fonction (indéfinie) en 0 ne coïncident pas avec la limite (voir théorème 5.4.8).

On peut développer des réflexions analogues par rapport aux limites à gauche :

**Théorème 5.4.18.** *Si un intervalle $I = ]x_0, a[$ ou $I = ]x_0, a]$ existe tel que $x_0$ n'est pas un point d'accumulation de $D \cap I$ et que $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ existe, alors $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ ($D$ est le domaine de définition de $f$).*

## 5.4.1 Exercices

1. Calculer les limites suivantes (si nécessaire la limite à gauche et à droite)

(a) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-3x+2}{x-2}$

(b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x-2}$

(c) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{1}{x^2}$

(d) $\lim\limits_{x\to 11} \frac{1}{x^2}$

(e) $f(x) = \begin{cases} 5x-2 & \text{pour } x < 4 \\ 10x-8 & \text{pour } x \geq 4 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to -8} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -8^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -8^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

(f) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{3x+\sqrt{2x^2+1}}{x}$

(g) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{3x+\sqrt{2x^2+1}}{x}$ (facultatif)

(h) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{2x+\sqrt{x^2+1}}{x}$

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x\sqrt{x^2+1}}{x}$

(j) $\lim\limits_{x\to \infty} e^x$

(k) $\lim\limits_{x\to 5} e^x$

(l) $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x$

(m) $\lim\limits_{x\to -5^-} e^x$

(n) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{1.1^x}{0.1} \cdot \frac{1}{1.1^x}$

(o) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{5x^3+4x^2}{2x^5-8x^3}$

(p) $\lim\limits_{p\to 0} \sqrt{\frac{p^3-3p^2+8p}{p^4+p}}$

(q) $\lim\limits_{p\to 3} \sqrt{\frac{p^3-3p^2+8p}{p^4+p}}$

(r) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$

(s) $\lim\limits_{h\to -2} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$

2. Calculer les limites suivantes (si nécessaire la limite à gauche et à droite)

(a) $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{3t^5+3t^3}{5t^2-8t^4}$

(b) $\lim\limits_{t\to -5} \frac{3t^5+3t^3}{5t^2-8t^4}$

(c) $\lim\limits_{z\to 1} 5\left(\ln \frac{2z^2-3z+1}{z^2-1}\right)$

(d) $\lim\limits_{z\to 2^-} 5\left(\ln \frac{2z^2-3z+1}{z^2-1}\right)$

(e) $\lim\limits_{z\to \infty} 5\left(\ln \frac{2z^2-3z+1}{z^2-1}\right)$

(f) $\lim\limits_{x\to -2^-} \frac{x^2+x-2}{x^3+5x^2+8x+4}$

(g) $\lim\limits_{x\to -2^+} \frac{x^2+x-2}{x^3+5x^2+8x+4}$

(h) $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{1+x^2} & \text{pour } 0 < x < 1 \\ 2 & \text{pour } x = 1 \\ \frac{x^3-1}{6(1-x)} & \text{pour } x > 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 6} f(x)$

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+4}{x}$

(j) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2+x}{1+2x}$

(k) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3}{8}$

(l) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3}{8}$

(m) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{8}{x^5}$

### 5.4.2 Solutions

1. Nous obtenons :

(a) a) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-3x+2}{x-2} = \frac{\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2-3x+2\right)}{\lim\limits_{x\to 3}(x-2)} = \frac{\lim\limits_{x\to 3} x^2 - \lim\limits_{x\to 3}(3x) + \lim\limits_{x\to 3} 2}{\lim\limits_{x\to 3} x - \lim\limits_{x\to 3} 2} =$
$\frac{3^2 - 3\lim\limits_{x\to 3} x + 2}{3-2} = \frac{9-(3\cdot 3)+2}{1} = 2$

(b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-1)(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x-1) = \lim\limits_{x\to 2} x - \lim\limits_{x\to 2} 1 = 2-1 = 1$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

(d) $\lim\limits_{x\to 11} \frac{1}{x^2} = \frac{\lim\limits_{x\to 11} 1}{\lim\limits_{x\to 11} x^2} = \frac{1}{11^2} = \frac{1}{121}$

(e) $\lim\limits_{x\to -8}(5x-2) = \lim\limits_{x\to -8}(5x) - \lim\limits_{x\to -8} 2 = 5\lim\limits_{x\to -8} x - 2 = (5\cdot -8) - 2 = -42$
$\lim\limits_{x\to -8^-}(5x-2) = \lim\limits_{x\to -8^-}(5x) - \lim\limits_{x\to -8^-} 2 = 5\lim\limits_{x\to -8^-} x - 2 = (5\cdot -8) - 2 = -42$
$\lim\limits_{x\to -8^+}(5x-2) = \lim\limits_{x\to -8^+}(5x) - \lim\limits_{x\to -8^+} 2 = 5\lim\limits_{x\to -8^+} x - 2 = (5\cdot -8) - 2 = -42$
$\lim\limits_{x\to 4^-}(5x-2) = \lim\limits_{x\to 4^-}(5x) - \lim\limits_{x\to 4^-} 2 = 5\lim\limits_{x\to 4^-} x - 2 = (5\cdot 4) - 2 = 18$
$\lim\limits_{x\to 4^+}(10x-8) = \lim\limits_{x\to 4^+}(10x) - \lim\limits_{x\to 4^+} 8 = 10\lim\limits_{x\to 4^+} x - 8 = (10\cdot 4) - 8 = 32$
$\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 4} f(x)$ n'existe pas. Il y un saut en $x_0 = 4$.

(f) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x+\sqrt{2x^2+1}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{3x}{x}+\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x}}{\frac{x}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3+\sqrt{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}{1} =$
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} 3 + \lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{2+\frac{1}{x^2}} = 3 + \sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x^2}\right)} =$
$3 + \sqrt{\lim\limits_{x\to\infty} 2 + \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}} = 3 + \sqrt{2+0} = 3 + \sqrt{2}$

(g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x+\sqrt{2x^2+1}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\frac{3x}{x}+\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x}}{\frac{x}{x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3-\sqrt{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}{1} =$
$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} 3 - \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2+\frac{1}{x^2}} = 3 - \sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+\frac{1}{x^2}\right)} =$
$3 - \sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty} 2 + \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}} = 3 - \sqrt{2+0} = 3 - \sqrt{2}$

(h) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{2x+\sqrt{x^2+1}}{x} = \frac{\lim\limits_{x\to 5}\left(2x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\lim\limits_{x\to 5} x} = \frac{\lim\limits_{x\to 5} 2x + \lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x^2+1}}{5} =$
$\frac{2\lim\limits_{x\to 5} x + \sqrt{\lim\limits_{x\to 5}(x^2+1)}}{5} = \frac{(2\cdot 5)+\sqrt{\lim\limits_{x\to 5} x^2 + \lim\limits_{x\to 5} 1}}{5} = \frac{10+\sqrt{25+1}}{5} = \frac{10+\sqrt{26}}{5} \approx 3.019\,8$

(i) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{2x\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{2\sqrt{x^2+1}}{1} = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(2\sqrt{x^2+1}\right) =$
$2\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\sqrt{x^2+1}\right) = 2\sqrt{\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+1)} = 2\sqrt{\lim\limits_{x\to 0^-} x^2 + \lim\limits_{x\to 0^-} 1} =$
$2\sqrt{0+1} = 2\cdot 1 = 2$
D'une manière analogue on obtient $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2x\sqrt{x^2+1}}{x} = 2$. Par là, la limite en $x_0 = 0$ est définie et se monte à 2.

(j) $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$

(k) $\lim_{x\to 5} e^x = e^{\lim_{x\to 5} x} = e^5 = 148.41$

(l) $\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$

(m) $\lim_{x\to -5^-} e^x = e^{\lim_{x\to -5^-} x} = e^{-5} = 6.7379 \times 10^{-3}$

(n) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1.1^x}{0.1} \cdot \frac{1}{1.1^x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{0.1} = \frac{1}{0.1} = 10$

(o) $\lim_{x\to 3} \frac{5x^3+4x^2}{2x^5-8x^3} = \frac{\lim_{x\to 3}\left(5x^3+4x^2\right)}{\lim_{x\to 3}(2x^5-8x^3)} = \frac{\lim_{x\to 3} 5x^3 + \lim_{x\to 3} 4x^2}{\lim_{x\to 3} 2x^5 - \lim_{x\to 3} 8x^3} = \frac{5\lim_{x\to 3} x^3 + 4\lim_{x\to 3} x^2}{2\lim_{x\to 3} x^5 - 8\lim_{x\to 3} x^3} =$
$\frac{\left(5\cdot 3^3\right)+\left(4\cdot 3^2\right)}{(2\cdot 3^5)-(8\cdot 3^3)} = \frac{19}{30} = 0.63333$

(p) $\lim_{p\to 0} \sqrt{\frac{p^3-3p^2+8p}{p^4+p}} = \lim_{p\to 0} \sqrt{\frac{p(p^2-3p+8)}{p(p^3+1)}} = \lim_{p\to 0} \sqrt{\frac{p^2-3p+8}{p^3+1}} =$
$\sqrt{\lim_{p\to 0} \frac{p^2-3p+8}{p^3+1}} = \sqrt{\frac{\lim_{p\to 0}(p^2-3p+8)}{\lim_{p\to 0}(p^3+1)}} = \sqrt{\frac{\lim_{p\to 0} p^2 - \lim_{p\to 0} 3p + \lim_{p\to 0} 8}{\lim_{p\to 0} p^3 + \lim_{p\to 0} 1}} =$
$\sqrt{\frac{0-3\lim_{p\to 0} p+8}{0+1}} = \sqrt{\frac{(-3\cdot 0)+8}{1}} = \sqrt{8} = \sqrt{4\cdot 2} = 2\sqrt{2}$

(q) $\lim_{p\to 3} \sqrt{\frac{p^3-3p^2+8p}{p^4+p}} = \sqrt{\lim_{p\to 3} \frac{p^3-3p^2+8p}{p^4+p}} = \sqrt{\frac{\lim_{p\to 3}(p^3-3p^2+8p)}{\lim_{p\to 3}(p^4+p)}} =$
$\sqrt{\frac{\lim_{p\to 3} p^3 - \lim_{p\to 3} 3p^2 + \lim_{p\to 3} 8p}{\lim_{p\to 3} p^4 + \lim_{p\to 3} p}} = \sqrt{\frac{3^3-3\lim_{p\to 3} p^2 + 8\lim_{p\to 3} p}{3^4+3}} = \sqrt{\frac{3^3-(3\cdot 3^2)+(8\cdot 3)}{3^4+3}} = \frac{1}{7}\sqrt{14} = 0.53452$

(r) $\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} =$
$\lim_{h\to 0} \frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3x^2+3xh+h^2}{1} =$
$\lim_{h\to 0} \left(3x^2+3xh+h^2\right) = \lim_{h\to 0} 3x^2 + \lim_{h\to 0} 3xh + \lim_{h\to 0} h^2 = 3x^2 + 3x\lim_{h\to 0} h + 0 =$
$3x^2 + (3x\cdot 0) = 3x^2$

(s) $\lim_{h\to -2} \frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \frac{\lim_{h\to -2}\left((x+h)^3-x^3\right)}{\lim_{h\to -2} h} = \frac{\lim_{h\to -2}(x+h)^3 - \lim_{h\to -2} x^3}{-2} =$
$\frac{\left(\lim_{h\to -2} x + \lim_{h\to -2} h\right)^3 - x^3}{-2} = \frac{(x+-2)^3-x^3}{-2} = \frac{x^3-6x^2+12x-8-x^3}{-2} = 3x^2-6x+4$

2. On obtient :

(a) $\lim_{t\to 0^+} \frac{3t^5+3t^3}{5t^2-8t^4} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^2\left(3t^3+3t\right)}{t^2(5-8t^2)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{3t^3+3t}{5-8t^2} = \frac{\lim_{t\to 0^+}\left(3t^3+3t\right)}{\lim_{t\to 0^+}(5-8t^2)} =$
$\frac{\lim_{t\to 0^+} 3t^3 + \lim_{t\to 0^+} 3t}{\lim_{t\to 0^+} 5 - \lim_{t\to 0^+} 8t^2} = \frac{3\lim_{t\to 0^+} t^3 + 3\lim_{t\to 0^+} t}{5-8\lim_{t\to 0^+} t^2} = \frac{(3\cdot 0)+(3\cdot 0)}{5-(8\cdot 0)} = \frac{0}{5} = 0$

(b) $\lim_{t\to -5} \frac{3t^5+3t^3}{5t^2-8t^4} = \frac{\lim_{t\to -5}\left(3t^5+3t^3\right)}{\lim_{t\to -5}(5t^2-8t^4)} = \frac{\lim_{t\to -5} 3t^5 + \lim_{t\to -5} 3t^3}{\lim_{t\to -5} 5t^2 - \lim_{t\to -5} 8t^4} = \frac{3\lim_{t\to -5} t^5 + 3\lim_{t\to -5} t^3}{5\lim_{t\to -5} t^2 - 8\lim_{t\to -5} t^4} =$
$\frac{\left(3\cdot(-5)^5\right)+\left(3\cdot(-5)^3\right)}{(5\cdot(-5)^2)-(8\cdot(-5)^4)} = 2$

(c) $\lim_{z\to 1} 5\left(\ln \frac{2z^2-3z+1}{z^2-1}\right) = 5\lim_{z\to 1}\left(\ln \frac{2z^2-3z+1}{z^2-1}\right) = 5\ln\left(\lim_{z\to 1} \frac{2z^2-3z+1}{z^2-1}\right) =$
$5\ln\left(\lim_{z\to 1} \frac{(2z-1)(z-1)}{(z+1)(z-1)}\right) = 5\ln\left(\lim_{z\to 1} \frac{2z-1)}{z+1}\right) = 5\ln\left(\frac{\lim_{z\to 1}(2z-1)}{\lim_{z\to 1}(z+1)}\right) =$
$5\ln\left(\frac{\lim_{z\to 1} 2z - \lim_{z\to 1} 1}{\lim_{z\to 1} z + \lim_{z\to 1} 1}\right) = 5\ln\left(\frac{2\lim_{z\to 1} z - 1}{1+1}\right) = 5\ln\left(\frac{(2\cdot 1)-1}{2}\right) = 5\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -3.4657$

(d) $\lim_{z\to 2^-} 5\left(\ln \frac{2z^2-3z+1}{z^2-1}\right) = 5\lim_{z\to 2^-}\left(\ln \frac{2z^2-3z+1}{z^2-1}\right) = 5\ln\left(\lim_{z\to 2^-} \frac{2z^2-3z+1}{z^2-1}\right) =$

$5\ln\left(\frac{\lim\limits_{z\to 2^-}\left(2z^2-3z+1\right)}{\lim\limits_{z\to 2^-}\left(z^2-1\right)}\right)=5\ln\left(\frac{\lim\limits_{z\to 2^-}2z^2-\lim\limits_{z\to 2^-}3z+\lim\limits_{z\to 2^-}1}{\lim\limits_{z\to 2^-}z^2-\lim\limits_{z\to 2^-}1}\right)=$
$5\ln\left(\frac{2\lim\limits_{z\to 2^-}z^2-3\lim\limits_{z\to 2^-}z+1}{2^2-1}\right)=5\ln\left(\frac{\left(2\cdot 2^2\right)-(3\cdot 2)+1}{2^2-1}\right)=0$

(e) $\lim\limits_{z\to\infty}5\left(\ln\frac{2z^2-3z+1}{z^2-1}\right)=5\lim\limits_{z\to\infty}\left(\ln\frac{2z^2-3z+1}{z^2-1}\right)=5\ln\left(\lim\limits_{z\to\infty}\frac{\frac{2z^2}{z^2}-\frac{3z}{z^2}+\frac{1}{z^2}}{\frac{z^2}{z^2}-\frac{1}{z^2}}\right)=$
$5\ln\left(\lim\limits_{z\to\infty}\frac{2-\frac{3}{z}+\frac{1}{z^2}}{1-\frac{1}{z^2}}\right)=5\ln\left(\frac{\lim\limits_{z\to\infty}\left(2-\frac{3}{z}+\frac{1}{z^2}\right)}{\lim\limits_{z\to\infty}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)}\right)=5\ln\left(\frac{\lim\limits_{z\to\infty}2-\lim\limits_{z\to\infty}\frac{3}{z}+\lim\limits_{z\to\infty}\frac{1}{z^2}}{\lim\limits_{z\to\infty}1-\lim\limits_{z\to\infty}\frac{1}{z^2}}\right)=$
$5\ln\left(\frac{2-0+0}{1-0}\right)=5\ln 2=3.4657$

(f) $\lim\limits_{x\to -2^-}\frac{x^2+x-2}{x^3+5x^2+8x+4}$ ; $f$ n'est pas définie en $-2$.
$\lim\limits_{x\to -2^-}\frac{\frac{x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}-\frac{2}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{5x^2}{x^3}+\frac{8x}{x^3}+\frac{4}{x^3}}=\lim\limits_{x\to -2^-}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}}{1+\frac{5}{x}+\frac{8}{x^2}+\frac{4}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to -2^-}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to -2^-}\left(1+\frac{5}{x}+\frac{8}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)}=$
$=\frac{\lim\limits_{x\to -2^-}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to -2^-}\frac{1}{x^2}-\lim\limits_{x\to -2^-}\frac{2}{x^3}}{\lim\limits_{x\to -2^-}1+\lim\limits_{x\to -2^-}\frac{5}{x}+\lim\limits_{x\to -2^-}\frac{8}{x^2}+\lim\limits_{x\to -2^-}\frac{4}{x^3}}=\frac{\frac{1}{-2}+\frac{1}{4}-\frac{2}{-8}}{1+\frac{5}{-2}+\frac{8}{4}+\frac{4}{-8}}$
$1+\frac{5}{-2}+\frac{8}{4}+\frac{4}{-8}=0\Longrightarrow$ On ne peut résoudre le problème avec les règles introduites.

(g) $\lim\limits_{x\to -2^+}\frac{x^2+x-2}{x^3+5x^2+8x+4}$; $f$ n'est pas définie en $-2$. Avec les règles introduites on ne peut pas résoudre le problème.

(h) $f(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{1+x^2} & \text{pour } 0<x<1\\ 2 & \text{pour } x=1\\ \frac{x^3-1}{6(1-x)} & \text{pour } x>1\end{cases}$
La fonction n'est pas définie en $x\leq 0$. Nous examinons si la limite à droite existe :
$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x-1}{1+x^2}=\frac{\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)}{\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x^2)}=\frac{\lim\limits_{x\to 0^+}x-\lim\limits_{x\to 0^+}1}{\lim\limits_{x\to 0^+}1+\lim\limits_{x\to 0^+}x^2}=\frac{0-1}{1+0}=-1.$ $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x-1}{1+x^2}=\lim\limits_{x\to 0}f(x).$
La fonction est définie par des intervalles dont deux se touchent en 1. Nous calculons les limites à droite et à gauche :
$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x-1}{1+x^2}=\frac{\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)}{\lim\limits_{x\to 1^-}(1+x^2)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1^-}x-\lim\limits_{x\to 1^-}1}{\lim\limits_{x\to 1^-}1+\lim\limits_{x\to 1^-}x^2}=\frac{1-1}{1+1}=0$
$\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^3-1}{6(1-x)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{6(1-x)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{-(1-x)(x^2+x+1)}{6(1-x)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{-(x^2+x+1)}{6}=-\frac{1}{2}\Longrightarrow$
$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^+}\Longrightarrow\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ n'existe pas.
$\lim\limits_{x\to 6}\frac{x^3-1}{6(1-x)}=\frac{\lim\limits_{x\to 6}\left(x^3-1\right)}{\lim\limits_{x\to 6}(6(1-x))}=\frac{\lim\limits_{x\to 6}x^3-\lim\limits_{x\to 6}1}{6\lim\limits_{x\to 6}(1-x)}=\frac{6^3-1}{6\left(\lim\limits_{x\to 6}1-\lim\limits_{x\to 6}x\right)}=\frac{215}{6(1-6)}=-\frac{43}{6}$

(i) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+4}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}+\frac{4}{x}}{\frac{x}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{4}{x}}{1}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}1}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}1}=\frac{1+0}{1}=1$

(j) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+x}{1+2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+1}{\frac{1}{x}+2}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}+1\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+2\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}1}{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}2}=\frac{2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+1}{0+2}=\frac{(2\cdot 0)+1}{0+2}=\frac{1}{2}$

(k) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{8}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{8}x^3=\infty$

(l) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^3}{8}=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{1}{8}x^3=-\infty$

(m) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{8}{x^5}$. $f$ n'est pas définie en 0. $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{8}{x^5}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+}:\frac{8}{x^5}=\infty$. La limite $\lim\limits_{x\to 0}\frac{8}{x^5}$ n'existe pas.

## 5.5 Limites des méthodes introduites

Plusieurs des théorèmes par rapport aux limites ne sont valables que si les limites qui apparaissent sont des nombres réelles. Ainsi, si $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ n'est pas un nombre réel. C'est pourquoi on ne peut appliquer la règle „ $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) + \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$". Nous devons transformer - si c'est possible - les formules pour garantir que les expressions désignent des nombres réels. Si l'on n'observe pas cette restriction, on peut déduire des contradictions :

(1)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\frac{1}{2}x(x+1\right) \underset{faux}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}x(x+1)\right)$$
$$= 0\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}x(x+1)\right) = 0\cdot\infty = 0$$

(2)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\frac{1}{2}x(x+1\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\frac{1}{2}(x+1\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{x+1}{x}\right)$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x}) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right)$$
$$= \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}$$

On peut déduire de (1) et (2) : $0 = \frac{1}{2}$. Dans la première ligne nous n'avons pas appliqué correctement la règle 5.1.16, car $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}x(x+1)\right) = \infty$ et „ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}x(x+1)\right)$" ne désigne pas un nombre réel. Si nous n'arrivons pas à transformer les formules pour pouvoir appliquer nos règles, les méthodes introduites jusqu'ici échouent.

**Exemple 5.5.1.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+4}{2x+5}$. *Nous essayons d'amplifier* $\frac{x^2+4}{2x+5}$*, p.ex. par* $\frac{1}{x^2}$ *:* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{4}{x^2}}{\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}$ *. Après l'application des théorèmes, le dénominateur devient* $0$*. Si nous augmentons par* $\frac{1}{x}$ *:* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\frac{4}{x}}{2+\frac{5}{x}}$*, il reste dans le numérateur un terme qui tend vers l'infini. Si nous mettons en évidence* $x^2$ *dans le numérateur et* $x$ *dans le dénominateur :* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}{x\left(2+\frac{5}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}{\left(2+\frac{5}{x}\right)}$*, il reste dans le numérateur un terme qui tend vers l'infini. Si nous mettons en évidence dans le numérateur et le dénominateur* $x$ *:* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\left(x+\frac{4}{x}\right)}{x\left(2+\frac{5}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\frac{4}{x}}{2+\frac{5}{x}}$*, il reste dans le numérateur un terme qui tend vers l'infini. Factoriser et réduire ne semble pas mener au but. Nous n'arrivons alors pas à appliquer nos règles. Par conséquent il faudrait développer d'autres théorèmes ou méthodes pour résoudre ce type de problèmes. Certaines méthodes nécessitent des développements théoriques qu'on fera par la suite et qui utilisent ce qu'on vient d'introduire.* ◊

## 5.6 Démonstration de quelques théorèmes limite (facultatif)

**Théorème 5.3.11** de la page 170 : $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ pour $\lim\limits_{x\to x_0} f(x), \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \in \mathbb{R}$

*Démonstration.* Supposons que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x), \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \in \mathbb{R}$.
(i) Supposons que $k > 0$. Par là, $k' := \frac{k}{2} > 0$ et pour $k'$ il existe un $r'$, tel que pour $0 < |x - x_0| < r'$ : $\left|f(x) - \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right| < k'$ et
pour $k'$ il existe un $r''$, tel que pour $0 < |x - x_0| < r''$ : $\left|g(x) - \lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right| < k'$.
(ii) Par conséquent pour tout $0 < |x - x_0| < \min\{r', r''\}$

$$\left|f(x) - \lim_{x\to x_0} f(x)\right| + \left|g(x) - \lim_{x\to x_0} g(x)\right| < 2k' = k.$$

(iii) De plus
$\left|f(x) - \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + g(x) - \lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right| \leq \left|f(x) - \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right| + \left|g(x) - \lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right|$, et
$\left|f(x) - \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + g(x) - \lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right| = \left|f(x) + g(x) - \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right)\right|$.
(iv) Par là pour tout $k > 0$ il existe un $r := \min\{r', r''\} > 0$ tel que pour $|x - x_0| < r$ : $\left|f(x) + g(x) - \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right)\right| < 2k' = k$.
(v) Ainsi $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right)$ est la limite de $f(x) + g(x)$,
c. à d. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. □

**Théorème 5.3.12** de la page 170 : $\lim\limits_{x\to x_0} (bf(x) = b \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ pour $b, \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$

*Démonstration.* Supposons que $b, \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$. Alors la limite $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe et il y a selon la définition pour tout $k > 0$ un $r > 0$, tel que pour $0 < |x - x_0| < r$ : $\left|f(x) - \lim\limits_{x\to\infty} f(x)\right| < k$. Pour tout $k > 0$ et pour un $c \in \mathbb{R}$ il existe un $k' > 0$, tel que $k = |c|\, k'$. Supposons alors que $k > 0$. Il y a par conséquent un $k' > 0$ pour $b$, tel que $k = |b|\, k'$ et $k' > 0$. Par là $k' = \frac{k}{|b|}$. Puisque $k' > 0$, on peut trouver à cause de l'existence de la limite un $r$, tel que pour tout $0 < |x - x_0| < r$ : $\left|f(x) - \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right| < k' = \frac{k}{|b|}$. On peut en déduire $|b| \left|f(x) - \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right| < k$. De plus

$$\left|b\left(f(x) - \lim_{x\to x_0} f(x)\right)\right| = \left|bf(x) - b\lim_{x\to x_0} f(x)\right| \leq |b| \left|f(x) - \lim_{x\to x_0} f(x)\right| < k.$$

Par conséquent et selon la définition de la limite $b \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ est la limite de $bf(x)$, c. à d.
$\lim\limits_{x\to x_0} bf(x) = b \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. □

**Théorème 5.3.13** de la page 170 : $\lim\limits_{x\to x_0} a = a$ (pour $a \in \mathbb{R}$)

*Démonstration.* Supposons que $f(x) = a$ pour tout $x \in R$. Pour tout $k > 0$ il existe un $r$, tel que pour tout $|x - x_0| < r$ : $|f(x) - a| < k$ . Car $|f(x) - a| = |a - a| = 0$ pour tout $x$. Selon la définition de la limite $a$ est alors la limite de $f(x) = a$, c. à d. $\lim\limits_{x\to x_0} a = a$. □

**Théorème 5.3.14** de la page 170 : $\lim\limits_{x\to x_0} fg\,(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \lim\limits_{x\to x_0} g\,(x)$ pour $\lim\limits_{x\to x_0} f(x), \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \in \mathbb{R}$

*Démonstration.* $a := \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ et $b := \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$. Nous posons $k > 0$. Nous cherchons un $r > 0$ tel que $|f(x)g(x) - ab| < k$ pour $0 < |x - x_0| < r$ . On peut affirmer :

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - ab| &= |f(x)g(x) - ag(x) + ag(x) - ab| \\ &= |\,(f(x) - a)\,g(x) + a\,(g(x) - b)\,| \\ &\leq |\,(f(x) - a)\,g(x)| + |a\,(g(x) - b)\,| \quad \text{(l'inégalité triangulaire )} \\ &= |f(x) - a||g(x)| + |a||g(x) - b| \end{aligned}$$

Nous essayons de montrer que chacun de ces deux termes de la somme est plus petit ou égal à $\frac{k}{2}$. Dans ce cas la somme des deux est plus petite ou égale à $k$.

Comme $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$ , il y a un nombre $r_1 > 0$, tel que $|g(x) - b| < \frac{k}{2(1+|a|)}$ pour $0 < |x - x_0| < r_1$. De manière analogue il y a un $r_2 > 0$, tel que $|g(x) - b| < 1$ pour $0 < |x - x_0| < r_2$. Avec cela on obtient pour $0 < |x - x_0| < r_2$ : $|g(x)| = |g(x) - b + b| \leq |g(x) - b| + |b| < 1 + |b|$

Comme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ , il y a un nombre $r_3 > 0$, tel que $|f(x) - a| < \frac{k}{2(1+|b|)}$ pour $0 < |x - x_0| < r_3$.

Posons $r := \min\{r_1, r_2, r_3\}$. Pour $0 < |x - x_0| < r$ on peut alors affirmer

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - ab| &\leq |f(x) - a||g(x)| + |a||g(x) - b| \\ &< \frac{k}{2(1+|b|)}\,(1+|b|) + |a|\frac{k}{2(1+|a|)} \\ &= \frac{k}{2} + |a|\frac{k}{2(1+|a|)} \end{aligned}$$

En tenant compte de $\frac{|a|}{(1+|a|)} < 1$, on peut déduire $|a|\frac{k}{2(1+|a|)} < \frac{k}{2}$ et alors

$$|f(x)g(x) - ab| < \frac{k}{2} + \frac{k}{2} = k$$

On peut en conclure $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = ab$. □

**Théorème 5.3.15** de la page 170 : $\lim\limits_{x \to x_0} x^n = x_0^n$ pour $x, x_0 \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

*Démonstration.* (i) On peut affirmer que $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$, car pour tout $k > 0$ il existe un $r > 0$ tel que pour tout $r - x_0 < x < x_0 + r$ : $f(x_0) - k < f(x) < f(x_0) + k$. $f$ est strictement croissante, car pour $x > y$ : $f(x) = x > f(y) = y$. Si nous choisissons $r = f^{-1}(k)$ on peut affirmer pour $x_0 - r < x < x_0 + r$ à cause de la monotonie stricte $f(x_0 - r) < f(x) < f(x_0 + r)$. En raison de la linéarité de $f(x) = x$, on peut déduire que $f(x_0 - r) = f(x_0) - f(r)$ et $f(x_0 + r) = f(x_0) + f(r)$ avec quoi on obtient : $f(x_0) - f(r) < f(x) < f(x_0) + f(r)$ et avec
$f(r) = k$ : $f(x_0) - k < f(x) < f(x_0) + k$.

(ii) $$\lim_{x \to x_0} x^n \underset{\text{Def. puissance}}{=} \lim_{x \to x_0} \left( \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{\text{n fois}} \right) \underset{\text{théorème 5.6}}{=} \lim_{x \to x_0} x \cdot \ldots \cdot \lim_{x \to x_0} x \underset{\text{(i)}}{=} x_0 \cdot \ldots \cdot x_0 = x_0^n.$$ □

**Théorème 5.3.16** de la page 170 : $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$ pour $g(x) \neq 0$ et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x), \lim\limits_{x \to x_0} g(x) \in \mathbb{R}$.

*Démonstration.* (i) Nous montrons d'abord pour $a := \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq 0$ : $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a}$.

Pour $k > 0$ il faut trouver un $r$ tel que pour $0 < |x - x_0| < r$ : $\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{a} \right| < k$.

Puisque $a := \lim_{x\to x_0} f(x)$, il y a un $r_1$, tel que pour $0 < |x - x_0| < r_1 : |f(x) - a| < \frac{|a|}{2}$.
Ainsi pour $0 < |x - x_0| < r_1$

$$-\frac{|a|}{2} < |f(x)| - |a| \leq |f(x) - a| < \frac{|a|}{2}$$

et par là

$$-\frac{|a|}{2} + |a| = \frac{|a|}{2} < |f(x)|\,.$$

On peut en déduire pour $0 < |x - x_0| < r_1$ :

$$\frac{1}{|f(x)|} < \frac{2}{|a|}$$

et

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|f(x)|}\frac{|f(x) - a|}{|a|} < \frac{2\,|f(x) - a|}{|a|^2}.$$

Pour $\frac{|a|^2 k}{2}$ il y a un $r_2$, tel que pour $0 < |x - x_0| < r_2 : |f(x) - a| < \frac{|a|^2 k}{2}$. Posons $r := \min\{r_1, r_2\}$.
Ainsi pour $0 < |x - x_0| < r$ :

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|f(x) - a|}{|f(x)||a|} < \frac{2\,|f(x) - a|}{|a|^2} < \frac{2\frac{|a|^2 k}{2}}{|a|^2} = k.$$

(ii) Le théorème est prouvé par $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ et le théorème 5.6. □

**Théorème 5.3.17** de la page 170 : Si $f$ est bijective et $\lim_{x\to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{y\to a} f^{-1}(y) = x_0$.

*Démonstration.* Parce que $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, il existe pour tout $k > 0$ un $r > 0$, tel que pour $0 < |x - x_0| < r : |f(x) - a| < k$. Supposons alors que $k' > 0$. Avec
$r' := \min\{|a - f(x_0 - k')|, |a + f(x_0 + k')|\}$ on obtient pour $0 < |y - a| < r'$ :
$0 < \left|f^{-1}(y) - x_0\right| < k'$. □

**Théorème 5.3.18** de la page 170 : Pour $\sqrt[n]{x}$ on peut affirmer $\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$ , $x_0 \in$ domaine de définition de $\sqrt[n]{x}$.

*Démonstration.* Puisque $\sqrt[n]{x}$ est la fonction réciporoque de $x^n$ et que $\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n$, la proposition est immédiatement prouvée par le théorème 5.3.17. □

**Théorème 5.3.18** de la page 170 : $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$

*Démonstration.* Supposons que $k > 0$ $\exp_a(x_0) - k > 0$. Puisque $\exp_a$ est injective et $\log_a$ est la fonction réciproque de $\exp_a$, il existe un $x_1$ unique tel que $x_1 = \log_a(e^{x_0} - k)$. De même il existe un $x_2$ unique tel que $x_2 = \log_a(e^{x_0} + k)$. Si nous choisissons $r := \min\{|x_0 - x_1|, |x_0 - x_2|\}$, on obtient $0 < |x - x_0| < r : |a^x - a^{x_0}| < k$, car $\exp_a$ est strictement monotone. □

**Théorème 5.3.18** de la page 170 : $\lim_{x\to x_0} \log_a(x) = \log(x_0)$

*Démonstration.* Comme $\log_a$ est la fonction réciproque de $\exp_a$, est immédiatement prouvée par le théorème 5.3.17. □

**Théorème 5.3.19** de la page 170 : Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ et $\lim_{x\to a} g(x) = b$, alors $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = b$, pour $a, b \in \mathbb{R}$ (règle de la composition ou règle de la chaîne)
**Théorème 5.1.14** de la page 161 :
$\lim_{x\to\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} g(x)$ pour $\lim_{x\to\infty} f(x)\,, \lim_{x\to\infty} g(x) \in \mathbb{R}$.

*Démonstration.* Supposons que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x), \lim\limits_{x\to\infty} g(x) \in \mathbb{R}$. Pour tout $k > 0$ il existe un $x'$, tel que pour tout $x > x'$ : $\left|f(x) - \lim\limits_{x\to\infty} f(x)\right| < k$ et $\left|g(x) - \lim\limits_{x\to\infty} g(x)\right| < k$. Par conséquent pour tout ces $x$

$$\left|f(x) - \lim_{x\to\infty} f(x)\right| + \left|g(x) - \lim_{x\to\infty} g(x)\right| < 2k$$

De plus on peut affirmer pour de tels $x$

$$\left|f(x) + g(x) - \left(\lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} g(x)\right)\right| \leq \left|f(x) - \lim_{x\to\infty} f(x)\right| + \left|g(x) - \lim_{x\to\infty} g(x)\right| < 2k$$

Par là, il existe pour tout $k' := 2k > 0$ un $x'$, tel que pour $x > x'$ :

$$\left|f(x) + g(x) - \left(\lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} g(x)\right)\right| < k'$$

(on peut exprimer tout $k' > 0$ par $2k$ tel que $k > 0$). Par conséquent selon la définition de la limite $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) + \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ est la limite de $f(x)+g(x)$, c. à d. $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) + \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$. □

**Théorème 5.1.15** de la page 161 : $\lim\limits_{x\to\infty} (bf(x) = b \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ pour $b, \lim\limits_{x\to\infty} f(x) \in \mathbb{R}$

*Démonstration.* (i) Supposons que $b, \lim\limits_{x\to\infty} f(x) \in \mathbb{R}$. La limite $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existe alors, c. à d. pour tout $k > 0$ il existe un $x'$, tel que pour tout $x > x'$ : $\left|f(x) - \lim\limits_{x\to\infty} f(x)\right| < k$.
(ii) Il existe pour tout $k > 0$ un $k' > 0$ et un $b \in \mathbb{R}$, tel que $k = |b|\, k'$.
(iii) Supposons alors un $k > 0$. Selon (ii) il existe un $k' > 0$ et un $b \in \mathbb{R}$, tel que $k = |b|\, k'$ et $k' > 0$. Avec cela $k' = \frac{k}{|b|}$. Puisque $k' > 0$ il existe selon (i) un $x'$, tel que pour tout $x > x'$ : $\left|f(x) - \lim\limits_{x\to\infty} f(x)\right| < k' = \frac{k}{|b|}$.
(iv) On peut déduire de $\left|f(x) - \lim\limits_{x\to\infty} f(x)\right| < \frac{k}{|b|}$ : $|b| \left|f(x) - \lim\limits_{x\to\infty} f(x)\right| < k$. De plus

$$\left|b\left(f(x) - \lim_{x\to\infty} f(x)\right)\right| = \left|bf(x) - b\lim_{x\to\infty} f(x)\right| \leq |b| \left|f(x) - \lim_{x\to\infty} f(x)\right| < k.$$

(v) (iii)-(iv) vaut pour des $k$ arbitraire, c. à d. pour tout $k > 0$ existe un $x'$, tel que pour tout $x > x'$ : $\left|bf(x) - b\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\right| < k$.
(vi) Avec la définition de la limite on peut en déduire que $b \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ est la limite de $bf(x)$, c. à d. $\lim\limits_{x\to\infty} (bf(x) = b \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. □

**Théorème 5.1.19** de la page 161 : $\lim\limits_{x\to\infty} a = a$ pour $a \in \mathbb{R}$.

*Démonstration.* Supposons que $f(x) = a \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Nous examinons un $k > 0$. Pour tout ces $k$ il existe un $x'$, tel que pour tout $x > x'$ , $|f(x) - a| = |a - a| < k$ - car $|f(x) - a| = |a - a| = 0 < k$ pour tout $x$. Par là on peut choisir un $x'$ quelconque tel que pour tout $x > x'$ : $|f(x) - a| < k$. Selon la définition de la limite, il s'ensuit que $a$ est la limite de $a$, c. à d. $\lim\limits_{x\to\infty} a = a$. □

## 5.7 Objectifs d'apprentissage

— Arriver à calculer $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ en indiquant les théorèmes utilisés (dans des exercices qui correspondent à ceux des exercices ci-dessus ; on peut utiliser une liste des théorèmes)

— Arriver à expliquer ce que $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to x_0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ signifient (en mots propres, une reproduction exacte des définitions n'est pas requises)
— Arriver à définir l'expression „voisinage de $x_0$“ et „point d'accumulation d'un ensemble“.
— Arriver à calculer et à décrire le comportement de fonctions au voisinage de $x_0$ (saut, trou, pôle, changement abrupt de la pente). Quand la limite d'une fonction en $x_0$ est-elle un nombre réel sans que la fonction soit définie en $x_0$ ?

# Chapitre 6

# Continuité

Pour des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ ou des intervalles $I \subset \mathbb{R}$ la continuité signifie intuitivement qu'on peut dessiner le graphe de la fonction sans lever le crayon - il n'y a pas de saut, de trous ou de pôles.

## 6.1 Définitions et théorèmes

**Définition 6.1.1.** — *Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est continue en $x_0 \in I \subset D$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ($D \subset \mathbb{R}$, $I$ est un intervalle)*
— *Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est en $x_0 \in I \subset D$ continue à droite si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$*
— *Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est en $x_0 \in I \subset D$ continue à gauche si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$*

$\diamondsuit$

Ces définitions impliquent que $f(x_0)$ est définie (existe) si $f$ est continue en $x_0$. De plus $f$ ne peut être continue en $x_0$ que si la limite pour $x$ vers $x_0$ est définie. Si une fonction est continue à droite et à gauche en $x_0$ elle est continue en $x_0$.

**Exemple 6.1.2.** *La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ; $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pour } x \in ]-\infty, 5] \\ 2x+3 & \text{pour } x \in ]5, \infty[ \end{cases}$ est continue à gauche en $5$ et n'est pas continue à droite en $5$. Elle n'est pas continue en $5$. La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ; $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pour } x \in ]-\infty, 5[ \\ 2x+3 & \text{pour } x \in [5, \infty[ \end{cases}$ n'est pas continue à gauche en $5$, mais continue à droite. Elle n'est pas continue en $5$.* $\diamondsuit$

**Définition 6.1.3.** — *Une fonction $f$ est continue sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $x \in I$ : $f$ est continue en $x$.*
— *Une fonction $f$ est continue si et seulement si elle est continue sur $\mathbb{R}$.*

$\diamondsuit$

Le théorème suivant est une conséquence immédiate des théorèmes démontrés dans le chapitre précédent.

**Théorème 6.1.4.** — *Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ; $f(x) = a$, $f$ est continue ($a \in \mathbb{R}$ ; fonction constante)*
— *$f(x) = x^n$ est continue sur $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$.*
— *La somme $f + g$ de fonctions $f$ et $g$ continues sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est continue sur $I$*

- *Si $f$ est continue sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$, $af$ est continue sur $I$ ($a \in \mathbb{R}$) (A partir de ces trois théorèmes on peut conclure que tous les polynômes sont continus).*
- *Le produit $fg$ de fonctions continues $f$ et $g$ sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est continu sur $I$.*
- *$\frac{f}{g}$ pour des fonctions continues sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est continue sur $I\backslash\{x|g(x) = 0\}$*
- *Si $f$ est continue sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$, $f$ est continue sur l'intervalle $J \subset I$.*
- *Pour une fonction continue bijective sur $I \subset \mathbb{R}$ avec l'image $I'$, la fonction réciproque est continue sur $I'$ (ainsi $\sqrt[n]{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$).*
- $\exp_a(x)$ *est continue sur $\mathbb{R}$ pour $a \in \mathbb{R}_+\backslash\{1, 0\}$ (par conséquent :* $\log_a x$ *est continue sur $\mathbb{R}_+\backslash\{0\}$)*
- *La composition de fonctions continues est continue sur le domaine de définition.*

Sur la base de ces théorèmes on peut p.ex. affirmer que les fonctions rationnelles sont continues dans leur domaine de définition.

Nous avons fait connaissance jusqu'ici de trois types de discontinuité : il y a un saut, un pôle ou un trou. Pour les trous, on peut en quelque sorte „enlever " la discontinuité. Si $f$ est une fonction avec le domaine de définition $I\backslash\{x_0\}$ et qui a en $x_0$ un trou tel que la limite réelle existe en $x_0$, nous pouvons définir une nouvelle fonction $g$, qui est continue, de la manière suivante :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pour } x \in I\backslash\{x_0\} \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) & \text{pour } x = x_0 \end{cases}$$

Nous appelons $g$ la „prolongation par continuité de $f$ en $x_0$".

La majorité des fonctions économiques ne sont pas continues. On mesure p.ex. les biens par des unités discrètes. Cela vaut aussi pour des biens comme la farine, le pétrole ou l'électricité dont on mesure les quantités d'une manière métrique, mais toujours à un nombre fini de chiffres après la virgule près. Pour ne pas être obligé de renoncer aux avantages du calcul dans les nombres réelles (p.ex. l'existence de racines, logarithmes, zéros de polynômes, etc.), on suppose la continuité des fonctions utilisées. Il s'agit d'une idéalisation anodine.

Cela ne veut pas dire que des fonctions discontinues ne jouent aucun rôle dans l'économie. Les coûts fixes p.ex. ne sont fixes que dans des intervalles spécifiques. Dès qu'on augmente la production au-delà les capacités de productions données il faut acheter de nouvelles machines ou de nouveau bâtiments. Les coûts fixes augmentent abruptement. La fonction de coût fixe fait un saut.

**Exemple 6.1.5.** *Fonction de coût fixe (voire figure 6.1.1)*

$$C_f(x) = \begin{cases} 2 & \textit{pour } 0 \le x < 3 \\ 3 & \textit{pour } 3 \le x < 5 \\ 4 & \textit{pour } 5 \le x < 7 \end{cases}$$

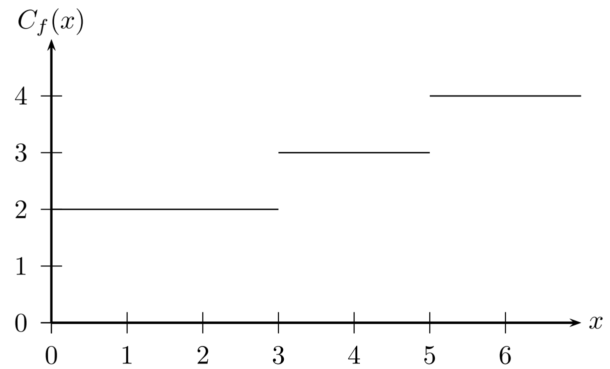


FIGURE 6.1.1 – Représentation graphique d'une fonction de coût fixe avec sauts

*Nous supposons qu'on puisse représenter les coûts variables par la fonction continue* $C_v = 3x$. *Nous obtenons la fonction de coût total discontinue suivante (voir figure 6.1.2) :*

$$C(x) = \begin{cases} 2 + 3x & \textit{pour } 0 \le x < 3 \\ 3 + 3x & \textit{pour } 3 \le x < 5 \\ 4 + 3x & \textit{pour } 5 \le x < 7 \end{cases}$$

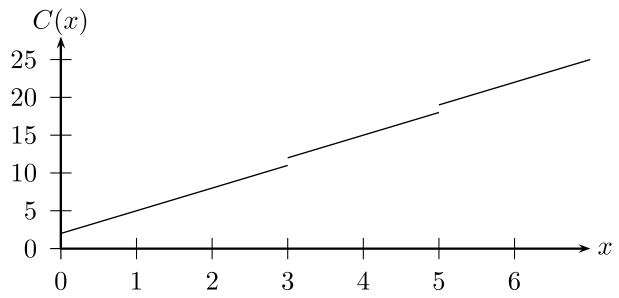


FIGURE 6.1.2 – Représentation graphique d'une fonction de coût avec saut

*La fonction de coût unitaire discontinue correspondante est (voir figure 6.1.3) :*

$$c(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} + 3 & \textit{pour } 0 < x < 3 \\ \frac{3}{x} + 3 & \textit{pour } 3 \le x < 5 \\ \frac{4}{x} + 3 & \textit{pour } 5 \le x < 7 \end{cases}$$

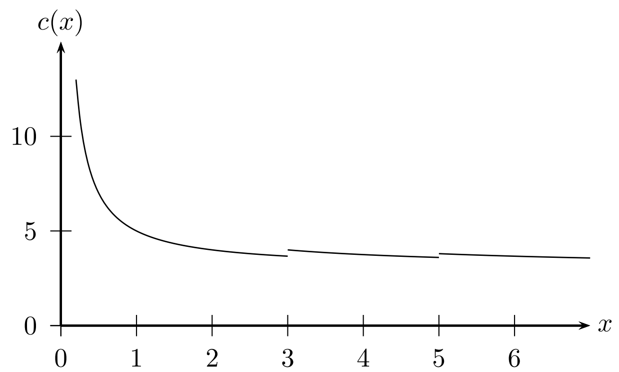


FIGURE 6.1.3 – Représentation graphique d'une fonction de coût unitaire avec sauts

◊

### 6.1.1 Exercices

1. Calculer la fonction du montant de la facture $P$ (montant net de la facture en fonction de la quantité achetée) : le prix de base d'une marchandise est 100 UM par UQ (unité de quantité). Si l'on achète 1000 ou plus de 1000 UQ, le vendeur accorde un rabais de 10% et à partir (et inclus) 2000 UQ un rabais de 20% sur le prix de base (pour la quantité totale). Dessiner la fonction du montant de la facture. Est-ce que la fonction du montant est

continue sur $]0, \infty[$ ? Indiquer les discontinuités (le système de rabais décrit incite l'acheteur à acheter plus que ce dont il a besoin. A partir de quelle quantité l'acheteur achète 1000 UQ bien qu'il serait satisfait avec une quantité inférieure ? (sans tenir compte d'autres coûts, p.ex. ceux du stockage).

2. Calculer la fonction du montant de la facture $P$ : le prix d'une marchandise est de 100 UM par UQ. Si l'on commande plus de 1000 UQ le vendeur accorde 20% et à partir de 2000 UQ 40% de rabais sur le prix de base (uniquement pour la quantité qui dépasse les limites indiquées). Dessiner la fonction. Est-ce que la fonction est continue sur $]0, \infty[$ ?
3. $C_f$ est défini par.
$$C_f(x) = \begin{cases} 30 & \text{pour } 0 \leq x < 4 \\ 50 & \text{pour } 4 \leq x < 10 \\ 70 & \text{pour } 10 \leq x < 15 \end{cases}$$
et $C_v$ par $C_v(x) = 0.5x$. Déterminer la fonction de coût total et la fonction de coût unitaire. Dessiner les fonctions. Est-ce que les fonctions sont continues sur l'intervalle $0 < x < 15$ ?
4. Déterminer les intervalles sur lesquels les fonctions suivantes sont continues.
$f(x) = 2x^3 + 2x - \ln x$
$g(x) = 2x^3 + 2x - \ln(-x + 8)$
$h(x) = 3x^5 - 8x^2 + \sqrt{-2x + 8}$
$c(x) = 3x^5 - 8x^2 + \sqrt{2x^2}$

### 6.1.2 Solutions

1. On peut définir la fonction par intervalles (voir figure 6.1.4) :
$$P(x) = \begin{cases} 100x & \text{pour } 0 \leq x < 1000 \\ 90x & \text{pour } 1000 \leq x < 2000 \\ 80x & \text{pour } 2000 \leq x \end{cases}$$

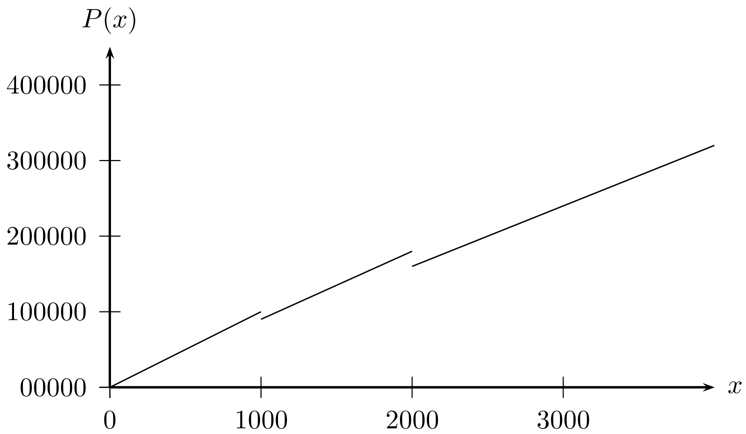


FIGURE 6.1.4 – Représentation graphique d'une fonction de montant net de la facture avec sauts

Car : Une unité de quantité coûte 100 par unité. Ainsi $x$ unités coûtent $100x$. Dans le deuxième intervalle une unité coûte 90 UM. Par là, $x$ unités coûtent $90x$.
La fonction n'est pas continue en 1000 et en 2000 :
Pour $x_0 = 1000$ :
$\lim_{x \to 1000^-} (100x) = \lim_{x \to 1000^-} 100 \cdot \lim_{x \to 1000^-} x = 100 \cdot 1000 = 100'000$
$\lim_{x \to 1000^+} (90x) = \lim_{x \to 1000^+} 90 \cdot \lim_{x \to 1000^+} x = 90 \cdot 1000 = 90'000.$
Les limites à droite et à gauche ne coïncident pas. La fonction n'est pas continue en $x_0 =$

1000.
Pour $x_0 = 2000$ :
$\lim\limits_{x\to 2000^-}(90x) = \lim\limits_{x\to 2000^-} 90 \cdot \lim\limits_{x\to 2000^-} x = 90 \cdot 2000 = 180'000$
$\lim\limits_{x\to 2000^+}(80x) = \lim\limits_{x\to 2000^+} 80 \cdot \lim\limits_{x\to 2000^+} x = 80 \cdot 2000 = 160'000.$
Les limites à droite et à gauche ne coïncident pas. La fonction n'est pas continue en $x_0 = 2000$.
1001 coûtent p.ex. $(1001 \cdot 90) = 90\,090$ et moins que $995 \cdot 100 = 99\,500$. Il s'agit de déterminer la quantité à partir de laquelle il est meilleur marché d'acheter 1000 UQ. C'est le cas à partir de $\frac{90000}{100} = 900$.

2. Nous obtenons

$$P(x) = \begin{cases} 100x & \text{pour } 0 < x \leq 1000 \\ 80x + 20000 & \text{pour } 1000 < x \leq 2000 \\ 60x + 60000 & \text{pour } 2000 < x \end{cases}$$

Car jusqu'à $x = 1000$ l'équation décrivant la fonction est $100x$. Le rabais n'est accordé que pour des quantités dépassant les 1000. Pour les $x$ avec $1000 < x \leq 2000$ on peut calculer le montant de la manière suivante : $1000 \cdot 100 + (x - 1000) \cdot 80 = 20\,000 + 80x$ - ou par le calcul d'une droite à travers les points $(1000, 100000)$ et $(2000, 180000)$.

$$\begin{aligned} 100000 &= 1000a + b \\ 180000 &= 2000a + b \end{aligned}$$

solutions : $a = 80, b = 20\,000$
Pour $x$ avec $(2000 < x)$ de la manière suivante : $1000 \cdot 100 + 1000 \cdot 80 + (x - 2000) \cdot 60 = 60000 + 60x$

Nous calculons les limites à droite et à gauche aux frontières des intervalles :
$\lim\limits_{x\to 1000^-}(100x) = \lim\limits_{x\to 1000^-} 100 \cdot \lim\limits_{x\to 1000^-} x = 100 \cdot 1000 = 100'000$

$\lim\limits_{x\to 1000^+}(80x + 20000) = \lim\limits_{x\to 1000^+} 80x + \lim\limits_{x\to 1000^+} 20000 = 80 \cdot 1000 + 20000 = 100000$
Les limites à droite et à gauche coïncident en 1000. La limite y est égale à la valeur de la fonction. La fonction est alors continue en 1000.
$\lim\limits_{x\to 2000^-}(80x + 20000) = \lim\limits_{x\to 2000^-} 80x + \lim\limits_{x\to 2000^-} 20000 = 80 \cdot 2000 + 20000 = 180000$
$\lim\limits_{x\to 2000^+}(60x + 60000) = \lim\limits_{x\to 2000^+} 60x + \lim\limits_{x\to 2000^+} 60000 = 60 \cdot 2000 + 60000 = 180000$
Les limites à droite et à gauche coïncident en 2000. La limite y est égale à la valeur de la fonction. La fonction est alors continue en 2000 (voir figure 6.1.5).

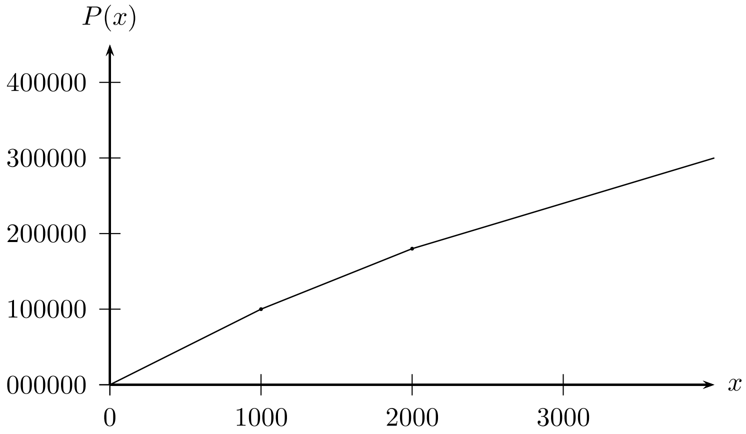


Figure 6.1.5 – Représentation graphique d'une fonction de montant net de la facture avec des changements abrupts de pente

3. Nous obtenons (voir figure 6.1.6) :

$$C_f(x) = \begin{cases} 30 & \text{pour } 0 \leq x < 4 \\ 50 & \text{pour } 4 \leq x < 10 \\ 70 & \text{pour } 10 \leq x < 15 \end{cases}$$

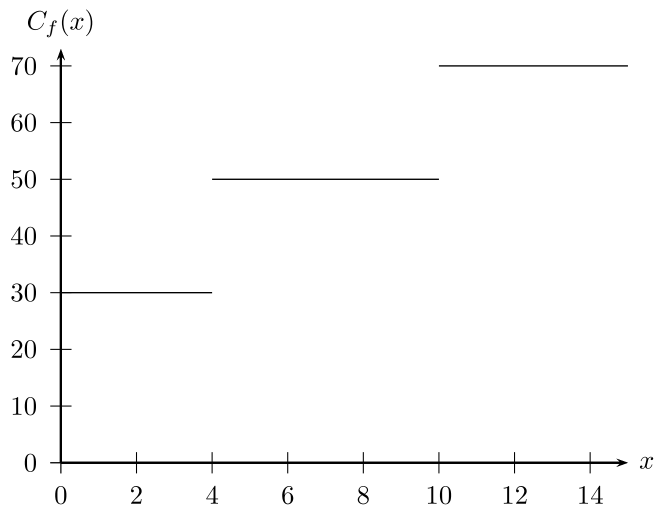


Figure 6.1.6 – Représentation graphique d'une fonction de coût fixe avec sauts

La fonction n'est pas continue en 4 et en 10, car :
$\lim\limits_{x\to 4^-} 30 = 30$ et $\lim\limits_{x\to 4^+} 50 = 50$. Les limites à droite et à gauche ne coïncident pas en 4. Par conséquent la limite n'y est pas définie et ne peut être égale à la valeur de fonction en 4. $C_f$ est discontinu en 4.
$\lim\limits_{x\to 10^-} 50 = 50$ et $\lim\limits_{x\to 10^+} 70 = 70$. Les limites à droite et à gauche ne coïncident pas en 10. $C_f$ est discontinu en 10.
On obtient la fonction de coût total suivante (voir figure 6.1.7) :

$$C(x) = \begin{cases} 0.5x + 30 & \text{pour } 0 \leq x < 4 \\ 0.5x + 50 & \text{pour } 4 \leq x < 10 \\ 0.5x + 70 & \text{pour } 10 \leq x < 15 \end{cases}$$

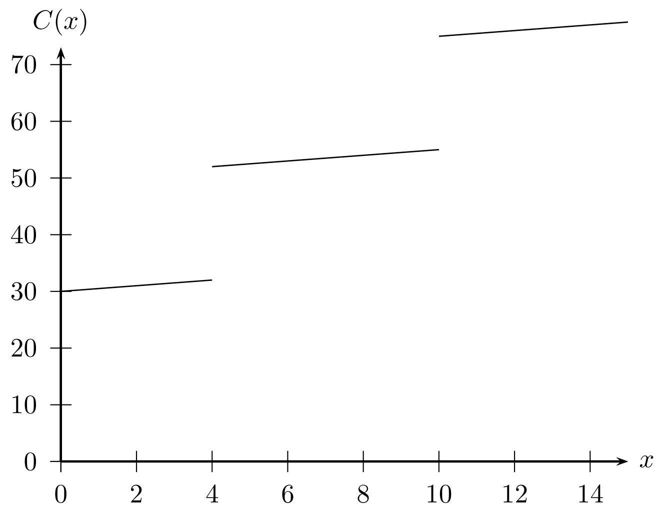


FIGURE 6.1.7 – Représentation graphique d'une fonction de coût avec sauts

La fonction de coût total n'est pas continue :
$\lim\limits_{x \to 4^-} (0.5x + 30) = 32$; $\lim\limits_{x \to 4^+} (0.5x + 50) = 52 \Longrightarrow$ discontinue en 4
$\lim\limits_{x \to 10^-} (0.5x + 50) = 55$; $\lim\limits_{x \to 10^+} (0.5x + 70) = 75 \Longrightarrow$ discontinue en 10
Nous obtenons la fonction de coût unitaire suivante (voir figure 6.1.8) :

$$c(x) = \begin{cases} 0.5 + \frac{30}{x} & \text{pour } 0 < x < 4 \\ \\ 0.5 + \frac{50}{x} & \text{pour } 4 \leq x < 10 \\ \\ 0.5 + \frac{70}{x} & \text{pour } 10 \leq x < 15 \end{cases}$$

.

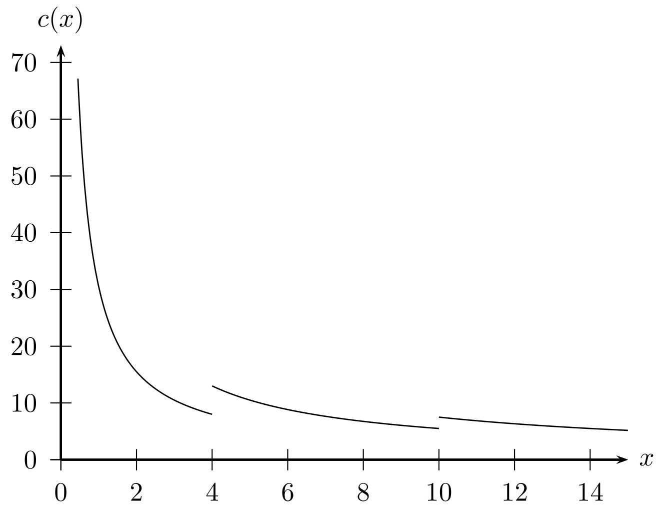


FIGURE 6.1.8 – Représentation graphique d'une fonction de coût unitaire avec sauts

$c$ n'est pas continue en 4 et en 10 :

$$c = \begin{cases} 0.5 + \frac{30}{x} & \text{pour } 0 < x < 4 \\ 0.5 + \frac{50}{x} & \text{pour } 4 \leq x < 10 \\ 0.5 + \frac{70}{x} & \text{pour } 10 \leq x < 15 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 4^-} \left(0.5 + \frac{30}{x}\right) = 8$ et $\lim\limits_{x \to 4^+} \left(0.5 + \frac{50}{x}\right) = 13$
$\lim\limits_{x \to 10^-} \left(0.5 + \frac{50}{x}\right) = 5.5$ et $\lim\limits_{x \to 10^+} \left(0.5 + \frac{70}{x}\right) = 7.5$

4. On obtient :

   (a) $f(x) = x$ est, en tant que polynôme, une fonction continue sur $\mathbb{R}$. $\ln x$ est continue sur $\mathbb{R}_+\backslash\{0\}$. Puisque $2x^3 + 2x$ est continue sur $\mathbb{R}$, $2x^3 + 2x$ est continue sur $\mathbb{R}_+\backslash\{0\}$. Ainsi $f(x) = 2x^3 + 2x - \ln x$ est continue sur $\mathbb{R}_+\backslash\{0\}$ (somme de fonctions).

   (b) La fonction logarithme n'est définie que pour des nombres positifs. Nous devons alors déterminer le domaine où $-x + 8 > 0 \Longrightarrow x < 8$. Puisque $g'(x) = -x + 8$ est continue sur $\mathbb{R}$, $\ln g'(x)$ est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{x \mid x \geq 8\}$. Comme $2x^3 + 2x$ est continue sur $\mathbb{R}$, $g(x) = 2x^3 + 2x - \ln(-x + 8)$ est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{x \mid x \geq 8\}$.

   (c) La racine n'est définie dans les nombres réelles que pour $h'(x) \geq 0$, c. à d. pour $-2x+8 \geq 0 \Longrightarrow x \leq 4$. Comme $h'(x) = -2x + 8$ est continue sur $\mathbb{R}$, $h'(x)$ est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{x|x > 4\}$ et par là $\sqrt{h'(x)}$ est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{x|x > 4\}$. Puisque $3x^5 - 8x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, $h(x) = 3x^5 - 8x^2 + \sqrt{-2x + 8}$ est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{x|x > 4\}$.

   (d) $\sqrt{2x^2}$ est défini pour $2x^2 \geq 0$. Cette inéquation est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme $2x^2$ - en tant que polynôme - est continue sur $\mathbb{R}$, $\sqrt{2x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Par là, $3x^5 - 8x^2 + \sqrt{2x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

## 6.2 Zéros de fonctions continues

Dans le chapitre 3 (polynômes) nous avons développé une méthode d'approximation pour les zéros de polynômes. En le faisant nous avons supposé tacitement le théorème suivant :

**Théorème 6.2.1.** *(théorème de Bolzano, théorème des zéros intermédiaires) (i) Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur l'intervalle $I$ avec $a, b \in I, a < b, f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, alors il existe au moins un zéro de la fonction entre $a$ et $b$.*
*(ii) Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur l'intervalle $I$ avec $a, b \in I, a < b$, $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$, alors il existe au moins un zéro entre $a$ et $b$.*

*Démonstration.* démonstration de (i) : Nous définissons l'ensemble

$$I_{\leq} := \{x \mid f(x) \leq 0 \text{ et } x \in [a, b]\}.$$

De plus nous définissons :
(1) $s$ est une borne supérieure d'un ensemble $A$ si et seulement si pour tout $x \in A : x \leq s$.
(2) $\sup A = S$ si et seulement si $S$ est une borne supérieure de $A$ et pour toutes les autres bornes supérieures $s$ de $A : S \leq s$ (exemple : $\sup[a, d] = d = \sup[a, d[$; $[a, d]$ et $[a, d[$ sont des intervalles et par conséquent des ensembles)
(3) $d := \sup I_{\leq}$. $d$ est situé sur l'axe des $x$.
On peut affirmer : $f(d) \leq 0$ ou $f(d) > 0$. Nous examinons ces ceux cas :

(a) Supposons que $f(d) \leq 0$. Alors $f(d) < 0$ ou $f(d) = 0$.

Nous examinons ces deux possibilités :
(a.1) Supposons que $f(d) < 0$. $f(x) > 0$ à droite de $d$, car $d = \sup I_{\leq}$. Pour un $k$ avec $0 < k < -f(d)$, il n'existe pas de $r > 0$ tel que pour tout $|x-d| < r$ $|f(x) - f(d)| < k$, car $f(x) - f(d) > -f(d)$ pour tout $x$ à droite de $d$. Alors $\lim_{x \to d} f(x)$ n'est pas définie, ne peut coïncider avec $f(d)$ et $f$ ne serait par conséquent pas continue en $d$.
(a.2) Supposons que $f(d) = 0$. Il existe alors un zéro de $f$, car $d$ fait partie du domaine de définition de $f$.

(b) $f(d) > 0$. Nous distinguons deux cas :
(b.1) Il existe un $c \in [a, b]$ tel que pour tout $x \in [c, d[$ : $f(x) \leq 0$. Pour ce cas $f(d) - f(x) \geq f(d)$ et pour $k < f(d)$, il n'existe pas de $r$, tel que $f(d) - f(x) < k$. $f$ ne serait pas continue en $d$.
(b.2) pour chaque voisinage $V$ de $d$ dans $[a, b]$ il existe des $x, y < d$ tel que $f(x) > 0$ et $f(y) \leq 0$. $f$ ne serait pas continue, car il existerait dans chaque voisinage de $d$ un $y$ tel que $f(d) - f(y) \geq f(d) > k$. Pour $k$ il n'existe pas de $r$, tel que pour $|x - d| < r$ : $f(d) - f(y) < k$. C'est pourquoi il n'est pas possible que $f(d) > 0$.
On peut déduire que $d$ est un zéro et qu'il existe au moins un zéro dans l'intervalle $[a, b]$.

(ii) est démontré d'une manière analogue. □

Pour une représentation graphique de quelques éléments de l'idée de la démonstration voir la figure 6.2.9 :

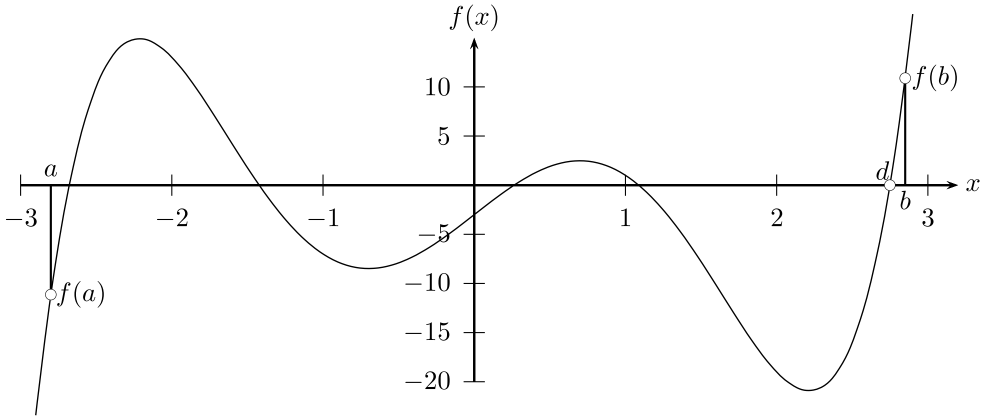


FIGURE 6.2.9 – Illustration graphique de quelques idées du théorème des zéros intermédiaires

**Théorème 6.2.2.** *(Zéros de fonctions strictement monotones) (i) Si une fonction $f$ est continue sur l'intervalle $I$, $f(x_1) < 0$, $f(x_2) > 0$ pour $x_i \in I$ et $f$ est strictement croissante sur l'intervalle $I$, alors il existe exactement un zéro entre $x_1$ et $x_2$.*
*(ii) Si une fonction $f$ est continue sur l'intervalle $I$, $f(x_1) > 0$, $f(x_2) < 0$ pour $x_i \in I$ et $f$ est strictement décroissante sur l'intervalle $I$, alors il existe exactement un zéro entre $x_1$ et $x_2$.*

*Démonstration.* Nous démontrons le théorème pour des fonctions strictement croissantes. Nous supposons qu'il existe deux zéros $a$ et $b$ avec $b > a$. Comme $f$ est strictement croissante on peut en déduire $f(b) > f(a)$, ce qui est en contradiction avec $f(b) = 0 = f(a)$. La démonstration de (ii) suit les mêmes pas. □

Le théorème des zéros intermédiaires est un cas spécial du théorème suivant :

**Théorème 6.2.3.** *(théorème des valeurs intermédiaires) (i) Si une fonction $f$ est continue sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ ($I \neq \emptyset$), alors pour $x_1 < x_2$ ($x_1, x_2 \in I$) avec $f(x_1) < f(x_2)$ il existe pour tout $y$ avec $f(x_1) < y < f(x_2)$ au moins un $x_3 \in [x_1, x_2]$ tel que $f(x_3) = y$*
*(ii) Si une fonction $f$ est continue sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ ($I \neq \emptyset$), alors pour $x_1 < x_2$ ($x_1, x_2 \in I$)*

*avec $f(x_1) > f(x_2)$, il existe pour tout $y$ avec $f(x_1) > y > f(x_2)$ au moins un $x_3 \in [x_1, x_2]$ tel que $f(x_3) = y$ (voir figure 6.2.10)*

*Démonstration.* Si nous mettons $f^*(x) = f(x) - y$, alors $f^*(x_1)f^*(x_2) < 0$ et avec le théorème des zéros intermédiaires on obtient qu'il existe un zéro de $f^*$ dans $]x_1, x_2[$. Si ce zéro est $x_3$, alors $f(x_3) = f^*(x_3) + y = y$.
De manière analogue on peut prouver (ii)

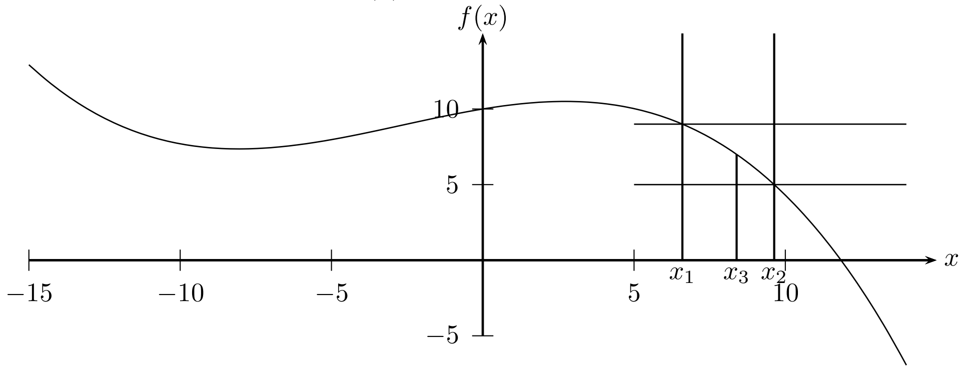


FIGURE 6.2.10 – Représentation graphique pour le théorème des valeurs intermédiaires - pour une fonction continue il existe pour tout $y : f(x_1) < y < f(x_2)$ un $x_3 : x_1 < x_3 < x_2$ avec $f(x_3) = y$.

□

**Théorème 6.2.4.** *Supposons que $f$ soit continue sur l'intervalle $I$ et que $c \in I$ et $f(c) > 0$. Il existe dans ce cas un voisinage $V$ de $c$ tel que $f(x) > 0$ pour tout $x \in V$.*

*Démonstration.* Nous supposons qu'un tel voisinage n'existe pas. Il y alors pour tout voisinage de $c$ un $x$ tel que $f(x) \leq 0$. Par conséquent $f$ n'est pas continue en $c$. Car pour un $k$ tel que $0 < k < f(c)$ il n'existerait aucun $r$ tel que pour tout $x$ avec $|x - c| < r : |f(x) - f(c)| < k$, parce que pour le $x$ avec $f(x) \leq 0 : f(c) - f(x) \geq f(c) > k$. Sur la base de cette contradiction nous pouvons conclure qu'il existe un voisinage $V$ de $c$ tel que $f(x) > 0$ pour $x \in V$. □

De manière analogue on peut montrer pour une fonction continue sur l'intervalle $I$ et $c \in I$ tel que $f(c) < 0$ : il existe un voisinage $V$ de $c$ tel que $f(x) < 0$ pour tout $x \in V$.

En inversant en quelque sorte le théorème des zéros intermédiaires on peut affirmer - nous disons qu'une fonction $f$ est positive sur un intervalle $I$, si $f(x) > 0$ pour $x \in I$; nous disons qu'une fonction $f$ est négative sur un intervalle $I$, si $f(x) < 0$ pour $x \in I$ :

**Théorème 6.2.5.** *(1) Entre deux zéros avoisinants, une fonction continue est soit partout positive soit partout négative.*
*(2) S'il n'y a plus de zéro réel à droite d'un zéro réel $x_0$ d'une fonction continue $f$ , la fonction a partout le même signe à droite de $x_0$.*
*(3) S'il n'y a plus de zéro réel à gauche d'un zéro réel $x_0$ d'une fonction continue $f$ , la fonction a partout le même signe à gauche de $x_0$.*
*(4) Si une fonction continue n'a pas de zéro réel, elle est soit partout positive, soit partout négative.*

*Démonstration.* (1) Deux zéros d'une fonction sont avoisinants s'il n'y a pas de zéro entre ces deux zéros. Nous supposons qu'il y ait entre deux zéros avoisinants $x_0$ et $x_1$ d'une fonction continue une valeur de fonction négative en $x_3$ et une positive en $x_4$ avec $x_0 < x_3 < x_4 < x_1$. Selon le théorème des zéros intermédiaires il devrait y avoir un zéro entre $x_3$ et $x_4$. Alors $x_0$ et $x_1$ ne seraient pas des zéros avoisinants.
(2) Si une fonction continue avait à droite du dernier zéro $x_0$ des signes opposés, il faudrait avoir un zéro entre les arguments avec les valeurs de fonctions de signes opposés, ce qui contredirait la supposition que $x_0$ est le dernier zéro.

(3) même argumentation que sous (2).
(4) Supposons que la fonction n'ait pas partout le même signe. Comme elle est continue, il faudrait avoir un zéro entre des arguments avec des valeurs de fonction opposées, ce qui contredit le fait qu'elle n'a pas de zéro réel. □

Pour examiner si une fonction continue est partout positive ou partout négative entre deux zéros avoisinants $x_0$ et $x_1$ il suffit de calculer une seule valeur de fonction de $x$ avec $x_0 < x < x_1$ : Si $f(x) > 0$ la fonction est partout positive sur $]x_0, x_1[$, si $f(x) < 0$, elle y est partout négative. De plus on peut conclure du fait qu'une fonction continue n'a pas de zéros dans un intervalle, que les valeurs de fonction y ont partout le même signe. De l'autre côté, on en peut pas conclure du fait qu'une fonction a trois zéros avoisinants $x_0, x_1$ et $x_2$ avec $x_0 < x_2 < x_3$ qu'elle change forcément de signe en passant de l'intervalle $]x_0, x_1[$ à l'intervalle $]x_1, x_2[$. La fonction pourrait par ex. être négative sur $]x_0, x_1[$, frôler l'axe en $x_1$ et être à nouveau négative sur $]x_1, x_2[$. Pour déterminer le signe d'une fonction continue à droite du dernier zéro réel de la fonction il suffit de calculer une valeur de fonction à droite du dernier zéro - d'une manière analogue à gauche du premier zéro. Si une fonction continue n'a pas de zéro réel, il suffit de calculer une seule valeur de fonction, pour déterminer partout le signe des valeurs de fonction.

Pour les fonctions réelles continues dans les cas où la fonction traverse l'axe des $x$, on peut utiliser la méthode d'approximation introduite dans le contexte des polynômes du troisième degré pour calculer les zéros.

### 6.2.1 Exercices

1. Calculer les zéros de $f(x) = \ln x - 1$ avec $x > 0$ (Calcul à la main et méthode d'approximation et avec **R**).
2. Calculer les zéros de $f(x) = 5x^3 - 1.5e + \ln(3x)$ avec Excel (méthode d'approximation et avec **R**) à 6 chiffres après la virgule près.
3. Déterminer pour les fonctions
$$\begin{aligned} f(x) &= -3x^2 + 4x + 2 \\ f(x) &= 3x^3 + 6x^2 - 2 \\ f(x) &= \ln(x + 5) \\ f(x) &= 3 - e^{x-5} \\ f(x) &= 2x^2 + 2 \end{aligned}$$
l'ensemble de nombres où $f(x) > 0$ et $f(x) < 0$. Déterminer le domaine de définition.
4. Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction suivante est positive et sur lesquels elle est négative :
$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{4-x}$$

### 6.2.2 Solutions

1. Le domaine de définition de $f(x) = \ln(x) - 1$ est $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$. $f$ est de plus continue pour $x > 0$. Par calcul : $\ln x - 1 = 0 \Longrightarrow \ln x = 1 \Longrightarrow \exp \ln x = x = \exp 1 = e$. Alors $x = e$

   Pour la méthode d'approximation nous pouvons commencer par constater
$$\begin{aligned} \ln 1 - 1 &= -1 \\ \ln 10 - 1 &= 1.302\,6 \end{aligned}$$
   Par conséquent il existe entre 1 et 10 au moins un zéro. Puisque $\ln(x) - 1$ est strictement croissant, il existe un zéro unique.

2. Le domaine de définition de $\ln(3x)$ est $\mathbb{R}_+\backslash\{0\}$, pour la constante $-1.5e$ : $\mathbb{R}$ et pour le polynôme $5x^3$ : $\mathbb{R}$. Par conséquent le domaine de définition de $f$ est $\mathbb{R}_+\backslash\{0\}$. Ainsi nous pouvons restreindre la recherche de zéros à ce domaine. $5x^3 - 1.5e + \ln(3x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+\backslash\{0\}$. $5x^3$ est positif pour des $x$ positif et strictement croissant dans ce domaine, ce qui est aussi valable pour $3x$. Par conséquent $\ln(3x)$ est strictement croissant. C'est pourquoi et parce que $1.5e$ est une constante que $f$ est strictement croissante dans le domaine de définition. Par conséquent il existe un zéro unique dans le domaine de définition : 0.85585.
3. On obtient :

   (a) (polynôme du deuxième degré ; domaine de définition = $\mathbb{R}$, continu sur $\mathbb{R}$) : $-3x^2+4x+2>0$
   Nous calculons les zéros de la fonction :
   $x_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{10} \approx 1.720\,8$
   $x_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{10} \approx -0.387\,43$
   Comme $0 \in ]x_1, x_2[$ et que $f(x) = 2 > 0$, on peut affirmer $f(x) > 0$ sur l'intervalle $]x_1, x_2[$
   L'ensemble solution de $-3x^2 + 4x + 2 > 0$ est alors
   $S = ]-0.38743, 1.7208[$

   L'ensemble solution de $-3x^2 + 4x + 2 < 0$
   $f(-2) = -3(-2)^2 + 4(-2) + 2 = -18$. Alors $f(x) < 0$ pour tout $x \in ]-\infty, x_2[$
   $f(2) = -3(2)^2 + 4(2) + 2 = -2$. Alors $f(x) < 0$ pour tout $x \in ]x_1, \infty[$
   Ainsi : $S = ]-\infty, -0.38743[ \ \cup\ ]1.7208, \infty[$
   L'ensemble solution de $-3x^2 + 4x + 2 \leq 0$ :
   $S = ]-\infty, -0.38743] \ \cup\ [1.7208, \infty[$

   (b) $f(x) = 3x^3 + 6x^2 - 2$ Domaine de définition : $\mathbb{R}$, continu sur $\mathbb{R}$.
   Nous calculons les zéros : $3x^3 + 6x^2 - 2 = 0$
   $x_1 = -1.79251721397;$
   $x_2 = -0.722351724464,$
   $x_3 = 0.514868938439.$

   Nous calculons dans chaque intervalle $]-\infty, x_1[$ $]x_1, x_2[$, $]x_2, x_3[$, $]x_3, \infty[$ une valeur de fonction :
   $f(-2) = 3\cdot(-2)^3 + 6\cdot(-2)^2 - 2 = -2$. Alors pour tout $x \in\ ]-\infty, x_1[$ : $f(x) < 0$
   $f(-1) = 3\cdot(-1)^3 + 6\cdot(-1)^2 - 2 = 1$. Alors pour tout $x \in\ ]x_1, x_2[$ : $f(x) > 0$
   $f(0) = -2$. Alors pour tout $x \in\ ]x_2, x_3[$ : $f(x) < 0$
   $f(1) = 3\cdot(1)^3 + 6\cdot(1)^2 - 2 = 7$. Alors pour tout $x \in\ ]x_3, \infty[$ : $f(x) > 0$

   L'ensemble solution pour $3x^3 + 6x^2 - 2 > 0$ : $S =\ ]x_1, x_2[\ \cup\ ]x_3, \infty[$
   L'ensemble solution pour $3x^3 + 6x^2 - 2 < 0$ : $S = ]-\infty, x_1[ \cup ]x_2, x_3[$.

   (c) $f(x) = \ln(x+5)$
   Les logarithmes sont définis pour les nombres positifs. Par conséquent il faut que $x + 5 > 0$. Alors $x > -5$. Le domaine de définition est alors : $]-5, \infty[$. La fonction est continue sur le domaine de définition.
   zéros : $\ln(x+5) = 0 \Longrightarrow e^{\ln(x+5)} = e^0 = 1$
   Alors : $e^{\ln(x+5)} = x + 5$, car $\ln e^{\ln(x+5)} = \ln(x+5) \Longleftrightarrow \ln(x+5)\ln e = \ln(x+5) \Longleftrightarrow \ln(x+5) = \ln(x+5)$
   (rappel : $\ln e = 1$). On obtient comme zéro : $x + 5 = 1$ et $x = -4$

   Nous calculons un $f(x)$ à gauche et à droite du zéro.
   $f(-4.5) = \ln(-4.5 + 5) = -0.693\,15$
   Alors pour tout $x \in ]-5, -4[$ : $f(x) < 0$
   $f(0) = \ln(5) = 1.609\,4$

Alors pour tout $x \in ]-4, \infty[$ : $f(x) > 0$

L'ensemble solution de $\ln(x+5) > 0$ est : $S = ]-4, \infty[$
L'ensemble solution de $\ln(x+5) < 0$ est $S = ]-5, -4[$

(d) $f(x) = 3 - e^{x-5}$ Domaine de définition : $\mathbb{R}$. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$.
zéro : $3 - e^{x-5} = 0 \Longrightarrow e^{x-5} = 3 \Longrightarrow$
$\ln e^{x-5} = \ln 3 \Longrightarrow (x-5)\ln e = \ln 3 \Longrightarrow x - 5 = \ln 3 \Longrightarrow x = 5 + \ln 3 \approx 6.0986$
$f(x)$ avant et après le zéro :
$f(0) = 3 - e^{-5} = 2.9933$. Alors pour tout $x \in ]-\infty, 5 + \ln 3[$ : $f(x) > 0$
$f(10) = 3 - e^{10-5} = -145.41$. Alors pour tout $x \in ]5 + \ln 3, \infty[$ : $f(x) < 0$
Ensemble solution de $3 - e^{x-5} > 0$ : $S = ]-\infty, 5 + \ln 3[$
Ensemble solution de $3 - e^{x-5} < 0$ : $S = ]5 + \ln 3, \infty[$

(e) $f(x) = 2x^2 + 2$ Domaine de définition : $\mathbb{R}$, la fonction est continue sur $\mathbb{R}$.
zéros : $2x^2 + 2 = 0 \Longrightarrow x^2 = -1 \Longrightarrow$ pas de zéro réel.
Nous calculons un $f(x)$ : $f(0) = 2$.Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) > 0$

4. Le domaine de définition de la fonction est $\mathbb{R}\backslash\{1, 4\}$. La fonction est continue sur les intervalles $]-\infty, 1[$, $]1, 4[$, $]4, \infty[$. Elle a des discontinuités en 1 et en 4. Elle a un zéro en

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-1} - \frac{2}{4-x} &= 0 \\
\frac{x - 4 - 2(x-1)}{(x-1)(4-x)} &= 0 \\
x - 4 - 2x + 2 = -x - 2 &= 0 \\
x &= 2.
\end{aligned}$$

Les changements de signes peuvent se produire aux discontinuités et au zéros. C'est pourquoi nous contrôlons le signe des valeurs de fonctions avant et après le zéro et les discontinuités 1 et 4.

$$\begin{aligned}
f(0) &= -\frac{3}{2} \\
f(1.5) &= 1.2 \\
f(2.5) &= -\frac{2}{3} \\
f(5) &= \frac{9}{4}
\end{aligned}$$

La fonction est alors négative sur ]-∞, 1[, positive sur ]1,2[, négative sur ]2,4[ et positive sur ]4,∞[.
Faire un graphique avec R, pour examiner la forme du graphe de la fonction :
f=function(x) 1/(x-1)-2/(4-x) ; plot(f,xlim=c(-1,5)) ; abline(0,0).
Avec la méthode on peut résoudre des inéquations comme $\frac{1}{x-1} \leq \frac{2}{4-x}$. On peut en déduire $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{4-x} \leq 0$. Il s'agit alors de trouver les intervalles où la fonction $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{4-x} \leq 0$.

## 6.3 Objectifs d'apprentissage

— Arriver à reproduire la définition de la continuité d'une fonction en un point.
— Savoir reproduire la définition de la continuité d'une fonction par rapport à un intervalle et arriver à expliquer ce que la continuité signifie pour le dessin du graphe de la fonction.
— Connaître les fonctions continues les plus importantes et savoir sur quels intervalles elles sont continues. Connaître et arriver à appliquer les règles qui permettent de déterminer sur quelles intervalles la composition de fonctions est continue.

— Arriver à faire des calculs correspondants aux exercices.
— Arriver à expliquer le théorème des zéros et des valeurs intermédiaires à l'aide d'un dessin.
— Arriver à calculer les zéros de fonctions réelles continues à l'aide d'Excel (méthode d'approximation) et à l'aide de **R**.
— Arriver à déterminer pour des fonctions continues les intervalles sur lesquels la fonction est positive ou négative.

# Chapitre 7

# La pente d'une fonction continue en un point

## 7.1 Définition de la pente d'une fonction continue en un point

**Définition 7.1.1.** *Supposons que $f : I \to \mathbb{R}$, $I$ un intervalle ouvert, $x_0 \in I$. Nous définissons la pente $m$ de $f$ en $x_0$ par*

$$m(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

*pourvu que cette limite soit définie.* $\Diamond$

Pour que $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ soit définie, la continuité de la fonction $f$ en $x_0$ est une condition nécessaire, mais pas suffisante, comme on verra par la suite.

Les réflexions suivantes peuvent rendre plausible la définition :

1. Par rapport aux fonctions linéaires et affines (polynômes du premier degré) nous pouvons choisir deux points arbitraires $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$, pour calculer la pente $m = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$. La similarité de cette définition avec la définition 7.1.1 saute aux yeux. La différence des définitions est due au fait que la définition 7.1.1 mène à une pente en dépendance du choix de $x_0$, tandis que pour les polynômes du premier degré le choix du $x_0$ n'a pas d'importance pour la pente. Ceci est adapté à la situation : les polynômes de degré supérieur à 1 p.ex. ont en général pour chaque $x_0$ une pente différente. C'est pourquoi if faut chercher une définition qui permette de trouver une pente correcte pour les $x_0$ différents.
2. Nous définissons une sécante $g$ d'une fonction $f$ en $x_0$ comme une droite qui passe par $(x_0, f(x_0))$ et qui coupe dans un voisinage $V$ de $x_0$ la fonction $f$ une deuxième fois (voir figure 7.1.1) :

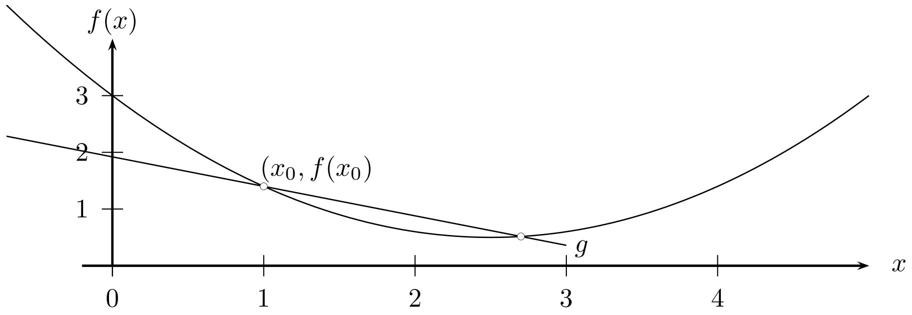


FIGURE 7.1.1 – Fonction $f$ et une sécante à travers le point $(x_0, f(x_0))$

Nous désignons le deuxième point d'intersection de $g$ et $f$ dans un voisinage de $x_0$ par $(x, f(x))$. Si nous laissons tendre $x$ vers $x_0$, la sécante s'approche d'une droite $h$, qui n'a avec $f$ dans le voisinage considéré qu'un seul point d'intersection en commun et dont on peut identifier la pente raisonnablement avec la pente de $f$ en $x_0$ (voir figure 7.1.2) :

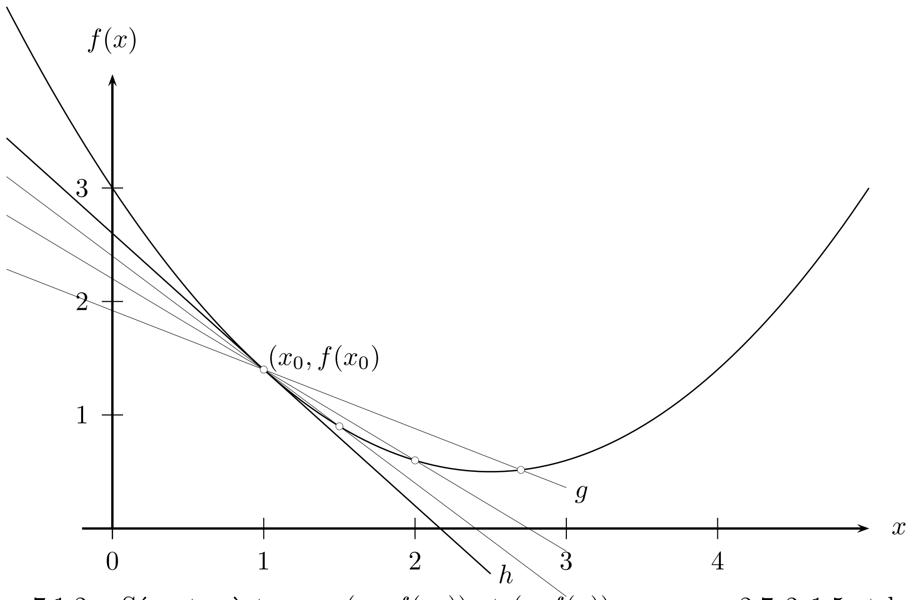


FIGURE 7.1.2 – Sécantes à travers $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$ avec $x = 2.7, 2, 1.5$ et la droite $h$, dont les sécantes s'approchent pour $x \to x_0$.

Les pentes des sécantes sont $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. La pente de $h$ est alors égale à la limite des pentes des sécantes pour $x \to x_0$, c. à d. avec

$$m_h = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Nous appelons $h$ la tangente de $f$ en $(x_0, f(x_0))$.

3. La définition 7.1.1 mène pour les droites au même résultat que la définition $m = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Pour $f(x) = ax + b$ nous obtenons :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{ax + b - (ax_0 + b)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{a(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} a = a$$

La définition 7.1.1 est alors compatible avec ce qu'on connaît mais ne sert pas uniquement à reproduire ce qu'on connaît déjà. Pour voir les autres possibilités de la nouvelle définition nous allons examiner la fonction $f(x) = x^2$. Nous pouvons déduire la pente de cette fonction pour chaque $x_0$ d'une manière générale :

Nous substituons dans la définition *7.1.1* :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x+x_0)(x-x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}(x+x_0)$$
$$= \lim_{x\to x_0} x + \lim_{x\to x_0} x_0 = x_0 + x_0 = 2x_0.$$

Pour la pente $m$ de la fonction $f(x) = x^2$ on peut affirmer pour chaque point $(x_0, f(x_0))$ :

$$m(x_0) = 2x_0.$$

La pente de $f(x) = x^2$ en $(1,1)$ est $2 \cdot 1 = 2$ (= la pente de la tangente en $(1,1)$). En $(2,4)$ la pente se monte à : $2 \cdot 2 = 4$, en $(3,9)$ : $3 \cdot 2 = 6$, etc. Les expressions „la pente en $x_0$" et „la pente en $(x_0, f(x_0))$" sont considérées comme équivalentes (voir figure 7.1.3)

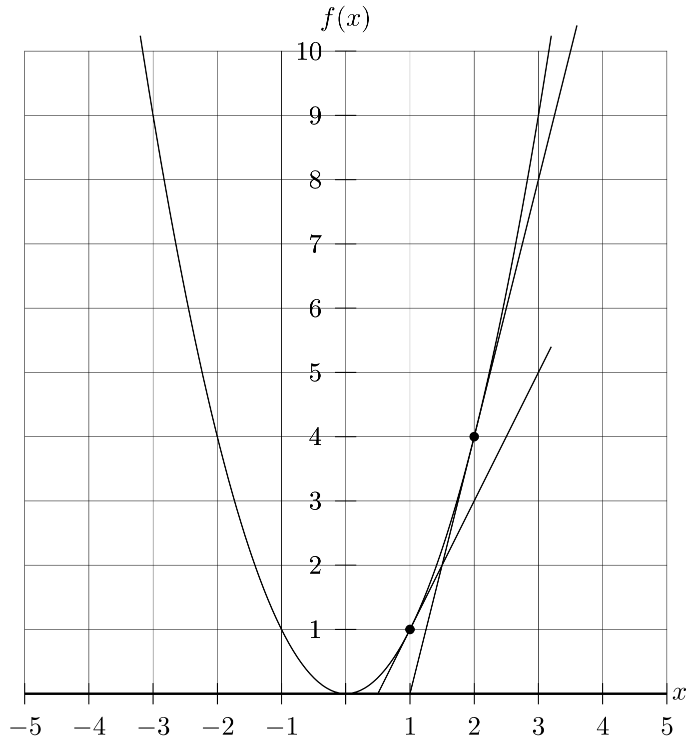


FIGURE 7.1.3 – Pentes des tangentes de la fonction $f(x) = x^2$ en $x_0 = 1$ et $x_0 = 2$. On peut vérifier les pentes des tangentes à l'aide de la grille.

**Remarque 7.1.2.** $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *est la limite de la fonction* $F_{x_0}(x) := \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *pour* $x$ *tendant vers* $x_0$. $F_{x_0}$ *n'est pas définie pour* $x = x_0$ *(division par 0) et* $F_{x_0}$ *n'est pas continue en* $x_0$. *Malgré cela, la limite de la fonction* $F_{x_0}$ *pour* $x \to x_0$ *existe pour beaucoup de fonctions continues dans leurs intervalles de définition.* $\Diamond$

## 7.2 La dérivée d'une fonction continue

Dans l'exemple $f(x) = x^2$ la pente de $f$ en $x_0$ est une fonction $m(x_0) = 2x_0$ de $x_0$. Puisque $x_0$ est une variable comme $x$, nous utiliserons par la suite en général $x$ au lieu de $x_0$. Nous appelons la fonction $m$ „la dérivée" de $f$ et nous la notons par $f'$.

Dans notre exemple, la dérivée de $f(x) = x^2$ est la fonction $f'(x) = 2x$. Calculer la dérivée se dit „dériver" (substantif correspondant „dérivation"). On appelle le domaine mathématique du calcul des dérivées „calcul différentiel". D'autres notations courantes pour $f'(x)$ :

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{\triangle \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle) - f(x_0)}{\triangle} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle f(x)}{\triangle x} \\ &= \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{df(x)}{dx} \end{aligned}$$

Il n'est pas nécessaire de calculer pour chaque fonction la limite en $x_0$ à l'aide de la définition *7.1.1* pour déterminer la dérivée. Nous pouvons démontrer des théorèmes qui permettent de dériver des classes entières de fonctions facilement.

**Théorème 7.2.1.** *Si $f(x) = x^n$, alors $f'(x) = nx^{n-1}$ pour $n > 0$.*

*Démonstration.* En remplaçant dans la définition on obtient

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0}.$$

Nous pouvons calculer la limite si nous arrivons à représenter $x^n - x_0^n$ comme produit

$$(x - x_0) \cdot A$$

(factoriser) tel que $A$ est une expression algébrique qu'il faudrait encore calculer. Si nous y arrivons on peut réduire

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0) \cdot A}{x - x_0}.$$

Par la division de $x^n - x_0^n$ par $x - x_0$ nous obtenons :

$$x^n - x_0^n : x - x_0 = \sum_{i=0}^{n-1} x_0^i x^{n-1-i}. \qquad (7.2.1)$$

On peut démontrer ce résultat par induction.
(1) La proposition est valable pour $n = 2$ :

$$\begin{array}{llll} x^2 - x_0^2 : & & x - x_0 & = x + x_0 \\ \underline{x^2 - xx_0} & & & \\ \quad xx_0 - x_0^2 & & & \\ \quad \underline{xx_0 - x_0^2} & & & \\ \qquad 0 & & & \end{array}$$

On peur réécrire

$$x + x_0 = x^1 x_0^0 + x^0 x_0^1 = \sum_{i=0}^{2-1} x_0^i x^{2-1-i}$$

Par là, la proposition est vraie pour $n = 2$.
(2) Nous supposons que la proposition soit vraie pour $n$, c. à d. (7.2.1) est vrai. Il faut démontrer que la proposition est valable pour $n + 1$ :

$$\begin{array}{lll} x^{n+1} - x_0^{n+1} : & x - x_0 & = x^n \\ \underline{x^{n+1} - x^n x_0} & & \\ \quad x^n x_0 - x_0^{n+1} & & \end{array}$$

Pour le reste un peut affirmer $x^n x_0 - x_0^{n+1} = x_0 \left(x^n - x_0^n\right)$. Puisque la proposition est vraie pour $n$, on obtient

$$x_0 \left(x^n - x_0^n\right) : (x - x_0) = x_0 \sum_{i=0}^{n-1} x_0^i x^{n-1-i}$$

et par là

$$\begin{aligned} x^{n+1} - x_0^{n+1} : x - x_0 \qquad & = x^n + x_0 \sum_{i=0}^{n-1} x_0^i x^{n-1-i} \\ & = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} x_0^{i+1} x^{n-1-i} \\ & = x_0^0 x^n + \sum_{i=0}^{n-1} x_0^{i+1} x^{n-1-i} \\ & = \sum_{i=0}^{n} x_0^i x^{n-i} \\ & = \sum_{i=0}^{(n+1)-1} x_0^i x^{(n+1)-1-i} \end{aligned}$$

(3) Par induction nous obtenons

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \sum_{i=0}^{n-1} x_0^i x^{n-1-i}$$

et par conséquent

$$x^n - x_0^n = (x - x_0) \sum_{i=0}^{n-1} x_0^i x^{n-1-i}$$

pour tout $n \geq 2$.

Avec ce résultat nous pouvons démontrer le théorème : nous remplaçons dans la définition de la dérivée et calculons

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)\sum\limits_{i=0}^{n-1} x_0^i x^{n-1-i}}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \sum_{i=0}^{n-1} x_0^i x^{n-1-i} = \sum_{i=0}^{n-1} x_0^i \lim_{x\to x_0} x^{n-1-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} x_0^i x_0^{n-1-i} = \sum_{i=0}^{n-1} x_0^{i+n-1-i} = \sum_{i=0}^{n-1} x_0^{n-1} \\
&= n x_0^{n-1}
\end{aligned}$$

□

**Théorème 7.2.2.** *Si $h(x) = f(x) + g(x)$, alors $h'(x) = f'(x) + g'(x)$ (pourvu que $f'(x)$ et $g'(x) \in \mathbb{R}$).*

*Démonstration.* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ devient :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+g(x)-(f(x_0)+g(x_0))}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{(f(x)-f(x_0))+(g(x)-g(x_0))}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \left( \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \right) \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \\
&= f'(x) + g'(x)
\end{aligned}$$

□

**Théorème 7.2.3.** *Si $f(x) = a$, alors $f'(x) = 0$ ($a$ est un nombre réel).*

*Démonstration.* $f(x) = a = f(x_0)$. Alors

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{a-a}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{0}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} 0 = 0$$

□

**Théorème 7.2.4.** *Si $h(x) = af(x)$, alors $h'(x) = af'(x)$ (si $a$ et $f'(x) \in \mathbb{R}$).*

*Démonstration.* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ devient :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{af(x)-af(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{a\,(f(x)-f(x_0))}{x-x_0} \\
&= a \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\
&= af'(x_0)
\end{aligned}$$

□

Avec ces règles nous pouvons dériver tous les polynômes.

**Exemple 7.2.5.** $f(x) = 2x^2 - 14x + 4 \Longrightarrow f'(x) = 4x - 14$
*(car : Sur la base du théorème 7.2.2 nous pouvons dériver une somme en dérivant chaque terme de la somme individuellement. De plus :* $\frac{d}{dx}\left(2x^2\right) = 2\frac{d}{dx}\left(x^2\right) = 2 \cdot 2x = 4x$ *;* $\frac{d}{dx}(-14x) = -14\frac{d}{dx}x = -14 \cdot 1 = -14$*; (la dérivée de* $f(x) = x$ *est 1, car* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{x-x_0}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} 1 = 1$*. Une autre argumentation :* $f(x) = x$ *est la bissectrice du premier et du troisième quadrant qui est formée par les points* $(x, x)$*. La pente est alors* $\frac{x}{x} = 1$*).*
$\frac{d}{dx}(4) = 0$; ♢

En d'autres mots : nous pouvons dériver des polynômes en multipliant le coefficient des termes de la somme par l'exposant et en soustrayant 1 de l'exposant. Il faut faire attention au fait que le coefficient de $x^n$ est 1 et que cette règle signifie pour $x^1 : 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1$.

**Exemple 7.2.6.** $f(x) = 3x^5 - 4x^2 + x - 78 \Longrightarrow f'(x) = 15x^4 - 8x + 1$ ♢

**Exemple 7.2.7.** $f(x) = 24x^6 - 13x^5 + 143x^4 - 184x^3 - 99x^2 + 12x + 4988 \Longrightarrow$
$f'(x) = 144x^5 - 65x^4 + 572x^3 - 552x^2 - 198x + 12$ ♢

**Théorème 7.2.8.** *Si $f$ est dérivable en $x_0$, alors $f$ est continue en $x_0$*

*Démonstration.* Nous supposons que $f$ soit dérivable en $x_0$. Il existe alors un $b = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R}$. De plus on peut affirmer : $\lim\limits_{x \to x_0} (x - x_0) = 0$. Par là $\lim\limits_{x \to x_0} (x - x_0) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est un nombre réel et on peut déduire : $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \lim\limits_{x \to x_0} (x - x_0) = 0$
Puisque $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \lim\limits_{x \to x_0} (x - x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot (x - x_0)\right) =$
$\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0} f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - f(x_0)$
on peut affirmer : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$
et par là : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Par conséquent $f$ est continue en $x_0$ selon la définition de la continuité. □

Il faut faire attention au fait que l'inverse n'est pas correct. On ne peut déduire de la continuité d'une fonction qu'elle est dérivable. On y reviendra.

## 7.3 Monotonie et dérivées

Dans le chapitre „D'autres fonctions réelles élémentaires“ nous avons parlé brièvement des fonctions monotones et nous avons introduit le concept de la croissance et de la décroissance stricte (page 122, définition 4.2.26). On a constaté que l'application de la définition fournie était difficile. Le calcul des dérivées nous offrent des possibilités nouvelles et plus faciles comme nous voulons montrer maintenant :

**Théorème 7.3.1.** *Supposons que $f$ soit sur $]a, b[$ continue et dérivable :*
- *Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in ]a, b[$, alors $f$ est sur $]a, b[$ strictement croissante*
- *Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in ]a, b[$, alors $f$ est sur $]a, b[$ strictement décroissante.*

*Démonstration.* Supposons que $f'(x_1) > 0$ pour tout $x_1 \in ]a, b[$. Pour $x_1$ et un $x \in ]a, b[$ arbitraire différent de $x_1$ on peut alors affirmer

$$\lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} > 0.$$

Puisque $f$ est continue sur $]a,b[$ la fonction

$$h(x) := \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

est continue sur

$$]a,b[\ \setminus\ \{x_1\}.$$

Nous pouvons examiner la prolongation par continuité $g$ de $h$ en $x_1$, car la limite $\lim\limits_{x \to x_1} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ existe :

$$g(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} & \text{pour } x \in ]a,b[\ \setminus \{x_1\} \\ \lim\limits_{x' \to x_1} \frac{f(x')-f(x_1)}{x'-x_1} & \text{pour } x = x_1 \end{cases}$$

Par là,

$$f'(x_1) = \lim_{x' \to x_1} \frac{f(x') - f(x_1)}{x' - x_1} = g(x_1) > 0.$$

Puisque $g(x_1) > 0$ et $g$ est continue sur $]a,b[$, il existe un voisinage $I$ de $x_1$, tel que $g(x) > 0$ pour $x \in I$. On peut affirmer pour $x \neq x_1$ : $x - x_1 > 0$ ou $x - x_1 < 0$. Pour le premier cas, car $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} > 0$ pour $x \in I$, $f(x) - f(x_1) > 0$, et par conséquent $f(x) > f(x_1)$. En d'autres mots : si $x > x_1$ alors $f(x) > f(x_1)$. Pour le deuxième cas à cause de $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} > 0$ pour $x \in I$ on peut savoir que $f(x) - f(x_1) < 0$ et par là $f(x) < f(x_1)$. Ainsi aussi pour ce cas on peut dire : si $x_1 > x$, alors $f(x_1) > f(x)$. Selon la définition de la croissance stricte $f$ est strictement croissante.
La démonstration de la deuxième partie du théorème suit des arguments similaires. □

**Exemple 7.3.2.** *Est-ce que* $f(x) = 5x^4 - 12x^3 + 6x^2 - 4x + 5$ *est strictement croissante ou décroissante sur* $]5,6[$ *? Une fonction continue est strictement croissante dans un intervalle si dans l'intervalle la dérivée est partout positive. Si la dérivée est continue cela signifie qu'il n'y a pas de zéro de la dérivée dans l'intervalle et que les valeurs de fonction de la dérivée sont positives. S'il n'y a pas de zéro d'une dérivée continue il suffit de calculer une seule valeur de la fonction dans l'intervalle (voir théorème 6.2.5, page 200). Nous calculons alors les zéros de la dérivée :* $f'(x) = 20x^3 - 36x^2 + 12x - 4 = 0 \Longrightarrow x_1 = 1.4869$. *Puisque* $x_1 \notin ]5,6[$, *que* $f'$ *est continue et* $f'(5.5) = 20\,(5.5)^3 - 36\,(5.5)^2 + 12\,(5.5) - 4 = 2300.5 > 0$, $f'$ *est partout positive sur* $]5,6[$ *et* $f$ *est partout strictement croissante sur* $]5,6[$.
*Par contre* $f$ *est strictement décroissante sur* $]-1,1[$, *puisqu'il n'y a pas de zéro dans l'intervalle,* $f'$ *est continue et* $f'(0) = -4 < 0$. *Dans l'intervalle* $]1,2[$ *la fonction* $f$ *n'est ni strictement croissante ni décroissante. On y observe un changement de signe de la dérivée. A gauche du zéro de la dérivée celle-ci a des valeurs négatives. La fonction y est strictement décroissante. A droite du zéro la dérivée a des valeurs positives. C'est pourquoi la fonction y est strictement croissante. A l'aide des zéros d'une dérivée continue et d'une valeur de la dérivée à gauche du premier zéro, d'une valeur de la dérivée entre deux zéros avoisinants et d'une valeur de la dérivée à droite du dernier zéro on peut décrire le comportement de croissance ou de décroissance de la fonction sur son domaine de définition. Dans l'exemple il n'y a qu'un zéro réel de la dérivée continue. Nous calculons à droite et à gauche du zéro une valeur de fonction de la dérivée (ce qu'on a déjà fait ci-dessus). La fonction est alors strictement décroissante à gauche de 1.4969 et strictement croissante à droite de ce nombre.*

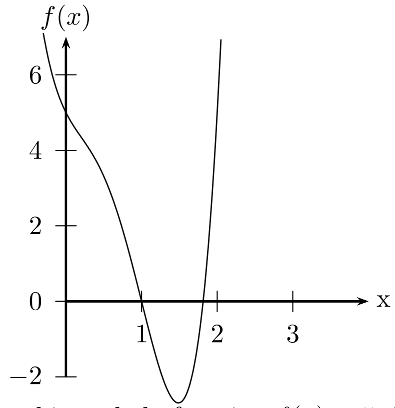


FIGURE 7.3.4 – Représentation graphique de la fonction $f(x) = 5x^4 - 12x^3 + 6x^2 - 4x + 5$

$\Diamond$

Il faut faire attention au fait que l'inverse du théorème 7.3.1 n'est pas valable. On ne peut pas déduire de la monotonie stricte le signe des valeurs de la dérivée. Ainsi la fonction $f(x) = x^3$ est sur $]-1,1[$ strictement croissante, mais $\frac{d}{dx}\left(x^3\right) = 3x^2 \Longrightarrow f'(0) = 0$.

## 7.4 Maxima et minima

On peut utiliser le calcul de la dérivée pour déterminer pour quelques types de fonctions des maxima et minima locaux.

**Définition 7.4.1.**
— *La fonction $f$ atteint en $x_0$ un minimum (strict) local si et seulement si il existe un voisinage $V$ de $x_0$ tel que pour tout $x \in V$ avec $x \neq x_0$ : $f(x) > f(x_0)$*
— *La fonction $f$ atteint en $x_0$ un maximum (strict) local si et seulement si il existe un voisinage $V$ de $x_0$ tel que pour tout $x \in V$ avec $x \neq x_0$ : $f(x) < f(x_0)$*
— *La fonction $f$ atteint en $x_0$ un extremum (strict) local si et seulement si elle atteint en $x_0$ un minimum local ou un maximum local.*

$\Diamond$

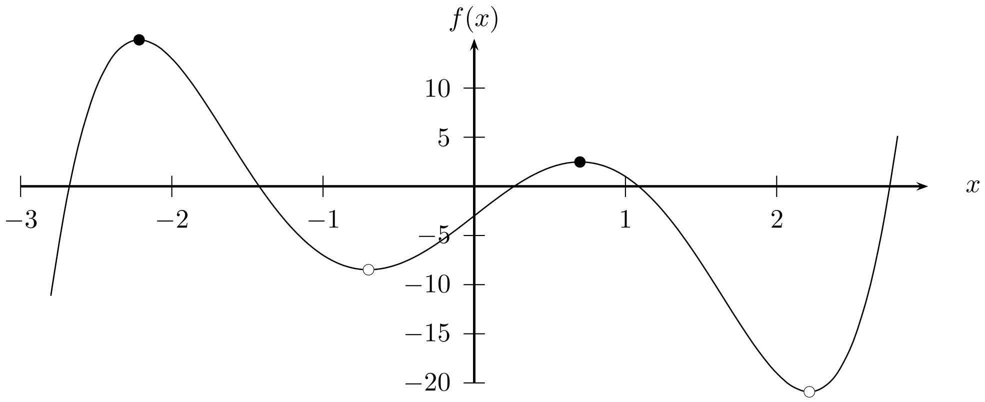


FIGURE 7.4.5 – Funktion $f(x) = x^5 - 9x^3 + 12x - 3$. $\bullet$ maxima locaux, $\circ$ minima locaux

Pour introduire le calcul des extrema locaux commençons avec une réflexion intuitive. La pente de la courbe peut être dans un intervalle positive et dans un autre intervalle négative. Dans l'exemple suivant la pente de la courbe est en $-5$ positive, en $-2$ elle est par contre négative (voir figure 7.4.6).

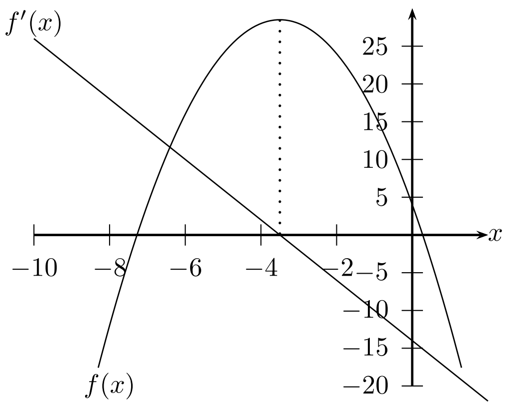


FIGURE 7.4.6 – Un polynôme du deuxième degré et sa dérivée ($f(x) = -2x^2 - 14x + 4$ ; $f'(x) = -4x - 14$) ; la coordonnée $x$ du maximum est égale au zéro de la première dérivée

Si la dérivée est continue, il faut avoir entre la pente négative et la pente positive un zéro. Là, la pente de la courbe est 0. Evidemment, les extrema se trouvent là où la pente de la courbe change de signe, c. à d. aux zéros de la dérivée.

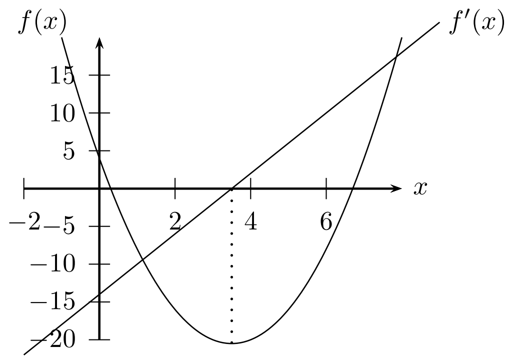


FIGURE 7.4.7 – Un polynôme du deuxième degré et sa dérivée ($f(x) = 2x^2 - 14x + 4$, $f'(x) = 4x - 14$) ; la coordonnée $x$ du minimum est égale au zéro de la première dérivée

Par conséquent, nous pouvons utiliser la dérivée pour déterminer les extrema locaux d'une fonction dérivable. Il faut cependant être conscient du fait que bien que aux endroits où se trouve un extremum la dérivée est 0, on ne peut conclure à partir de $f'(x) = 0$ qu'il y a un extremum (p.ex. $f(x) = x^3$ avec $f'(x) = 3x^2$ a en $x = 0$ un zéro, mais pas un extremum). Pour avoir une condition suffisante pour l'existence d'un extremum local nous pouvons de nouveau utiliser le calcul des dérivées. Par là, on pourra de plus résoudre un problème supplémentaire : la classification des extrema en maxima et minima. Avant d'y procéder un

**Théorème 7.4.2.** *Une sécante $g$ à travers deux points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ d'une fonction $f$ est donnée par :*

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

*Démonstration.* La sécante est une droite et est par conséquent de la forme :

$$g(x) = mx + c$$

Pour la pente $m$ on peut affirmer :

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

En substituant le point $(a, f(a))$ et $m$ dans l'équation de la droite on obtient :

$$f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} a + c$$

et par là

$$c = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} a.$$

En substituant $m$ et $c$ dans $g(x) = mx + c$ :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x + f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} a \\ &= f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \end{aligned}$$

□

## 7.5 Convexité et concavité

Comme nous avons vu dans le chapitre „D'autres fonctions réelles élémentaires" les fonctions peuvent s'ouvrir vers le haut ou vers le bas (voir figures 7.5.8 et 7.5.9).

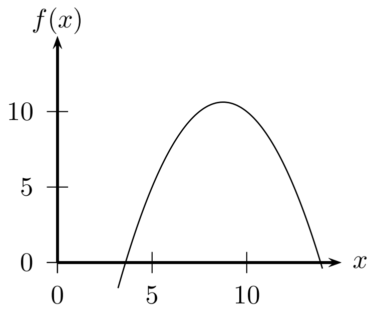


FIGURE 7.5.8 – Courbe ouverte vers le bas

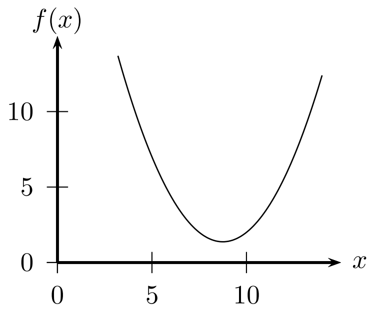


FIGURE 7.5.9 – Courbe ouverte vers le haut

Les fonctions qui s'ouvrent vers le bas dans un intervalle sont appelées concaves dans cet intervalle, les fonctions qui s'ouvrent vers le haut dans un intervalle sont appelées convexes dans l'intervalle (voir page 124, définition 4.2.32). Si la fonction n'a pas de segment droit dans l'intervalle, nous disons qu'elle est strictement concave ou convexe dans l'intervalle. Nous avons constaté dans le chapitre mentionné que les définitions sont difficiles à appliquer. Le calcul des dérivées offre une sortie plus facile. Dans le graphique suivant 7.5.10 avec une courbe concave on peut constater que pour $x > x'$ la pente de $f$ en $x$ est inférieure à la pente en $x'$, c. à d. $f'(x) < f'(x')$. En d'autre mots : $f'$ est strictement décroissante dans l'intervalle concave. De manière analogue on peut constater que dans un intervalle convexe, pour $x > x'$ la pente de la fonction en $x$ est supérieure à la pente de la fonction en $x'$, c. à d. $f'(x) > f'(x')$. Ainsi la dérivée y est strictement croissante (voir figure 7.5.11).

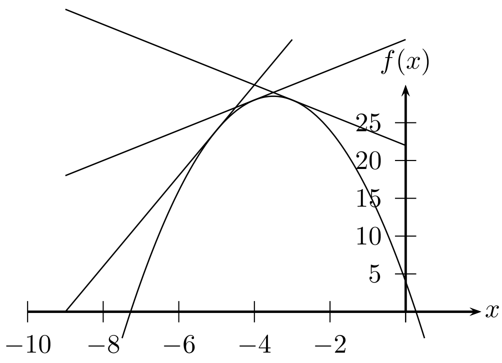


FIGURE 7.5.10 – Courbe concave : pour des $x$ croissants, la pente de la tangente diminue. La première dérivée est strictement décroissante.

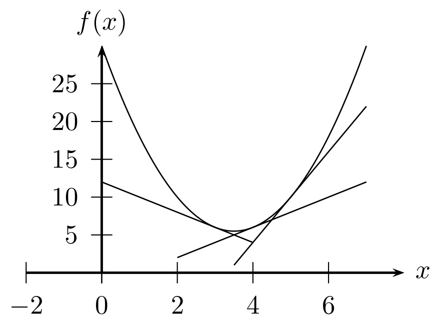


FIGURE 7.5.11 – Courbe convexe : pour des $x$ croissants, la pente de la tangente croît. La première dérivée est par conséquent strictement croissante.

Ces réflexions nous mènent au

**Théorème 7.5.1.** *Nous supposons que $f$ soit dérivable dans l'intervalle ouvert $I$.*
- *Une fonction $f$ est strictement concave dans l'intervalle ouvert $I$ si et seulement si $f'(x)$ est strictement décroissante sur $I$.*
- *Une fonction $f$ est strictement convexe dans l'intervalle ouvert $I$ si et seulement si $f'(x)$ est strictement croissante sur $I$.*

*Démonstration.* Nous fournissons la démonstration pour la concavité.
(i) Supposons que $f$ soit strictement concave sur $I$. Selon la définition de la concavité stricte et le théorème 7.4.2 on peut affirmer pour $x \in ]a, b[$ et $a, b \in I$ :

$$f(x) > f(a) + \frac{f(a) - f(b)}{b - a}(x - a)$$

et par là

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

A cause de la dérivabilité de $f$ on peut affirmer :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) > \lim_{x \to a} \frac{f(a) - f(b)}{b - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Pour $x \in ]a, b[$ (théorème 7.4.2) :

$$f(x) > f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b)$$

et puisque $x - b < 0$

$$\frac{f(x) - f(b)}{x - b} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

En calculant la limite $\lim\limits_{x \to b}$ :

$$f'(b) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

On peut en déduire pour $b > a$

$$f'(b) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < f'(a)$$

et par là

$$f'(b) < f'(a)$$

Selon la définition de la décroissance stricte $f'$ est strictement décroissante.
(ii) La démonstration de la proposition „si $f'(x)$ est strictement décroissante sur $I$, alors $f$ est sur $I$ strictement concave“ réclame des techniques qu'on n'a pas introduites. Nous y renonçons alors. □

On voit immédiatement qu'un extremum local d'une fonction concave sur $]a, b[$ est un maximum. On peut alors affirmer pour un zéro $x_0 \in ]a, b[$ de la dérivée : il s'y trouve un maximum si $f'$ est strictement décroissante sur un voisinage $V$ de $x_0$, c. à d. si la dérivée $f''(x_0)$ de la dérivée est inférieure à 0 sur ce voisinage de $x_0$. Si $f''$ est continue et que $f''(x_0) < 0$, il existe selon le théorème 6.2.4 un voisinage $V$ de $x_0$ tel que $f''(x) < 0$ pour $x \in V$. Dans ce cas il suffit de contrôler le signe de $f''(x_0)$.

**Définition 7.5.2.** *Nous appelons désormais la dérivée d'une fonction „première dérivée“ et la dérivée de la première dérivée „deuxième dérivée“, etc. Nous utilisons les notations suivantes : $f''$ pour la deuxième dérivée et $f'''$ pour la troisième dérivée. La notation suivante s'utilise aussi : $f^{(n)}$ pour la n-ième dérivée.* ♢

Nous avons par conséquent les conditions suffisantes suivantes pour un maximum :

**Théorème 7.5.3.** *Supposons que $f$ soit deux fois dérivable et que $V$ soit un voisinage de $x_0$ : Si*

| |
|---|
| $f'(x_0) = 0$ |
| $f''(x) < 0$ *pour* $x \in V$, |

*alors il se trouve un maximum local en $x_0$. Si $f''$ est continue sur $V$, il suffit de vérifier que $f''(x_0) < 0$.*

*Démonstration.* Puisque $f''(x) < 0$ sur $V$, $f'$ est strictement décroissante sur $V$. Par là pour tout $x \in V$ et $x < x_0$ : $f'(x) > 0$. De plus on peut affirmer pour $x \in V$ et $x > x_0$ : $f'(x) < 0$. C'est pourquoi $f$ est à gauche de $x_0$ strictement croissante et à droite de $x_0$ strictement décroissante, c. à d. à gauche de $x_0$ : $f(x_0) > f(x)$ et à droite de $x_0$ $f(x_0) > f(x)$. Par conséquent $f(x_0) > f(x)$ pour tout $x \in V \backslash \{x_0\}$. □

Par rapport aux minima locaux on peut faire les mêmes réflexions. S'il y a un extremum dans un intervalle où la fonction est convexe, cet extremum est un minimum. Puisque la courbe est convexe sur un voisinage de $x_0$, $f'$ y est strictement croissante. Si $f''$ est continue et que $f''(x_0) > 0$, il existe selon le théorème 6.2.4 un voisinage $V$ de $x_0$ tel que $f''(x) > 0$ pour $x \in V$. Dans ce cas il suffit de nouveau de contrôler le signe de $f''(x_0)$. Nous obtenons alors les conditions suivantes pour un minimum :

**Théorème 7.5.4.** *Supposons que $f$ soit deux fois dérivable et que $V$ soit un voisinage de $x_0$ : Si*

| |
|---|
| $f'(x_0) = 0$ |
| $f''(x) > 0$ *pour* $x \in V$, |

*alors en $x_0$ se trouve un minimum local. Si $f''$ est continue sur $V$, il suffit de vérifier que $f''(x_0) > 0$.*

La démonstration est analogue à celle du maximum. Nous pouvons alors constater : si $f'(x) = 0$, il y a en $x$ un extremum si $f''(x) > 0$ ou $f''(x) < 0$. Pour l'exemple $f(x) = x^3$ nous obtenons comme deuxième dérivée : $\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(x^3)\right) = \frac{d}{dx}\left(3x^2\right) = 6x$. En 0 nous obtenons : $f''(0) = 0$. Il n'y a pas d'extremum.

**Exemple 7.5.5.** *Supposons la fonction de profit suivante :* $P(x) = -2x^2 + 12x + 3$. *Nous voulons calculer le profit maximal. Nous dérivons la fonction et cherchons les zéros de la dérivée :* $P'(x) = -4x + 12 = 0 \Longrightarrow x = 3$. *La fonction atteint son extremum en* $x = 3$ *pourvu que la deuxième dérivée ne soit pas* $0$ *en* $3$. *Nous calculons la deuxième dérivée :* $\frac{d}{dx}(-4x + 12) = -4 < 0$ *pour tout* $x$. *Comme la deuxième dérivée est partout négative, elle est aussi négative en* $3$. *C'est pourquoi la fonction de profit atteint en* $x = 3$ *un maximum. Le profit maximal se monte à* $P(3) = -2 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 + 3 = 21$ ♢

**Exemple 7.5.6.** *Supposons que* $P$ *soit une fonction de profit donnée par* $P(x) = -3x^3 + 11x + 4$ *dans l'intervalle* $[0, 4]$. *Il s'agit de déterminer le profit maximal. Nous calculons la première dérivée :* $P'(x) = -9x^2 + 11$ *et cherchons les zéros :* $0 = -9x^2 + 11 \Longrightarrow x_1 = \frac{1}{3}\sqrt{11}, x_2 = -\frac{1}{3}\sqrt{11}$. *Comme nous ne nous intéressons qu'à l'intervalle* $[0, 4]$ *seul le zéro* $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{11} = 1.1055$ *nous concerne. Pour vérifier si en* $1.1055$ *se trouve un maximum ou un minimum, nous calculons la deuxième dérivée :* $P''(x) = -18x$. *En* $1.1055$ $P''$ *est négative, car* $P''(1.1055) = -18 \cdot 1.1055 < 0$. *C'est pourquoi l'extremum local en* $1.1055$ *est un maximum local.* ♢

**Exemple 7.5.7.** *Supposons la fonction de coût unitaire donnée par* $c(x) = 4x^3 - 11x + 10$
*Nous cherchons la quantité de production avec les coûts unitaires les plus bas.*
$\frac{d}{dx}(c(x)) = \frac{d}{dx}\left(4x^3 - 11x + 10\right) = 12x^2 - 11 = 0 \Longrightarrow x_1 = \frac{1}{6}\sqrt{33}, x_2 = -\frac{1}{6}\sqrt{33}$
*Nous ne nous intéressons qu'aux zéros positifs :* $\frac{1}{6} \cdot \sqrt{33} = 0.95743$
*Pour savoir s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum nous calculons la deuxième dérivée :*
$\frac{d}{dx}(\frac{d}{dx}c(x)) = \frac{d}{dx}\left(12x^2 - 11\right) = 24x$
$k''(0.95743) = 24 \cdot \frac{1}{6} \cdot \sqrt{33} = 22.978 > 0$
*Il se trouve en* $\frac{1}{6}\sqrt{33}$ *un minimum.* ♢

**Exemple 7.5.8.** *Pour les polynômes du deuxième degré on peut trouver les extrema à l'aide de la formule suivante :* $-\frac{b}{2a}$. *Avec nos nouveaux instruments on peut facilement démontrer cette formule :* $f(x) = ax^2 + bx + c$. *Nous calculons la première dérivée :* $f'(x) = 2ax + b$ *et les zéros de la dérivée :* $2ax + b = 0 \Longrightarrow x = -\frac{b}{2a}$. *La deuxième dérivée est :* $\frac{d}{dx}(2ax + b) = 2a$. $2a < 0$ *si et seulement si* $a < 0$. *On peut en déduire : un polynôme du deuxième degré a au zéro de la première dérivée* $-\frac{b}{2a}$ *un maximum, si* $a < 0$, *un minimum si* $a > 0$. ♢

**Exemple 7.5.9.** *Pour* $f(x) = x^3$ *on obtient :* $\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2$. *Le zéro de la première dérivée est* $0$. *La deuxième dérivée est* $\frac{d}{dx}3x^2 = 6x$. *En remettant le zéro de la première dérivée dans la deuxième dérivée, on obtient* $0$. *La fonction* $f$ *est en* $0$ *ni convexe ni concave, il n'y a pas d'extremum en ce point.* ♢

## 7.6 Points d'inflexion

Une courbe peut avoir des intervalles dans lesquels elle est concave et d'autres dans lesquels elle est convexe. Dans les intervalles convexes la pente de la première dérivée est positive, dans les intervalles concaves la pente de la première dérivée est négative. Dans le passage d'un intervalle convexe à un intervalle concave (ou l'inverse) la première dérivée atteint un extremum local. Pour trouver les extrema de la première dérivée, nous déterminons les zéros de la deuxième dérivée et nous calculons la troisième dérivée pour savoir si au zéro de la deuxième dérivée se trouve un maximum ou un minimum. Nous appelons les extrema de la première dérivée „points d'inflexion de $f$“. Il y a un point d'inflexion concave-convexe si aux zéros de la deuxième dérivée la troisième dérivée a des valeurs positives - la pente de $f$ atteint là dans un voisinage du point d'inflexion un minimum. Il y a un point d'inflexion convexe-concave si aux zéros de la deuxième dérivée la troisième dérivée a des valeurs négatives - la pente de $f$ atteint là dans un voisinage du point d'inflexion son maximum; voir figure 7.6.12.

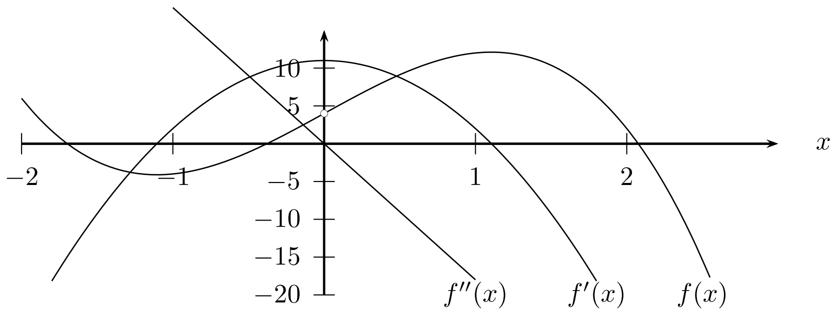


FIGURE 7.6.12 – Fonction $f(x) = -3x^3 + 11x + 4$ - pour $x < 0$ $f$ est convexe, pour $x > 0$ $f$ est concave. Point d'inflexion en $(0, 4)$

Dans l'exemple, la fonction est convexe avant le point d'inflexion et concave après pour des $x$ croissants. Le point d'inflexion se trouve en $x = 0$. Car $f''(x) = -18x = 0 \Longrightarrow x = 0$. $f'''(x) = -18 < 0$. Le point d'inflexion est $(0, f(0)) = (0, 4)$. Comme la troisième dérivée est partout négative, elle est aussi négative en $x = 0$. On peut en déduire qu'il s'agit d'un point d'inflexion convexe-concave.

**Exemple 7.6.1.** *Pour* $f(x) = 3x^3 - 11x + 4$ *la fonction passe d'un intervalle où elle est concave à un intervalle où elle est convexe :*
$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(3x^3 - 11x + 4\right) = 9x^2 - 11$
$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(9x^2 - 11\right) = 18x$
$f''(x) = 18x = 0 \Longrightarrow x = 0$
$f'''(x) = 18 > 0$
*Le point d'inflexion est :* $(0, f(x)) = (0, 4)$. *Il s'agit d'un point d'inflexion concave-convexe (voir figure 7.6.13)*

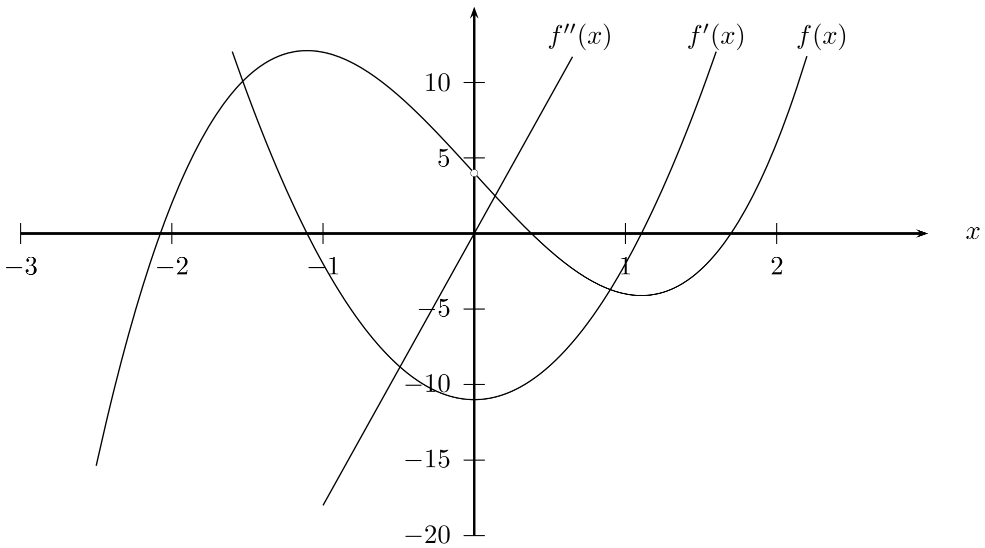


FIGURE 7.6.13 – Fonction $f(x) = 3x^3 - 11x + 4$ - pour $x > 0$ $f$ est convexe, pour $x < 0$ $f$ est concave. Point d'inflexion $(0, 4)$

◊

**Exemple 7.6.2.** $f(x) = x^5 - 9x^3 + 12x - 3$
$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^5 - 9x^3 + 12x - 3\right) = 5x^4 - 27x^2 + 12$
$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(5x^4 - 27x^2 + 12\right) = 20x^3 - 54x$
*Nous calculons les zéros de* $f''(x) = 0 = x(20x^2 - 54) \Longrightarrow$
$x_1 = 0$ *;*
$20x^2 - 54 = 0 \Longrightarrow x_2 = \frac{3}{10}\sqrt{30} \approx 1.643\,2, x_3 = -\frac{3}{10}\sqrt{30} \approx -1.643\,2$
$f'''(x) = 60x^2 - 54$
$f'''(0) = -54 < 0$ *(convexe-concave)*
$f'''\left(\frac{3}{10}\sqrt{30}\right) = 60\left(\frac{3}{10}\sqrt{30}\right)^2 - 54 = 108 > 0$ *(concave-convexe)*
$f'''\left(-\frac{3}{10}\sqrt{30}\right) = 60\left(-\frac{3}{10}\sqrt{30}\right)^2 - 54 = 108 > 0$ *(concave-convexe)*
*Le points d'inflexion se trouvent en* $x_1, x_2$ *et* $x_3$
*Les points d'inflexion sont :*
$(x_1, f(x_1)) = (0, -3)$ *;*
$(x_2, f(x_2)) = (1.643\,2, -11.\,232)$ *;*
$(x_3, f(x_3)) = (-1.6432, 5.\,232\,3)$ *(voir figure 7.6.14)*

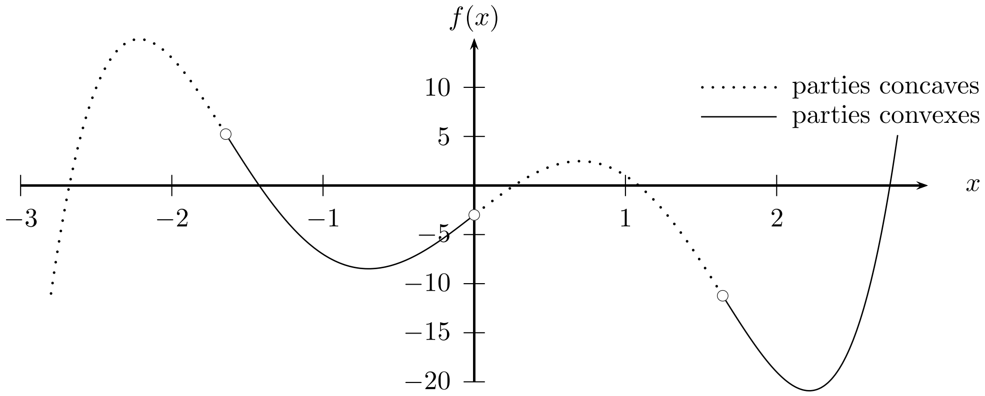


FIGURE 7.6.14 – Fonction $f(x) = x^5 - 9x^3 + 12x - 3$ avec les points d'inflexion $(0, -3)$, $(1.6432, -11.232)$ et $(-1.6432, 5.2323)$ ; concave jusqu'à $(-1.6432, 5.2323)$, ensuite convexe jusqu'à $(0, -3)$, ensuite concave jusqu'à $(1.6432, -11.232)$, finalement convexe jusqu'à $\infty$

$\Diamond$

Pour terminer se chapitre nous retenons quelques théorèmes qui jouent un rôle dans les démonstrations du chapitre suivant :

**Théorème 7.6.3.** *Si $f$ est dérivable en $a$ et que $g$ est la tangente à travers le point $(a, f(a))$, alors $g(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$*

*Démonstration.* La tangente est une droite et est alors de la forme :

$$g(x) = mx + b \tag{7.6.2}$$

Nous savons que $m = f'(a)$. De plus nous pouvons substituer $(a, f(a))$ dans l'équation (7.6.2) et nous obtenons :

$$f(a) = f'(a)a + b$$

et par là

$$b = f(a) - f'(a)a.$$

Si nous substituons $m$ et $b$ dans l'équation (7.6.2), nous obtenons :

$$\begin{aligned} g(x) &= f'(a)x + f(a) - f'(a)a \\ &= f(a) + f'(a)(x - a) \end{aligned}$$

$\square$

On voit que les formules pour la sécante et la tangente sont parentes : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est remplacé par $\lim\limits_{b \to a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(a)$. En fait, on obtient la deuxième formule par la première en formant la limite :

$$\lim_{b \to a} \left( f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

**Exemple 7.6.4.** *pour le calcul d'une tangente à travers un point de la fonction. Supposons que*

$$f(x) = 0.05x^3 - 0.4x^2 + 0.002x + 6.$$

*Calculer la tangente en $x = 3$.*

$$f(3) = 0.05 \cdot 3^3 - 0.4 \cdot 3^2 + 0.002 \cdot 3 + 6 = 3.756$$

$$\frac{d}{dx}\left(0.05x^3 - 0.4x^2 + 0.002x + 6\right) = 0.15x^2 - 0.8x + 0.002$$

$$f'(3) = 0.15 \cdot 3^2 - 0.8 \cdot 3 + 0.002 = -1.048$$

*La tangente $g$ est donnée par :*

$$\begin{aligned} g(x) &= 3.756 - 1.048(x-3) \\ &= 6.9 - 1.048x \end{aligned}$$

*Calcul sans l'utilisation de la formule 7.6.3 : Avec $f'(3) = -1.048$ on a la pente de la tangente. De plus on a un point, à savoir $(3, f(3)) = (3,\ 3.756)$. Avec ces informations on peut calculer la tangente - voir chapitre sur les polynômes affines - avec $3.756 = -1.048 \cdot 3 + b \Longrightarrow b = 6.9$ (voir figure 7.6.15)*

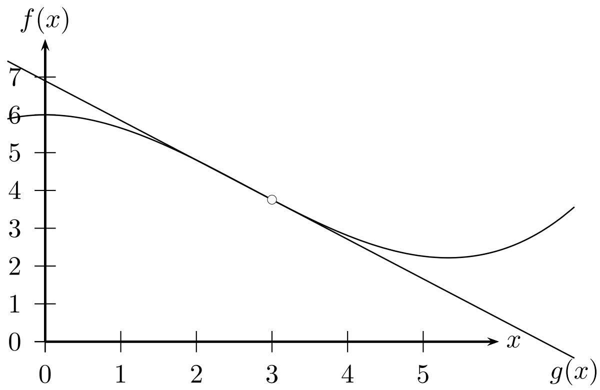


FIGURE 7.6.15 – Représentation graphique de la fonction $f(x) = 0.05x^3 - 0.4x^2 + 0.002x + 6$ et de la tangente $g$ de la fonction en $x = 3$

$\diamondsuit$

**Théorème 7.6.5.** *Supposons que $f$ soit continue dans un voisinage $V$ de $a$ et que $f'$ soit définie en $a$. Sous ces conditions il y a*
*(1) une fonction $r : V \to \mathbb{R}$ avec :*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + r(x).$$

*Pour $r$ on peut affirmer*
*(2)*

$$\lim_{x \to a} r(x) = 0$$

*Démonstration.* (1) $r(x)$ est la différence entre $f(x)$ et $f(a) + f'(a)(x-a)$, c. à d. entre la fonction et la tangente en $(a, f(a))$. Puisque $f(x)$ et la tangente existent, cette différence existe.
(2) On peut déduire :

$$r(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$$

Avec cela ($f$ est continue)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} r(x) &= \lim_{x\to a}\left(f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)\right) \\ &= \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} f(a) - f'(a) \lim_{x\to a}(x-a) \\ &= f(a) - f(a) - f'(a) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

$\square$

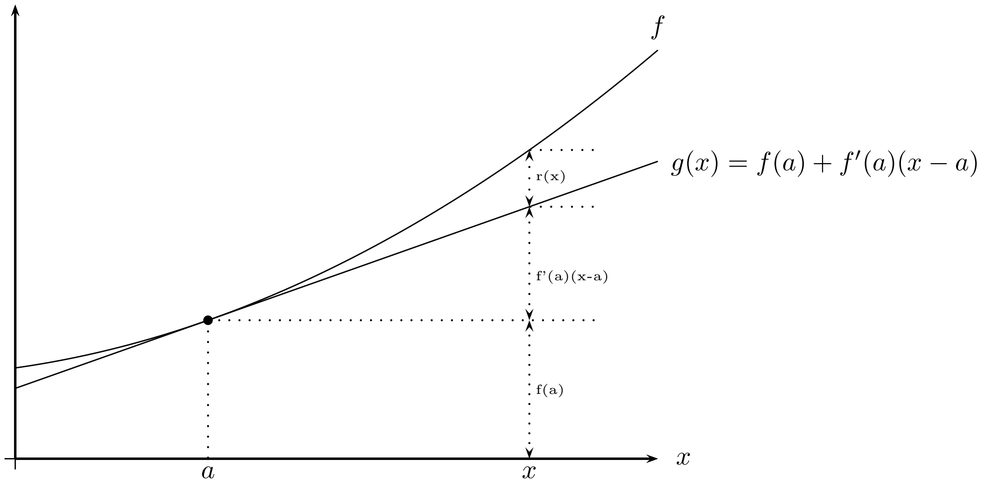


FIGURE 7.6.16 – Représentation graphique du théorème 7.6.5. $g(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ est la tangente en $(a, f(a)$ de $f$.

**Théorème 7.6.6.** *Supposons que* $f(x) = f(a) + \beta(x-a) + r(x)$.
$\beta = f'(a)$ *si et seulement si* $\lim\limits_{x\to a} \frac{r(x)}{x-a} = 0$.

*Démonstration.* (a) Supposons que $\beta = f'(a)$. Alors

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \beta(x-a) + r(x) \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + r(x) \end{aligned}$$

Nous isolons $r(x)$ :

$$r(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$$

et multiplions par $\frac{1}{(x-a)}$ :

$$\begin{aligned} \frac{r(x)}{x-a} &= \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \frac{f'(a)(x-a)}{x-a} \\ &= \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \end{aligned}$$

Avec ça on peut affirmer :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} \frac{r(x)}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \lim_{x\to a} f'(a) \\ &= f'(a) - f'(a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(b) Supposons que $\lim\limits_{x\to a} \frac{r(x)}{x-a} = 0$. Avec cela, puisque $r(x) = f(x) - f(a) - \beta(x-a)$ :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\frac{r(x)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\frac{\beta(x-a)}{x-a}\right)\\
&= \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\beta\right)\\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\lim_{x\to a}\beta\\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\beta\\
&= 0
\end{aligned}$$

On peut déduire de $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\beta=0$ :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\beta$$

$\square$

Interprétation de $\lim\limits_{x\to a}\frac{r(x)}{x-a}=0$ : $\frac{1}{x-a}$ tend vers l'infini pour $x\to a$. Pour que $\frac{r(x)}{x-a}$ puisse tendre vers 0, $r(x)$ doit tendre plus rapidement vers 0 que $\frac{1}{x-a}$ vers l'infini. Cela veut dire que $g(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$ représente une bonne approximation à la fonction $f$ dans des voisinages de $a$ assez petit, comme le reste $r(x)$ entre la tangente et $f$ tend rapidement vers 0 pour $x\to a$.

### 7.6.1 Exercices

1. Dériver les fonctions suivantes et déterminer la pente en $x=5$ :
   (a) $f(x)=1.4x^3-3.5x^2+x$
   (b) $f(x)=3x^2+4x$
   (c) $f(x)=-3x^2-4x$
   (d) $f(x)=x^3+5x^2$
   (e) $f(x)=2x-\frac{x^3}{6}$
   (f) $f(x)=15x^{17}-4x^9+14x^4+11x^2+4$
   (g) $s(a)=a^2-\frac{3}{4}at$
   (h) $s(t)=a^2-\frac{3}{4}at$
   (i) $f(x)=5(x^2-3x+4)$
2. Calculer l'équation décrivant la tangente en $(5,f(5))$ de la fonction $f(x)=5x^3-17x^2+2x-1$.
3. Trouver les dérivées des fonctions suivantes et calculer la pente en $x=-4$
   (a) $f(x)=\frac{1}{x}$
   (b) $f(x)=\frac{1}{x^2}$
   (c) $f(x)=\frac{1}{x+1}$
   (d) $f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$
4. Déterminer les maxima et les minima des fonctions de l'exercice 1.
5. Supposons la fonction de coût décrite par l'équation suivante : $C(x)=0.002x^3-0.04x^2+0.8x+4$

(a) Déterminer l'intervalle raisonnable d'un point de vue économique (valeurs de fonction positives ; coûts strictement croissants).

(b) Déterminer les coûts fixes

(c) Un monopoliste affronte la fonction de demande suivante :
$P_D(x) = 2.5 - 0.1x$. Calculer la fonction de recette, de profit et le profit maximal. Dessiner la situation.

6. Supposons la fonction de coût décrite par l'équation suivante :
$C(x) = -3 \cdot 10^{-10}x^4 + 3 \cdot 10^{-7}x^3 + 7 \cdot 10^{-4}x^2 + 300$

(a) Déterminer l'intervalle économique

(b) Déterminer les coûts fixes

(c) Un monopoliste affronte la fonction de demande suivante :
$P_D(x) = 19 - 0.1x$. Calculer la fonction de recette, de profit et le profit maximal. Dessiner la situation.

7. On dispose des informations suivantes d'une fonction de coût :
La production de 0 UQ coûte 10 UM
de 4 UQ 296.4 UM
30 UQ coûtent 910 UM et
40 UQ coûtent 2010 UM. On sait ce qui suit de la fonction de demande : à un prix de 50 UM on demande 30 UQ, à un prix de 70 UM 20 UQ.

(a) Calculer la fonction de coût

(b) Examiner si la fonction trouvée peut être interprétée comme fonction de coût

(c) Calculer la fonction de demande

(d) Calculer la fonction de recette (cas du monopôle) et

(e) la fonction de profit

(f) déterminer le profit maximal

(g) Dessiner la fonction de coût, la fonction de recette et la fonction de profit dans un système de coordonnées cartésiennes.

8. Est-ce que les fonctions de profit suivantes ont une pente positive ou négative dans les intervalles donnés :

(a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 5 \qquad I = ]5, 6[$

(b) $g(x) = 5x^4 - 2x^3 + 3x - 20 \qquad I = ]1, 2[$

(c) $h(x) = 4x^2 - 100x + 20 \qquad I = ]2, 20[$

9. Dans quels intervalles les fonctions suivantes sont-elles convexes ? Concaves ? Déterminer les points d'inflexion.

(a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 5$

(b) $g(x) = 5x^4 - 2x^3 + 3x - 20$

(c) $h(x) = 4x^2 - 100x + 20$

(d) $c(x) = x^3 - 16x^2 + 6x - 4$

(e) $x(r) = r^4 - 12r^2 + 1$

(f) $g(u) = u^4 - 4u^3 + 6u^2 - 3u + 1$

10. Calculer à l'aide (et sans l'aide) de la formule la tangente de la fonction suivante $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 2x - 5$ en $(3, f(3))$.

11. Supposons la fonction de coût suivante : $C(x) = 0.1x^3 - 5x^2 + 100x + 5$. Un monopoliste affronte la fonction de demande suivante : $P_D(x) = -3x + 150$. Calculer la fonction de recette, de profit et le profit maximal.

12. Supposons la fonction de coût suivante : $C(x) = 0.2x^3 - 6x^2 + 90x + 5$. Un monopoliste connaît deux points de sa fonction de demande : à un prix de 55 UM il peut vendre 10 UQ, à un prix de 35 UM il peut vendre 20 UQ. Calculer la fonction de demande, de recette, de profit et le profit maximal.
13. Supposons que $g(x) = ax + b$ et $(1, 2) \in g$. De plus $f(x) = -4x^2 + x - 1$. Déterminer $g$ tel que cette droite devienne tangente en un point de $f$ - il y a deux cas pour cela ! Indiquer les équations de ces deux tangentes $g$, ainsi que les points d'intersection avec $f$.
14. Un investisseur peut réduire le risque de son portefeuille en détenant des actifs qui ne soient pas ou peu positivement corrélés, donc en diversifiant ses placements. Cela permet d'obtenir la même espérance de rendement en diminuant la volatilité du portefeuille (volatilité = risque, mesuré par ex. par la variance de la variable aléatoire, dont les valeurs sont les rendements possibles). Les portefeuilles peuvent être représentés dans un graphique : sur l'axe des $x$ on indique le risque $x$ du portefeuille, sur l'axe des $y$ l'espérance du rendement du portefeuille. Pour chaque niveau de risque, on peut trouver un portefeuille maximisant le rendement attendu. L'ensemble de ces portefeuilles qui maximisent le rendement attendu $e_r(x)$ pour des risques $x$ spécifiques est appelé „frontière efficiente". La frontière efficiente d'un marché d'investissements risqués soit donnée sur l'intervalle $]0.1, 7]$ par la fonction suivante :

$$e_r : [0.1, 7] \to \mathbb{R}$$
$$e_r(x) = -0.003x^2 + 0.04x$$

La région au-dessus de la frontière ne peut être atteinte en détenant seulement des actifs risqués - le marché n'offre pas des rendements si élevés à un risque si bas. Les points sous la frontière sont sous-optimaux, et n'intéresseront pas un investisseur rationnel (trop peu de rendement pour le risque affronté).

(a) Calculer la tangente à la courbe $e_r$ qui passe par le point $(0, 0.015)$ (la tangente s'appelle „ligne du marché financier" (en anglais : capital market line), le point d'intersection de la tangente avec $e_r$ est appelé „portefeuille de marché", 0.015 est le taux d'intérêt sans risque, p.ex. d'une obligation à court terme d'un État stable ; la tangente représente l'espérance de tous les portefeuilles possibles composés d'actifs sans risque (au taux d'intérêt 0.015) et d'actifs du portefeuille de marché)

(b) Calculer l'espérance de rendement et le risque du portefeuille de marché.

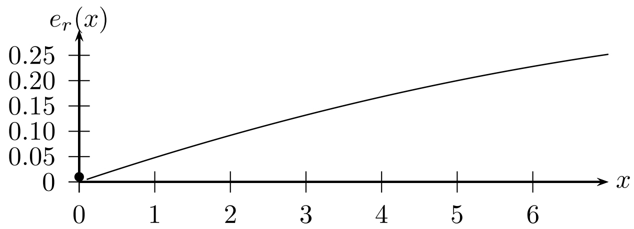


FIGURE 7.6.17 – frontière efficiente et le point $(0, 0.015)$

(c) Si on veut investir à un certain risque $x$, pour $x \in [0, x_m]$ ($x_m$ est le risque du portefeuille de marché), on peut indiquer le portefeuille avec ce risque et avec un rendement attendu maximal composé d'investissements sans risque et du portefeuille de marché. Calculer le rendement attendu pour $x = 2$.

(d) Comment faut il composer le portefeuille en $x = 2$ ? (remarque : le segment entre le point $(0, 0.015)$ et $(x_m, g(x_m))$ peut être exprimé avec $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := (a, b)$ de la manière suivante

$$c \begin{pmatrix} 0 \\ 0.015 \end{pmatrix} + (1 - c) \begin{pmatrix} x_m \\ g(x_m) \end{pmatrix}$$

pour $c \in [0,1]$, en supposant les définitions suivantes $c\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca \\ cb \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d \\ b+e \end{pmatrix}$ pour $a, b, d, e \in \mathbb{R}$. $c$ exprime la part de l'investissement sans risque et $(1-c)$ la part du portefeuille de marché).

démonstration : Nous avons deux points $(x_1, y_2), (x_2, y_2) \in g = ax + b$. Alors

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + cx_2 - cx_1 \\ y_1 + cy_2 - cy_1 \end{pmatrix} \in g$$

car avec

$$\begin{aligned} g(x_1) &= ax_1 + b = y_1 \\ g(x_2) &= ax_2 + b = y_2 \end{aligned}$$

on peut affirmer

$$\begin{aligned} y_1 + cy_2 - cy_1 &= ax_1 + b + c(ax_2 + b) - c(ax_1 + b) \\ &= b + ax_1 - acx_1 + acx_2 \\ &= a(x_1 + cx_2 - cx_2) + b \\ &= g(x_1 + cx_2 - cx_1) \end{aligned}$$

Avec cela pour $c \in [0,1]$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - c\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ &= (1-c)\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in g \end{aligned}$$

de sorte que $x_1 + c(x_2 - x_1)$ se situe sur l'axe des $x$ dans l'intervalle $[x_1, x_2]$ (p.ex. pour $c = 0.4$, $x_1 = 4$ et $x_2 = 7$ : $x_1 + c(x_2 - x_1) = 4 + 0.4(7-4) = 5.2 \in [4,7]$).

15. La possibilité de calculer des tangentes permet d'introduire une méthode efficace pour le calcul des zéros d'une fonction. On l'appelle „méthode de Newton(-Raphson)". On choisit un point $x$ proche du zéros - par exemple à l'aide d'une représentation graphique de la fonction. On calcule la tangente $g$ en $(x, f(x))$ et puis le zéro de la tangente. Ce zéro devient le nouveau $x$, et la procédure continue jusqu'à ce qu'on ait le zéro. La procédure converge plus rapidement que la regula falsi (la procédure qu'on a utilisé au premier semestre). Avec Excel on procède de la manière suivante. D'abord on déduit une formule pour le zéro de la tangente : Le zéro est le $x$, tel que

$$g(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = 0$$

($a$ est le point de départ ou le $x$ du dernier tour). On isole le $x$ :

$$\begin{aligned} f(a) + f'(a)x - f(a)a &= 0 \\ f'(a)x &= f'(a)a - f(a) \\ x &= \frac{f'(a)a - f(a)}{f'(a)} \\ x &= a - \frac{f(a)}{f'(a)} \end{aligned}$$

La procédure suppose alors que $f'(a) \neq 0$ pour chaque tour. Si l'on applique à des zéros $b$ tel que $f'(b) = 0$ - cela est par exemple le cas, si la courbe ne fait que frôler l'axe des $x$

sans la traverser - il faut que $f\,(a)$ tend plus rapidement vers 0 que $f'\,(a)$. On entre dans les premières deux lignes :

| $a$ | $f(a)$ | $f'(a)$ |
|---|---|---|
| $a - \frac{f(a)}{f'(a)}$ | | |

on tire les dernières deux cellules de la première ligne sur la deuxième ligne. Ensuite on tire la deuxième ligne en bas jusqu'à ce que $f\,(a)$ soit 0 ou assez proche de 0. Appliquer la procédure pour trouver le seul zéro réel de la fonction $f\,(x) = 0.9x^3 - 2x^2 - 3x + 4$ et comparer le nombre de tours (point de départ 2) avec le nombre de tours de la Regula falsi (bords de départs -6, 2).

Si $f\,(a)$ tend plus rapidement vers 0 que $f'\,(a)$, la procédure s'utilise aussi pour trouver des zéros de fonctions qui ne font que frôler l'axe des $x$ sans la transverser. Examiner cet énoncé à l'aide de

$$f(x) = x^3 - 11x^2 + 40x - 48 = (x-4)^2(x-3)$$

avec R (point de départ : 3.5).

16. Trouver les intervalles sur lesquels $f(x) = 5x^8 - 6x^4 + 3x^2$ est strictement croissante (décroissante). Trouver les intervalles sur lesquels $f$ est concave et convexe. Trouver les maxima et les minima locaux de la fonction.

### 7.6.2 Solutions

1. On obtient :

   (a) $f'(x) = 4.2x^2 - 7x + 1$,
   $f'(5) = 71$.

   (b) $f(x) = 3x^2 + 4x\,;\ f'(x) = 6x + 4$,
   Pente en 5 : 34

   (c) $f(x) = -3x^2 - 4x\,;\ f'(x) = -6x - 4\,;$
   Pente en 5 : $-34$

   (d) $f(x) = x^3 + 5x^2\,;\ f'(x) = 3x^2 + 10x\,;$
   Pente en 5 : 125

   (e) $f(x) = 2x - \frac{x^3}{6}\,;\ f'(x) = \frac{d}{dx}\left(2x - \frac{x^3}{6}\right) = 2 - \frac{3x^2}{6} = 2 - \frac{x^2}{2}$
   Pente en 5 : $2 - \frac{5^2}{2} = -\frac{21}{2} = -10.5$

   (f) $f(x) = 15x^{17} - 4x^9 + 14x^4 + 11x^2 + 4\,;\ f'(x) = 255x^{16} - 36x^8 + 56x^3 + 22x$
   Pente en $x = 5$ : 38'909'898'053'985

   (g) $s(a) = a^2 - \frac{3}{4}at\,;\ s'(a) = 2a - \frac{3}{4}t\,;$

   (h) $s(t) = a^2 - \frac{3}{4}at\,;\ s'(t) = -\frac{3}{4}a$

   (i) $f(x) = 5(x^2 - 3x + 4)\,;\ f'(x) = 10x - 15\,;$ en 5 la pente se monte à 35.

2. $f(x) = 5x^3 - 17x^2 + 2x - 1$.
   $\frac{d}{dx}\left(5x^3 - 17x^2 + 2x - 1\right) = 15x^2 - 34x + 2$
   $f'(5) = 207$
   $f(5) = 209$
   Nous avons un point et la pente de la droite :
   $209 = 207 \cdot 5 + b \Longrightarrow b = -826$
   L'équation de la tangente $g$ en $x_0$ : $g(x) = 207x - 826$

3. On obtient :

(a) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{x_0-x}{xx_0}}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{x_0-x}{-xx_0}}{-(x-x_0)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{x_0-x}{-xx_0}}{x_0-x} =$
$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{-xx_0} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} 1}{\lim\limits_{x\to x_0}(-xx_0)} = \frac{1}{-\lim\limits_{x\to x_0}(xx_0)} = \frac{1}{-\lim\limits_{x\to x_0} x \lim\limits_{x\to x_0} x_0} = \frac{1}{-x_0x_0} = -\frac{1}{x_0^2};$
Pente en $-4$ : $-\frac{1}{16}$

(b) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x_0^2}}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{x_0^2-x^2}{x^2x_0^2}}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{(x_0-x)(x_0+x)}{x^2x_0^2}}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{(x_0-x)(x_0+x)}{-x^2x_0^2}}{x_0-x} =$
$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{x_0+x}{-x^2x_0^2} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0}(x_0+x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\left(-x^2x_0^2\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} x_0 + \lim\limits_{x\to x_0} x}{-\lim\limits_{x\to x_0} x^2 \lim\limits_{x\to x_0} x_0^2} = \frac{x_0+x_0}{-x_0^2x_0^2} = -\frac{2x_0}{x_0^4} = -\frac{2}{x_0^3};$
Pente en $-4$ : 0.03125.
Les exercices a) et b) nous laissent deviner que le théorème „Si $f(x) = a^n$, alors $f'(x) = na^{n-1}$“ n'est pas uniquement valable pour des nombres naturels.

(c) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+x_0}}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{1+x_0-(1+x)}{(1+x)(1+x_0)}}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{x_0-x}{(1+x)(1+x_0)}}{x-x_0} =$
$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{-1}{(1+x)(1+x_0)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0}(-1)}{\lim\limits_{x\to x_0}(1+x) \lim\limits_{x\to x_0}(1+x_0)} =$
$\frac{-1}{(\lim\limits_{x\to x_0} 1 + \lim\limits_{x\to x_0} x)(\lim\limits_{x\to x_0} 1 + \lim\limits_{x\to x_0} x_0)} = \frac{-1}{(1+x_0)(1+x_0)} = \frac{-1}{x_0^2+2x_0+1};$
Pente en $-4$ : $-0.11111$

(d) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x_0+1)^2}}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{(x_0+1)^2-(x+1)^2}{(x+1)^2(x_0+1)^2}}{x-x_0}$
$(x_0+1)^2 - (x+1)^2 = x_0^2 + 2x_0 + 1 - x^2 - 2x - 1 = x_0^2 - x^2 + 2(x_0 - x) =$
$(x_0 - x)(x_0 + x) + 2(x_0 - x) = (x_0 - x)(x_0 + x + 2)$
$\Longrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{(x_0+1)^2-(x+1)^2}{(x+1)^2(x_0+1)^2}}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{(x_0-x)(x_0+x+2)}{(x+1)^2(x_0+1)^2}}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{(x_0-x)(x_0+x+2)}{-(x+1)^2(x_0+1)^2}}{-x+x_0} =$
$\lim\limits_{x\to x_0} -\frac{(x_0+x+2)}{(x+1)^2(x_0+1)^2} = -\frac{(x_0+x_0+2)}{(x_0+1)^2(x_0+1)^2} = -\frac{2(x_0+1)}{(x_0+1)^4} = -\frac{2}{(x_0+1)^3};$
La pente en $-4$ : 0.074. On peut constater que le calcul de la dérivée de fonctions même simples à l'aide de la définition devient vite difficile. C'est pourquoi on démontrera bientôt des théorèmes qui permettront de résoudre ce type de problèmes d'une manière plus efficace.

4. On obtient :

(a) Maxima ou minima en : $4.2x^2 - 7x + 1 = 0$ ; $x_1 = 0.157797$, $x_2 = 1.5088$.
$f''(x) = 8.4x - 7$ ; $f''(x_1) = -5.6745$. Il existe en $x_1$ un maximum.
$f''(x_2) = 5.6745 \Longrightarrow$ Il existe en $x_2$ un minimum de la fonction.

(b) Maximum ou minimum en : $0 = 6x + 4 \Longrightarrow x = -\frac{2}{3}$ ;
$f''(x) = 6$ ; $\Longrightarrow$ en $x = -\frac{2}{3}$ il y a un minimum.

(c) Maximum ou minimum en $0 = -6x - 4 \Longrightarrow x = -\frac{2}{3}$.
$f''(x) = -6$ ; $\Longrightarrow$ en $x = -\frac{2}{3}$ il y a un maximum.

(d) $0 = 3x^2 + 10x$, $x_1 = 0$, $x_2 = -3.333$ ;
$f''(x) = 6x + 10.$ ; $f''(0) = 10$. En 0 il y a un minimum. En $-3.333$ $f''(-3.333) = -10$. Il y a un maximum.

(e) $2 - \frac{x^2}{2} = 0$ ; $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$ ;
$f''(x) = -\frac{2x}{2} = -x$
En $-2$ $f''$ est positive, c'est pourquoi il y a un minimum. En 2 $f''$ est négative. Il y a un maximum.

(f) $255x^{16} - 36x^8 + 56x^3 + 22x = 0$ ; deux solutions réelles : 0, $-0.9353244$ (R-commande : polyroot(c(0,22,0,56,0,0,0,0,-36,0,0,0,0,0,0,0,255))
$f''(x) = 4080x^{15} - 288x^7 + 168x^2 + 22$ ; $f''(0) = 22$. Il y a un minimum.
$f"(-0.9) \approx -544.2063$. Il y a un maximum.

(g) le zéro de $s'$ : $2a - \frac{3}{4}t = 0 \Longrightarrow$ .
$2a - \frac{3}{4}t \Longrightarrow a = \frac{3}{8}t$
$s"(a) = 2$. Il y a en $a = \frac{3}{8}t$ un minimum.

(h) $s(t)$ est une droite sans maximum. $s''(t) = 0$.

(i) Le zéro de $f'(x)$ : $10x - 15 = 0 \Longrightarrow x = 1.5$ ; $f''(x) = 10$. En $x = 1.5$ il y a un minimum.

5. On obtient pour $C(x) = 0.002x^3 - 0.04x^2 + 0.8x + 4$

(a) l'intervalle économique $0.002x^3 - 0.04x^2 + 0.8x + 4 = 0$, Solution $-4.026\,3$. $C(0) = 4 > 0$. Alors positif dans le premier quadrant - à cause de la continuité de $C$ et du fait qu'il n'y a plus de zéro réel à droite de -4.0263. $\frac{d}{dx}\left(0.002x^3 - 0.04x^2 + 0.8x + 4\right) = 0.006\,x^2 - 0.08x + 0.8$; $0.006\,x^2 - 0.08x + 0.8 = 0$, Solutions : $6.666\,7 + 9.428\,1i, 6.666\,7 - 9.428\,1i$. Aucune solution réelle : puisque la dérivée est continue (polynôme), elle est soit partout positive soit partout négative. $C'(0) = 0.8 > 0$. Alors partout positive. $C$ est alors partout strictement croissante.

(b) coûts fixes : 4

(c) Fonction de recette $R(x) = x(2.5 - 0.1x) = 2.5x - 0.1x^2$.
Fonction de profit $P(x) = R(x) - C(x) = 2.5x - 0.1x^2 - \left(0.002x^3 - 0.04x^2 + 0.8x + 4\right) = -0.002\,x^3 - 0.06x^2 + 1.7x - 4$
$\frac{d}{dx}\left(-0.002\,x^3 - 0.06x^2 + 1.7x - 4\right) = -0.006\,x^2 - 0.12x + 1.7$
$-0.006\,x^2 - 0.12x + 1.7 = 0$, Solution is : $9.578\,9, -29.579$
$\frac{d}{dx}\left(-0.006\,x^2 - 0.12x + 1.7\right) = -0.012\,x - 0.12$
$P''(9.578\,9) = -0.012 \cdot 9.578\,9 - 0.12 = -0.234\,95 < 0$ (alors maximum en $9.578\,9$)
Profit maximal : $P(9.578\,9) = -0.002 \cdot 9.578\,9^3 - 0.06 \cdot 9.578\,9^2 + 1.7 \cdot 9.578\,9 - 4 = 5.021\,0$
Dessiner la situation avec R :

```
C=function(x)0.002*x^3-0.04*x^2+0.8*x+4
plot(C,xlim=c(0,20),ylim=c(0,20))
R=function(x) x*(2.5-0.1*x)
curve(R, add=T,col="green")
P=function(x) -0.002*x^3-0.06*x^2+1.7*x-4
curve(P,add=T,col="red")
```

6. On obtient :

(a) La fonction de coût devrait être positive à droite de 0 et être croissante.
Les zéros de la fonction de coût : $C(x) = -3 \cdot 10^{-10}x^4 + 3 \cdot 10^{-7}x^3 + 7 \cdot 10^{-4}x^2 + 300 = 0 \Longrightarrow$ deux zéros réelles : -1285.6026, 2171.9215 (avec polyroot(c(300,0,0.0007,0.0000003,-0.0000000003))
$C$ est continue et $C(0) = 300 > 0$. $C$ est alors positive entre les deux zéros. Par conséquent $C$ est dans le premier quadrant sur [0,2171.9215] . $C(3000) = -3 \cdot 10^{-10}3000^4 + 3 \cdot 10^{-7}3000^3 + 7 \cdot 10^{-4}3000^2 + 300 = -9600.0 < 0$. Alors à droite de 2171.9215 partout négative (il n'y a plus de zéro réel à droite de ce nombre et continuité !)
Nous calculons la première dérivée :
$C'(x) = -1.2 \cdot 10^{-9}x^3 + 9 \cdot 10^{-7}x^2 + 0.0014x$
Les zéros : 0, $-768.37$, $1518.4$
$C'(1) = -1.2 \cdot 10^{-9} + 9 \cdot 10^{-7} + 0.0014 = 1.400\,9 \times 10^{-3} > 0$. $C'$ est continue et a par conséquent le même signe entre deux zéros.
C'est pourquoi la courbe est strictement croissante entre 0 et 1518.4
L'intervalle économique : $[0, 1518.4]$

(b) Coûts fixes : 300

(c) $r(x) = xP_D(x) = 19x - 0.1x^2$.
$P(x) = R(x) - C(x) = 19x - 0.1x^2 - (-3 \cdot 10^{-10}x^4 + 3 \cdot 10^{-7}x^3 + 7 \cdot 10^{-4}x^2 + 300) = 3 \cdot 10^{-10}x^4 - 3 \cdot 10^{-7}x^3 - 0.1007x^2 + 19x - 300$
$P'(x) = 1.2 \cdot 10^{-9}x^3 - 9 \cdot 10^{-7}x^2 - 0.2014x + 19$

Les zéros de $P'(x)$ : $-12634$, $94.305$, $13289$
$P''(x) = 3.6 \cdot 10^{-9}x^2 - 1.8 \cdot 10^{-6}x - 0.2014$
$P''(94.305) = -0.20154$. ($\Longrightarrow$ maximum)
$P''(13289) = 0.410\,43$ ($\Longrightarrow$ minimum).
Le profit maximal en : 94.305.
Le profit maximal en 94.305 est $P(94.305) = 596$

7. On obtient :

(a) Nous essayons d'adapter une fonction polynomiale aux données (4 points déterminent probablement un polynôme du troisième degré. Il est alors de la forme $C(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Puisque la fonction doit contenir les points donnés on obtient :

$$\begin{aligned} 10 &= d \\ 296.4 &= 4^3a + 4^2b + 4c + d \\ 910 &= 30^3a + 30^2b + 30c + d \\ 2010 &= 40^3a + 40^2b + 40c + d \end{aligned}$$

Nous résolvons ce système d'équations et obtenons :
$a = 0.1$
$b = -5$
$c = 90$
$d = 10$
Cela nous donne la fonction de coût suivante : $C(x) = 0.1x^3 - 5x^2 + 90x + 10$
(10 sont les coûts fixes).
Avec R : X=matrix(c(0,0,0,1,4^3,4^2,4,1,30^3,30^2,30,1,40^3,40^2,40,1),
ncol=4,byrow=T)
y=c(10,296.4,910,2010)
solve(X,y)

(b) Une fonction de coût doit être croissante dans le premier quadrant ou dans l'intervalle économique dans le premier quadrant. Nous calculons la première dérivée : $C'(x) = \frac{d}{dx}\left(0.1x^3 - 5x^2 + 90x + 10\right) = 0.3x^2 - 10x + 90$. Nous calculons les zéros de cette fonction : $0.3x^2 - 10x + 90 = 0$. Il n'y a pas de solution réelle. $C'(0) = 90$. Alors $C'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puisque $C'$ est continue. $C$ est alors partout strictement croissante. Nous pouvons considérer la fonction comme une fonction de coût.

(c) Nous choisissons comme modèle de nouveau un polynôme. Deux points déterminent une droite. Comme la fonction contient les deux points donnés, nous obtenons le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} 50 &= 30a + b \\ 70 &= 20a + b \end{aligned}$$

Solutions : $a = -2, b = 110 \Longrightarrow P_D(x) = -2x + 110$

(d) La recette est égale à la quantité vendue multipliée par le prix :
$R(x) = \; xP_D(x) = x\,(-2x + 110) = -2x^2 + 110x$

(e) Pour la fonction de profit on obtient : $P(x) = R(x) - C(x) = \left(-2x^2 + 110x\right) - \left(0.1x^3 - 5x^2 + 90x + 10\right) = -0.1x^3 + 3x^2 + 20x - 10$

(f) Nous calculons la première et la deuxième dérivée :
$\frac{d}{dx}\left(-0.1x^3 + 3x^2 + 20x - 10\right) = -0.3x^2 + 6x + 20$
$\frac{d}{dx}\left(-0.3x^2 + 6x + 20\right) = -0.6x + 6$
Zéros de la première dérivée : $-0.3x^2 + 6x + 20 = 0 \Longrightarrow x_1 - 2.909\,9, x_2 = 22.910$
Nous ne considérons que le premier quadrant (domaine économique) et examinons si en

22.910 il y a un maximum ou un minimum :
$P''(22.910) = -0.6 \cdot 22.910 + 6 = -7.746 < 0$
Il y a un maximum de la fonction de profit en 22.910.
Le profit maximal est : $P(22.910) = -0.1 \cdot 22.910^3 + 3 \cdot 22.910^2 + 20 \cdot 22.910 - 10 = 820.33$.

(g) Représentation graphique voir figure 7.6.18 :

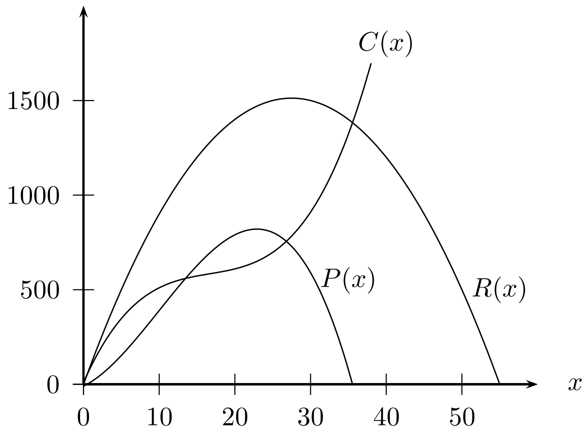


FIGURE 7.6.18 – Fonction de coût, de recette et de profit de l'exercice

Faire attention au fait que la fonction de profit a un zéro là où la fonction de coût coupe la fonction de recette !

8. On obtient :

(a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 5 \qquad \frac{d}{dx}(2x^3 - 3x^2 + 2x - 5) = 6x^2 - 6x + 2$
Nous calculons les zéros de la première dérivée : $6x^2 - 6x + 2 = 0$. Il n'y a pas de zéro réel. Par là, $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ - à cause de la continuité de la fonction. Ainsi $f(x)$ est partout strictement croissant et par conséquent cela est aussi le cas sur $]5, 6[$.

(b) $g(x) = 5x^4 - 2x^3 + 3x - 20$
$\frac{d}{dx}(5x^4 - 2x^3 + 3x - 20) = 20x^3 - 6x^2 + 3$
Nous calculons les zéros de la première dérivée : $20x^3 - 6x^2 + 3 = 0 \Longrightarrow x = -0.447\,85$.
Il n'y a qu'un zéro réel. Nous calculons $g'(0) = 3$. Ainsi pour $x > -0.44785$ : $g'(x) > 0$.
Avec cela et la continuité de $g'$ la pente est positive sur $I = \;]1, 2[$.

(c) $h(x) = 4x^2 - 100x + 20$
$\frac{d}{dx}(4x^2 - 100x + 20) = 8x - 100$
Nous calculons les zéros de $h'(x)$ : $8x - 100 \Longrightarrow x = \frac{25}{2} = 12.5$
Comme $h'(0) = -100$, on peut savoir (continuité !) que pour $x < 12.5$ : $h'(x) < 0$ et pour $x > 12.5$ : $h'(x) > 0$.
Ainsi sur $]2, 12.5[$ la pente de la fonction $h$ est décroissante, sur $]12.5, 20[$ elle est croissante.

9. On obtient :

(a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 5$
Première dérivée : $\frac{d}{dx}\left(2x^3 - 3x^2 + 2x - 5\right) = 6x^2 - 6x + 2;$
Deuxième dérivée : $\frac{d}{dx}\left(6x^2 - 6x + 2\right) = 12x - 6$
$12x - 6 = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}$ (point d'inflexion in 0.5)
Troisième dérivée : $\frac{d}{dx}(12x - 6) = 12 > 0$
Ainsi en 0.5 il y a un point d'inflexion concave-convexe.

(b) $g(x) = 5x^4 - 2x^3 + 3x - 20$
Première dérivée : $\frac{d}{dx}\left(5x^4 - 2x^3 + 3x - 20\right) = 20x^3 - 6x^2 + 3$

Deuxième dérivée : $\frac{d}{dx}\left(20x^3 - 6x^2 + 3\right) = 60x^2 - 12x = x(60x - 12)$
Zéros : $x = 0$ et $60x - 12 = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{5}$
Troisième dérivée : $\frac{d}{dx}\left(60x^2 - 12x\right) = 120x - 12$
Nous avons un point d'inflexion en 0 et un autre en 0.2.
En $x = 0$, $g^{(3)}(0) = -12 < 0$. Ainsi il y a un point d'inflexion convexe-concave.
En $x = 0.2$, $g^{(3)}(0.2) = 120 \cdot 0.2 - 12 = 12 > 0$. C'est pourquoi il y a un point d'inflexion concave-convexe.

(c) $h(x) = 4x^2 - 100x + 20$
Première dérivée : $\frac{d}{dx}\left(4x^2 - 100x + 20\right) = 8x - 100$
Deuxième dérivée : $\frac{d}{dx}(8x - 100) = 8 > 0$ pour tout $x$. La courbe est partout convexe. Il n'y a pas de point d'inflexion.

(d) $c(x) = x^3 - 16x^2 + 6x - 4$
Première dérivée : $\frac{d}{dx}\left(x^3 - 16x^2 + 6x - 4\right) = 3x^2 - 32x + 6$
Deuxième dérivée : $\frac{d}{dx}\left(3x^2 - 32x + 6\right) = 6x - 32$
Troisième dérivée : $\frac{d}{dx}(6x - 32) = 6 > 0$
$6x - 32 = 0 \Longrightarrow x = \frac{16}{3} = 5.333\,3$ (= point d'inflexion)
Il y a un point d'inflexion concave-convexe.

(e) $x(r) = r^4 - 12r^2 + 1$
Première dérivée :$\frac{d}{dr}\left(r^4 - 12r^2 + 1\right) = 4r^3 - 24r$
Deuxième dérivée : $\frac{d}{dr}\left(4r^3 - 24r\right) = 12r^2 - 24$
Troisième dérivée : $\frac{d}{dr}\left(12r^2 - 24\right) = 24r$
$12r^2 - 24 \Longrightarrow r = \pm\sqrt{2}$ (2 points d'inflexion)
En $-\sqrt{2}$ : $r^{(3)}(-\sqrt{2}) = 24 \cdot -\sqrt{2} < 0$. Il y a un point d'inflexion convexe-concave.
En $\sqrt{2}$ : $r^{(3)}(\sqrt{2}) = 24 \cdot \sqrt{2} > 0$. Il y a un point d'inflexion concave-convexe.

(f) $g(u) = u^4 - 4u^3 + 6u^2 - 3u + 1$
Première dérivée : $\frac{d}{du}\left(u^4 - 4u^3 + 6u^2 - 3u + 1\right) = 4u^3 - 12u^2 + 12u - 3$
Deuxième dérivée : $\frac{d}{du}\left(4u^3 - 12u^2 + 12u - 3\right) = 12u^2 - 24u + 12$
Troisième dérivée : $\frac{d}{du}\left(12u^2 - 24u + 12\right) = 24u - 24$
$12u^2 - 24u + 12 = 0 \Longrightarrow u = 1$ (il y a un point d'inflexion).
$g^{(3)}(1) = 24 - 24 = 0$. Ainsi la question n'est pas décidée par la troisième dérivée. Cela s'explique par le fait que la deuxième dérivée a en 1 un zéro, mais elle ne traverse pas l'axe des $x$. C'est pourquoi la deuxième dérivée est - sauf en 1 - partout positive. $g$ est alors - sauf en $x = 1$ - partout convexe. On peut se représenter ce phénomène comme deux points d'inflexion joints en un seul point d'inflexion. Par là, il n'y a pas d'inflexion (voir figure 7.6.19).

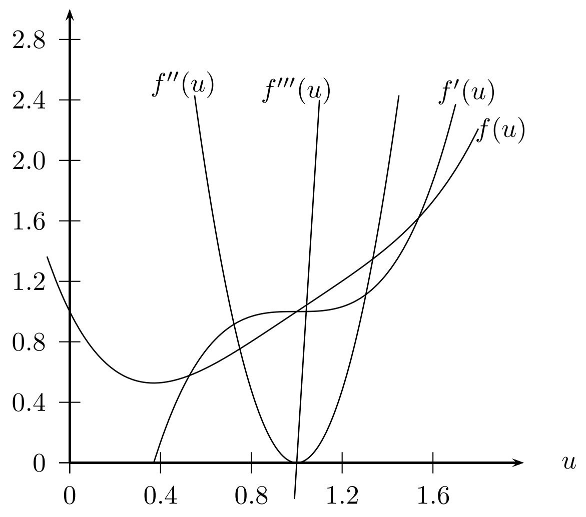


FIGURE 7.6.19 – La deuxième dérivée a un zéro sans qu'il y ait un point d'inflexion

10. Nous calculons $f(3) = 3 \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 5 = 64$,
$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(3x^3 - 2x^2 + 2x - 5\right) = 9x^2 - 4x + 2$
et $f'(3) = 9 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 + 2 = 71$
Nous obtenons en $(3, 64)$ la tangente : $g(x) = 64 + 71(x - 3) = 71x - 149$.
11. $C(x) = 0.1x^3 - 5x^2 + 100x + 5$
$R(x) = xP_D(x) = x(-3x + 150) = -3x^2 + 150x$
$P(x) = R(x) - C(x) = \left(-3x^2 + 150x\right) - \left(0.1x^3 - 5x^2 + 100x + 5\right)$
$= -0.1x^3 + 2x^2 + 50x - 5$
$P'(x) = \frac{d}{dx}\left(-0.1x^3 + 2x^2 + 50x - 5\right) = -0.3x^2 + 4x + 50$
Zéros : $-0.3x^2 + 4x + 50 = 0 \Longrightarrow x_1 = -7.8630; x_2 = 21.196$
Nous ne nous intéressons qu'au zéro positif.
$P''(x) = \frac{d}{dx}\left(-0.3x^2 + 4x + 50\right) = -0.6x + 4$
$P''(21.196) = -0.6 \cdot 21.196 + 4 = -8.7176 < 0$
Il y a en 21.196 un maximum.
Profit maximal : $P(21.196) = -0.1 \cdot (21.196)^3 + 2 \cdot (21.196)^2 + 50 \cdot 21.196 - 5 = 1001.1$
12. Nous calculons d'abord la fonction de demande de la forme $P_D(x) = ax + b$, car nous ne connaissons que deux points. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} 55 &= 10a + b \\ 35 &= 20a + b \end{aligned} \tag{7.6.3}$$

$b = 75, a = -2. \Longrightarrow P_D(x) = -2x + 75$
La fonction de recette est alors : $xP_D(x) = x\,(-2x + 75) = -2x^2 + 75x$
La fonction de profit : $P(x) = R(x) - C(x) = \left(-2x^2 + 75x\right) - \left(0.2x^3 - 6x^2 + 90x + 5\right) = -0.2x^3 + 4x^2 - 15x - 5$
$P'(x) = \frac{d}{dx}\left(-0.2x^3 + 4x^2 - 15x - 5\right) = -0.6x^2 + 8x - 15$
Zéros : $-0.6x^2 + 8x - 15 = 0 \Longrightarrow x_1 = 2.2571, x_2 = 11.076$
$P''(x) = \frac{d}{dx}\left(-0.6x^2 + 8x - 15\right) = -1.2x + 8$
$P''(11.076) = -1.2 \cdot 11.076 + 8 = -5.2912 < 0$
Il y a alors en 11.076 un maximum
Profit maximal : $P(11.076) = -0.2 \cdot (11.076)^3 + 4 \cdot (11.076)^2 - 15 \cdot 11.076 - 5 = 47.815$
13. $\frac{d}{dx}\left(-4x^2 + x - 1\right) = 1 - 8x$
On obtient les équations suivantes par les réflexions

(1) la pente $a$ de la tangente est identique à la première dérivée en $x$
(2) Nous pouvons substituer le point $(1,2)$ dans l'équation $g(x)=ax+b$
(3) La tangente a un point d'intersection avec la fonction $f$

$$\begin{aligned} 1-8x &= a \\ 2 &= a+b \quad (\Longrightarrow b = 2-a = 2-(1-8x) \\ -4x^2+x-1 &= ax+b \end{aligned}$$

Il s'agit d'une système d'équations de trois équations et de trois inconnus. On obtient en substituant le $a$ et le $b$ dans la troisième équation :

$$-4x^2+x-1 = (1-8x)\,x+2-(1-8x)$$

$$-4x^2+x-1-((1-8x)\,x+2-(1-8x)) = 4x^2-8x-2=0$$

Solution : $\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{3}+1 = 2.\,224\,7$
$1-\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{3} = -0.224\,74$
pour $x = 1-\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{3}$ on obtient :
$a = 4\sqrt{6}-7 = 2.\,798\,0$
$b = 9-4\sqrt{6} = -0.797\,96$
Equation de la tangente : $g(x) = 2.798x-0.79796$
Calcul des points d'intersection : $g(-0.22474) = 2.798\cdot -0.224\,74-0.79796 = -1.\,426\,8$
Un des points d'intersection est alors $(-0.22474, -1.\,426\,8)$
Pour l'autre x :
$a' = -4\sqrt{6}-7 = -16.\,798$
$b' = 4\sqrt{6}+9 = 18.\,798$
$x = \frac{1}{2}\sqrt{6}+1 = 2.\,224\,7$
Equation de la tangente : $g'(x) = -16.798x+18.798$
Calcul du point d'intersection : $g'(2.22447) = -16.798\cdot 2.\,224\,7+18.798 = -18.\,573$
Le point d'intersection est alors $(2.2247, -18.573)$ (voir figure 7.6.20)

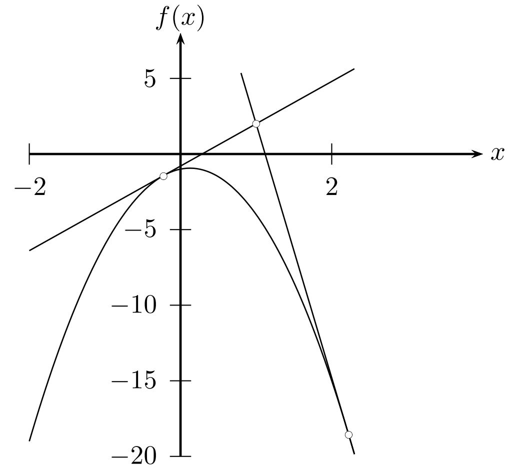


FIGURE 7.6.20 – Représentation graphique de l'exercice

14. On obtient :

(a)

$$\begin{aligned} e_r &: [0.1, 7] \to \mathbb{R} \\ e_r\,(x) &= -0.003x^2+0.04x \end{aligned}$$

$g(x) = ax + 0.015$
$\frac{d}{dx}\left(-0.003x^2 + 0.04x\right) = 0.04 - 0.006\,x$
fournit le système d'équations suivant :

$$a = 0.04 - 0.006\,x$$
$$ax + 0.015 = -0.003x^2 + 0.04x$$

alors $-0.006\,x^2 + 0.04x + 0.015 - \left(-0.003x^2 + 0.04x\right) = 0.015\ - 0.003\,x^2$

$$\begin{aligned}(0.04 - 0.006\,x)\,x + 0.015 &= -0.003x^2 + 0.04x\\ -0.006\,x^2 + 0.04x + 0.015 &= -0.003x^2 + 0.04x\\ 0.015\ - 0.003\,x^2 &= 0\end{aligned}$$

On obtient : $0.015\ - 0.003\,x^2$, Solution : $\sqrt{\frac{0.015}{0.003}} = 2.236\,1$ pour $x > 0$.
$a = 0.04 - 0.006\sqrt{\frac{0.015}{0.003}} = 0.02658\,4$.
la ligne du marché financier :

$$g(x) = 0.026584x + 0.015$$

(b) le risque du portefeuille de marché :

$$2.236\,1$$

et l'espérance

$$g(2.236\,1) = 0.026584 \cdot 2.236\,1 + 0.015 = 0.0744444$$

(c) $g(2) = 0.026584 \cdot 2 + 0.015 = 0.06816\,8$

(d)

$$c\begin{pmatrix}0\\0.015\end{pmatrix} + (1-c)\begin{pmatrix}2.2361\\0.0744444\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0.06816\,8\end{pmatrix}$$

On obtient deux équations à une inconnue :

$$c \cdot 0 + (1-c)\,2.2361 = 2$$
$$c \cdot 0.015 + (1-c)\,0.0744444 = 0.06816\,8$$

Il suffit de résoudre une des ces équations. A part d'erreurs d'arrondi possibles les deux équations ont la même solution. p.ex. $c \cdot 0 + (1-c)\,2.2361 = 2$, Solution : $0.105\,59$. Il faut prendre 10.559% de l'investissement sans risque et le reste du portefeuille de marché.

15.

$$\frac{d}{dx}\left(0.9x^3 - 2x^2 - 3x + 4\right) = 2.7x^2 - 4x - 3$$

Si on entre 2.5 dans la cellule A1 on peut entrer :

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | 2.5 | =0.9∗A1ˆ3 − 2∗A1ˆ2 − 3∗A1 + 4 | =2.7∗A1ˆ2 − 4∗A1 − 3 |
| 2 | =A1-B1/C1 | | |

On tire les cellules B1 et C1 sur B2 et C2 et ensuite les cellules A2,B2 et C2 en bas. Le zéro est $2.844\,8$. Avec le méthode de Newton on a besoins de 5 tours, avec la regula falsi 48. La procédure de Newton converge beaucoup plus vite (voir tableau excel zeros_Newton_Regula_Falsi.xlsx sur math.logik.ch).

Avec R :
f=function(x) $0.9 * x\hat{}3 - 2 * x\hat{}2 - 3 * x + 4$
df=function(x) $2.7 * x\hat{}2 - 4 * x - 3$
a=2.5
while(abs(f(a))>0.00000001) {a=a-f(a)/df(a)}
a

Si l'on veut savoir le nombre de tours nécessaires on ajoute un compteur :
a=2.5
n=0
while(abs(f(a))>0.00000001) {a=a-f(a)/df(a) ;n=n+1}
list(c(zero=a,nombres_tours=n))

Zéro sans que la fonction traverse l'axe des x :
f=function(x) $x\hat{}3 - 11 * x\hat{}2 + 40 * x - 48$
df=function(x) $3 * x\hat{}2 - 22 * x + 40$
a=3.5
while(abs(f(a))>0.000000000000001) {a=a-f(a)/df(a)}
a

16. Comme $f$ est un polynôme $f$ est continue ainsi que toutes les dérivés de $f$. $\frac{d}{dx}\left(5x^8 - 6x^4 + 3x^2\right) = 40x^7 - 24x^3 + 6x$ (première dérivée)
zéros avec R :
> polyroot(c(0,6,0,-24,0,0,0,40))
[1] 0.0000000+0.0000000i 0.5395572+0.0000000i -0.5395572-0.0000000i
[4] 0.0000000-0.9370053i 0.7660659-0.0000000i 0.0000000+0.9370053i
[7] -0.7660659-0.0000000i
zéros réels : -0.7660659, -0.5395572, 0, 0.5395572, 0.7660659
On peut enlever les solutions complexes et la partie imaginaire de la manière suivante :
a=polyroot(c(0,6,0,-24,0,0,0,40)); areel=Re(a[c(1,2,3,5,7)])
df=function(x) 40*x^7-24*x^3+6*x
df(1) = 22 ; df(0.6) = -0.464256 ; df(0.5) = 0.3125 ; df(0) = 0 ; df(-0.5) = -0.3125 ; df(-0.6) = 0.464256 ; df(-1) = -22
On peut en déduire :
$f$ est strictement décroissante sur $]-\infty, -0.7660659[$
$f$ est strictement croissante sur $]-0.7660659, -0.5395572[$
$f$ est strictement décroissante sur $]-0.5395572, 0[$
$f$ est strictement croissante sur $]0, 0.5395572[$
$f$ est strictement décroissante sur $]0.5395572, 0.7660659[$
$f$ est strictement croissante sur $]0.7660659, \infty[$.

intervalles où la fonction est concave ou convexe.
$\frac{d}{dx}\left(40x^7 - 24x^3 + 6x\right) = 280x^6 - 72x^2 + 6$ (deuxième dérivée)
Zéros : > polyroot(c(6,0,-72,0,0,0,280))
[1] 0.2928971+0.0000000i -0.2928971-0.0000000i 0.0000000-0.7379125i
[4] 0.6772932-0.0000000i 0.0000000+0.7379125i -0.6772932+0.0000000i
zéros réels : -0.6772932, -0.2928971, 0.2928971, 0.6772932
ddf=function(x) 6-72*x^2+280*x^6
ddf(-1) = 214 ; ddf(-0.5) = -7.625 ; ddf(0) = 6 ; ddf(0.5) = -7.625 ; ddf(1) = 214
La deuxième dérivée est positive sur $]-\infty, -0.6772932[$ ($f$ y est convexe)
La deuxième dérivée est négative sur $]-0.6772932, -0.2928971[$ ($f$ y est concave)
La deuxième dérivée est positive sur $]-0.2928971, 0.2928971[$ ($f$ y est convexe)
La deuxième dérivée est négative sur $]0.2928971, 0.6772932[$ ($f$ y est concave)

La deuxième dérivée est positive sur $]0.6772932, \infty[$ ($f$ y est convexe).

maxima et minima
au zéro de la première dérivée se trouve un maximum local de $f$ , si la fonction $f$ y est concave ; un minimum local, si la fonction $f$ y est convexe :
premier zéro : -0.7660659 ($f$ est y convexe : minimum : $f(-0.7660659) = 0.2872249$)
deuxième zéro : -0.5395572 ($f$ est y concave : maximum :$f(-0.5395572) = 0.4007684$)
troisième zéro : 0 ($f$ est y convexe : maximum : $f(0) = 0$)
quatrième zéro : 0.5395572 ($f$ est y concave : maximum : $f(0.5395572)) = 0.4007684$
cinquième zéro : 0.7660659 ($f$ est y convexe : minimum : $f(0.7660659) = 0.4007684$)
avec R :
f=function(x) 5*x^8-6*x^4+3*x^2
f(-0.7660659) = 0.2872249 ; f(-0.5395572) = 0.4007684 ; f(0) = 0 ; f(0.5395572) = 0.4007684 ;
f(0.7660659) = 0.4007684

Graphique de la fonction de départ : plot(f,xlim=c(-1,1))
Vérifier les résultats à l'aide du graphique ! ! ! ! !
pour ajouter les dérivées au graphique :
curve(df,add=T)
curve(ddf,add=T)
Si l'on veut avoir les dérivées entièrement sur le graphique dans l'intervalle considéré,
il faut exécuter p.ex.
plot(f,xlim=c(-1,1), ylim=c(-10,10))
curve(df,add=T)
curve(ddf,add=T)

## 7.7 Objectifs d'apprentissage

- Arriver à reproduire par écrit la définition de la pente d'une fonction continue en $x_0$.
- Arriver à reproduire par écrit la définition de la tangente et de la sécante d'une fonction continue en $x_0$.
- Arriver à démontrer les théorèmes 7.2.1, 7.2.2 et 7.2.3.
- Savoir dériver des fonctions polynomiales
- Savoir que la dérivabilité implique la continuité d'une fonction, mais pas l'inverse.
- Arriver à reproduire les définitions de „strictement croissant" et „strictement décroissant".
- Savoir reproduire l'énoncé qu'une première dérivée positive implique la croissance stricte d'une fonction et que la première dérivée négative implique la décroissance stricte d'une fonction (mais que l'inverse n'est pas le cas - arriver à donner un exemple pour ce fait).
- Arriver à donner la définition d'un maximum, d'un minimum et d'un extremum local.
- Arriver à donner la définition d'une courbe concave (convexe) dans un intervalle.
- Connaître le lien entre le maximum et la concavité (minimum et convexité).
- Arriver à indiquer et à appliquer les conditions pour l'existence d'un maximum (minimum) local. Arriver à calculer des maxima et des minima locaux.
- Arriver à reproduire la définition d'un point d'inflexion et à expliquer sa signification. Arriver à distinguer des points d'inflexion convexe-concave et concave-convexe par le calcul. Arriver à calculer des points d'inflexion.
- Arriver à faire des calculs correspondants aux exercices.

# Chapitre 8

# Règles supplémentaires du calcul différentiel

Nous avons constaté que le calcul de la dérivée de fonctions du type $\frac{f}{g}$ ($f$ et $g$ sont des polynômes) devient difficile en utilisant la définition de la dérivée. Pour d'autres types de fonctions réelles le problème s'accentuerait probablement. Il serait alors utile d'introduire des procédures plus pratiques, ce qui est le but de ce chapitre. Nous supposons que $f$ et $g$ sont dérivables dans dans l'intervalle $I$, dans lequel elles sont définies, et que leur première dérivée est continue.

## 8.1 Quelques règles et leur démonstrations

**Théorème 8.1.1.**

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

*Démonstration.* Selon le théorème 7.6.5 on peut affirmer pour des fonctions dérivables en $I$ et pour $a,x\in I$ :

$$\begin{aligned}f(x)&=f(a)+f'(a)(x-a)+r_f(x)\\ g(x)&=g(a)+g'(a)(x-a)+r_g(x)\end{aligned}$$

Avec cela

$$f(x)\cdot g(x)=\left[f(a)+f'(a)(x-a)+r_f(x)\right]\cdot\left[g(a)+g'(a)(x-a)+r_g(x)\right].$$

Le terme à droite est identique à (en effectuant)

$$\begin{aligned}&f(a)g(a)+f(a)g'(a)(x-a)+f(a)r_g(x)+\\ &f'(a)(x-a)g(a)+f'(a)(x-a)g'(a)(x-a)+f'(a)(x-a)r_g(x)+\\ &r_f(x)g(a)+r_f(x)g'(a)(x-a)+r_f(x)r_g(x)\end{aligned}$$

En changeant l'ordre et en mettant en évidence on obtient :

$$\begin{aligned}&f(a)g(a)+\left[f(a)g'(a)+f'(a)g(a)\right](x-a)+\\ &+f'(a)g'(a)(x-a)^2+f'(a)(x-a)r_g(x)+f(a)r_g(x)+\\ &r_f(x)g(a)+r_f(x)g'(a)(x-a)+r_f(x)r_g(x)\end{aligned}$$

Cette expression est de la forme

$$f(a)g(a) + [f(a)g'(a) + f'(a)g(a)](x-a) + r(x),$$

si nous posons

$$\begin{aligned} r(x) := f'(a)g'(a)(x-a)^2 + f'(a)r_g(x)(x-a) + f(a)r_g(x) + \\ r_f(x)g(a) + r_f(x)g'(a)(x-a) + r_f(x)r_g(x). \end{aligned} \tag{8.1.1}$$

Selon le théorème 7.6.6

$$\frac{d}{da}(f(a)g(a)) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$$

si

$$\lim_{x\to a} \frac{r(x)}{x-a} = 0.$$

Puisque $f$ et $g$ sont des fonctions dérivables, on peut affirmer

$$\begin{gathered} \lim_{x\to a} \frac{r_f(x)}{x-a} = 0 = \lim_{x\to a} \frac{r_g(x)}{x-a} \\ \lim_{x\to a} r_f(x) = 0 = \lim_{x\to a} r_g(x) \end{gathered}$$

De plus

$$\lim_{x\to a}(x-a) = 0$$

En calculant la limite des termes de la somme $\frac{r}{x-a}$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} \frac{f'(a)r_g(x)(x-a)^2}{x-a} &= \lim_{x\to a} f'(a)r_g(x)(x-a) = f'(a)\lim_{x\to a} r_g(x) \lim_{x\to a}(x-a) = 0 \\ \lim_{x\to a} \frac{f'(a)r_g(x)(x-a)}{x-a} &= \lim_{x\to a} f'(a)r_g(x) = f'(a)\lim_{x\to a} r_g(x) = 0 \\ \lim_{x\to a} \frac{f(a)r_g(x)}{x-a} &= f(a)\lim_{x\to a} \frac{r_g(x)}{x-a} = 0 \\ \lim_{x\to a} \frac{r_f(x)g(a)}{x-a} &= g(a)\lim_{x\to a} \frac{r_f(x)}{x-a} = 0 \\ \lim_{x\to a} \frac{r_f(x)g'(a)(x-a)}{x-a} &= \lim_{x\to a} r_f(x)g'(a) = g'(a)\lim_{x\to a} r_f(x) = 0 \\ \lim_{x\to a} \frac{r_f(x)r_g(x)}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{r_f(x)}{x-a} \lim_{x\to a} r_g(x) = 0 \end{aligned}$$

on obtient

$$\lim_{x\to a} \frac{r(x)}{x-a} = 0.$$

□

**Théorème 8.1.2.**

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \text{ (pourvu que } g(x) \neq 0)$$

*Démonstration.* Posons $h(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$. Ainsi :

$$h(x)g(x) = f(x)$$

et

$$\begin{aligned} f'(x) &= h'(x)g(x) + h(x)g'(x) \\ &= h'(x)g(x) + \frac{f\,(x)}{g(x)}g'(x) \end{aligned}$$

On peut en déduire :

$$\begin{aligned} h'(x)g(x) &= f'(x) - \frac{f(x)}{g(x)}g'(x) \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{f\,(x)}{g(x)}\right) \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)g(x)} \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2} \end{aligned}$$

□

**Exemple 8.1.3.**

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{5x^2}{(13-2x)}\right) = \frac{10x(13-2x) - 5x^2(-2)}{(13-2x)^2} = \frac{130x - 10x^2}{\left(13-2x\right)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{5x-4}{6x+5}\right) = \frac{5(6x+5) - (5x-4)6}{(6x+5)^2} = \frac{49}{\left(6x+5\right)^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{7x^2+2x}{18x^3-x^2+5}\right) &= \frac{(14x+2)(18x^3-x^2+5) - (7x^2+2x)(54x^2-2x)}{\left(18x^3-x^2+5\right)^2} \\ &= \frac{-126x^4 - 72x^3 + 2x^2 + 70x + 10}{\left(18x^3-x^2+5\right)^2} \end{aligned}$$

◊

**Théorème 8.1.4.** *(théorème de dérivation des fonctions composées, parfois appelé „règle de dérivation en chaîne“ ou „règle de la chaîne“)*

$$\frac{d}{dx}g(f(x)) = g'(f(x))f'(x)$$

*(avec $g : J \to R$, $f(I) \subset J$, $g(y)$ est dérivable en $b := f(a)$ et $y := f(x)$ est dérivable en $a$).*

*Démonstration.* Selon la supposition et le théorème 7.6.6

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + r_f(x)$$

avec

$$\lim_{x \to a} \frac{r_f(x)}{x-a} = 0$$

De plus

$$g(y) = g(b) + g'(b)(y-b) + r_g(y)$$

avec

$$\lim_{y \to b} \frac{r_g(y)}{y-b} = 0$$

En remplaçant les occurrences de $y$ par $f(x)$ et de $b$ par $f(a)$ nous obtenons :

$$g(f(x)) = g(f(a)) + g'(f(a))(f(x) - f(a)) + r_g(f(x))$$

En remplaçant $f(x)$ par $f(a) + f'(a)(x-a) + r_f(x)$ on obtient :

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(a)) + g'(f(a))\left[(f(a) + f'(a)(x-a) + r_f(x) - f(a)\right] + r_g(f(x)) \\ &= g(f(a)) + g'(f(a))\left[f'(a)(x-a) + r_f(x)\right] + r_g(f(x)) \\ &= g(f(a)) + g'(f(a))f'(a)(x-a) + g'(f(a))r_f(x) + r_g(f(x)). \end{aligned}$$

Avec $\beta := g'(f(a))f'(a)$ et $r(x) := g'(f(a))r_f(x) + r_g(f(x))$ :

$$g(f(x)) = g(f(a)) + \beta(x-a) + r(x)$$

Selon le théorème 7.6.6, on peut affirmer $\beta = \frac{d}{da}g(f(a))$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} \frac{r(x)}{x-a} = 0$. Nous devons encore montrer que $\lim\limits_{x \to a} \frac{r(x)}{x-a} = 0$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} \frac{r(x)}{x-a} &= \lim_{x \to a} \left( \frac{g'(f(a))r_f(x) + r_g(y)}{x-a} \right) \\ &= \lim_{x \to a} \frac{g'(f(a))r_f(x)}{x-a} + \lim_{x \to a} \frac{r_g(f(x))}{x-a} \\ &= g'(f(a)) \lim_{x \to a} \frac{r_f(x)}{x-a} + 0 \\ &= g'(f(a))0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\lim\limits_{x \to a} \frac{r_g(f(x))}{x-a} = 0$ est correct parce que pour $x \to a$ la valeur de fonction $f(x) = y$ tend vers $b$ ($f$ est continue). Puisque pour $y \to b$, le terme $\frac{r_g(y)}{y-b}$ tend vers 0, la proposition est correcte.

Ainsi $\beta = \frac{d}{da}g(f(a))$ et puisque $\beta = g'(f(a))f'(a)$,

$$\frac{d}{da}g(f(a)) = g'(f(a))f'(a).$$

□

On peut mémoriser la règle de la chaîne par le mot d'ordre : dérivée extérieure fois dérivée intérieure.

**Exemple 8.1.5.**

$$\frac{d}{dx}(5x^2-2)^2 = 2(5x^2-2)10x = 100x^3 - 40x$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(5x^2-2x)^3 &= 3(5x^2-2x)^2(10x-2)\\ &= 750x^5 - 750x^4 + 240x^3 - 24x^2\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}(x^2+2)^{100} = 100(x^2+2)^{99}2x$$

$\Diamond$

**Théorème 8.1.6.**

$$\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x$$

*Démonstration.* Nous reprenons la définition de $e^x$ :

$$e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

pour $n \in \mathbb{N}$ et $n! := n\,(n-1)\,(n-2) \cdot ... \cdot 1$ (On peut relever que pour $x = 1$ : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ - voir définition de $e$). Ainsi la définition de $e^x$ est compatible avec la définition de $e$). $e^x$ est pour chaque $x$ une somme infinie. En dérivant les termes de la somme

$$\frac{x^0}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}....$$

nous obtenons (car $x^0 = 1$ ; $0! = 1$ et $\frac{1}{1!} = \frac{x^0}{0!}$) :

$$\begin{aligned}&0 + \frac{1}{1!} + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + .. + \frac{nx^{n-1}}{n!} + ..\\ &= 0 + \frac{1}{1!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + .. + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + ..\\ &= \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}....\\ &= e^x\end{aligned}$$

$\square$

**Théorème 8.1.7.**

$$\frac{d}{dx}\left(a^x\right) = a^x \ln a \ \textit{(pour } a > 0)$$

*Démonstration.* Nous montrons d'abord : $a^x = e^{x \ln a}$.
Car

$$\ln a^x = x \ln a$$

et

$$\ln e^{x \ln a} = x \ln a \ln e = x \ln a$$

$\Longrightarrow$

$$a^x = e^{x \ln a}$$

Ainsi et par le théorème 8.1.6 :

$$\frac{d}{dx}\left(a^x\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{x \ln a}\right) = \ln a \cdot e^{x \ln a} = a^x \ln a$$

□

**Théorème 8.1.8.** *Supposons que $f^{-1}$ soit la fonction réciproque de $f$ et que $f(x) = y$. On peut affirmer pour $\frac{d}{dx}f(x) \neq 0$*

$$\frac{d}{dy}f^{-1}(y) = \frac{1}{\frac{d}{dx}f(x)}$$

*Démonstration.* Nous constatons : $f^{-1}(f(x)) = x$ pour tout $f$ avec une fonction réciproque (voir théorème 4.2.21, page 119)
En dérivant l'équation $f^{-1}(f(x)) = x$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(f^{-1}(f(x))\right) &= \frac{d}{dx}x \\ &= 1\end{aligned}$$

et avec la règle de la chaîne

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(f^{-1}(f(x))\right) &= \frac{d}{df(x)}f^{-1}\left(f(x)\right) \cdot \frac{d}{dx}f(x) \\ &= \frac{d}{dy}f^{-1}(y) \cdot \frac{d}{dx}f(x).\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\frac{d}{dy}f^{-1}(y) \cdot \frac{d}{dx}f(x) = 1$$

et

$$\frac{d}{dy}f^{-1}(y) = \frac{1}{\frac{d}{dx}f(x)}.$$

□

**Exemple 8.1.9.** *Supposons $f(x) = ax + b$; en dérivant*

$$\frac{d}{dy}f^{-1}(y) = \frac{1}{\frac{d}{dx}f\left(x\right)} = \frac{1}{a}$$

*et*

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(ax + b) = a$$

◊

D'autres exemples suivront dans les démonstrations de théorèmes suivants :

**Théorème 8.1.10.**

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\sqrt[n]{x}\right) &= \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{n}}\right)\\ &= \frac{1}{n}x^{\left(\frac{1}{n}-1\right)}\\ &= \frac{1}{n}\sqrt[n]{x^{1-n}} \quad \textit{(pour } y>0)\end{aligned}$$

*Démonstration.* $\sqrt[n]{y} = x$ est la fonction réciproque de $y = x^n$ (pour $y \geq 0$)
Nous obtenons :

$$\frac{d}{dy}f^{-1}(y) = \frac{1}{\frac{d}{dx}x^n} = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{y}^{n-1}\right)} = \frac{1}{n}\sqrt[n]{y}^{1-n} = \frac{1}{n}y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1}$$

(pour $x > 0$). Le théorème en résulte en remplaçant $y$ par $x$. □

**Exemple 8.1.11.**

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\sqrt[5]{20x}\right) &= \frac{d}{dx}\left(20^{\frac{1}{5}}\cdot x^{\frac{1}{5}}\right)\\ &= 20^{\frac{1}{5}}\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{5}}\right) = 20^{\frac{1}{5}}\frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1}\\ &= 20^{\frac{1}{5}}\frac{1}{5}x^{-1}x^{\frac{1}{5}} = 20^{\frac{1}{5}}\frac{1}{5x}x^{\frac{1}{5}}\\ &= \frac{\sqrt[5]{20x}}{5x}\end{aligned}$$

*(Dans de tels exemples nous n'allons pas réclamer une réponse spécifique (simplifiée) : $20^{\frac{1}{5}}\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$ serait correct).* ♢

**Exemple 8.1.12.**

$$\frac{d}{dx}(\sqrt[4]{x}) = \frac{d}{dx}x^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4}x^{-1}x^{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt[4]{x}}{4x}$$

♢

**Théorème 8.1.13.**

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{m}{n}}\right) = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1} \quad \textit{(pour } x>0)$$

*Démonstration.* $x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$. A l'aide de la règle de la chaîne :

$$\frac{d}{dx}\left(\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m\right) = m\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1}\cdot\left(\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}\right) = \frac{m}{n}x^{\frac{1}{n}(m-1)+\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$$

□

**Exemple 8.1.14.**

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt[4]{x^5}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{5}{4}}\right) = \frac{5}{4}x^{\frac{5}{4}-1} = \frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}} = \frac{5}{4}\sqrt[4]{x}$$

♢

**Exemple 8.1.15.**

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{6}\sqrt[5]{x}\right) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{6}x^{\frac{1}{5}}\right) = \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1}\\ &= \frac{1}{10}x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{10\sqrt[5]{x^4}} = \frac{1}{10\left(\sqrt[5]{x}\right)^4}\end{aligned}$$

◊

**Théorème 8.1.16.**

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \quad \textit{(pour } x > 0\textit{)}.$$

*Démonstration.* $\ln y$ est la fonction réciproque de $e^x = \exp x = y$. Par la règle introduite on obtient :

$$\frac{d}{dy}\ln y = \frac{1}{\frac{d}{dx}e^x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$

□

**Théorème 8.1.17.**

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x\ln a} \quad \textit{(pour } x > 0, a > 0, a \neq 1\textit{)}$$

*Démonstration.* $x = \log_a y$ est la fonction réciproque de $y = a^x$. On obtient alors :

$$\frac{d}{dy}\log_a y = \frac{1}{\frac{d}{dx}(a^x)} = \frac{1}{a^x \cdot \ln a} = \frac{1}{y\ln a}$$

□

**Théorème 8.1.18.** *Pour $z \in \mathbb{R}$ et $x > 0$*

$$\frac{d}{dx}x^z = zx^{z-1}$$

*Démonstration.* On peut affirmer $x^z = e^{\ln x^z} = e^{z\ln x}$. Avec la règle de la chaîne on peut déduire :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}e^{z\ln x} &= e^{z\ln x}\left(\frac{z}{x}\right)\\ &= x^z\left(\frac{z}{x}\right)\\ &= x^z x^{-1} z\\ &= zx^{z-1}\end{aligned}$$

□

**Théorème 8.1.19.**

$$\frac{d}{dx}\left(g(x)^{h(x)}\right) = g(x)^{h(x)}\left[h'(x)\cdot\ln g(x) + h(x)\cdot\frac{g'(x)}{g(x)}\right] \quad \textit{(pour } g(x) > 0\textit{)}$$

*Démonstration.* D'abord nous montrons : $g(x)^{h(x)} = e^{h(x)\ln g(x)}$
Car :

$$\ln\left(g(x)^{h(x)}\right) = h(x)\ln g(x)$$

et :

$$\ln\left(e^{h(x)\ln g(x)}\right) = h(x)\ln g(x)\ln e = h(x)\ln g(x)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(g(x)^{h(x)}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{h(x)\ln g(x)}\right) &= \\ &= e^{h(x)\ln g(x)}\cdot\left(h'(x)\ln g(x) + h(x)\frac{g'(x)}{g(x)\ln e}\right) \\ &= g(x)^{h(x)}\cdot\left(h'(x)\ln g(x) + h(x)\frac{g'(x)}{g(x)}\right).\end{aligned}$$

□

**Exemple 8.1.20.**

$$\frac{d}{dx}\left(2x^{4x}\right) = 2x^{4x}\left[4\cdot\ln(2x) + 4x\cdot\frac{2}{2x}\right] = 2x^{4x}\left[4\cdot\ln(2x)+4\right]$$

◊

**Exemple 8.1.21.**

$$\frac{d}{dx}\left((2x^2-3)^{4x+5}\right) = (2x^2-3)^{4x+5}\left[4\cdot\ln(2x^2-3) + (4x+5)\cdot\frac{4x}{2x^2-3}\right]$$

◊

## 8.2 Exemples d'application

**Exemple 8.2.1.** *logarithme et règle de la chaîne :*

$$\frac{d}{dx}\log_{10}(17x^2+14x-8) = \underbrace{\frac{1}{(17x^2+14x-8)\ln 10}}_{\textit{dér. ext.}}\underbrace{(34x+14)}_{\textit{dér. int.}}$$

◊

**Exemple 8.2.2.** *logarithme et règle de la chaîne :*

$$\frac{d}{dx}\ln(17x^2+14x-8) = \frac{1}{(17x^2+14x-8)}(34x+14)$$

◊

**Exemple 8.2.3.** *fonction exponentielle (base e) et règle de la chaîne :*

$$\frac{d}{dx}e^{2x^2+3x+10} = \underbrace{e^{2x^2+3x+10}}_{\textit{dér. ext.}}\underbrace{(4x+3)}_{\textit{dér. int.}}$$

$\Diamond$

**Exemple 8.2.4.** *fonction exponentielle (base e) et règle de la chaîne (dérivée de la fonction de répartition de la distribution exponentielle) :*

$$\frac{d}{dx}(1-e^{-\lambda x}) = -e^{-\lambda x}\,(-\lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \;\; (\textit{pour } \lambda > 0).$$

$\Diamond$

**Exemple 8.2.5.** *fonction exponentielle (base a) et règle de la chaîne*

$$\frac{d}{dx}\left(3^{5x^2+2x}\right) = \underbrace{3^{5x^2+2x}\ln 3}_{\textit{dér. ext.}}\underbrace{(10x+2)}_{\textit{dér. int.}}$$

$\Diamond$

**Exemple 8.2.6.** *fonction exponentielle (base a) et règle de la chaîne*

$$\frac{d}{dx}5^{3x^5-2x^2+2} = 5^{3x^5-2x^2+2}\ln 5\left(15x^4-4x\right)$$

$\Diamond$

**Exemple 8.2.7.** *fonction racine et règle de la chaîne*

$$\frac{d}{dx}\sqrt[5]{16x^3+14x^2+8x+3} = \underbrace{\frac{1}{5}\left(16x^3+14x^2+8x+3\right)^{-\frac{4}{5}}}_{\textit{dér. ext.}}\underbrace{\left(48x^2+28x+8\right)}_{\textit{dér. int.}}$$

$\Diamond$

**Exemple 8.2.8.** *fonction racine et règle de la chaîne*

$$\frac{d}{dx}\sqrt[7]{6x^4+4x^3+8x^2+3x} = \frac{1}{7}\left(6x^4+4x^3+8x^2+3x\right)^{-\frac{6}{7}}\left(24x^3+12x^2+16x+3\right)$$

$\Diamond$

**Exemple 8.2.9.** *application répétée de la règle de la chaîne*

$$\frac{d}{dx}\log_3\sqrt[4]{4x^2+5x} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt[4]{4x^2+5x}\ln 3}}_{\textit{dér. ext.}}\underbrace{\underbrace{\frac{1}{4}\left(4x^2+5x\right)^{-\frac{3}{4}}}_{\textit{dér. ext.}}\underbrace{(8x+5)}_{\textit{dér. int.}}}_{\textit{dér. int.}}$$

$\Diamond$

**Exemple 8.2.10.**

$$\frac{d}{dx}\log_4\sqrt[5]{x^2+5x^3}=\frac{1}{\sqrt[5]{x^2+5x^3}\ln 4}\frac{1}{5}\left(x^2+5x^3\right)^{-\frac{4}{5}}\left(2x+15x^2\right)$$

◊

**Exemple 8.2.11.**

$$\frac{d}{dx}\sqrt[3]{\ln\left(7x^2+4x\right)}=\underbrace{\frac{1}{3}\left(\ln\left(7x^2+4x\right)\right)^{\frac{-2}{3}}}_{\textit{dér. ext.}}\underbrace{\underbrace{\frac{1}{7x^2+4x}}_{\textit{dér. ext.}}\underbrace{(14x+4)}_{\textit{dér. int.}}}_{\textit{dér. int.}}$$

◊

**Exemple 8.2.12.** $\exp x := e^x$; $\exp_a x = a^x$

$$\frac{d}{dx}\exp_5\left(\log_4\left(5x^2+2x\right)\right)=\underbrace{\exp_5\left(\log_4\left(5x^2+2x\right)\right)\ln 5}_{\textit{dér. ext.}}\underbrace{\underbrace{\frac{1}{(5x^2+2x)\ln 4}}_{\textit{dér. ext.}}\underbrace{(10x+2)}_{\textit{dér. int.}}}_{\textit{dér. int.}}$$

◊

**Exemple 8.2.13.**

$$\frac{d}{dx}\ln\left(\exp_3\sqrt[4]{7x^2+4x}\right)=\frac{1}{\exp_3\sqrt[4]{7x^2+4x}}\exp_3\sqrt[4]{7x^2+4x}\ln 3\cdot\frac{1}{4}\left(7x^2+4x\right)^{-\frac{3}{4}}(14x+4)$$

◊

**Exemple 8.2.14.**

$$\frac{d}{dx}\frac{\sqrt[3]{\ln\left(5x^2\right)}}{\exp_4\left(x^2\right)}=\frac{\frac{1}{3}\left(\ln\left(5x^2\right)\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{1}{5x^2}10x\cdot\exp_4\left(x^2\right)-\sqrt[3]{\ln\left(5x^2\right)}\cdot\exp_4\left(x^2\right)\ln 4\cdot 2x}{\left(\exp_4\left(x^2\right)\right)^2}$$

◊

**Exemple 8.2.15.**

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{\ln\left(5x^2\right)}\cdot\exp_4\left(x^2\right)\right)=\frac{1}{3}\left(\ln\left(5x^2\right)\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{1}{5x^2}10x\cdot\exp_4\left(x^2\right)+\sqrt[3]{\ln\left(5x^2\right)}\cdot\exp_4\left(x^2\right)\ln 4\cdot 2x$$

◊

## 8.3 Résumé

$g$ et $h$ sont des fonctions réelles avec une dérivée continue, $a \in \mathbb{R}$.

| | | $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | polynômes | $x^n$ | $nx^{n-1}; \quad n \in \mathbb{N}$ |
| 2 | constante | $a$ | $0$ |
| 3 | produit avec constante | $ag(x)$ | $ag'(x)$ |
| 4 | somme de fonctions | $g(x)+h(x)$ | $g'(x)+h'(x)$ |
| 5 | produit de deux fonctions | $g(x)\cdot h(x)$ | $(g'(x)\cdot h(x))+(g(x)\cdot h'(x))$ |
| 6 | quotient de deux fonctions | $\frac{g(x)}{h(x)}$ | $\frac{\left(g'(x)\cdot h(x)\right)-\left(g(x)\cdot h'(x)\right)}{[h(x)]^2}$ $(h(x)\neq 0)$ |
| 7 | règle de la chaîne | $g(h(x))$ | $g'(h(x))\cdot h'(x)$ |
| 8 | fonction exponentielle (base $e$) | $e^x$ | $e^x$ |
| 9 | fonction exponentielle (base $a$) | $a^x$ | $a^x \ln a \quad (a>0)$ |
| 10 | fonction logarithme (base $e$) | $\ln x$ | $\frac{1}{x} \quad (x>0)$ |
| 11 | fonction logarithme (base $a$) | $\log_a x$ | $\frac{1}{x\cdot \ln a}$ $(a>0, x>0)$ |
| 12 | fonction exponentielle ($g>0$) | $g(x)^{h(x)}$ | $g(x)^{h(x)}\cdot\left[h'(x)\cdot\ln g(x)+h(x)\cdot\frac{g'(x)}{g(x)}\right]$ |
| 13 | fonction racine | $\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}$ | $\frac{m}{n}x^{\left(\frac{m}{n}-1\right)}=\frac{m}{n}x^{\left(\frac{m-n}{n}\right)}$ $(x>0, \frac{m}{n}\in\mathbb{Q})$ |
| 14 | exposant réel $z$ en $x^z$ $(x>0)$ | $x^z$ | $zx^{z-1}$ |

### 8.3.1 Exercices

Dériver les fonctions suivantes sur leur domaine de définition

1. $f(x)=\frac{1}{x^2}$
2. $f(x)=1$
3. $f(x)=\sqrt{x}(x>0)$
4. $f(x)=\frac{1}{\sqrt[7]{x^5}}$
5. $f(x)=x^{\ln 2}$
6. $f(x)=5x^{20}$
7. $f(x)=-7e^3$
8. $f(x)=0.5\ln x$
9. $f(x)=\frac{7}{\sqrt[8]{9x^3}}$
10. $f(x)=4x^7-x+2$
11. $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+c$
12. $f(x)=\sqrt{8}+2x^{\sqrt{3}}-\ln 2$
13. $f(t)=(\ln t)^2$
14. $f(x)=\frac{4x^2+1}{z^4-1}$
15. $f(z)=\frac{e^z}{z^4+1}$
16. $f(x)=\left(5x^2-3x^3\right)5x$
17. $f(x)=\frac{3x^2-4x}{(5x^2-4)^7}$
18. $f(x)=\sqrt[7]{(x-2x^2+4)^4}$
19. $f(t)=\frac{t^2}{\ln t}$
20. $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{3}+\ln 2}$
21. $f(x)=\frac{\ln 4+\sqrt{5}}{2x^7}$
22. $f(z)=\frac{29}{\sqrt[7]{z^{15}}}$
23. $f(t)=4(2t^3-1)\sqrt{t^5}$
24. $f(x)=4x^3y\sqrt{y}$
25. $h(p)=\frac{4p^2+1}{(p^2-1)(2p^4+p)}$
26. $k(x)=k_3x^3+k_2x^2+k_1x+\frac{k_0}{x}$
27. $u(x)=x^2\cdot\frac{2v-x}{5v+x}$
28. $p(u)=\frac{u^2\cdot\ln u}{e^u}$
29. $b(x)=e^x-\frac{1}{e^x}$
30. $c(t)=\frac{e^t+1}{e^t-1}$
31. $t(b)=\frac{2\ln b}{2b^2+e^b}$
32. $f(x)=(x^2+e^x)^{100}$
33. $f(x)=\sqrt{3x^2+x}$
34. $f(x)=e^{\sqrt{x}}$
35. $f(x)=\ln(x^2+4)$
36. $f(x)=0.5(4x^7-3x^5)^{64}$
37. $g(y)=\sqrt[7]{y^2-y^7}$
38. $p(u)=e^{-2u}$
39. $k(t)=5\ln(\ln(t))\sqrt[3]{\ln 7}$
40. $N(y)=20e^{\frac{-17}{y}}$

41. $C(I) = \sqrt[3]{21}e^{-1^2}$
42. $k(x) = x^n e^{-n}$
43. $P(W) = \left(\ln \frac{W^2+1}{e^3}\right)^{20}$
44. $f(x) = x^3 3^x$
45. $h(z) = 2^{\ln z}(\ln z)^{10}$
46. $f(x) = \frac{r^{\sqrt{x}}+\left(\sqrt{2}\right)^{1-x}}{\sqrt{x}}$
47. $k(t) = t^{\sqrt{t}}$
48. $p(v) = v^{\ln v}$
49. $C(y) = (\ln y)^{\ln y}$
50. $f(x) = \log_7 \frac{x^2+4}{x^4+2}$
51. $f(x) = \ln\left(\frac{4x^2+5x}{6x^5-7x^2}\right)$
52. $f(x) = \sqrt[3]{\log_5\left(3x^3+2x^7\right)}$
53. $f(x) = \log_3\left(5^{9x^2+8x^3}\right)$
54. $f(x) = 5^{\sqrt[3]{5x^2+17x}}$
55. $f(x) = 3^{\log_4\left(5x^4 \ln x\right)}$
56. $f(x) = \sqrt[5]{7x^3+4x^5-4}$
57. $g(x) = \log_7\left(18x^4+6x^2\right)$
58. $h(x) = e^{14x^2+18x}$
59. $k(x) = 4x^2 \cdot 5^{2x+4}$
60. $l(x) = \frac{x^5+4x+\ln x}{4x^4}$
61. $m(x) = \ln\left(\sqrt{4x^{18}+14x^7}\right)$

### 8.3.2 Solutions

1. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{-2}\right) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$
2. $\frac{d}{dx}1 = 0$ (1 est une constante)
3. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
4. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt[7]{x^5}}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{-\frac{5}{7}}\right) = -\frac{5}{7}x^{-\frac{12}{7}} = -\frac{5}{7\sqrt[7]{(x^{12})}} = -\frac{5}{7x\sqrt[7]{(x^5)}}$
5. $\frac{d}{dx}\left(x^{\ln 2}\right) = x^{\ln 2}\left(0\cdot \ln x + \ln 2\cdot\frac{1}{x}\right) = x^{\ln 2}\cdot x^{-1}\ln 2 = x^{\ln 2 - 1}\ln 2$
   ($\ln 2$ est une constante ; c'est pourquoi $\frac{d}{dx}(\ln 2) = 0$. Ou plus simplement : $\frac{d}{dx}\left(x^{\ln 2}\right) = \ln 2 x^{\ln 2-1}$ (à l'aide de la règle $\frac{d}{dx}\left(x^y\right) = yx^{y-1}$)
6. $\frac{d}{dx}\left(5x^{20}\right) = 100x^{19}$
7. $\frac{d}{dx}\left(-7e^3\right) = 0$ $\quad$ ($-7e^3 = -140.60$ est une constante).
8. $\frac{d}{dx}(0.5\ln x) = 0.5\frac{d}{dx}(\ln x) = 0.5\cdot\frac{1}{x} = \frac{0.5}{x}$
9. $\frac{d}{dx}\left(\frac{7}{\sqrt[8]{9x^3}}\right) = \frac{d}{dx}\left(7\cdot\left(9x^3\right)^{-\frac{1}{8}}\right) = \frac{d}{dx}\left(7\cdot 9^{-\frac{1}{8}}x^{-\frac{3}{8}}\right) = 7\cdot 3^{-\frac{2}{8}}\cdot - \frac{3}{8}x^{-\frac{11}{8}} =$
   $-7\cdot 3^{-\frac{1}{4}}\frac{3}{8}x^{-\frac{11}{8}} = -3^{-\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{4}{4}}\frac{7}{8}x^{-\frac{11}{8}} = -3^{\frac{3}{4}}\frac{7}{8}x^{-\frac{11}{8}}$
10. $\frac{d}{dx}\left(4x^7 - x + 2\right) = 28x^6 - 1$
11. $nax^{n-1} + (n-1)\,bx^{(n-1)-1} = ax^{n-1}n + bx^{n-2}n - bx^{n-2}$
12. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{8} + 2x^{\sqrt{3}} - \ln 2\right) = \frac{d}{dx}\left(2x^{\sqrt{3}}\right)$ ($\sqrt{8}$ et $\ln 2$ sont des constantes)
    $\frac{d}{dx}\left(2x^{\sqrt{3}}\right) = 2\sqrt{3}\cdot x^{\sqrt{3}-1}$
13. $\frac{d}{dt}(\ln t)^2 = 2\ln t\cdot\frac{d}{dt}(\ln t) = 2\ln t\cdot\frac{1}{t} = 2\frac{\ln t}{t}$
14. $\frac{d}{dx}\left(\frac{4x^2+1}{z^4-1}\right) = \frac{1}{z^4-1}\cdot\frac{d}{dx}\left(4x^2+1\right) = \frac{1}{z^4-1}\cdot 8x = \frac{8x}{z^4-1}$
15. $\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{z^4+1}\right) = \frac{e^z\left(z^4+1\right)-\left(e^z 4z^3\right)}{\left(z^4+1\right)^2} = e^z\frac{z^4+1-4z^3}{\left(z^4+1\right)^2}$
16. $\frac{d}{dx}\left(\left(5x^2-3x^3\right)5x\right) = \left(10x - 9x^2\right)5x + \left(5x^2-3x^3\right)5 = 75x^2 - 60x^3$
17. $\frac{d}{dx}\frac{3x^2-4x}{\left(5x^2-4\right)^7} = \frac{(6x-4)\left(5x^2-4\right)^7-\left(3x^2-4x\right)7\left(5x^2-4\right)^6 10x}{\left(5x^2-4\right)^{14}}$
18. $\frac{d}{dx}\sqrt[7]{\left(x-2x^2+4\right)^4} = \frac{d}{dx}\left(x-2x^2+4\right)^{\frac{4}{7}} = \frac{4}{7}\left(x-2x^2+4\right)^{\frac{4}{7}-1}(1-4x) =$
    $\frac{4}{7}\left(x-2x^2+4\right)^{-\frac{3}{7}}(1-4x)$
19. $\frac{d}{dt}\left(\frac{t^2}{\ln t}\right) = \frac{2t\ln t - t^2\frac{1}{t}}{(\ln t)^2} = t\frac{2\ln t - 1}{\ln^2 t}$ $\quad$ $\left[\ln^2 t := (\ln t)^2\right]$
20. $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{\sqrt{3}+\ln 2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}+\ln 2}\frac{d}{dx}\left(x^2\right) = \frac{1}{\sqrt{3}+\ln 2}\cdot 2x = \frac{2x}{\sqrt{3}+\ln 2}$

21. $\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln 4+\sqrt{5}}{2x^7}\right)=\frac{\ln 4+\sqrt{5}}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^7}\right)=\frac{\ln 4+\sqrt{5}}{2}\frac{d}{dx}\left(x^{-7}\right)=$
$\frac{\ln 4+\sqrt{5}}{2}\cdot-7x^{-8}=-\frac{7(\ln 4+\sqrt{5})}{2x^8}$
voie alternative :
$\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln 4+\sqrt{5}}{2x^7}\right)=\frac{0\cdot 2x^7-(\ln 4+\sqrt{5})\cdot 14x^6}{4x^{14}}=-\frac{\left(\ln 4+\sqrt{5}\right)14x^6}{4x^{14}}=$
$-\frac{\left(\ln 4+\sqrt{5}\right)\cdot 7}{2x^8}$

22. $\frac{d}{dz}\left(\frac{29}{\sqrt[7]{z^{15}}}\right)=29\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\sqrt[7]{z^{15}}}\right)=29\frac{d}{dz}\left(z^{-\frac{15}{7}}\right)=-29\frac{15}{7}\left(z^{-\frac{22}{7}}\right)=-\frac{62.14}{\left(\sqrt[7]{z}\right)^{22}}$

23. $\frac{d}{dt}\left(4(2t^3-1)\sqrt{t^5}\right)=\frac{d}{dt}\left(8t^3\sqrt{t^5}-4\sqrt{t^5}\right)=\frac{d}{dt}\left(8t^3t^{\frac{5}{2}}-4t^{\frac{5}{2}}\right)=$
$\frac{d}{dt}\left(8t^{\frac{11}{2}}-4t^{\frac{5}{2}}\right)=\frac{11}{2}8t^{\frac{9}{2}}-\frac{5}{2}4t^{\frac{3}{2}}=11\cdot 4t^{\frac{9}{2}}-5\cdot 2t^{\frac{3}{2}}=$
$2t^{\frac{3}{2}}\left(22t^{\frac{6}{2}}-5\right)=\ 2t^{\frac{3}{2}}\left(22t^3-5\right)=2t\sqrt{t}\left(22t^3-5\right)$

24. $\frac{d}{dx}\left(4x^3y\sqrt{y}\right)=12x^2\left(\sqrt{y}\right)^3$ (la variable est $x$).
dériver par rapport à la variable $y$ : $\frac{d}{dy}\left(4x^3y\sqrt{y}\right)=\frac{d}{dy}\left(4x^3y^{\frac{3}{2}}\right)=4x^3\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}=6x^3\sqrt{y}$

25. $\frac{d}{dp}\left(\frac{4p^2+1}{(p^2-1)(2p^4+p)}\right)=$
$\frac{\left[8p\left((p^2-1)(2p^4+p)\right)\right]-\left[\left(4p^2+1\right)\left(2p(2p^4+p)+(p^2-1)(8p^3+1)\right)\right]}{((p^2-1)(2p^4+p))^2}$
Une simplification superflue dans notre contexte pourrait être :
$-\frac{32p^7+4p^4-4p^5+7p^2-8p^3-1}{(p^2-1)^2p^2(2p^3+1)^2}$

26. $\frac{d}{dx}\left(k_3x^3+k_2x^2+k_1x+\frac{k_0}{x}\right)=3k_3x^2+2k_2x+k_1+\frac{0x-k_0\cdot 1}{x^2}$
$3k_3x^2+2k_2x+k_1+\frac{-k_0}{x^2}=\frac{3k_3x^4+2k_2x^3+k_1x^2-k_0}{x^2}$
(le dernier pas n'est pas nécessaire dans ce contexte).

27. $\frac{d}{dx}\left(x^2\cdot\frac{2v-x}{5v+x}\right)=2x\cdot\frac{2v-x}{5v+x}+x^2\frac{(-1)(5v+x)-(2v-x)\cdot 1}{(5v+x)^2}=$
$2x\cdot\frac{2v-x}{5v+x}+x^2\frac{-(5v+x)-(2v-x)}{(5v+x)^2}=2x\cdot\frac{2v-x}{5v+x}+x^2\frac{-5v-x-2v+x}{(5v+x)^2}=$
$2x\cdot\frac{2v-x}{5v+x}+x^2\frac{-7v}{(5v+x)^2}=-x\frac{-20v^2+13vx+2x^2}{(5v+x)^2}$
(le dernier pas n'est pas nécessaire dans ce contexte).

28. $\frac{d}{du}\left(\frac{u^2\cdot\ln u}{e^u}\right)=\frac{\frac{d}{du}\left(u^2\cdot\ln u\right)\cdot e^u-\left(u^2\cdot\ln u\right)e^u}{e^{2u}}=\frac{\frac{d}{du}\left(u^2\cdot\ln u\right)-\left(u^2\cdot\ln u\right)}{e^u}$
$=\frac{\left(2u\cdot\ln u+u^2\frac{1}{u}\right)-\left(u^2\cdot\ln u\right)}{e^u}=\frac{\left(2u\cdot\ln u+u^2\frac{1}{u}\right)-\left(u^2\cdot\ln u\right)}{e^u}=\frac{2u\ln u+u-u^2\ln u}{e^u}=$
$2u\left(\ln u\right)e^{-u}+ue^{-u}-u^2\left(\ln u\right)e^{-u}$

29. $\frac{d}{dx}\left(e^x-\frac{1}{e^x}\right)=e^x-\frac{d}{dx}\left(e^{-x}\right)=e^x-\left[e^{-x}\cdot(-1\cdot\ln e+-x\frac{0}{e})\right]=$
$e^x-e^{-x}\cdot(-1\cdot 1)=\ e^x+e^{-x}$

30. $\frac{d}{dt}\left(\frac{e^t+1}{e^t-1}\right)=\frac{e^t(e^t-1)-(e^t(e^t+1)}{(e^t-1)^2}=-2\frac{e^t}{(e^t-1)^2}$

31. $\frac{d}{db}\left(\frac{2\ln b}{2b^2+e^b}\right)=\frac{2\frac{1}{b}(2b^2+e^b)-2(\ln b)(4b+e^b)}{(2b^2+e^b)^2}=$
$-2\frac{-2b^2-e^b+4(\ln b)b^2+(\ln b)be^b}{b(2b^2+e^b)^2}$ (le dernier pas n'est pas nécessaire dans ce contexte).

32. $\frac{d}{dx}(x^2+e^x)^{100}=100(x^2+e^x)^{99}\cdot(2x+e^x)$

33. $\frac{d}{dx}\sqrt{3x^2+x}=\frac{d}{dx}\left(3x^2+x\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(3x^2+x\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(6x+1)=\frac{(6x+1)}{2\sqrt{(x(3x+1))}}$

34. $\frac{d}{dx}e^{\sqrt{x}}=e^{\sqrt{x}}\left[\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)\cdot\ln e+\sqrt{x}\cdot\frac{0}{e}\right]$
$=e^{\sqrt{x}}\left[\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\cdot 1+0\right]=e^{\sqrt{x}}\left[\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right]=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$

35. $\frac{d}{dx}\ln(x^2+4)=\frac{2x}{(x^2+4)\ln e}=\frac{2x}{x^2+4}$

36. $\frac{d}{dx}\left(0.5(4x^7-3x^5)^{64}\right)=32(4x^7-3x^5)^{63}\cdot(28x^6-15x^4)=$
$32x^{5\cdot 63}(4x^2-3)^{63}\cdot x^4(28x^2-15)=32x^{319}(4x^2-3)^{63}(28x^2-15)$

37. $\frac{d}{dy}\sqrt[7]{y^2-y^7} = \frac{d}{dy}\left(y^2-y^7\right)^{\frac{1}{7}} = \frac{1}{7}\left(y^2-y^7\right)^{-\frac{6}{7}}\cdot\left(2y-7y^6\right) = \frac{y(2-7y^5)}{7\left(\sqrt[7]{(y^2-y^7)}\right)^6}$
38. $\frac{d}{du}e^{-2u} = e^{-2u}\left[-2\cdot\ln e + -2u\frac{0}{e}\right] = e^{-2u}\left[-2\cdot 1\right] = -2e^{-2u}$
39. $\frac{d}{dt}\left(5\ln(\ln t)\right) = 5\frac{1}{\ln t)}\cdot\frac{d}{dt}(\ln t) = 5\frac{1}{\ln t}\frac{1}{t} = \frac{5}{t\ln t}$
    $\frac{d}{dt}\sqrt[3]{\ln 7} = 0$ (est une constante). Avec cela $\frac{d}{dt}\left(5\ln(\ln t)\sqrt[3]{\ln 7}\right) = \frac{5\sqrt[3]{\ln 7}}{t\ln t}$
40. $\frac{d}{dy}\left(20e^{\frac{-17}{y}}\right) = 20\frac{d}{dy}\left(e^{\frac{-17}{y}}\right)$
    $\frac{d}{dy}\left(e^{\frac{-17}{y}}\right) = e^{\frac{-17}{y}}\left[\frac{17}{y^2}\cdot\ln e + \frac{-17}{y}\frac{0}{e}\right] = \frac{17}{y^2}e^{\frac{-17}{y}} \Longrightarrow$
    $20\left(\frac{17}{y^2}e^{\frac{-17}{y}}\right) = \frac{340}{y^2}e^{-\frac{17}{y}}$
41. $\frac{d}{dI}\left(\sqrt[3]{21}e^{-1^2}\right) = 0$ (constante)
42. $\frac{d}{dx}\left(x^n e^{-n}\right) = x^{n-1}ne^{-n}$
    $e^{-n}$ est dans ce contexte une constante).
43. $\frac{d}{dW}\left(\ln\frac{W^2+1}{e^3}\right)^{20} = 20\left(\ln\left(\frac{W^2+1}{e^3}\right)\right)^{19}\cdot\frac{1}{\frac{W^2+1}{e^3}}\cdot\frac{1}{e^3}2W = 20\left(\ln\left(\frac{W^2+1}{e^3}\right)\right)^{19}\cdot\frac{2W}{W^2+1}$
44. $\frac{d}{dx}\left(x^3\cdot 3^x\right) = 3x^2\cdot 3^x + x^3 3^x\ln 3$
45. $\frac{d}{dz}\left(2^{\ln z}(\ln z)^{10}\right) = \frac{d}{dz}\left(2^{\ln z}\right)\cdot(\ln z)^{10} + 2^{\ln z}\frac{d}{dz}\left((\ln z)^{10}\right)$
    $\frac{d}{dz}\left(2^{\ln z}\right)\cdot(\ln z)^{10} = 2^{\ln z}\left[\frac{1}{z}\ln 2 + \ln z\cdot\frac{0}{2}\right]\cdot(\ln z)^{10} = 2^{\ln z}\frac{1}{z}\ln 2(\ln z)^{10}$
    $2^{\ln z}\frac{d}{dz}\left((\ln z)^{10}\right) = 2^{\ln z}10(\ln z)^9\frac{1}{z} \Longrightarrow$
    $\frac{d}{dz}\left(2^{\ln z}(\ln z)^{10}\right) = 2^{\ln z}\cdot\frac{1}{z}\ln 2\cdot(\ln z)^{10} + 2^{\ln z}\cdot 10\,(\ln z)^9\cdot\frac{1}{z}$
46. $\frac{d}{dx}\frac{r^{\sqrt{x}}+\left(\sqrt{2}\right)^{1-x}}{\sqrt{x}} = \frac{\left[\left(r^{\sqrt{x}}\cdot\ln r\cdot\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)+\sqrt{2}^{1-x}\cdot\ln\sqrt{2}\cdot(-1)\right)\sqrt{x}\right]-\left[r^{\sqrt{x}}+\left(\sqrt{2}\right)^{1-x}\cdot\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)\right]}{x}$
47. $\frac{d}{dt}t^{\sqrt{t}} = t^{\sqrt{t}}\left[\frac{1}{2\sqrt{t}}\ln t + \sqrt{t}\frac{1}{t}\right] = t^{\sqrt{t}}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\ln t + \frac{1}{\sqrt{t}}\right) =$
    $\frac{t^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\left(\ln t + 2\right) = \frac{1}{2}t^{\sqrt{t}-\frac{1}{2}}\left(\ln t + 2\right)$
48. $\frac{d}{dv}v^{\ln v} = v^{\ln v}\left[\frac{1}{v}\ln v + \ln v\frac{1}{v}\right] = 2v^{\ln v}\frac{\ln v}{v}$
49. $\frac{d}{dy}(\ln y)^{\ln y} = (\ln y)^{\ln y}(\frac{1}{y}\ln(\ln y) + \ln y\frac{\frac{1}{y}}{\ln y}) = \frac{1}{y}\ln y^{\ln y}(\ln(\ln y)+1)$
50. $\frac{d}{dx}\log_7\frac{x^2+4}{x^4+2} = \frac{\frac{2x(x^4+2)-(x^2+4)4x^3}{(x^4+2)^2}}{\frac{x^2+4}{x^4+2}\ln 7} = \frac{2x\left(x^4+2\right)-4\left(x^2+4\right)x^3}{(x^4+2)(x^2+4)\ln 7} =$
    $-2x\frac{x^4-2+8x^2}{(x^4+2)(x^2+4)\ln 7}$
51. $\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{4x^2+5x}{6x^5-7x^2}\right) = \frac{1}{\frac{4x^2+5x}{6x^5-7x^2}}\frac{(8x+5)\left(6x^5-7x^2\right)-\left(4x^2+5x\right)\left(30x^4-14x\right)}{(6x^5-7x^2)^2}$
52. $\frac{d}{dx}\sqrt[3]{\log_5\left(3x^3+2x^7\right)} = \frac{1}{3}\left(\log_5\left(3x^3+2x^7\right)\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{1}{(3x^3+2x^7)\ln 5}\left(9x^2+14x^6\right)$
53. $\frac{d}{dx}\log_3\left(5^{9x^2+8x^3}\right) = \frac{1}{5^{9x^2+8x^3}\ln 3}\left(5^{9x^2+8x^3}\ln 5\right)\left(18x+24x^2\right)$
54. $\frac{d}{dx}5^{\sqrt[3]{5x^2+17x}} = 5^{\sqrt[3]{5x^2+17x}}\ln 5\cdot\frac{1}{3}\left(5x^2+17x\right)^{-\frac{2}{3}}(10x+17)$
55. $\frac{d}{dx}3^{\log_4\left(5x^4\ln x\right)} = 3^{\log_4\left(5x^4\ln x\right)}\ln 3\cdot\frac{1}{5x^4\ln x\ln 4}\left(20x^3\ln x + 5x^4\frac{1}{x}\right)$
56. $\frac{d}{dx}\sqrt[5]{7x^3+4x^5-4} = \frac{1}{5}\left(7x^3+4x^5-4\right)^{-\frac{4}{5}}\left(21x^2+20x^4\right)$
57. $\frac{d}{dx}\log_7\left(18x^4+6x^2\right) = \frac{1}{(18x^4+6x^2)\ln 7}\left(72x^3+12x\right)$
58. $\frac{d}{dx}e^{14x^2+18x} = e^{14x^2+18x}(28x+18)$
59. $\frac{d}{dx}4x^2\cdot 5^{2x+4} = 8x5^{2x+4} + 4x^2 5^{2x+4}(\ln 5)\,2$
60. $\frac{d}{dx}\frac{x^5+4x+\ln x}{4x^4} = \frac{\left(5x^4+4+\frac{1}{x}\right)4x^4-\left(x^5+4x+\ln x\right)16x^3}{(4x^4)^2}$
61. $\frac{d}{dx}\ln\left(\sqrt{4x^{18}+14x^7}\right) = \frac{1}{\sqrt{4x^{18}+14x^7}}\frac{1}{2}\left(4x^{18}+14x^7\right)^{-\frac{1}{2}}\left(72x^{17}+98x^6\right)$

## 8.4 Objectifs d'apprentissage

— Arriver à appliquer les règles introduites
— Arriver à résoudre des problèmes du type des exercices.

# Chapitre 9

# Extrema - quelques cas spéciaux

## 9.1 Extrema aux bords d'intervalles

Les fonctions peuvent être - sur un intervalle $I$ aux bords réels - bornées ou pas : une fonction est bornée, s'il existe un $c \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x)| < c$ pour $x \in I$. La fonction n'est pas bornée, si elle tend en un point de $I$ vers l'infini positif ou négatif. Sur un environnement $U\{r\} \cap I$ du bord $r$ de l'intervalle $I$ les fonctions continues peuvent être strictement monotones ou constantes. Si cela est le cas, les fonctions en question ont cette caractéristique sur tous les voisinages de $r$ qui sont des sous-ensembles de $U(r)$. Pour les fonctions bornées et continues sur des intervalles fermés $I = [a, b]$ tel que $a, b \in \mathbb{R}$ on peut affirmer :

- Si $f$ est sur $U(a) \cap I$ strictement croissante, $f(a)$ est un minimum de la fonction sur $U(a) \cap I$.
- Si $f$ est sur $U(b) \cap I$ strictement croissante, $f(b)$ est un maximum de la fonction sur $U(b) \cap I$.
- Si $f$ est sur $U(a) \cap I$ strictement décroissante, $f(a)$ est un maximum de la fonction sur $U(a) \cap I$.
- Si $f$ est sur $U(b) \cap I$ strictement décroissante, $f(b)$ est un minimum de la fonction sur $U(b) \cap I$.

Sur les bords d'intervalles fermés et bornés il y a pour des fonctions - qui sont sur le voisinage d'un bord strictement monotones et continue - par conséquent des maxima ou minima. En cas de bords d'intervalle qui ne font pas partie de l'intervalle (intervalles ouverts ou semi-ouverts), il n'y a aux bords ouverts pas de minima ou de maxima. Cela est dû aux fait que pour des intervalles ouverts à gauche $\min(I)$ n'est pas définis et pour des intervalles ouverts à droite $\max(I)$ n'est pas défini. Nous étudions comme exemple le cas d'une fonction strictement croissante, continue et bornée sur un voisinage $U(b)$ tel que $b$ est le bord supérieur de $I$ et que $b \notin I$. Pour ce cas il y a pour chaque $f(x)$ avec $x \in I \cap U(b)$ un $x' \in I \cap U(b)$ avec $f(x') > f(x)$ (par exemple pour un $x < b$ il existe un $x' = \frac{x+b}{2}$ avec $x < x' < b$ et $f(x) < f(x')$). L'argumentation pour l'inexistence d'un minimum au bord supérieur d'un intervalle pour le cas d'un fonction strictement décroissante est analogue. D'une manière similaire on peut argumenter par rapport au bord inférieur d'un intervalle ouvert à gauche.

## 9.2 Extrema absolus et locaux

S'il y a pour un $x_0$ un voisinage $U(x_o) \cap D$ ($D \subset \mathbb{R}$ est le domaine de définition de la fonction réelle $f : D \to \mathbb{R}$), tel que $f(x_0) > f(x)$ pour tout $x \in (U(x_o) \cap D) \setminus \{x_0\}$, nous parlons d'un *maximum local* de la fonction en $x_0$. S'il y a pour un $x_0$ un voisinage $U(x_o) \cap D$, gel que $f(x_0) < f(x)$ pour tout $x \in (U(x_o) \cap D) \setminus \{x_0\}$, nous parlons d'un *minimum local* de la fonction en $x_0$. Une fonction peut avoir plusieurs minima et maxima locaux. S'il y a un maximum local $f(x_0)$, tel que pour tout $x \in D : f(x_0) > f(x)$ avec $x \in (U(x_o) \cap D) \setminus \{x_0\}$, nous parlons d'un *maximum absolu* de la fonction $f$ en $x_0$. S'il y a un minimum local $f(x_0)$, tel que pour tout $x \in D : f(x_0) < f(x)$ avec $x \in (U(x_o) \cap D) \setminus \{x_0\}$, nous parlons d'un *minimum absolu* de la fonction $f$ en $x_0$.

Les polynômes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de degré impair non pas de maximum ou de minimum absolu, car il y a pout tout maximum (minimum) local une valeur de fonction qui est plus grande (plus petite) - les valeurs limite de ces polynômes pour $x \to \pm\infty$ ne sont pas réelles et tendent une fois vers $-\infty$ et une fois vers $\infty$. Pour des polynômes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de degré pair il y a en cas d'unicité soit un maximum absolu soit un minimum absolu, mais pas les deux. Si le coefficient $a_n$ du polynômes de degré pair $n$ est positif il y a un minimum absolu pourvu qu'il y ait un seul minimum local. Si le coefficient $a_n$ est négatif, il y a un maximum absolu en cas d'unicité.

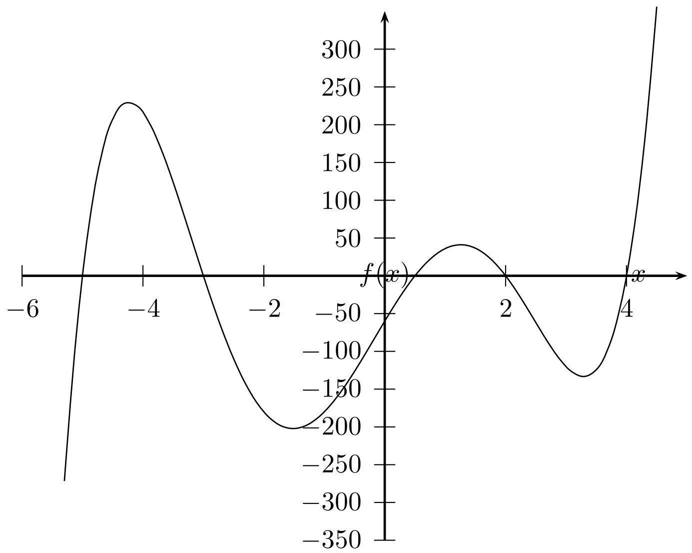


FIGURE 9.2.1 – Polynôme de degré 5. Il y a pour l'exemple deux minima locaux et deux maxima locaux. Il n'y a pas de maximum ou de minimum absolu.

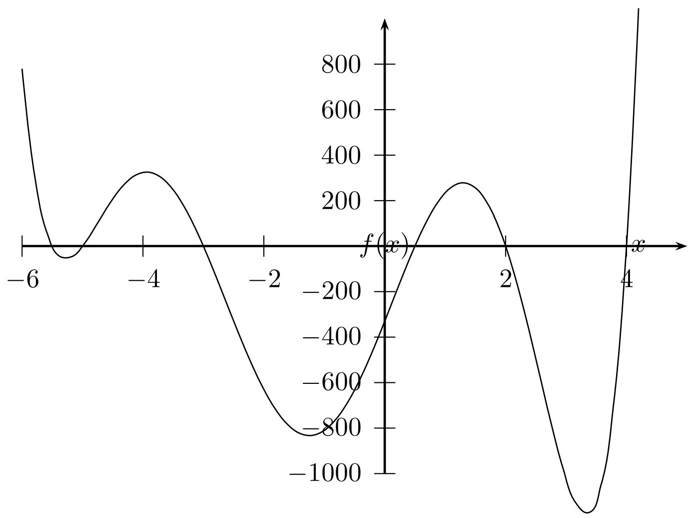


FIGURE 9.2.2 – Polynôme de degré 6. Il y a trois minima locaux et deux maxima locaux, il n'y a pas de maximum absolu. Il y a un minimum absolu (le minimum local tout à droite).

Si l'on étudie des représentations graphiques d'autres types de fonctions on peut constater : le comportement des fonctions rationnelles dépend des polynômes qui composent la fonction rationnelles. Les fonctions racines $\sqrt{} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ont un minimum absolu en 0 (= seul minimum local). Elles n'ont ni de maximum local ni de maximum absolu. Les fonctions exponentielles $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

n'ont ni d'extrema locaux ni d'extrema absolus. Les fonctions logarithme $\log_a : \mathbb{R}^+ \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ n'ont ni d'extrema locaux ni d'extrema absolus. L'analyse des fonctions composées doit se faire cas par cas.

## 9.3 Extrema dans des intervalles fermés

**Théorème 9.3.1.** *Supposons que $f$ soit définie sur l'intervalle fermé $I \subset \mathbb{R}$ et que $f$ soit continue et bornée sur $I$.*

- *il existe sous ces conditions au moins un $x_0$ tel que $f(x_0) \geq f(x)$ pour $x \in I\backslash\{x_0\}$ (s'il y a un seul $x_0$ de ce type, $f(x_0)$ est le maximum absolu de l'intervalle) et il existe au moins un $x_0$ tel que $f(x_0) \leq f(x)$ pour $x \in I\backslash\{x_0\}$ (s'il y a un seul $x_0$ de ce type, $f(x_0)$ est le minimum absolu de l'intervalle).*
- *Si $f$ est en $I$ strictement croissante, elle atteint son maximum au bord droit de $I$, et au bord gauche son minimum absolu.*
- *Si $f$ est en $I$ strictement décroissante, $f$ atteint au bord droit de $I$ son minimum absolu et au bord gauche de $I$ son maximum absolu.*

**Exemple 9.3.2.** *On cherche les extrema (locaux et absolus) de la fonction suivante : $f(x) = -x^2 + 2x + 8$ pour $x \in [-1.8, 0.5] = I$ (voir figure 9.3.3).*

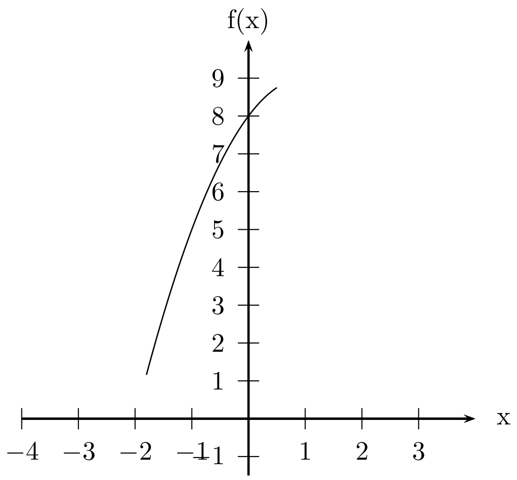


FIGURE 9.3.3 – Représentation graphique de l'exemple 9.3.2

*$f$ est dans la partie ouverte de $I$ continue, de plus en $-1.8$ continue à droite et en $0.5$ continue à gauche. Nous calculons les zéros de la première dérivée : $\frac{d}{dx}\left(-x^2 + 2x + 8\right) = -2x + 2 = 0 \Longleftrightarrow x = 1$*
*Le zéro se trouve à l'extérieur de $I$. Ainsi il n'y a pas d'extremum dans la partie ouverte de $I$. La fonction est en $I$ strictement croissante, car :$\frac{d}{dx}\left(-x^2 + 2x + 8\right) = -2x + 2 > 0 \Longleftrightarrow x < 1$.*
*C'est pourquoi le maximum absolu se trouve en $f(0.5)$ et la minimum absolu en $f(-1.8)$.* $\diamondsuit$

**Exemple 9.3.3.** *Supposons que $f$ soit une fonction de profit avec $f(x) = -x^2 + 13x + 12$ pour $x \in [8, 13]$(voir figure 9.3.4). On cherche les extrema (locaux et absolus) de la fonction.*

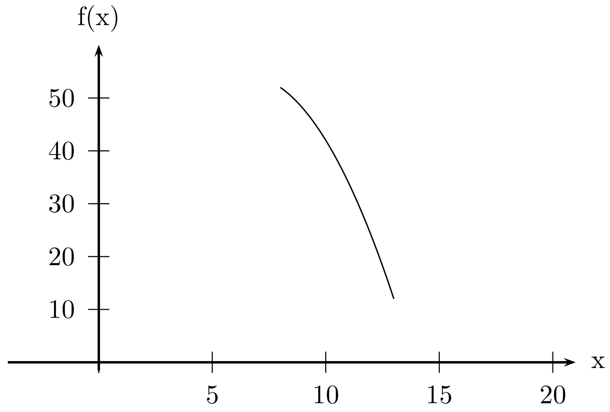


Figure 9.3.4 – Représentation graphique de l'exemple 9.3.3

*$f$ est dans la partie ouverte de $I$ continue, continue à droite et à gauche aux bords de $I$.*
$\frac{d}{dx}\left(-x^2+13x+12\right) = -2x+13 = 0$ *si et seulement si* $x = \frac{13}{2} = 6.5$
$6.5 \notin [8,13]$. *La fonction n'a pas d'extrema dans la partie ouverte de $I$. Nous constatons que* $-2x+13 > 0$ *si et seulement si* $x < \frac{13}{2} = 6.5$. *Avec cela la fonction est strictement décroissante dans l'intervalle. Par conséquent le maximum absolu se trouve au bord gauche et le minimum absolu au bord droit de l'intervalle, c. à d.*
$f(8) = -8^2 + 13 \cdot 8 + 12 = 52$ *(maximum absolu dans l'intervalle)*
$f(13) = -13^2 + 13 \cdot 13 + 12 = 12$ *(minimum absolu dans l'intervalle).* $\diamondsuit$

Si la fonction est définie sur un intervalle fermé $I \subset \mathbb{R}$ est s'il y a des sous-intervalles de $I$, où $f$ est strictement croissante et d'autres où $f$ est strictement décroissante, la fonction y atteint plusieurs extrema locaux. Pour retrouver le minimum absolu et le maximum absolu il faut comparer les minima et les maxima locaux. Il est de plus possible qu'il n'y ait pas un seul maximum ou un seul minimum absolu, puisque deux extrema locaux peuvent avoir la même valeur.

**Exemple 9.3.4.** *On cherche les extrema (locaux et absolus) de la fonction suivante :* $f(x) = x^5 - 9x^3 + 12x + 8$ *pour* $x \in [-1.8, 2.5]$ *(voir figure 9.3.5).*

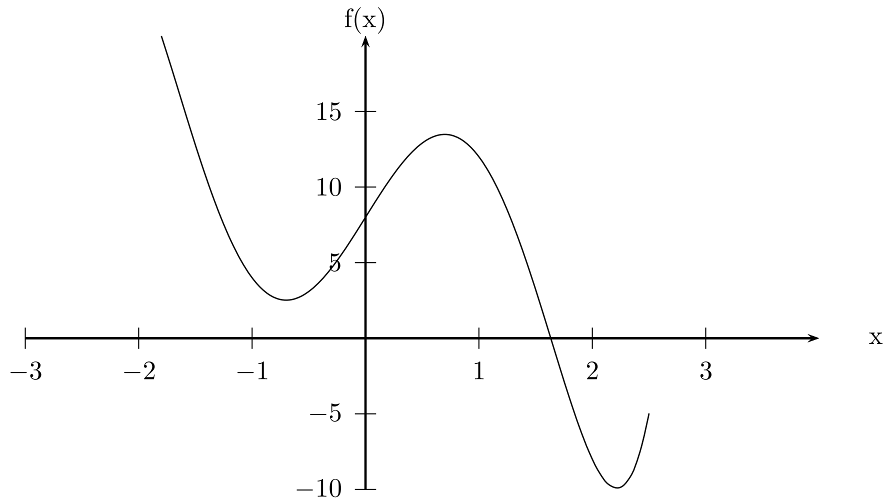


FIGURE 9.3.5 – Représentation graphique de l'exemple 9.3.4

*Nous calculons la première dérivée :* $\frac{d}{dx}\left(x^5 - 9x^3 + 12x + 8\right) = 5x^4 - 27x^2 + 12$
*Nous calculons les zéros :* $5x^4 - 27x^2 + 12 = 0 \Longrightarrow$
$x_1 = 2.216\,2$
$x_2 = -2.216\,2$
$x_3 = 0.699\,05$
$x_4 = -0.699\,05$
$x_1, x_3, x_4 \in [-1.8, 2.5]$
*Nous calculons la deuxième dérivée :* $\frac{d}{dx}\left(5x^4 - 27x^2 + 12\right) = 20x^3 - 54x$
$f''(x_1) = f(2.2162) = 20\,(2.2162)^3 - 54 \cdot 2.2162 = 98.\,024 > 0$ *(un minimum)*
$f''(x_3) = f(0.69905) = 20\,(0.69905)^3 - 54 \cdot 0.69905 = -30.\,917 < 0$ *(un maximum)*
$f''(x_4) = f(-0.69905) = 20\,(-0.69905)^3 - 54 \cdot (-0.69905) = 30.\,917 > 0$ *(un minimum).*
*Pour savoir quel est le maximum ou le minimum local le plus grand respectivement le plus petit nous calculons :*
*pour le bord inférieur de l'intervalle :* $f(-1.8) = -1.8^5 - 9\,(-1.8)^3 + 12 \cdot (-1.8) + 8 = 19.\,992$
*pour le bord supérieur de l'intervalle :* $f(2.5) = 2.5^5 - 9\,(2.5)^3 + 12 \cdot (2.5) + 8 = -4.\,968\,8$
*pour les autres extrema :* $f(x_1) = 2.2162^5 - 9\,(2.2162)^3 + 12 \cdot (2.2162) + 8 = -9.\,908\,3$
$f(x_3) = 0.69905^5 - 9\,(0.69905)^3 + 12 \cdot (0.69905) + 8 = 13.\,481$
$f(x_4) = -0.69905^5 - 9\,(-0.69905)^3 + 12 \cdot (-0.69905) + 8 = 2.\,518\,9$
*Ainsi le maximum absolu de l'intervalle se trouve en* $-1.8$ *et le minimum absolu in* $x_1 = 2.2162$.
$\diamondsuit$

## 9.4 Extrema dans des intervalles ouverts

Aux bords ouverts d'un intervalle, la fonction n'a pas d'extrema locaux. Cela nous mène au théorème suivant :

**Théorème 9.4.1.** *Pour des fonctions bornées et continues sur un intervalle avec des bords réels on peut constater :*

— *S'il y a sur un voisinage d'un bord ouvert d'un intervalle des valeurs de fonction supérieures à tous les maxima locaux de la fonction, la fonction n'a pas de maximum absolu. S'il n'y a*

*pas de valeurs de ce type et qu'il n'y a qu'un seul maximum local dépassant tous les autres maxima locaux, ce premier maximum est un maximum absolu.*
— *S'il y a sur un voisinage d'un bord ouvert d'un intervalle des valeurs de fonction inférieures à tous les minima locaux de la fonction, la fonction n'a pas de minimum absolu. S'il n'y a pas de valeurs de ce type et qu'il n'y a qu'un seul minimum local plut petit que tous les autres minima locaux, ce premier minimum est un minimum absolu.*
— *Une fonction strictement croissante sur un intervalle ouvert à droite n'a pas de maximum absolu.*
— *Une fonction strictement croissante sur un intervalle ouvert à gauche n'a pas de minimum absolu.*
— *Une fonction strictement décroissante sur un intervalle ouvert à droite n'a pas de minimum absolu.*
— *Une fonction strictement décroissante sur un intervalle ouvert à gauche n'a pas de maximum absolu.*

Sur des intervalles ouverts une fonction reprend des extrema tout au plus, si la fonction est concave ou convexe aux zéros de la première dérivée.

**Exemple 9.4.2.** *On cherche les extrema (locaux et absolus) de la fonction suivante :* $f(x) = -x^2 + 2x + 8$ *pour* $x \in ]-1.8, 0.5[= I$ *(voir figure 9.4.6).*

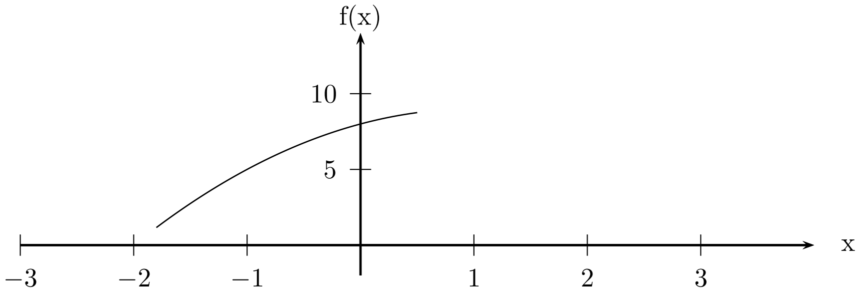


FIGURE 9.4.6 – Représentation graphique de l'exemple 9.4.2

*Nous calculons les zéros de la première dérivée :* $\frac{d}{dx}\left(-x^2+2x+8\right) = -2x+2 = 0 \Longrightarrow x = 1$ $1 \notin I$. *Il n'y a pas d'extremum local à l'intérieur de l'intervalle. Aux bords de l'intervalle il ne peut y avoir d'extremum pour la raison suivante : nous examinons une fonction strictement croissante en* $I$ *et un voisinage* $V(g)$ *du bord droit* $g$ *de l'intervalle,* $g \notin I$. *Il y a dans ce cas pour tout* $f(x)$ *avec* $x \in V(g) \cap I$ *un* $x' \in V(g) \cap I$ *avec* $f(x') > f(x)$ *(p.ex.* $x' = \frac{x+g}{2}$*). Il n'y a alors pas de maximum. L'argumentation pour l'inexistence d'un minimum est analogue.* ♢

**Exemple 9.4.3.** *On cherche les extrema (locaux et absolus) de la fonction suivante :* $f(x) = x^5 - 9x^3 + 12x + 8$ *pour* $x \in\ ]-1.8, 2.5[$ *(voir figure 9.3.5). On peut - avec les résultats de l'exemple 9.3.5 - conclure : il n'y a pas de maximum absolu de la fonction dans l'intervalle, car en s'approchant de* $-1.8$*, les valeurs de fonction dépassent le maximum local en* $0.69905$*, et comme l'intervalle est ouvert à gauche, il n'y a pas de maximum en* $-1.8$*. Il y a par contre un minimum absolu en* $2.2162$*. En* $2.5$*, il n'y a pas de maximum local, car l'intervalle est ouvert à droite. Il y a un autre minimum local en* $-0.699\,05$*.* ♢

**Remarque 9.4.4.** *Pour des intervalles semi-ouverts on peut faire des réflexions analogues.*
*1)* $f(x) = x^5 - 9x^3 + 12x + 8$ *pour* $x \in [-1.8, 2.5[$ *(voir figure 9.3.5). Il y a un maximum absolu en* $-1.8$*, comme l'intervalle est fermé à gauche et que la valeur de fonction y dépasse tous les maxima locaux. Il n 'y a pas de maximum local en* $2.5$ *comme l'intervalle est ouvert à droite. Il y a un minimum absolue au minimum local en* $2.216\,2$*.*
*2)* $f(x) = x^5 - 9x^3 + 12x + 8$ *pour* $x \in\ ]-1.8, 2.5]$ *(voir figure 9.3.5). Il n'y a pas de maximum absolu, car en s'approchant de* $-1.8$*, les valeurs de fonction dépassent le maximum local en* $0.69905$*,*

*et comme l'intervalle est ouvert à gauche, il n'y a pas de maximum en* $-1.8$*. Il y a un maximum local en* $2.5$ *comme l'intervalle est fermé à droite. Il y a un minimum absolue au minimum local en* $2.216\,2$*.* ◊

## 9.5 Extrema en cas de segments constants d'une fonction continue

Finalement une fonction continue peut avoir sur un intervalle $I$ des segments constants. Cela est le cas si il y a des intervalles $I' \subset I$ tel que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I'$. Dans ces sous-intervalles $f(x) = f(x') = c \in \mathbb{R}$ - $c$ est une constante. Il y a beaucoup de possibilités par rapport aux comportement du reste de la fonction. Comme exemple nous étudions l'exemple suivant :

**Exemple 9.5.1.** *(voir figure 9.5.7).*

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x) & \textit{pour } 0 < x \le 15 \\ \ln 15 & \textit{pour } 15 < x \le 20 \\ -3x + \ln 15 + 60 & \textit{pour } 20 < x \le 25 \end{cases}$$

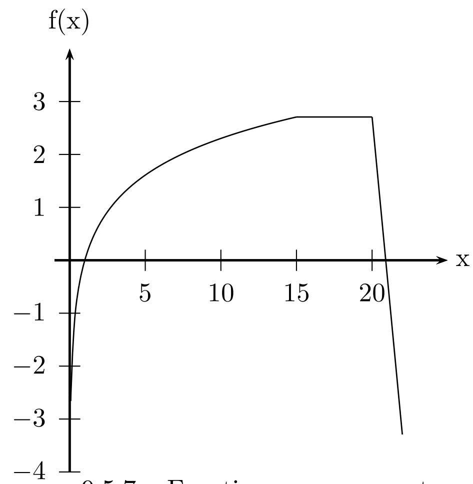


FIGURE 9.5.7 – Fonction avec segment constant

*A gauche de 15, la fonction est strictement croissante (*$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} > 0$ *pour des* $x > 0$*). De plus, la fonction y est continue :* $\lim\limits_{x\to 15^-} \ln x = \ln 15 = \lim\limits_{x\to 15^+} \ln 15 = \ln 15 = f(x) = \ln 15$*. A droite de* $20$*, la fonction est continue :* $\lim\limits_{x\to 20^-} \ln 15 = \ln 15 = \lim\limits_{x\to 20^+} (-3x + \ln 15 + 60) = \ln 15 = f(x) = \ln 15$*. Pour tous les* $x \in [15, 20]$ $f(x) \geq f(y)$ *pour* $y \in ]0, 15[ \cup ]20, 25]$*. Le* $f(x)$ *maximal est* $\ln 15$*, le* $x$ *n'est pas uniquement déterminé.* ◊

**Exercice 9.5.2.** *Analyser le cas pour lequel la fonction est à gauche et à droite de la partie constante strictement croissante (trouver un exemple concret). Analyser le cas pour lequel la fonction est à gauche et à droite de la partie constante strictement décroissante (trouver un exemple concret). Analyser le cas pour lequel la fonction est à gauche strictement décroissante et à droite de la partie constante strictement croissante (trouver un exemple concret).*

## 9.6 Extrema de fonctions continues sans dérivée continue

La dérivée d'une fonction continue n'est pas forcément continue, comme le montre l'exemple suivant : Supposons que $f$ soit une fonction de profit (voir figure 9.6.8) :

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{pour } x \leq 3 \\ -x + 8 & \text{pour } x > 3 \end{cases}$$

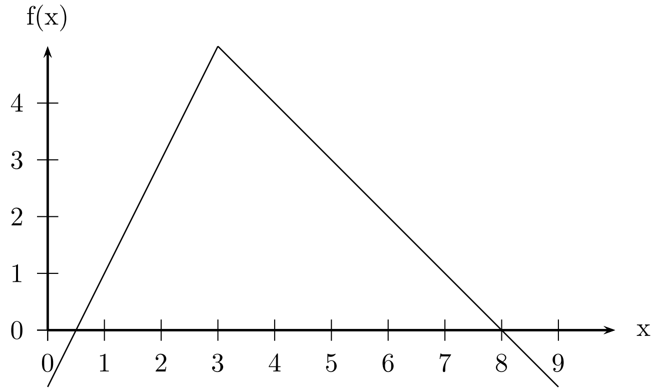


FIGURE 9.6.8 – Exemple d'une fonction continue dont la dérivée n'est pas continue

La fonction est continue en $x_0$, car $\lim\limits_{x \to 3^+} (-x+8) = \lim\limits_{x \to 3^-} (\lim_{x \to 3^+})$. La dérivée en est :

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{pour } x < 3 \\ -1 & \text{pour } x > 3 \end{cases}$$

En $x_0 = 3$ la dérivée n'est pas définie puisque la limite à gauche et à droite de la fonction $f^*(x) = \frac{f(x)-f(3)}{x-3}$ pour $x \to 3$ n'y coïncident pas (voir figure 9.6.9). Car

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3^+} -1 = -1$$

et

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3^-} 2 = 2.$$

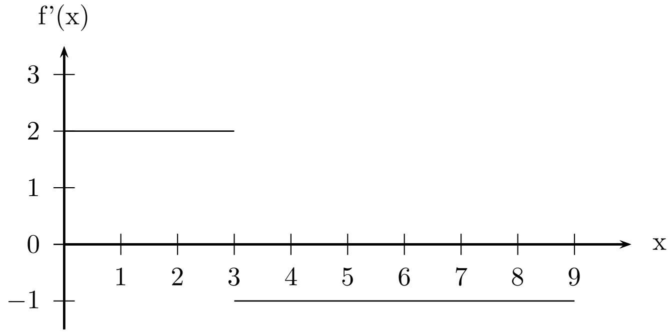


Figure 9.6.9 – Représentation graphique de la dérivée de la fonction de la figure 9.6.8

Nous voyons que la première dérivée en $x_0 = 3$ n'est pas continue tandis que la fonction de départ y est continue. La fonction a en 3 un changement de la direction (de la pente) abrupt.

Avec de telles fonctions nous devons - pour déterminer les extrema - contrôler, si un extremum se trouve à l'endroit où les fonctions définies par intervalles se touchent. Il y a un maximum en $x_0$ si pour tout $x \in V(x_0) : f'(x) > 0$ à gauche et $f'(x) < 0$ à droite - la fonction croît à gauche et décroît à droite de $x_0$ ($V(x_0)$ est un voisinage de $x_0$).

Pour le cas

— que les deux fonctions partielles ne coïncide pas en $x_0$ et que la fonction est par conséquent discontinue en $x_0$,

— et que la fonction croît à gauche de $x_0$ et décroît à droite de $x_0$,

il y a un maximum si la fonction partielle dont les valeurs de fonction dépassent les valeurs de fonction de l'autre fonction partielle dans un voisinage de $x_0$, est définie en $x_0$. Autrement il n'y a pas de maximum (voir les figures 11.0.1 et 11.0.2, à gauche il y a un maximum, à droite pas).

$$g(x) = \begin{cases} 0.2x + 1 & \text{pour } x \in \ ]0,4[ \\ -0.4x + 5 & \text{pour } x \in \ [4,13[ \end{cases}$$

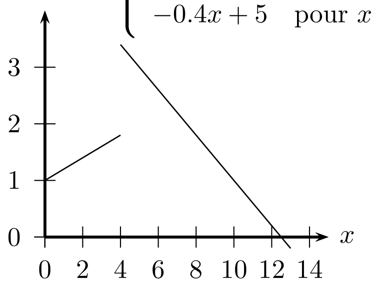


Figure 9.6.10 – fonction $g$ avec maximum dans l'intervalle

$$f(x) = \begin{cases} 0.2x + 1 & \text{pour } x \in \ ]0,4] \\ -0.4x + 5 & \text{pour } x \in \ ]4,13[ \end{cases}$$

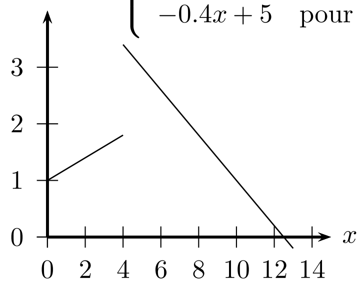


Figure 9.6.11 – fonction $f$ sans maximum dans l'intervalle

## 9.7 Optimisation linéaire avec système de restriction non-affine

L'optimisation linéaire a pour but de maximiser ou de minimiser les valeurs d'une fonction linéaire ou affine $Z$ (p.ex. une fonction de profit ou de coût) tel que seul certains arguments sont admis. L'ensemble des points admis est appelé „ensemble de restriction“, le système d'inéquations qui le décrit „système de restriction“ ou „système de contrainte“. Souvent la fonction à optimiser est une fonction $Z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Les points de l'ensemble de restriction $(x_1, x_2)$ sont alors éléments du $\mathbb{R}^2$ („du $\mathbb{R}^2$“ signifie „de l'espace $\mathbb{R}^2$“). Une méthode courante est de mettre $Z(x_1, x_2) = a$ constant et d'isoler dans cette équation $x_2$. On obtient une droite dans le $\mathbb{R}^2$. On déplace cette droite le plus possible à droite (ou à gauche, selon le problème et selon la fonction $Z$) tel que la droite a toujours au moins un point en commun avec l'ensemble de restriction. Ce point (ou un de ces points) est l'endroit où la fonction à optimiser atteint son maximum ou son minimum - en respectant les exigences du système de restriction.

**Remarque 9.7.1.** *Du point de vue géométrique, par la mise constante $Z(x_1, x_2) = a$, on forme une intersection d'une surface $A$ parallèle au $\mathbb{R}^2$ (la distance de $A$ à $\mathbb{R}^2$ est $a$) et de l'image de $Z$. Cette intersection est une droite dans le $\mathbb{R}^3$. En isolant $x_2$ cette intersection est projetée d'une manière orthogonale sur le $\mathbb{R}^2$. Il en résulte une droite dans le $\mathbb{R}^2$ qui comprend les points $(x_1, x_2)$ tel que $Z(x_1, x_2) = a$. Le déplacement de la droite dans le $\mathbb{R}^2$ à gauche ou à droite correspond à un déplacement de la surface $A$ vers le haut ou vers le bas et par là à un déplacement correspondant de l'intersection de $A$ et de $Z$.* $\diamondsuit$

On peut utiliser le calcul différentiel pour l'optimisation de fonctions linéaires ou affines, si le système de restriction n'est pas uniquement donnée par des inéquations linéaires ou affines. Nous étudions un

**Exemple 9.7.2.** *(1) Fonction à maximiser : $Z(x_1, x_2) = \frac{1}{3}x_2 + x_1$. Il s'agit d'une fonction dans l'espace tridimensionnel $\mathbb{R}^3$. Elle passe par l'origine du système des coordonnées cartésiennes et elle croît dans la direction de l'axe des $x_1$ ainsi que dans la direction de l'axe des $x_2$ (car $\frac{1}{3}x_2$ est une fonction strictement croissante ainsi que $x_1$). Nous mettons constant : $Z(x_1, x_2) = a \Longrightarrow x_2(x_1) = -3x_1 + 3a$. On trouve le maximum $Z$ en déplaçant la droite $x_2(x_1) = -3x_1 + 3a$ le plus possible à droite - en fait on augmente le $a$. Supposons que le système de restriction suivant doit être respecté :*
*(1)* $x_2 \leq 13x_1 + 3$
*(2)* $x_2 \leq -x_1^2 + 13x_1 + 12$
*(3)* $x_1 \leq 13$
*(4)* $x_1, x_2 \geq 0$
*(voir figure 9.7.12).*

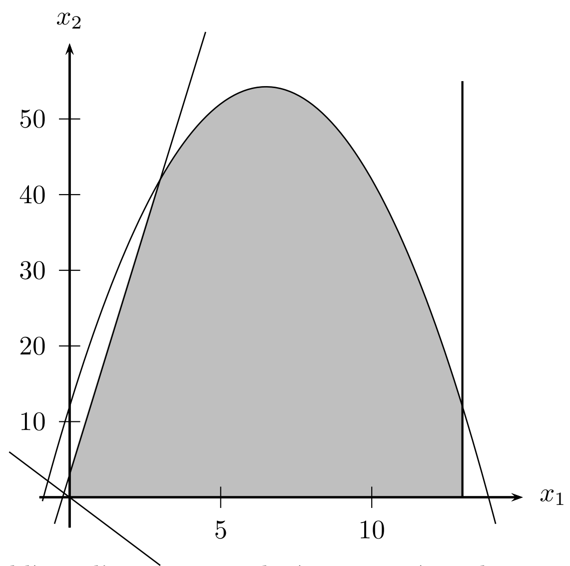


FIGURE 9.7.12 – Problème d'optimisation linéaire - système de restriction non-affine

*Nous constatons à l'aide du graphique que la fonction $x_2(x_1) = -3x_1 + 3a$ est le plus à droite si elle devient la tangente de la fonction $f(x_1) = -x_1^2 + 13x_1 + 12$ en un point à déterminer.*

*Nous connaissons la pente de la droite* $x_2(x_1) = -3x_1 + 3a$ *(à savoir* $-3$*). Celle-ci doit être identique à la pente de la courbe* $f$ *au point qu'on cherche. Nous calculons la première dérivée de* $f$ *:* $\frac{d}{dx_1}\left(-x_1^2 + 13x_1 + 12\right) = -2x_1 + 13$*. Avec cela :* $-2x_1 + 13 = -3 \Longrightarrow x_1 = 8$
*La fonction* $Z$ *devient maximale en* $(8, x_2(8)) = (8, 52)$
*La valeur maximale de* $Z$ *en ce point est* $Z\,(8, 52) = \frac{1}{3}x_2 + x_1 = \frac{1}{3} \cdot 52 + 8 = 25.333$ ♢

### 9.7.1 Exercices

1. Supposons la fonction de profit suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 4 & \text{pour } 0 \le x < 1 \\ -5x + 12 & \text{pour } x \ge 1 \end{cases}$$

   Déterminer le profit maximal.

2. Supposons la fonction de profit suivante : $f(x) = 2x - 3$ pour $x \in [\frac{3}{2}, 20]$
   Déterminer le profit maximal.
3. Supposons la fonction de profit suivante : $f(x) = 2x - 3$ pour $x \in [\frac{3}{2}, 20[$
   Déterminer le profit maximal.
4. Supposons la fonction de recette suivante : $f(x) = 0.3x^5 - 9x^3 + 20x^2 - 5$ pour $x \in [0, 4]$
   Déterminer la recette maximale.
5. Supposons la fonction à optimiser suivante : $Z\,(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{6}x_2$
   De plus le système de restriction suivant :
   $x_1, x_2 \ge 0$
   $x_2 \le 9x_1 + 3$
   $x_2 \le -x_1^3 + 15x_1$
   $x_2 \ge -x_1 + 16$
   $x_2 \ge 2x_1^2 + 3x_1 - 5$
   Calculer le point où (a) $Z$ devient maximal, (b) $Z$ devient minimal. Calculer les valeurs de $Z$ en ces points.
6. Fonction à maximiser $Z\,(x_1, x_2) = 100x_1 + 2x_2$.
   Système de restrictions :
   $x_2\,(x_1) \ge 5x_1 + 3$
   $x_2\,(x_1) \le -4x_1^2 + 3x_1 + 10$
   $x_2\,(x_1) \le 10x_1 + 7.5$
   $x_2\,(x_1) \le 200x_1 + 1$
   Indiquer l'ensemble de restriction dans le graphique suivant :

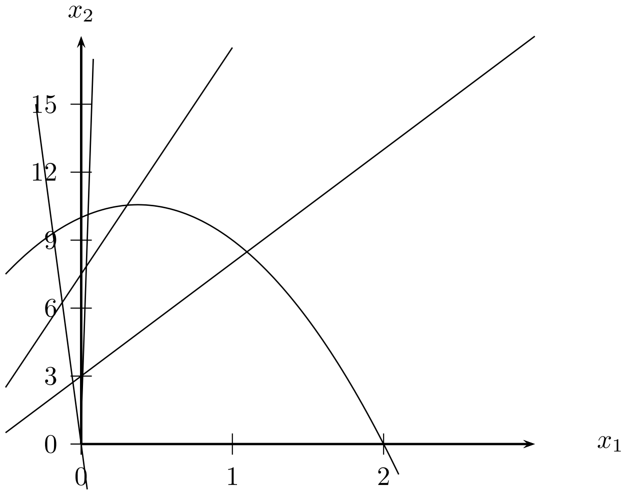


Figure 9.7.13 – Graphique de l'exercice

Trouver le couple $(x_1, x_2)$ qui maximise $Z$. Calculer $Z(x_1, x_2)$ pour ce couple.

7. Fonction à minimiser $Z(x_1, x_2) = 80x_1 + 4x_2$
système de restriction : $x_2(x_1) \geq 5x^2 - 28x + 40$
$x_2(x_1) \geq 5x^2 - 5x + 3$
$x_2(x_1) \leq 2x + 30$
$x_2(x_1) \leq -3x + 40$
Indiquer l'ensemble de restriction dans le graphique suivant :

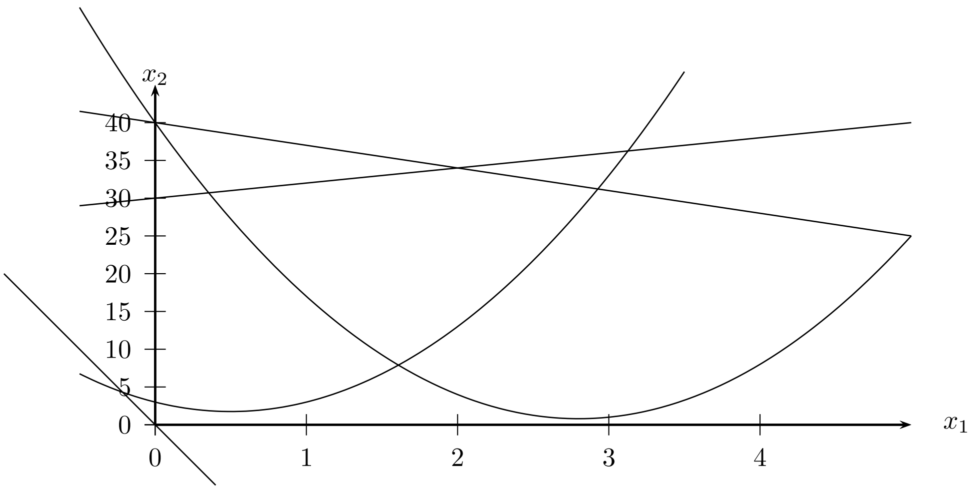


Figure 9.7.14 – Graphique de l'exercice

Trouver le couple $(x_1, x_2)$ qui minimise $Z$. Calculer $Z(x_1, x_2)$ pour ce couple.

8. Supposons le système de restrictions suivants qui indique les couples $(x_1, x_2)$ admissibles :

$$
\begin{aligned}
x_2(x_1) &\leq -2x_1^2 - 0.4x_1 + 15 \\
x_2(x_1) &\leq 13x_1 + 7 \\
x_2(x_1) &\geq 5x_1^2 \\
x_2(x_1) &\geq 5 \\
x_2 &\geq 0 \\
x_1 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Il s'agit de maximiser la fonction $g(x_1, x_2) = 4x_1 + x_2$ sur l'ensemble de restriction déterminé par le système de restriction.
1) indiquer dans le graphique suivant l'ensemble de restriction (à l'aide d'une couleur p.ex.).
2) Indiquer dans le même graphique quelle courbe correspond à quelle inéquation du système de restriction (première inéquation = a ; deuxième = b ; etc.)

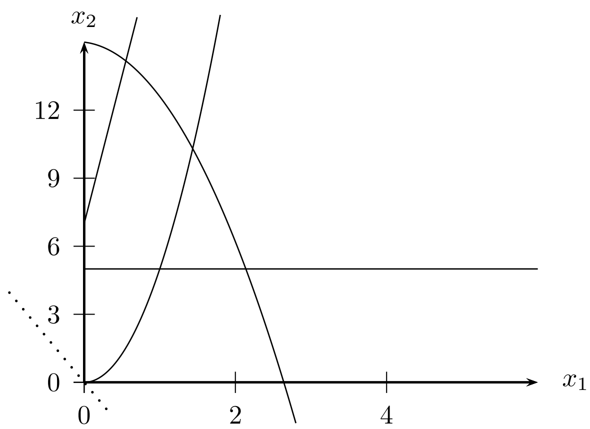


FIGURE 9.7.15 – Représentation graphique des restrictions de l'ensemble des points admis.

c) Indiquer le couple $(x_1, x_2)$ de l'ensemble de restriction pour lequel $g(x_1, x_2)$ est maximal
d) Indiquer la valeur de fonction pour le couple trouvé sous c)

### 9.7.2 Solutions

1. On peut retenir $\lim_{x^- \to 1}(3x + 4) = 7$
$\lim_{x^+ \to 1}(-5x + 12) = 7$. Ainsi la fonction est continue en 1. Puisque la fonction croît à gauche et décroît à droite il y a en 1 un maximum (voir figure 9.7.16).

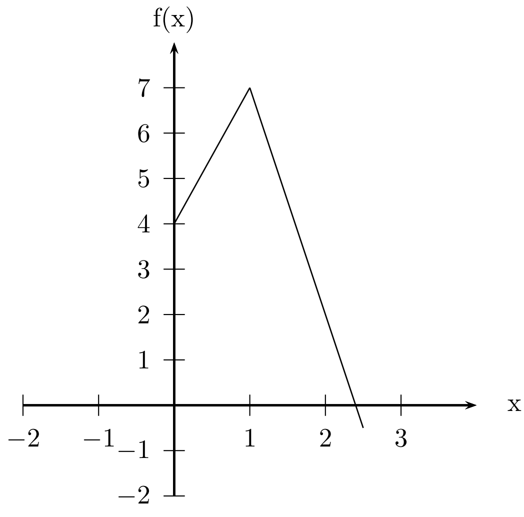


FIGURE 9.7.16 – Problème d'optimisation - dérivée discontinue

profit maximal : $f(1) = 7$

2. $f(x) = 2x - 3$ pour $x \in [\frac{3}{2}, 20]$
Nous calculons la première dérivée : $\frac{d}{dx}(2x - 3) = 2 > 0$. Ainsi la fonction est partout strictement croissante (la fonction constante 2 est continue). Par conséquent le maximum se trouve en $x = 20$ : $f(20) = 37$

3. $f(x) = 2x - 3$ pour $x \in [\frac{3}{2}, 20[$
   Il n'y a pas d'extremum local dans la partie ouverte de l'intervalle, puisque la première dérivée n'a pas de zéro. Puisque l'intervalle est ouvert à droite il n'y a pas de maximum. Nous pouvons cependant nous approcher de la valeur 37 toujours plus, car $\lim\limits_{x \to 20^-} (2x - 3) = 40 - 3 = 37$.
4. $\frac{d}{dx}\left(0.3x^5 - 9x^3 + 20x^2 - 5\right) = 1.5x^4 - 27x^2 + 40x = 0$ si est seulement si :
   $x_1 = 0$ ou $x_2 = -4.8478$ ou $x_3 = 1.812$ ou $x_4 = 3.0358$
   Nous calculons la deuxième dérivée : $\frac{d}{dx}\left(1.5x^4 - 27x^2 + 40x\right) = 6x^3 - 54x + 40$
   En $x_1$ il y a un minimum.
   $x_2$ se situe à l'extérieur de l'intervalle étudié.
   En $x_3$ il y a un maximum, car $f''(1.812) = 6\,(1.812)^3 - 54 \cdot 1.812 + 40 = -22.151 < 0$
   $f(1.812) = 0.3\,(1.812)^5 - 9\,(1.812)^3 + 20\,(1.812)^2 - 5 = 12.982$
   En $x_4$ il y a un minimum, car $f''(3.0358) = 6\,(3.0358)^3 - 54 \cdot 3.0358 + 40 = 43.936 > 0$.
   Finalement nous regardons les bords de l'intervalle : Comme il y a en 0 un minimum ce cas est déjà pris en compte.
   $f(4) = 0.3\,(4)^5 - 9\,(4)^3 + 20\,(4)^2 - 5 = 46.2$
   C'est pourquoi le maximum se situe en 4. La recette maximale est 46.2 (voir figure 9.7.17).

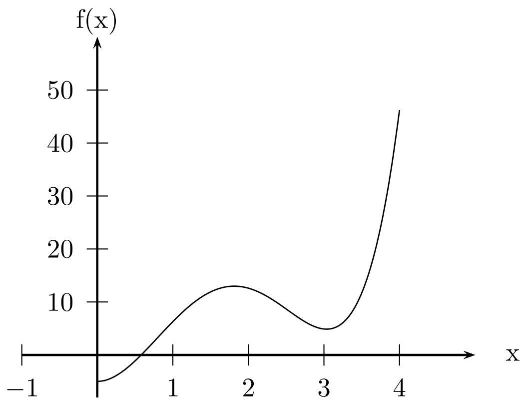


FIGURE 9.7.17 – Représentation graphique de la fonction de l'exercice 4

5. Nous dessinons l'ensemble de restriction et la droite qui résulte de l'isolation de $x_2$ en $Z\,(x_1, x_2) = 0$ (voir figure 9.7.18) :

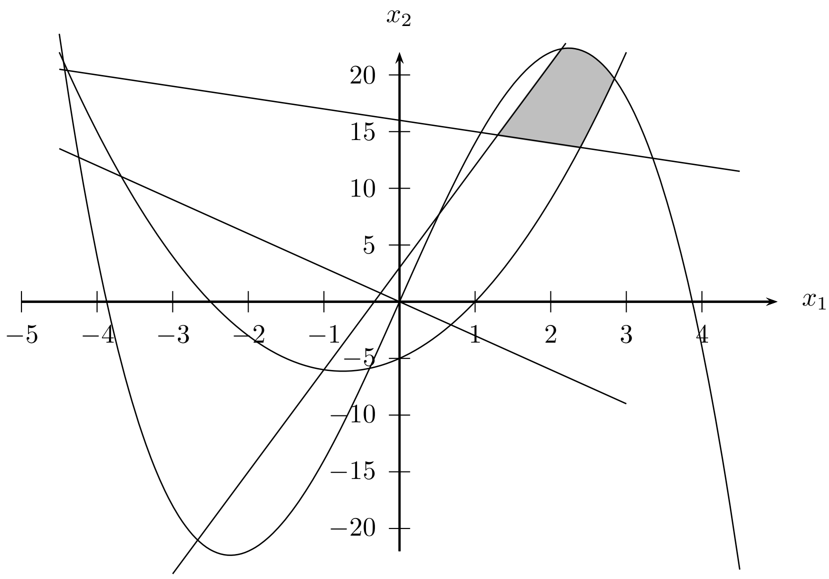


FIGURE 9.7.18 – Représentation graphique de l'ensemble de restriction de l'exercice 5

$a = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{6}x_2 \Longrightarrow x_2 = -3x_1 + 6a$
Le maximum de $Z$ se trouve là où $x_2(x_1) = -3x_1 + 6a$ devient une tangente de la courbe du troisième degré. Nous devons chercher le point de cette fonction où la tangente a une pente de $-3$. Nous calculons la première dérivée de $x_2(x_1) = -x_1^3 + 15x_1$ :
$\frac{d}{dx_1}\left(-x_1^3 + 15x_1\right) = -3x_1^2 + 15$ que nous mettons égale à $-3$ : $-3x_1^2 + 15 = -3 \Longrightarrow x_1 = \sqrt{6}$
$x_2 = -\sqrt{6}$. Nous ne nous intéressons qu'au domaine positif, alors à $\sqrt{6}$.
Nous avons alors le point : $(\sqrt{6}, f(\sqrt{6})) = (\sqrt{6}, 9\sqrt{6})$ où se trouve le maximum.
Le maximum est : $Z\left(\sqrt{6}, 9\sqrt{6}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{6} + \frac{1}{6}9\sqrt{6} = 4.8990$
Le minimum est là où $x_2 = 9x_1 + 3$ et $x_2 = -x_1 + 16$ se coupent.

$$\begin{aligned} x_2 &= 9x_1 + 3 \\ x_2 &= -x_1 + 16 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow x_1 = \frac{13}{10}, x_2 = \frac{147}{10}$
Le minimum de $Z$ est $Z\left(\frac{13}{10}, \frac{147}{10}\right) = \frac{1}{2}\frac{13}{10} + \frac{1}{6}\frac{147}{10} = \frac{31}{10} = 3.1$

6. Graphique :

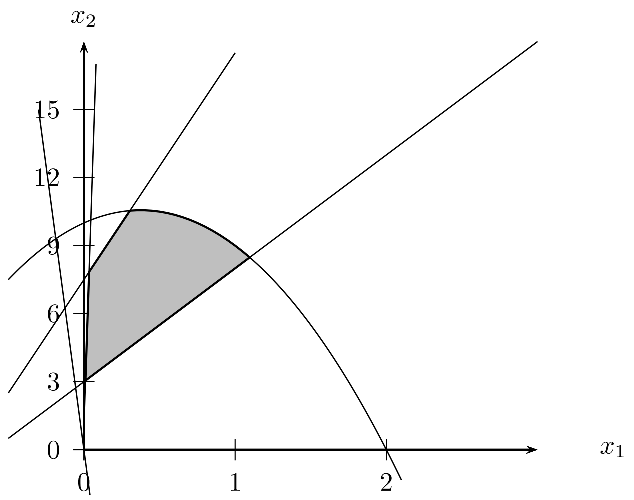


Figure 9.7.19 – Graphique de l'exercice

$$5x_1 + 3 = -4x_1^2 + 3x_1 + 10$$

En déplaçant la droite à travers $(0, 0)$ à droite on voit que le maximum est atteint à l'intersection de $x_1 (x_2) = 5x_1 + 3$ et $x_2 (x_1) = -4x_1^2 + 3x_1 + 10$ :

$$5x_1 + 3 = -4x_1^2 + 3x_1 + 10$$

Solution positive : $\frac{1}{4}\sqrt{29} - \frac{1}{4} = 1.0963 = x_1$ du point où se trouve le maximum.
$5 \cdot \left(\frac{1}{4}\sqrt{29} - \frac{1}{4}\right) + 3 = \frac{5}{4}\sqrt{29} + \frac{7}{4} = 8.4815 = x_2$ du point où se trouve le maximum.
$Z\,(1.0963, 8.4815) = 100 \cdot 1.0963 + 2 \cdot 8.4815 = 126.59$ (maximum)

7. Graphique :

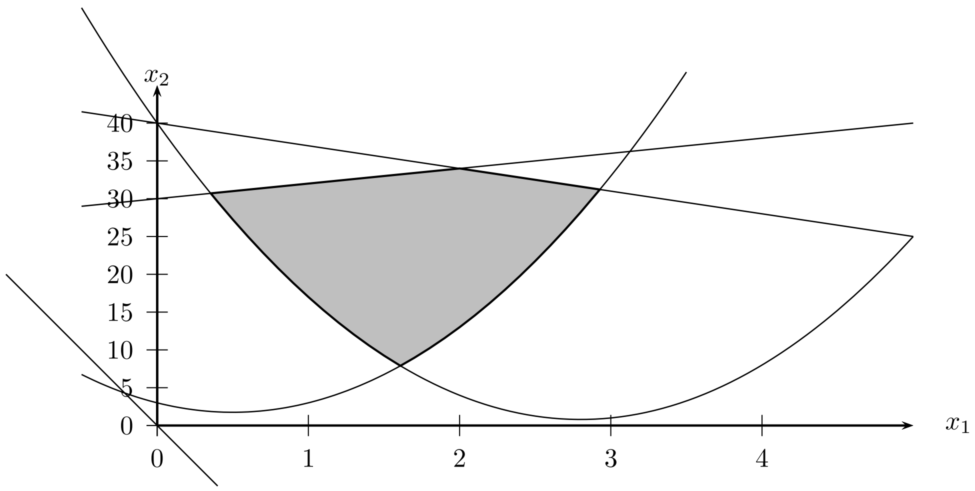


Figure 9.7.20 – Graphique de l'exercice

Il paraît que le minimum se trouve sur la courbe $x_2 (x_1) = 5x_1^2 - 28x_1 + 40$. Si l'on n'est pas sûr, on peut chercher le point sur la courbe avec la même pente que $x_2 (x_1) = -20x_1$ et contrôler si ce point est un élément de l'ensemble de restriction. Si cela n'est pas le cas, le point où se trouve le minimum est l'intersection de $x_2 (x_1) = 5x_1^2 - 28x_1 + 40$ et $x_2 (x_1) = 5x_1^2 - 5x_1 + 3$ ou de $x_2 (x_1) = 5x_1^2 - 28x_1 + 40$ et de $x_2 (x_1) = 2x_1 + 30$.

$$\frac{d}{dx_1}\left(5x_1^2 - 28x_1 + 40\right) = 10x_1 - 28 = -20$$

Solution : $\frac{4}{5} = 0.8$
comme 0.8 se trouve entre l'intersection de $x_2(x_1) = 5x_1^2 - 28x_1 + 40$ et $x_2(x_1) = 5x_1^2 - 5x_1 + 3$ d'un côté et de $x_2(x_1) = 5x_1^2 - 28x_1 + 40$ et de $x_2(x_1) = 2x_1 + 30$ de l'autre côté, le point avec le minimum se trouve en $x_1 = 0.8$
$5 \cdot 0.8^2 - 28 \cdot 0.8 + 40 = 20.8 = x_2$
$Z(0.8, 20.8) = 80 \cdot 0.8 + 4 \cdot 20.8 = 147.2$ (minimum)

8. On obtient :

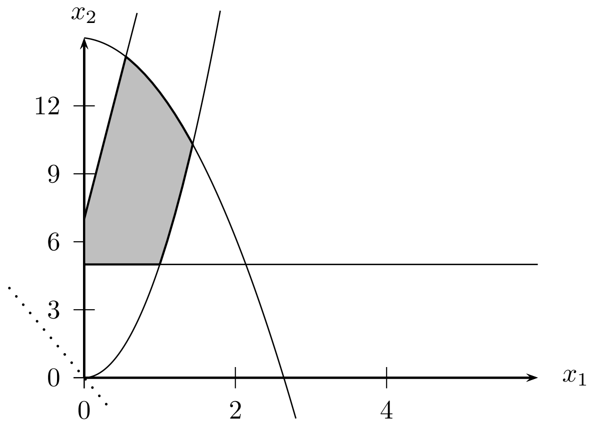


FIGURE 9.7.21 – Représentation graphique des restrictions de l'ensemble des points admis.

Pente de l'intersection de $g(x_1, x_2) = 4x_1 + x_2$ avec la surface $(x_1, x_2) : g(x_1, x_2) = 0$ et alors $x_2(x_1) = -4x_1$
Nous conjecturons que le $(x_1, x_2)$ élément de l'ensemble de restriction qui maximise $g$ se trouve sur la courbe $x_2(x_1) = -2x_1^2 - 0.4x_1 + 15$.
$\frac{d}{dx_1}\left(-2x_1^2 - 0.4x_1 + 15\right) = -4x_1 - 0.4$
On identifie $-4x_1 - 0.4 = -4$, solution : 0.9
On vérifie que $(0.9, -2 \cdot 0.9^2 - 0.4 \cdot 0.9 + 15)$ se trouve sur le segment de $x_2(x_1) = -2x_1^2 - 0.4x_1 + 15$ qui forme un bord de l'ensemble de restriction. En fait l'intersection de $x_2(x_1) = -2x_1^2 - 0.4x_1 + 15$ et de $x_2(x_1) = 13x_1 + 7$ donne :
(0.5516,14.17083488) et l'intersection de $x_2(x_1) = -2x_1^2 - 0.4x_1 + 15$ et de $x_2(x_1) = 5x_1^2$ donne :
(1.4356,10.30386528). Comme $0.9 \in ]0.5516, 1.4356[$, le maximum de $g$ se trouvera au dessus de
$(x_1, x_2) = \left(0.9, -2 \cdot 0.9^2 - 0.4 \cdot 0.95 + 15\right) = (0.9, 13)$.
$g(0.9, 13) = 4 \cdot 0.9 + 13 = 16.6$

## 9.8 Objectifs d'apprentissage

— Arriver à calculer des maxima et des minima par rapport à des fonctions définies sur des intervalles ouverts ou fermés, ouverts à droite ou ouverts à gauche.
— Arriver à calculer des maxima et des minima par rapport à des fonctions continues pour lesquelles il n'y a pas de dérivée continue (du type étudié).
— Arriver à calculer des maxima et des minima par rapport à des fonctions continues qui ont des segments constants.
— Arriver à résoudre des problème d'optimisation linéaire en présence d'un système de restriction non-affine.
— Arriver à résoudre des problèmes du type des exercices.

# Chapitre 10

# Dérivées et fonctions économiques marginales

Les dérivées permettent de définir les fonctions économiques marginales tel qu'on peut les analyser d'une manière efficace. D'abord nous analysons les unités des dérivées de fonctions économiques. Par la suite nous motivons la définition des fonctions économiques marginales à l'aide de leurs dérivées. Finalement nous allons définir certaines fonctions économiques marginales.

## 10.1 Dérivées et unités de mesure

Dans un contexte économique les valeurs du domaine de définition et du domaine des valeurs des fonctions sont dotées d'unités de mesure (p.ex. franc, kg, litre, tonne, etc.). La question est de savoir par quelles unités les dérivées sont caractérisées. Nous examinons la fonction de coût $C(x) = x^3 - 2x + 5$. Elle exprime les coûts (unités monétaires (UM), p.ex. franc ou euro) en tant que fonction de la quantité produite (unité de quantité (UQ), p.ex. kilo, tonne, pièce). En dérivant nous formons la limite de la fonction suivante

$$h(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

pour $x \to x_0$, en cas d'une fonction de coût la limite de la fonction

$$h(x) := \frac{C(x) - C(x_0)}{x - x_0}.$$

Les unités du numérateur sont alors des unités monétaires et du dénominateur des unités de quantité. On obtient comme unité de mesure de la dérivée $\frac{UM}{UQ}$, p.ex. $\frac{CHF}{t}$.

Pour la deuxième dérivée nous obtenons :

$$C''(x) : \frac{\frac{UM}{UQ}}{UQ} = \frac{UM}{UQ^2},$$

pour

$$C'''(x) : \frac{\frac{UM}{UQ^2}}{UQ} = \frac{UM}{UQ^3},$$

etc.

On peut constater que les unités de la première dérivée d'une fonction de coût sont identiques à celles de la fonction de coût unitaire correspondante. Dans l'exemple :

$$c(x) = \frac{C(x)}{x} : \frac{UM}{UQ}.$$

Par conséquent c'est raisonnable de dessiner la fonction de coût unitaire dans le même système de coordonnées cartésiennes que la première dérivée de la fonction de coût. Il n'est par contre pas raisonnable de dessiner la fonction de coût et la première dérivée de cette fonction dans le même système de coordonnées cartésiennes. Aussi longtemps que nous examinons des fonctions sans unités interprétées, le problème ne se pose cependant pas : on peut dessiner des fonctions et leur dérivées dans le même système.

### 10.1.1 Exercices

1. La fonction de coût $C(x) = 5x^4 - 2x^2 + 5$ exprime les coûts en francs suisses (la quantité produite est mesurée en kg. Quelles sont les unités de mesure de $C'$ et de $C''$ ?
2. La fonction de production $x(r) = -\frac{1}{15}r^3 + 0.5r^2 + 4r$ exprime la quantité produite $x(r)$ en tonnes de pain et la quantité de farine utilisée $r$ en tonnes. Quelles sont les unités de $x'$ et de $x''$ ?
3. La fonction de coût $C(x) = 5x^4 - 2x^2 + 5$ exprime les coûts en CHF et la quantité produite en kg. Quelles sont les unités de $c(x)$ et de $c'(x)$ ?

### 10.1.2 Solutions

1. Les unités de $C'(x)$ : $\frac{CHF}{kg}$; Les unités de $C''(x)$ : $\frac{CHF}{(kg)^2}$
2. Les unités de $x'(r)$ : $\frac{t}{t} = 1$; Les unités de $x''(r)$ : $\frac{t}{t^2} = \frac{1}{t}$
3. Les unités de $c(x)$ : $\frac{CHF}{kg}$; Les unités de $c'(x) = \frac{CHF}{(kg)^2}$.
   $c'(x)$ a alors les mêmes unités que $C''(x)$.

## 10.2 Fonctions marginales et dérivées

Les fonctions économiques marginales expriment pour le cas discret combien la valeur de fonction croît ou décroît si l'argument augmente d'une unité. Pour une fonction d'utilité la fonction d'utilité marginale exprime l'augmentation de l'utilité pour une consommation supplémentaire d'une unité. Evidemment cette utilité dépend de la quantité $x$ déjà consommée - une glace supplémentaire n'a pas la même utilité après la consommation préliminaire d'une ou de quatre glaces. Pour le cas d'une fonction de coût la fonction de coût marginal indique combien les coûts augmentent si on produit une unité de plus. Les coûts supplémentaires dépendent de nouveau de la quantité déjà produite. Pour le cas discret on peut définir la fonction de coût marginal (définition traditionnelle)

$$C_m(x) := C(x+1) - C(x)$$

Il n'est pas facile d'analyser des fonctions marginales de ce type. Pour pouvoir utiliser les instruments du calcul différentiel on définit les fonctions marginales à l'aide du calcul différentiel. On peut rendre plausible le pas de la définition traditionnelle à la définition basée sur les dérivées par les réflexions suivantes.

La pente de la tangente $g$ en $x_0$ est $f'(x_0)$. La tangente $g$ est une droite. C'est pourquoi sa pente est $\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ pour des $x$ arbitraires différents de $x_0$, p.ex. pour $x = x_0 + 1$. Avec cela on obtient :

$$f'(x_0) = \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(x_0+1) - g(x_0)}{x_0 + 1 - x_0} = g(x_0+1) - g(x_0).$$

A l'aide du graphique 10.2.1 on voit que

$$f(x_0+1) - f(x_0) \approx g(x_0+1) - g(x_0) = f'(x_0)$$

pourvu que la courbe ne change pas trop rapidement de direction en $[x_0, x_0+1]$.

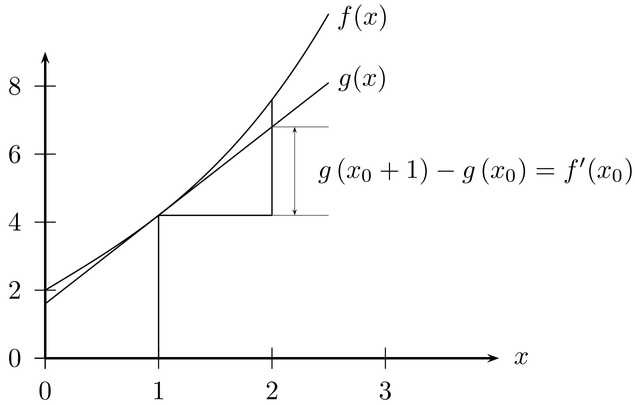


FIGURE 10.2.1 – Graphique pour l'équation approximative $f(x_0+1) - f(x_0) \approx g(x_0+1) - g(x_0) = f'(x_0)$

Le reste $r(x) = f(x) - g(x)$ tend de plus très rapidement vers 0 pour $x \to x_0$ (voir théorème 7.6.6 et la remarque suivant sa démonstration, page 223). Pour le cas d'une fonction de coût il est alors raisonnable d'exprimer les coûts marginaux à l'aide de la première dérivée, si la courbe ne change pas trop rapidement de direction. Pour profiter des possibilités flexibles du calcul différentiel il s'impose de définir les coûts marginaux à l'aide de la dérivée, même si $f$ change en $[x_0, x_0+1]$ rapidement de direction. C'est pourquoi nous allons entendre désormais par „fonction de coût marginal", „fonction de profit marginal", „fonction de recette marginale", etc. la première dérivée des fonctions correspondantes.

### 10.2.1 Définitions de quelques fonctions marginales

— fonction de coût : $C = C_v + C_f$, $C$ exprime les coûts en fonction de la quantité produite ; $C_v$ est la fonction de coût variable, $C_f$ la fonction de coût fixe ;
  fonction de coût marginal : $C'(x) = \frac{d}{dx}C(x)$
  fonction de coût unitaire : $c(x) = \frac{C(x)}{x}$
  à relever : $C'(x) = C_v'(x)$
  fonction de coût unitaire marginal : $c'(x) = \frac{d}{dx}c(x)$
— fonction de demande : $p_D(x)$
— fonction de recette : $R(x) = x \cdot p_D(x)$, $R$ exprime la recette en fonction de la quantité vendue ;
  fonction de recette marginale :$R'(x) = \frac{d}{dx}R(x)$
  pour un prix constant : $R'(x) = p$
— fonction de production $x(r)$, qui exprime la quantité produite en fonction des facteurs de production (matières premières, biens intermédiaires, capital ou travail).
  productivité marginale $x'(r) = \frac{d}{dr}x(r)$
  fonction de production moyenne ou productivité moyenne : $\bar{x}(r) = \frac{x(r)}{r}$
  productivité moyenne marginale : $\bar{x}'(r) = \frac{d}{dr}\frac{x(r)}{r}$
— fonction de profit : $P$, exprime le profit en fonction de la quantité vendue.
  fonction de profit marginal : $P'(x) = \frac{d}{dx}P(x)$.
  fonction de profit unitaire : $g(x) = \frac{P(x)}{x}$
  fonction de profit unitaire marginal : $g'(x) = \frac{d}{dx}\frac{P(x)}{x}$
— fonction de marge sur coût variable : $P_V(x) = R(x) - C_v(x)$
  fonction de marge sur coût variable marginal : $P_V'(x) = \frac{d}{dx}(R(x) - C_v(x)) = R'(x) - C_v'(x) = R'(x) - C'(x)$
  fonction de marge sur coût variable unitaire : $p_V(x) = \frac{P_V(x)}{x}$

fonction de marge sur coût variable unitaire marginal : $p'_V(x) = \frac{d}{dx}\frac{P_V(x)}{x}$

— fonction de consommation : $C^o$ qui exprime la consommation mesurée en argent en fonction du revenu $Y$. Fonction de consommation marginale (propension marginale à consommer) : $C^{o\prime}(Y) = \frac{dC^o(Y)}{dY} > 0$ (quand on gagne plus, on consomme plus)
fonction d'épargne : $E$, exprime l'épargne en fonction du revenu $Y$.
Fonction d'épargne marginale (propension marginale à épargner) : $E'(Y) = \frac{dE(Y)}{dY} > 0$ (quand on gagne plus on épargne plus)
On peut affirmer : $Y = C^o(Y) + E(Y)$ et avec cela : $\frac{d}{dY}Y = 1 = \frac{d}{dY}C^o(Y) + \frac{d}{dY}E(Y)$
Il en résulte $C^{o\prime}(Y) \leq 1$ et $E'(Y) \leq 1$

### 10.2.2 Exercices

1. Supposons les fonctions économiques suivantes (source : Tietze, J. (2005), *Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik*, pages 6-16 ff).
Fonction de coût $C(x) = 0.06x^3 - x^2 + 50x + 400$
Fonction de production : $x(r) = -\frac{1}{60}r^3 + \frac{5}{4}r^2 + 3r$
Fonction de demande : $p_D(x) = 150 - 0.4x$
Fonction de consommation : $C^o(Y) = 1000 + 0.2Y$
Fonction d'utilité : $U(x) = 10\sqrt{x}$

calculer :

(a) les coûts marginaux pour une production de 70 $UQ$ (comparer le résultat avec résultat de la définition $C_m(x) := C(x+1) - C(x)$)
(b) les coûts variables moyens pour une production de 70 $UQ$
(c) les coûts unitaires marginaux pour une production de 100 $UQ$ ,
(d) la production moyenne pour 40 $UQ$ du facteur de production
(e) la productivité marginale pour 40 $UQ$ du facteur de production
(f) la pente de la fonction de productivité marginale pour 40 $UQ$ du facteur de production
(g) la marge sur coût variable et la marge sur coût variable unitaire pour une production de 30 $UQ$
(h) la marge sur coût variable marginal et la marge sur coût variable unitaire marginal pour une production de 30 $UQ$
(i) la recette marginale par rapport à la quantité pour une quantité vendue de 150 $UQ$
(j) la recette marginale par rapport au prix pour un prix du marché de 120 $UM/UQ$ ,
(k) le profit marginal par rapport à la quantité pour un prix du marché de 100 $UM/UQ$
(l) l'épargne marginale pour un revenu de 1000 $UM$ ,
(m) la consommation moyenne pour un revenu de 1000 $UM$
(n) le profit unitaire marginal pour une production (vendue) de 40 $UQ$ ,
(o) l'utilité marginale pour une quantité consommée de 4 $UQ$ ,
(p) l'utilité moyenne pour une quantité consommée de 4 $UQ$
(q) la production pour laquelle
i) les coûts variables moyens sont minimaux
ii) les coûts totaux moyens augmentent de 0
iii) les coûts marginaux sont identiques aux coûts unitaires
(r) le revenu pour lequel
i) on épargne pour chaque UM 60%
ii) on épargne pour chaque UM supplémentaire 60%

(s) les facteurs de production pour lesquels
i) la pente de la fonction de production est 0
ii) la productivité marginale est 0
iii) la productivité moyenne est 0
iv) la productivité marginale est égale à la productivité moyenne

(t) le prix du marché pour lequel le profit marginal par rapport à la quantité est 0

(u) la production pour laquelle les coûts marginaux et la recette marginale sont égaux.

(v) la production pour laquelle la fonction de coût marginal a une tangente horizontale,

(w) le facteur de production pour lequel deux unités supplémentaires de ce facteur augmente la production de 0.1 $UQ$,

(x) la production pour laquelle les coûts unitaires baissent de 0.4 $UM/UQ$ si la production augmente d'une $UQ$,

(y) le facteur de production pour lequel la productivité moyenne augmente de 0.5 $UQ_x/UQ_r$ si l'on utilise une unité de moins de ce facteur,

(z) le prix du marché pour lequel une augmentation du prix de 0.1 $UM/UQ$ mène à une diminution de la recette de 0.5 $UM$.

2. Calculer pour les fonctions de l'exercice 1 :

(a) la production pour laquelle le profit unitaire baisse de 2 $UM/UQ$ si la production augmente de 10 $UQ$,

(b) la consommation pour laquelle
i) l'utilité marginale
ii) l'utilité moyenne se monte à a) 0.5 b) 0,

(c) la production pour laquelle la marge sur coût variable augmente de 80 $UM$ si la production baisse de 4 $UQ$.

3. Répondre pour les fonctions économiques suivantes aux questions de l'exercice 1 et 2 :
Fonction de coût : $C\,(x) = e^{0.001x+10} + 10'000 \qquad (0 \leq x \leq 15'000UQ)$
Fonction de production : $x(r) = \sqrt{4r - 100} \qquad (r \geq 25\ UQ)$
Fonction de demande : $x(p) = -100 \ln(0.0005p) \qquad (0 < p \leq 2'000UM/UQ)$
Fonction de consommation : $C^o\,(Y) = \frac{200Y+10000}{Y+80} \qquad (Y \geq 0)$
Fonction d'utilité : $U(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 1.5x^2 + 2x$

4. Calculer pour les fonctions de l'exercice 3 :

(a) la fonction $r(x)$ qui exprime la consommation du facteur de production en fonction de la quantité produite,

(b) la consommation marginale du facteur de production pour une production de 20 $UQ_x$

(c) le point de saturation de la fonction de consommation et de la fonction de consommation moyenne pour un revenu croissant sans limite.

(d) le point de saturation de la fonction de consommation marginale et de la fonction d'épargne marginale pour un revenu croissant sans limite.

### 10.2.3 Solutions

1. On obtient :

(a) $C'\,(x) = \frac{d}{dx}\left(0.06x^3 - x^2 + 50x + 400\right) = 0.18x^2 - 2x + 50$
$C'(70) = 792\ UM/UQ$ (Comparaison : $C\,(70+1) - C\,(70) = 0.06 \cdot 71^3 - 71^2 + 50 \cdot 71 + 400 - \left(0.06 \cdot 70^3 - 70^2 + 50 \cdot 70 + 400\right) = 803.66$).

(b) $c_v(x) = \frac{0.06x^3 - x^2 + 50x}{x} = 0.06x^2 - x + 50$
$c_v(70) = 274\ UM/UQ$

(c) $c(x) = \frac{0.06x^3 - x^2 + 50x + 400}{x} = 0.06x^2 - x + 50 + \frac{400}{x}$
$c'(x) = \frac{d}{dx}\left(0.06x^2 - x + 50 + \frac{400}{x}\right) = 0.12x - \frac{400}{x^2} - 1$
$c'(100) = 10.96\ UM/UQ^2$

(d) $\bar{x}(r) = \frac{x(r)}{r} = \frac{-\frac{1}{60}r^3 + \frac{5}{4}r^2 + 3r}{r} = -\frac{1}{60}r^2 + \frac{5}{4}r + 3$
$\bar{x}(40) = 26.33\ UQ_x/UQ_r$

(e) $x'(r) = \frac{d}{dr}\left(-\frac{1}{60}r^3 + \frac{5}{4}r^2 + 3r\right) = \frac{5}{2}r - \frac{1}{20}r^2 + 3$
$x'(40) = 23\ UQ_x/UQ_r$

(f) $x''(r) = \frac{d}{dr}\left(\frac{5}{2}r - \frac{1}{20}r^2 + 3\right) = \frac{5}{2} - \frac{1}{10}r$
$x''(40) = -1.5\ UQ_x/UQ_r^2$

(g) $C_v(x) = 0.06x^3 - x^2 + 50x$
$R(x) = xp(x) = 150x - 0.4x^2$
$P_V(x) = R(x) - C_v(x) = 150x - 0.4x^2 - \left(0.06x^3 - x^2 + 50x\right) = 100x + 0.6x^2 - 0.06x^3$
$P_V(30) = 1920\ UM$;
$p_V(x) = \frac{100x + 0.6x^2 - 0.06x^3}{x} = 100 + 0.6x - 0.06x^2$
$p_V(30) = 64\ UM/UQ$

(h) $P'_V(x) = \frac{d}{dx}\left(100x + 0.6x^2 - 0.06x^3\right) = 1.2x - 0.18x^2 + 100$
$P'_V(30) = -26 UM/UQ$;
$p'_V(x) = \frac{d}{dx}\left(100 + 0.6x - 0.06x^2\right) = 0.6 - 0.12x$
$p'_V(30) = -3UM/UQ^2$

(i) $R(x) = xp(x) = x\,(150 - 0.4x) = 150x - 0.4x^2$
$R'(x) = \frac{d}{dx}\left(150x - 0.4x^2\right) = 150 - 0.8x$
$R'(150) = 30\ UM/UQ$

(j) la fonction de recette en fonction du prix : isoler le $x$ en $p_D(x) = 150 - 0.4x$ : $x(p) = 375 - 2.5p$
$R(p) = px(p) = 375p - 2.5p^2$
$\frac{d}{dp}\left(375p - 2.5p^2\right) = 375 - 5p$
$R'(120) = -225\ UM/UM = -225$

(k) $x(100) = 375 - 2.5 \cdot 100 = 125$
$P(x) = R(x) - C(x) = x(150 - 0.4x) - \left(0.06x^3 - x^2 + 50x + 400\right) = 100x + 0.6x^2 - 0.06x^3 - 400$
$P'(x) = \frac{d}{dx}\left(100x + 0.6x^2 - 0.06x^3 - 400\right) = 1.2x - 0.18x^2 + 100$
$P'(125) = -2562.50\ UM/UQ$

(l) $E(Y) = Y - C^o(Y) = Y - (1000 + 0.2Y) = 0.8Y - 1000$
$E'(Y) = \frac{d}{dY}(0.8Y - 1000) = 0.8$
$E'(1000) = 0.8\ UM/UM = 0.8$

(m) $\bar{C}^o(Y) = \frac{1000 + 0.2Y}{Y} = 0.2 + \frac{1000}{Y}$
$\bar{C}^o(1000) = 1.2UM/UM = 1.2$

(n) $p(x) = \frac{p_D(x)}{x} = \frac{100x + 0.6x^2 - 0.06x^3 - 400}{x} = 100 + 0.6x - 0.06x^2 - \frac{400}{x}$
$p'(x) = \frac{d}{dx}\left(100 + 0.6x - 0.06x^2 - \frac{400}{x}\right) = \frac{400}{x^2} - 0.12x + 0.6$
$p'(40) = -3.95UM/UQ^2$

(o) $\frac{d}{dx}U(x) = \frac{d}{dx}(10\sqrt{x}) = \frac{5}{\sqrt{x}}$
$U'(4) = 2.5UU/UQ$ ($UU$ pour unité d'utilité)

(p) $\bar{U}(x) = \frac{10\sqrt{x}}{x} = \frac{10}{\sqrt{x}}$
$\bar{U}(4) = 5UU/UQ$

(q) i) $k_v(x) = \frac{0.06x^3 - x^2 + 50x}{x} = 0.06x^2 - x + 50$
$k'_v(x) = \frac{d}{dx}\left(0.06x^2 - x + 50\right) = 0.12x - 1$
$0.12x - 1 = 0$ si et seulement si $x = 8.333\,3$
$k''_v(x) = \frac{d}{dx}(0.12x - 1) = 0.12 > 0$ (il y a alors un minimum)

ii) $c(x) = \frac{0.06x^3 - x^2 + 50x + 400}{x} = \frac{400}{x} - x + 0.06x^2 + 50$
$c'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{400}{x} - x + 0.06x^2 + 50\right) = 0.12x - \frac{400}{x^2} - 1$
$0.12x - \frac{400}{x^2} - 1 = 0$, si $x = 18.294$
iii) $\frac{d}{dx}\left(0.06x^3 - x^2 + 50x + 400\right) = 0.18x^2 - 2x + 50$
$0.18x^2 - 2x + 50 = \frac{0.06x^3 - x^2 + 50x + 400}{x}$ si $x = 18.294$

(r) i) $\bar{S}(Y) = \frac{Y - C^o(Y)}{Y} = 1 - \frac{C^o(Y)}{Y} = 1 - \frac{1000 + 0.2Y}{Y} = 0.8 - \frac{1000}{Y}$
$\bar{S}(Y) = 0.6 \Longrightarrow Y = 5000\ UM$
ii) Il n'y a pas de revenu avec une épargne marginale de 0.6, puisque $S'(Y) = \frac{d}{dY}(Y - (100 - 0.2Y)) = 0.8$ (l'épargne est la différence entre le revenu et la consommation $C^o(Y) = 100 - 0.2Y$)

(s) i) $\frac{d}{r}x(r) = \frac{d}{dr}\left(-\frac{1}{60}r^3 + \frac{5}{4}r^2 + 3r\right) = \frac{5}{2}r - \frac{1}{20}r^2 + 3$
$\frac{5}{2}r - \frac{1}{20}r^2 + 3 = 0$ si et seulement si $x = 25 - \sqrt{685} = -1.172\,5$ (puisque négatif le résultat ne se trouve pas dans le domaine économique) ou $x = \sqrt{685} + 25 = 51.1725$
ii) Selon la définition de la productivité marginale identique à i)
iii) $\bar{x}(r) = \frac{-\frac{1}{60}r^3 + \frac{5}{4}r^2 + 3r}{r} = \frac{5}{4}r - \frac{1}{60}r^2 + 3$
$\frac{5}{4}r - \frac{1}{60}r^2 + 3 = 0$ si et seulement si $r = \frac{75}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{705} = -2.327\,8$ (le résultat ne se trouve pas dans le domaine économique) ou $r = \frac{3}{2}\sqrt{705} + \frac{75}{2} = 77.328$
iv) $\frac{5}{2}r - \frac{1}{20}r^2 + 3 = \frac{5}{4}r - \frac{1}{60}r^2 + 3$ si et seulement si $r = 0$ ou $r = \frac{75}{2} = 37.5$

(t) $P'(x) = \frac{d}{dx}(xp_D(x) - C(x)) =$
$\frac{d}{dx}\left(x(150 - 0.4x) - \left(0.06x^3 - x^2 + 50x + 400\right)\right) = -0.18x^2 + 1.2x + 100 = 0 \Longrightarrow x = 27.138\ UQ$,
$p_D(27.138) = 150 - 0.4 \cdot 27.138 = 139.14\ UM/UQ$

(u) $C'(x) = R'(x) \Longrightarrow$ solution identique à exercice précédent 1t), car $P'(x) = R'(x) - C'(x) = 0$.

(v) $\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(0.06x^3 - x^2 + 50x + 400\right)\right) = 0.36x - 2$
$0.36x - 2 = 0$ si et seulement si $x = 5.555\,6\ UQ$

(w) Pour 2 unitées de $r$ supplémentaires la quantité produite $x(r)$ monte de 0.1. On peut dessiner une sécante $s$ à travers les points $(r, x(r))$ et $(r+2, x(r+2))$, tel que $x(r+2) - x(r) = 0.1$. La sécante à la pente $\frac{0.1}{2} = 0.05$. La tangente $g$ à travers le point $((r, x(r)))$ a une pente similaire à celle de la sécante et peut par conséquent être utilisée pour trouver une solution approximative de $r$. Solution approximative : $x'(r) = \frac{5}{2}r - \frac{1}{20}r^2 + 3$ :

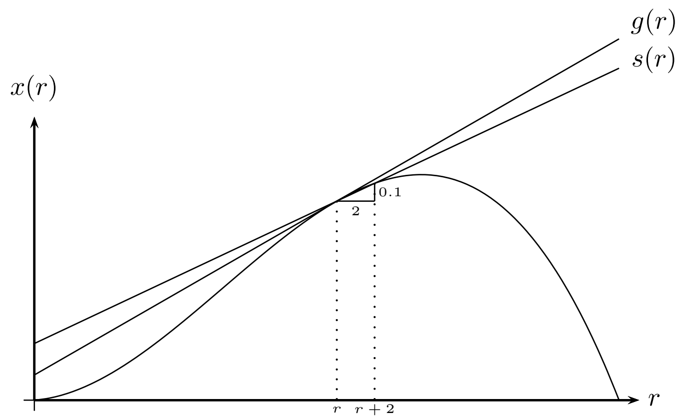


FIGURE 10.2.2 – Courbes avec les points $(r, x(r))$ et $(r+2, x(r+2))$, la sécante $s(r)$ à travers ces points et la tangente $g(r)$ en $(r, x(r))$

$x'(r) = \frac{0.1}{2} \Longrightarrow r = 51.15\ UQ_r$
ou de manière exacte :

$-\frac{1}{60}(r+2)^3+\frac{5}{4}(r+2)^2+3(r+2)-\left(-\frac{1}{60}r^3+\frac{5}{4}r^2+3r\right)=0.1$
$=-\frac{1}{10}r^2+\frac{24}{5}r+\frac{163}{15}=0.1$
$-\frac{1}{10}r_1^2+\frac{24}{5}r_1+\frac{163}{15}=0.1$, Solution : $r=50.147$ $(-2.147$ n'est pas dans le domaine économique)

Au lieu de simplifier (probabilité de faire des fautes) et de calculer avec polyroot de R on peut aussi procéder de la manière suivante :

```
f=function(x) -1/60*(x+2)^3 +5/4*(x+2)^2+3*(x+2)-(-1/60*x^3+5/4*x^2+3*x)-0.1
plot(f,xlim=c(0,60))
abline(0,0)
uniroot(f,c(50,60))
```

(x) Solution approximative : $c'(x)=0.12x-\frac{400}{x^2}-1$ : $c'(x)=-0.4\Longrightarrow x=16.80\ UQ$
ou de manière exacte :
$c(x+1)-c(x)=0.06(x+1)^2-(x+1)+50+\frac{400}{x+1}-\left(0.06x^2-x+50+\frac{400}{x}\right)=0.12x-\frac{400}{x}+\frac{400}{x+1}-0.94=-0.4$
solution : 16.309 (avec R : voir exercice w))

(y) Solution approximative : $\frac{d}{dr}\bar{x}(r)=\frac{d}{dr}\left(-\frac{1}{60}r^2+\frac{5}{4}r+3\right)=\frac{5}{4}-\frac{1}{30}r$
$\bar{x}'(r)=-0.5\Longrightarrow r=52.5\ UQ_r$
solution exacte : $-\frac{1}{60}(r-1)^2+\frac{5}{4}(r-1)+3-\left(-\frac{1}{60}r^2+\frac{5}{4}r+3\right)=\frac{1}{30}r-\frac{19}{15}=0.5$, solution : 53 (avec R : voir exercice w))

(z) $Sp_D(x)=150-0.4x\Longrightarrow x(p)=\frac{p-150}{-0.4}=375-2.5p$
$R(p)=375p-2.5p^2$
Solution exacte : Avec $R(p+0.1)-R(p)=375(p+0.1)-2.5(p+0.1)^2-\left(375p-2.5p^2\right)=37.475-0.5p=-0.5\Longrightarrow p=75.95$ (avec R : voir exercice w)
En utilisant la dérivée (solution approximative) : $\frac{d}{dp}R(p)=\frac{d}{dp}\left(375p-2.5p^2\right)=375-5p$
$375-5p=\frac{-0.5}{0.1}$ (la fonction de recette baisse de $-0.5$ pour une augmentation de 0.1. La pente approximative en $p$ est alors identique à $\frac{-0.5}{0.1}$) Solution : 76 )

2. On obtient :

(a) solution approximative $g'(x)=\frac{400}{x^2}-0.12x+0.6$ : $g'(x)=\frac{-2}{10}=-0.2\Longrightarrow x=17.52\ UQ$
solution exacte : $g(x+10)-g(x)=$
$100+0.6(x+10)-0.06(x+10)^2-\frac{400}{x+10}-\left(100+0.6x-0.06x^2-\frac{400}{x}\right)=-2$,
solution : 12.921 (le résultat est assez différent du résultat approximatif : sur l'axe des $x$ il y a une augmentation de 10 unités ce qui explique la différence). (avec R : voir exercice 1.w))

(b) i) a) Avec $U(x)=10\sqrt{x}\Longrightarrow U'(x)=\frac{5}{\sqrt{x}}$ : $U'(x)=0.5\Longrightarrow x=100\ UQ$
b) $U'(x)\neq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}^+\backslash\{0\}$
ii) a) Avec $\bar{U}(x)=\frac{10\sqrt{x}}{x}=\frac{10}{\sqrt{x}}$ : $\bar{U}(x)=0.5\Longrightarrow x=400\ UQ$
b) $\bar{U}(x)\neq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}^+\backslash\{0\}$

(c) Solution approximative $P_V'(x)=1.2x-0.18x^2+100$ : $P_V'(x)=-20\Longrightarrow x=29.37\ UQ$
solution exacte : $G_D(x-4)=$
$100(x-4)+0.6(x-4)^2-0.06(x-4)^3-\left(100x+0.6x^2-0.06x^3\right)=80$,
solution : 31.342 (avec R : voir exercice 1.w))

3. On obtient :

(a) $C'(70)=23.62\ UM/UQ$

(b) $c_v(70)=\frac{e^{0.001\cdot 70+10}}{70}=337.48\ UM/UQ$

(c) $c'(100)=-3.19\ UM/UQ^2$

(d) $\bar{x}(40) = 0.19\ UQ_x/UQ_r$

(e) $x'(40) = 0.26\ UQ_x/UQ_r$

(f) $x''(40) = -0.0086\ UQ_x/UQ_r^2$

(g) Les coûts fixes sont :
$C_F(0) = e^{0.001\cdot 0+10} + 10000 = 32026.$
$C_v(x) = C(x) - C_F(x) = e^{0.001\cdot x+10} + 10000 - 32026 = \exp(0.001\, x + 10) - 22026$
$P_V(x) = R(x) - C_v(x)$
$x(p) = -100 \ln(0.0005p) \Longrightarrow p(x) = \frac{\exp\left(\frac{x}{-100}\right)}{0.0005} = 2000 \exp\left(-\frac{x}{100}\right)$
$R(x) = xp(x) = 2000x \exp\left(-\frac{x}{100}\right)$
$P_V(x) = 2000x \exp\left(-\frac{x}{100}\right) - (\exp(0.001\, x + 10) - 22026) =$
$2000x \exp\left(-\frac{x}{100}\right) - \exp(0.001\, x) \exp 10) + 22026$
$P_V(30) = 30 \cdot 2000 \cdot \exp\left(-\frac{30}{100}\right) - \exp(0.001\ \cdot 30) \exp(10) + 22026 = 43778.29.$
$p_V(x) = \frac{P_V(x)}{x} = \frac{2000x \exp\left(-\frac{x}{100}\right) - (\exp(0.001\, x+10) - 22026)}{x} = 2000e^{-\frac{1}{100}x} + \frac{22\,026}{x} - \frac{1}{x} e^{0.001\, x} e^{10}$

$p_V(30) = 2000e^{-\frac{1}{100}30} + \frac{22\,026}{30} - \frac{1}{30} e^{0.001\cdot 30} e^{10} = 1459.28$

(h) $\frac{d}{dx}\left(2000x \exp\left(-\frac{x}{100}\right) - (\exp(0.001\, x + 10) - 22026)\right) =$
$2000.0e^{-0.01x} - 0.001\ \exp(0.001\, x + 10) - 20xe^{-0.01x}$
$P_V'(30) = 2000.0e^{-0.01\cdot 30} - 0.001\ \exp(0.001 \cdot 30 + 10) - 20 \cdot 30e^{-0.01\cdot 30} =$
$1014.45\ UM/UQ$ ;
$\frac{d}{dx}\left(2000e^{-\frac{1}{100}x} + \frac{22\,026}{x} - \frac{1}{x} e^{0.001\, x} e^{10}\right) =$
$-\frac{10^{-18}}{x^2}\left(2 \times 10^{19} x^2 e^{-0.01x} - 2.202\,6 \times 10^{22} e^{0.001\, x} + 2.202\,6 \times 10^{19} x e^{0.001\, x} + 2.\,202\,6 \times 10^{22}\right)$

$p_V'(30) = -\frac{10^{-18}}{30^2}(2 \cdot 10^{19} \cdot 30^2 e^{-0.01\cdot 30} - 2.202\,6 \cdot 10^{22} e^{0.001\cdot 30} +$
$2.202\,6 \cdot 10^{19} \cdot 30e^{0.001\cdot 30} + 2.\,202\,6 \cdot 10^{22}) = -14.83\ UM/UQ^2$

(i) $R'(x) = \frac{d}{dx} 2000x \exp\left(-\frac{x}{100}\right) =$
$2000 \exp\left(-\frac{x}{100}\right) + 2000x \exp\left(-\frac{x}{100}\right)\left(-\frac{1}{100}\right)$
$R'(150) = 2000 \exp\left(-\frac{150}{100}\right) + 2000 \cdot 150 \exp\left(-\frac{150}{100}\right)\left(-\frac{1}{100}\right) = -223.13\ UM/UQ$

(j) $R(p) = px(p) = p(-100 \ln(0.0005p)) = -100p \ln(0.0005p)$
$\frac{d}{dp}(-100p \ln(0.0005p)) = -100 \ln(0.0005p) - 100p 0.0005 \frac{1}{p} = 760.\,04 - 100 \ln p$
$R'(120) = 760.04 - 100 \ln(120) = 281.29\ UQ/UM$

(k) $x_0 = x(100) = 299.57 UQ \Longrightarrow P'(x_0) = -229.30\ UM/UQ$

(l) $E'(1000) = 0.9949\ UM/UM$

(m) $\bar{C}(1000) = 0.1944\ UM/UM$

(n) $p'(40) = 6.60\ UM/UQ^2$

(o) $U(4) = -2\ UU/UQ$

(p) $U(4) = 2.67\ UU/UQ$

(q) i) pas de solution ($0 \notin$ domaine de définition de $c$)
ii) $x = 1.144.54\ UQ$
iii) voir ii)

(r) i) $Y = 472.87\ UM$ ii) $Y = 42.47\ UM$

(s) 19) i) $x'(r) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \Longrightarrow$ Il n'y a pas de tels facteurs de production
ii) voir i)
iii) $r = 25\ UQ_r$
iv) $r = 50\ UQ_r$

(t) $x = 96.81\ UQ$ ; $p = 759.61\ UM/UQ$

(u) voir exercice 3t)

(v) $C''(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction de coût marginal n'a nulle part une tangente horizontale.

(w) Solution approximative : (à l'aide de la dérivée) : $\frac{d}{dr}\sqrt{4r-100} = \frac{1}{\sqrt{r-25}}$
$\frac{1}{\sqrt{r-25}} = \frac{0.1}{2} \Longrightarrow r = 425UQ_r$
solution exacte :
$r_2 - r_1 = 2 \Longrightarrow r_2 = r_1 + 2$
$x(r+2) - x(r) = \sqrt{4(r+2)-100} - \sqrt{4r-100} = 0.1$
$\Longrightarrow r = 424$

(x) Solution approximative : (à l'aide de la dérivée) : : $k(x) = \frac{e^{0.001x+10}+10000}{x}$
$\frac{d}{dx}\frac{e^{0.001x+10}+10000}{x} = \frac{e^{0.001x+10}(0.001)x-\left(e^{0.001x+10}+10000\right)}{x^2} = \frac{0.001xe^{0.001x+10}-e^{0.001x+10}-10000}{x^2}$
$\frac{0.001xe^{0.001x+10}-e^{0.001x+10}-10000}{x^2} = -0.4$
$0.001xe^{0.001x+10} - e^{0.001x+10} - 10000 + 0.4x^2 = 0$ (avec uniroot de R :
f=function (x) 0.001*x*exp(0.001*x+10)-exp(0.001*x+10)-10000+0.4*xˆ2
plot(f,xlim=c(270,290))
uniroot(f,c(270,290)))
$x = 278.37\ ME$
solution exacte : $k(x+1) - k(x) = \frac{e^{0.001(x+1)+10}+10000}{x+1} - \left(\frac{e^{0.001x+10}+10000}{x}\right) = -0.4$
Avec uniroot de R :
f=function(x) (exp(0.001*(x+1)+10)+10000)/(x+1)-(exp(0.001*x+10)+10000)/x+0.4
plot(f,xlim=c(270,300))
uniroot(f,c(270,300)
277.8743

(y) Solution approximative : (à l'aide de la dérivée) : $\frac{d}{dr}\bar{x}(r) = \frac{d}{dr}\left(\frac{\sqrt{4r-100}}{r}\right) =$
$\frac{\frac{1}{2}(4r-100)^{-\frac{1}{2}}4r-\sqrt{4r-100}}{r^2}$ avec $\sqrt{4r-100} = \sqrt{4(r-25)} = 2\sqrt{r-25}$ :
$\frac{d}{dr}\bar{x}(r) = \frac{\frac{4r}{2\cdot 2\sqrt{r-25}}-2\sqrt{r-25}}{r^2} = \frac{\frac{r}{\sqrt{r-25}}-2\sqrt{r-25}}{r^2} = \frac{\frac{r-2\sqrt{r-25}\sqrt{r-25}}{\sqrt{r-25}}}{r^2} = \frac{\frac{r-2(r-25)}{\sqrt{r-25}}}{r^2} =$
$\frac{r-2r+50}{r^2\sqrt{r-25}} = \frac{-r+50}{r^2\sqrt{r-25}} = -\frac{r-50}{r^2\sqrt{r-25}}$

$-\frac{r-50}{r^2\sqrt{r-25}} = -0.5,$
$-r + 50 = -0.5r^2\sqrt{r-25}$
$(-r+50)^2 = r^2 - 100r + 2500 = 0.5^2r^4(r-25) = 6.25r^4 - 0.25r^5$
$0.25r^5 - 6.25r^4 + r^2 - 100r + 2500 = 0.$
avec polyroot(c(2500,-100,1,0,-6.25,0.25))
on obtient deux zéros réels positifs : 4.483048, 24.993590
Ils n'appartiennent pas au domaine de définition de $\sqrt{4r-100}$, car $4 \cdot NS - 100 < 0$ pour les deux zéros $NS$. Pas de solution.
Exact : $\bar{x}(r-1) - \bar{x}(r) = 0.5$
$\frac{\sqrt{4(r-1)-104}}{(r-1)} - \left(\frac{\sqrt{4r-100}}{r}\right) = 0.5$
$\sqrt{4(r-1)-104}r - \sqrt{4r-100}(r-1) = 0.5r^2 - 0.5r$
domaine de définition : $4r - 104 \geq 0$ : $[26, \infty[$
Il ne suffirait pas de montrer graphiquement qu'il n'y a pas de zéro de $f(x) = \sqrt{4r-104}r - \sqrt{4r-100}(r-1) - 0.5r^2 + 0.5r$ en $[26, \infty[$. Une telle démarche n'est pas possible, parce que $[26, \infty[$ est un intervalle infini. Par conséquent on ne peut pas travailler avec uniroot de R. On pourrait essayer de montrer que la dérivée continue pour $x > 26$ est négative et que $\sqrt{4r-104}r - \sqrt{4r-100}(r-1) - 0.5r^2 + 0.5r < 0$ est pour un $r > 26$ (difficile !).

(z) Solution approximative : (à l'aide de la dérivée) :
$x(p) = -100\ln(0.0005p)$
$E(p) = px(p) = -p100\ln(0.0005p)$
$E'(p) = -100\ln(0.0005p) - p100\frac{1}{0.0005p}0.0005 = -100\ln(0.0005p) - 100 =$
$660.09 - 100\ln p$ (car $100\ln(0.0005p) = 100\ln p - 760.09$)

$E'(p) = \frac{-0.5}{0.1} = -5$, c. à d.
$660.09 - 100 \ln p = -5$
$\ln p = \frac{-5-660.09}{-100} = 6.650\,9$
$\exp \ln p = \exp 6.650\,9 = 773.48 GE/ME$

solution exacte :
$E\,(p) = -p100 \ln (0.0005p)$
Avec $E\,(p + 0.1) - E\,(p) = -\,(p + 0.1)\,100 \ln (0.0005\,(p + 0.1)) + p100 \ln (0.0005p) = -0.5$
avec uniroot de R :f=function(x)
-x*100*log(0.0005*(x+0.1))-0.1*100*log(0.0005*(x+0.1))+x*100*log(0.0005*x)+0.5
plot(f,xlim=c(770,780))
uniroot(f,c(770,780))
résultat : 773.432

4. On obtient :
   (a) $r(x) = 0.25x^2 + 25$
   (b) $r'(20) = 10\ UQ_r/UQ_x$
   (c) $\lim_{Y\to\infty} C(Y) = 200\ UM$ ; $\lim_{Y\to\infty} \bar{C}(Y) = 0\ UM/UM$
   (d) $\lim_{Y\to\infty} C'(Y) = 0\ UM/UM$ ; $\lim_{Y\to\infty} S'(Y) = 1\ UM/UM$

## 10.3 Objectifs d'apprentissage

— Arriver à justifier pourquoi on remplace la définition de la fonction économique marginale classique par une version basée sur la dérivée
— Comprendre et savoir utiliser les définitions des fonctions économiques marginales et unitaires introduites.
— Arriver à résoudre des problèmes du type des exercices.

# Chapitre 11

# Types de croissance et construction de fonctions économiques

Le comportement de croissance des fonctions joue un rôle important pour la théorie économique. Ainsi une économie peut croître ou décroître et la croissance ou la décroissance peuvent s'accélérer ou se ralentir. Les coûts peuvent augmenter de plus en plus ou de moins en moins. Le calcul différentiel offre des instruments efficaces pour analyser des fonctions aptes à décrire de tels comportements.

Une fonction croissante peut être convexe ou concave (voir figures 11.0.1 et 11.0.2). Dans le premier cas elle croît de plus en plus et pour le deuxième de moins en moins.

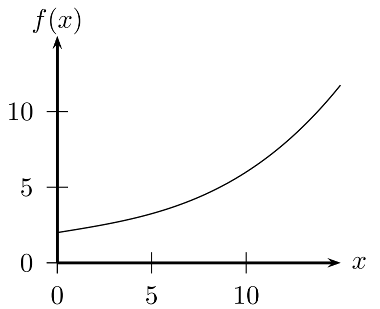


Figure 11.0.1 – croissance convexe

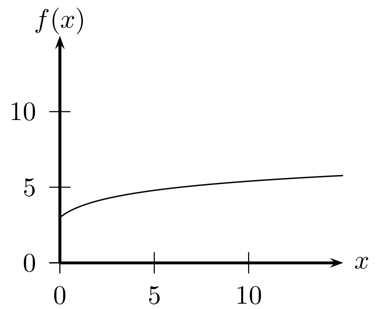


Figure 11.0.2 – croissance concave

La première dérivée est positive pour les deux fonctions tandis que la deuxième est positive pour la fonction convexe mais négative pour la fonction concave.

Par rapport aux courbes décroissantes on peut faire la même distinction : une courbe qui décroît peut décroître de plus en plus, c. à d. qu'elle est concave, ou elle peut décroître de moins en moins, c. à d. elle est convexe (voir figures 11.0.3 et 11.0.4).

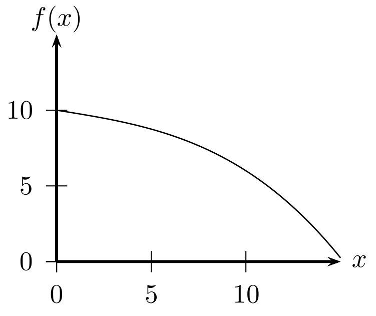


FIGURE 11.0.3 – décroissance concave

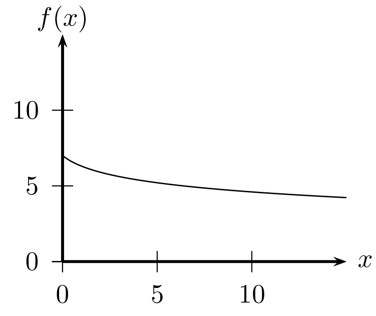


FIGURE 11.0.4 – décroissance convexe

La première dérivée est négative pour les deux fonctions tandis que la deuxième est positive pour la fonction convexe mais négative pour la courbe concave.

Une fonction croissante peut d'abord être concave dans un intervalle et ensuite convexe dans l'intervalle suivant (voir figure 11.0.5).

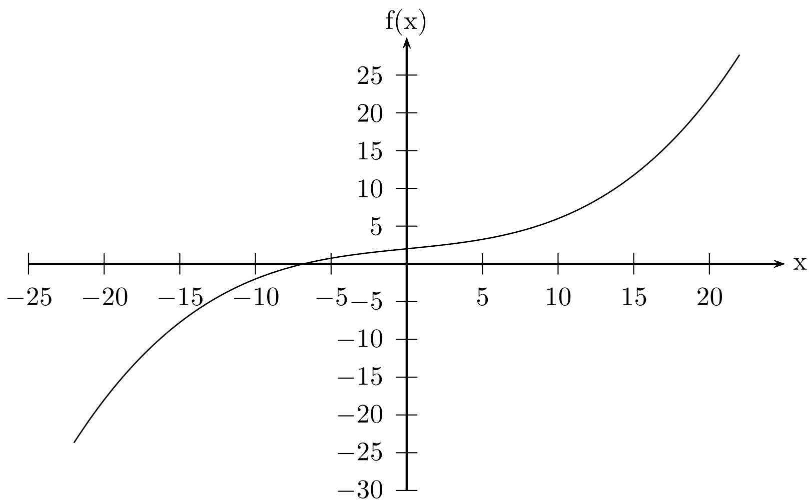


FIGURE 11.0.5 – Fonction avec croissance d'abord concave, ensuite convexe ; la croissance est minimale au point d'inflexion

Au point d'inflexion concave-convexe la pente est localement minimale. Par conséquent la première dérivée y prend son minimum. Il y a alors un zéro de la deuxième dérivée et une valeur positive de la troisième dérivée.

Une fonction croissante peut être convexe dans un intervalle et être concave dans l'intervalle suivant (voir figure 11.0.6).

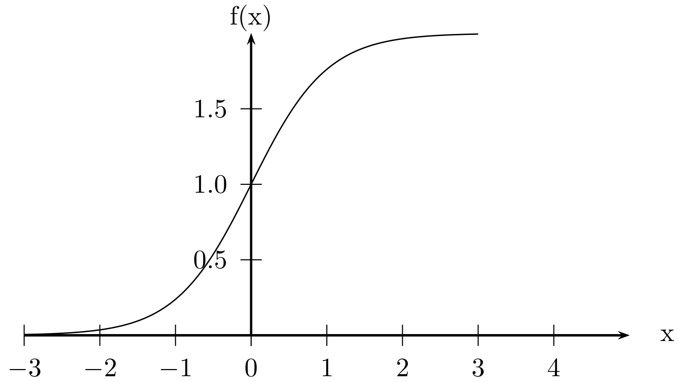


FIGURE 11.0.6 – Fonction avec croissance convexe et par la suite croissance concave ; la croissance est maximale au point d'inflexion

La première dérivée atteint au point d'inflexion convexe-concave son maximum. La deuxième dérivée y est zéro et la troisième négative.

Jusqu'à présent on a pu développer des fonctions économiques en calculant une fonction à travers des points donnés. A l'aide des résultats mentionnées ci-dessus nous pouvons parfois adapter des fonctions à des points données en tenant de plus compte de certaines exigences théoriques vis-à-vis des fonctions à construire. Nous donnons quelques exemples.

## 11.1 Fonction d'utilité néoclassique

Selon la théorie la fonction d'utilité néoclassique $U$, qui exprime l'utilité en fonction de la quantité consommée, doit remplir les conditions suivantes :

1. L'utilité marginale est positive.
2. La croissance de l'utilité baisse (première loi de Gossen).
3. La fonction dispose d'un zéro en 0 (l'utilité d'une consommation de 0 unité est 0).

Discuter le réalisme de ces conditions (p.ex. consommation de chocolat). Ces conditions impliquent

$$U'(x) > 0$$

$$U''(x) < 0$$

Nous pouvons choisir des fonctions d'utilité qui remplissent ces conditions, p.ex.

$$U(x) = \sqrt{x}$$

pour $x \geq 0$.
Car :

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$$

pour $x > 0$ et

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = -\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} < 0$$

pour $x > 0$ (voir figure 11.1.7).

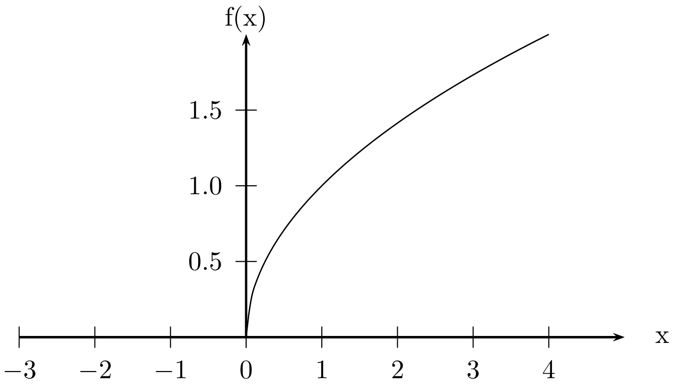


FIGURE 11.1.7 – Exemple d'une fonction avec les caractéristiques d'une fonction d'utilité néoclassique

Une fonction logarithme déplacée à gauche peut aussi remplir ces conditions : p.ex.

$$U(x) = ln(x+1)$$

pour $x \geq 0$, car

$$\frac{d}{dx}\ln(x+1) = \frac{1}{x+1} > 0$$

pour $x \geq 0$.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x+1}\right) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0$$

pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Ainsi la fonction remplit les conditions exigées (voir figure 11.1.8).

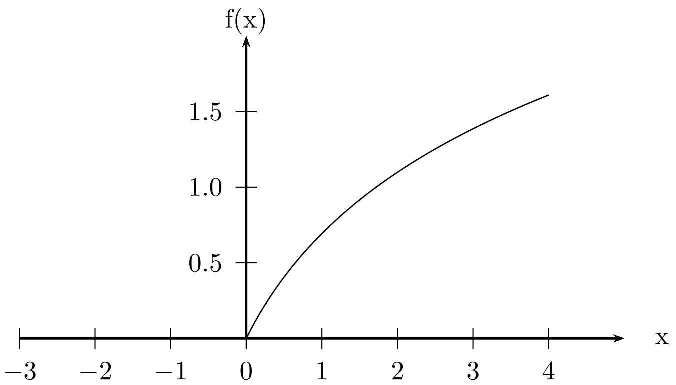


FIGURE 11.1.8 – Exemple supplémentaire d'une fonction qui a les caractéristiques d'une fonction d'utilité néoclassique

## 11.2 Fonction de production respectant la loi des rendements non-proportionnels

Selon la théorie économique une fonction de production respectant la loi des rendements non-proportionnels est définie par les caractéristiques suivantes.

1. Dans un premier intervalle les rendements marginaux sont positifs et croissants.
2. Dans le deuxième intervalle les rendements marginaux sont positifs, mais décroissants.
3. Dans le troisième intervalle les rendements marginaux sont négatifs et décroissants.
4. La fonction a un zéro en 0.

(voir figure 11.2.9).

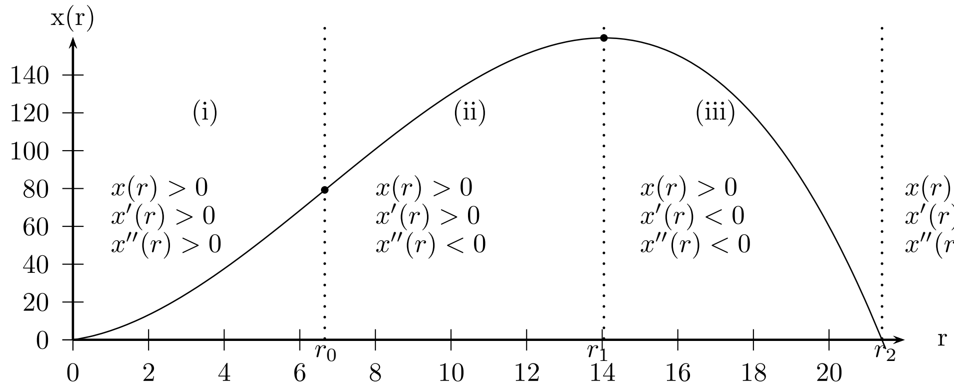


FIGURE 11.2.9 – Forme typique d'une fonction de production respectant la loi des rendements non-proportionnels

Le passage du premier au deuxième intervalle s'appelle „seuil de la loi des rendements", c'est le point d'inflexion. Le passage du deuxième au troisième intervalle s'appelle „point de saturation". L'investissement du facteur de production au delà de ce point est dénué de sens puisque le rendement décroît après ce point.

Il faut trouver une fonction $x(r)$ tel que ($r_0$ est le seuil de la loi des rendements, $r_1$ est le point de saturation, $r_2$ est le deuxième zéro de la fonction) :

1. $x'(r) > 0$ sur $]0, r_1[$, $x'(r) < 0$ sur $]r_1, r_2[$. Au point de saturation $r_1$ : $x'(r_1) = 0$
2. $x''(r) > 0$ dans l'intervalle $[0, r_0[$ (convexe), et $x''(r) < 0$ dans l'intervalle $]r_0, r_2]$ (concave). Zéro réel en $r_0$ de la deuxième dérivée $x''(r_0) = 0$ (au seuil de la loi des rendements). Il y a un point d'inflexion convexe-concave, c. à d. $x'''(r_0) < 0$
3. $x(0) = 0$

Nous essayons d'adapter un polynôme du troisième degré à ces conditions. Il est alors de la forme

$$x(r) = ar^3 + br^2 + cr + d$$

et nous obtenons :

1. première dérivée : $\frac{d}{dr}\left(ar^3 + br^2 + cr\right) = 3ar^2 + 2br + c$
2. deuxième dérivée : $\frac{d}{dr}\left(3ar^2 + 2br + c\right) = 6ar + 2b$
3. troisième dérivée : $\frac{d}{dr}(6ar + 2b) = 6a$
   Puisqu'il y a un point d'inflexion convexe-concave on peut en déduire : $x'''(r_0) = 6a < 0$
   Ainsi $a$ doit être négatif.
4. le point d'inflexion (seuil) se trouve en : $r_0 = \frac{-b}{3a}$ (deuxième dérivée y est identique à 0 : $6ar_0 + 2b = 0$)
   $r_0$ doit y être positif. Puisque $a$ est négatif, $b$ doit être positif : $b > 0$
5. Sur $]0, r_1[$ ($r_1$ est le point sur l'axe des $r$ où la fonction $x$ est maximale) la fonction est, selon la théorie économique, strictement croissante. Par conséquent la dérivée $x'(r)$ est positive sur $]0, r_1[$. C'est pourquoi $\lim_{x \to 0^+} x'(r) \geq 0$ pour des dérivées continues. Comme les dérivées des polynômes sont continues et que $x'(0) = c$, on peut affirmer que $c \geq 0$. En général $c > 0$ (car autrement il y a un minimum de $x$ en 0).

Nous obtenons alors les conditions suivantes pour une fonction de production respectant la loi des rendements non-proportionnels :

$$\boxed{a < 0, b > 0, c \geq 0, d = 0}$$

et on a montré que les conditions d'une telle fonction sont satisfaites (d'abord croissance stricte, ensuite décroissance stricte, point d'inflexion convexe-concave dans l'intervalle où la fonction croît ; un des zéros est 0).

**Exemple 11.2.1.** $x(r) = -0.1r^3 + 2r^2 + 3r$
*Le seuil de la loi des rendements est en :* $x = \frac{-b}{3a} = \frac{-2}{3(-0.1)} = 6.666\,7$
*Le point de saturation est en :* $\frac{d}{dr}\left(-0.1r^3 + 2r^2 + 3r\right) = -0.3r^2 + 4r + 3 = 0 \Longrightarrow r = 14.045$
$\frac{d}{dr}(-0.3r^2 + 4r + 3)$ *:* $-0.6r + 4 < 0$ *en* $r = 14.045$ *(voir figure 11.2.10).*

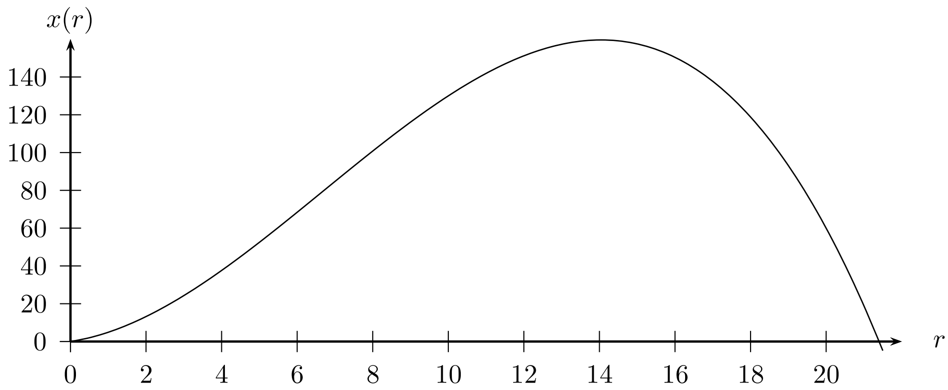


FIGURE 11.2.10 – Fonction de production de l'exemple - la loi des rendements non-proportionnels est respectée

◊

## 11.3 Fonction de coût respectant la loi des rendements non-proportionnels

Selon la définition, une fonction de coût respectant la loi des rendements non-proportionnels a les qualités suivantes :

1. Pour les coûts fixes $d$ : $d \geq 0$
2. Les coûts marginaux sont partout positifs (la première dérivée est partout positive et il n'y a pas de zéro de la première dérivée dans l'intervalle $]0, \infty[$).
3. Les coûts marginaux baissent d'abord pour augmenter par la suite, c. à d. il y a un point d'inflexion concave-convexe dans l'intervalle $]0, \infty[$.

(voir figure 11.3.11).

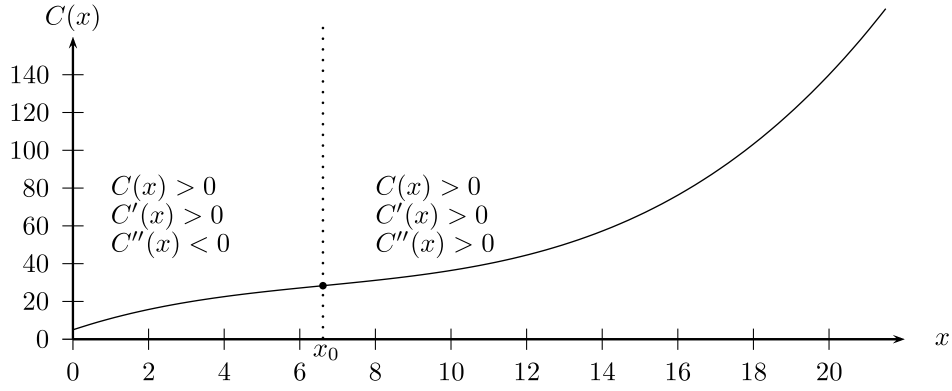


FIGURE 11.3.11 – Forme typique d'une fonction de coût respectant la loi des rendements non-proportionnels

Nous choisissons de nouveau la classe des polynôme du troisième degré en espérant y trouver des fonctions propices. La fonction aurait alors la forme

$$C(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Nous essayons de déterminer les paramètres $a, b, c$ et $d$ de sorte qu'il en résulte une fonction de la forme recherchée :

1. $\frac{d}{dx}\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) = 3ax^2 + 2bx + c$
2. $\frac{d}{dx}\left(3ax^2 + 2bx + c\right) = 6ax + 2b$
3. $\frac{d}{dx}(6ax + 2b) = 6a$
4. Les zéros de la première dérivée (à l'aide de la formule pour les zéros d'un polynôme du deuxième degré) :

$$\begin{aligned} 3ax^2 + 2bx + c = 0 \Longrightarrow & \\ x_1 &= \frac{1}{6a}\left(-2b + 2\sqrt{(b^2 - 3ac)}\right) \\ x_2 &= \frac{1}{6a}\left(-2b - 2\sqrt{(b^2 - 3ac)}\right) \end{aligned}$$

   Il n'y pas de zéro réel de la première dérivée, si $b^2 - 3ac < 0 \Longleftrightarrow b^2 < 3ac$
5. La troisième dérivée doit être positive, car il y a un point d'inflexion concave-convexe. Ainsi : $a > 0$
6. Pour le zéro de la deuxième dérivée (extremum de la première dérivée, c. à d. point d'inflexion) : $6ax_0 + 2b = 0 \Longleftrightarrow x_0 = -\frac{b}{3a}$. Comme $x_0$ et $a$ sont positifs, $b$ doit être négatif, pour que l'équation soit correcte. Ainsi : $b < 0$.
7. puisque $b^2 < 3ac, a > 0, b^2 > 0 \Longrightarrow c > 0$.

Nous avons alors les conditions suivantes pour une fonction de coût respectant la loi des rendements non-proportionnels

$$\boxed{a > 0, b < 0, c > 0, d \geq 0, b^2 < 3ac},$$

par laquelle les conditions sont remplies.

**Exemple 11.3.1.** $C(x) = 0.2x^3 - 6x^2 + 80x + 100$
*Les quatre premières conditions sont satisfaites. Pour la dernière :* $(-6)^2 = 36 < 3 \cdot 0.2 \cdot 80 = 48$ *(voir figure 11.3.12).*

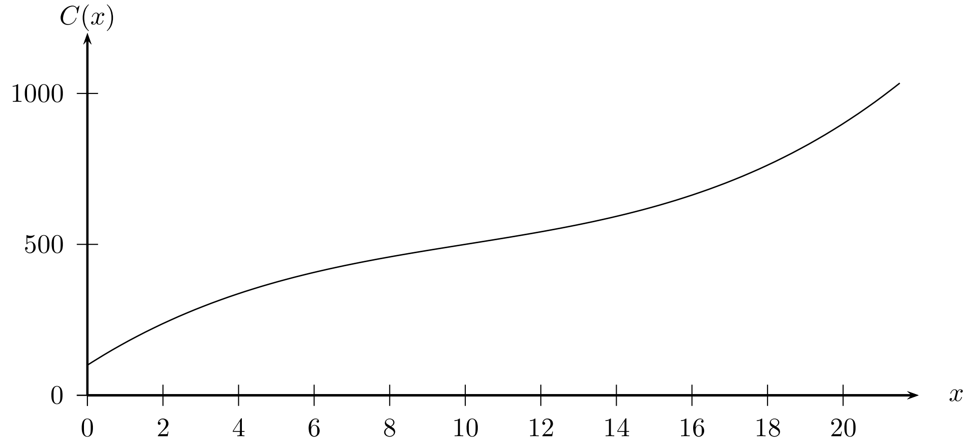


FIGURE 11.3.12 – Représentation graphique de l'exemple avec une forme typique d'une fonction de coût respectant la loi des rendements non-proportionnels

*Le point d'inflexion (où les coûts marginaux commencent à monter) se trouve en :* $x = -\frac{b}{3a} = \frac{6}{3 \cdot 0.2} = 10$. ◊

## 11.4 Fonction de consommation keynésienne

Selon Keynes (John Maynard Keynes, 1883 - 1946, économiste britannique) la consommation d'un ménage est décrite par une fonction de consommation $C(Y)$ ($Y$ est le revenu) avec les caractéristiques suivantes :

1. La propension marginale à la consommation ($C'(Y)$) est positive pour chaque revenu $Y$, c. à d. si quelqu'un gagne plus, il dépense plus pour la consommation. Formellement : $C'(Y) > 0$
2. La propension marginale à la consommation est inférieure à 1, c. à d. le revenu supplémentaire n'est pas dépensé entièrement pour la consommation. Formellement : $C'(Y) < 1$ (cette formule peut se déduire si on suppose qu'on ne dépense pas tout le revenu, c. à d. $C(Y) < Y$. En dérivant les deux côté de l'inéquation, on obtient $C'(Y) < 1$). Comme $Y = C(Y) + E(Y)$ avec la fonction d'épargne $E(Y)$, on obtient $\frac{d}{dY}Y = 1 = C'(Y) + E'(Y)$. Puisque $C'(Y) < 1$ on peut en déduire que $E'(Y) > 0$. La propension marginale à l'épargne est supérieur à 0.
3. La propension marginale à la consommation est inférieure à la consommation moyenne $c(Y) := \frac{C(Y)}{Y}$. Formellement : $C'(Y) < c(Y)$. Si on gagne un franc de plus on dépense de ce franc moins pour la consommation que ce qu'on dépense par franc jusque là. Par là la consommation moyenne (consommation par franc) baisse avec la croissance du revenu et l'épargne moyenne (l'épargne par franc gagné) augmente. Formellement : nous dérivons :
   $\frac{d}{dY}c(Y) = \frac{C'(Y) \cdot Y - C(Y) \cdot 1}{Y^2} = \frac{1}{Y}(C'(Y) - c(Y))$
   Selon (3.) $C'(Y) < c(Y)$, alors : $(C'(Y) - c(Y)) < 0$.
   Ainsi : $\frac{d}{dY}c(Y) = \frac{1}{Y}(C'(Y) - c(Y)) < 0$
   Puisque $\frac{d}{dY}c(Y) < 0$, la fonction $c(Y)$ est strictement décroissante.

On ne peut pas en déduire que $C'(Y)$ est strictement décroissante (c. à d. que $C$ est concave), l'exemple suivant le démontre :

**Exemple 11.4.1.** *Supposons* $C(Y) = 0.5Y + 1 + \frac{36}{Y+9}$ *:*
$\frac{d}{dY}\left(0.5Y + 1 + \frac{36}{Y+9}\right) = 0.5 + \frac{-36}{(Y+9)^2} > 0$ *pour* $Y > 0$.
$\frac{d}{dY}\left(0.5 + \frac{-36}{(Y+9)^2}\right) = \frac{-(-36) \cdot 2(Y+9)}{(Y+9)^4} = \frac{72}{(Y+9)^3} > 0$ *pour* $Y > 0$ *(alors convexe)*

*De l'autre côté*: $\frac{dC(Y)}{dY} = 0.5 + \frac{-36}{(Y+9)^2} < \frac{C(Y)}{Y} = \frac{0.5Y+1+\frac{36}{Y+9}}{Y} = 0.5 + \frac{1}{Y} + \frac{36}{Y(Y+9)}$
*pour* $0 < Y$, *car* $\frac{-36}{(Y+9)^2} < \frac{1}{Y} + \frac{36}{Y(Y+9)}$ *pour* $Y > 0$.
*Finalement*: $\frac{dC(Y)}{dY} = 0.5 + \frac{-39}{(Y+9)^2} < 1$ *pour* $Y > 0$
$C$ *remplit toutes les conditions mais est convexe. (Remarque : Comme* $\lim_{Y\to\infty} \frac{36}{Y+9} = 0$, $C(Y)$ *s'approche pour des* $Y$ *assez grands de la droite* $0.5Y + 1$*).* $\diamondsuit$

Les données empiriques conseillent de choisir des fonctions $C$ concaves.

## 11.5 Fonction de production néoclassique

Selon la définition, la fonction de production néoclassique $x(r)$ est caractérisée par des rendements marginaux positifs mais décroissants, c. à d. $x'(r) > 0$ et $x''(r) < 0$. De plus pour $r > 0$ : $x(r) \geq 0$.

Des fonctions propices sont alors p.ex. $x(r) = 2r^{0.5}$, comme vous pouvez contrôler par calcul.

### 11.5.1 Exercices

1. Contrôler si la fonction de production suivante respecte la loi des rendements non-proportionnels (avec et sans formules).
   (a) $x(r) = -r^3 + 12r^2 - 40r$
   (b) $x(r) = -r^3 + 10r^2 + r$
   (c) $x(r) = -2r^3 + 18r^2 - 60r$
   (d) $x(r) = 4r^3 + 24r^2 - 60r$
2. Supposons sur la base de réflexions de la théorie économique que nous partons d'une fonction d'utilité néoclassique $U(x) = a\sqrt{x}$ avec $a > 0$.
   (a) Une courbe de ce type est déterminée par une seule donnée. Déterminer $b > 0$ pour la courbe de cette forme qui passe par $(5, 3)$.
   (b) Nous avons plusieurs points supplémentaires qui ne se trouvent pas sur la courbe donnée par $U(x) = a\sqrt{x}$ et $(5, 3)$ et nous pensons qu'on pourrait calculer à travers le nuage de ces points une fonction de la forme $U(x) = a\sqrt{x}$, tel que $S(a) = \sum_{i=1}^{n} \left(u_i - a\sqrt{x_i}\right)^2$ soit minimal (voir pour une idée analogue la régression linéaire que vous avez vue en statistiques). Développer une formule pour la détermination de $a$ pour des données $(x_1, u_1), (x_2, u_2), ..., (x_n, u_n)$ avec $x_i, u_i \geq 0$ et au moins un $(x_i, u_i)$, tel que $x_i > 0$ et $u_i > 0$.
3. Un modèle raisonnable pour représenter la relation entre la quantité consommée et l'utilité soit donné par une fonction $U(x) = \log_a(x + 1)$. Déterminer le $a$, si le point $(5, 3)$ est donné.
4. Construire une fonction de coût respectant la loi des rendements non-proportionnels qui passe par les points $(0, 7)$, $(20, 30)$ (= point d'inflexion) et $(70, 120)$.
5. Contrôler si la fonction de production $x(r) = (0.8r + 2)^{0.5}$ est néoclassique.
6. Déterminer les coefficients de $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (fonction de coût) (trois exercices a, b et c indépendants !) :
   (a) un zéro de $f$ en $x_0 = 0$, zéro est en même temps un point d'inflexion. Il y a un extremum local en $x_1 = -2$. La tangente en $x_2 = 4$ a la pente 3.
   (b) $f$ a un point d'inflexion en $(1; 0)$ et une pente de $-9$. $f$ coupe l'ordonnée en $(0, 8)$.
   (c) la pente de $f$ en $(0; 16)$ se monte à 30 et il y a un point d'inflexion en $(3, 52)$.

7. Déterminer les constantes $a$, $b$, $c$ de la fonction rationnelle $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+c}$ tel que $f$ a un pôle en $x_1 = 2$ et un extremum local en $x_2 = 1$ avec la valeur de fonction $-0.25$.

8. Trouver l'équation d'une fonction de coût respectant la loi des rendements non-proportionnels qui respecte les conditions suivantes :
coûts fixes : 98 $UM$,
minimum des coûts marginaux pour une production de 4 $UQ$ ;
minimum des couts variables pour une production de 6 $UQ$ ;
coûts marginaux pour 3 $UQ = 2\frac{UM}{UQ}$.

### 11.5.2 Solutions

1. On doit respecter : $a < 0, b > 0, c \geq 0$.

   (a) $x(r) = -r^3 + 12r^2 - 40r$ (la troisième condition n'est pas remplie)
   Par calcul : $x'(r) = -3r^2 + 24r - 40 = 0$, zéros : $\frac{2}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} + 4 = 5.6330$
   $4 - \frac{2}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} = 2.367$. Selon la théorie, la fonction devrait être strictement croissante sur $]0, 2.367[$ . $x'(1) = -3 + 24 - 40 = -19 < 0$. Comme la dérivée est continue, elle partout négative sur $]0, 2.367[$ et la fonction strictement décroissante sur l'intervalle.

   (b) $x(r) = -r^3 + 10r^2 + r$ (toutes les conditions sont remplies)
   Par calcul : (i) La fonction doit être positive sue un intervalle $]0, r_3[$, tel que $r_3 > 0$ : $-r^3 + 10r^2 + r = 0$, zéros : $\sqrt{26} + 5 = 10.099$; $5 - \sqrt{26} = -0.099020$ et 0.
   $x(1) = -1 + 10 + 1 = 10 > 0$. La fonction continue est alors partout positive sur $]0, 10.099[$
   (ii) Il faut avoir un maximum dans l'intervalle $]0, 10.099[$ :
   $\frac{d}{dr}\left(-r^3 + 10r^2 + r\right) = -3r^2 + 20r + 1 = 0 \Longrightarrow zéros : \frac{1}{3}\sqrt{103} + \frac{10}{3} = 6.7163$; $\frac{10}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{103} = -0.049631$.
   $\frac{d}{dr}\left(-3r^2 + 20r + 1\right) = 20 - 6r$; $x''(6.7163) < 0$. Ainsi il y un maximum en $r_2 = 6.7163$
   (iii) Il faut avoir un point d'inflexion convexe-concave dans l'intervalle $]0, 6.7163[$ :
   $\frac{d}{dr}(20 - 6r) = -6 < 0$. Ainsi le maximum de la première dérivée est en $20 - 6r = 0$, $\frac{10}{3} = 3.3333$. Par conséquent il y a un point d'inflexion convexe-concave en $r_1 = 3.3333$.
   (iv) Puisqu'il y a en $]0, r_3[$ un maximum positif , que $r_3$ est un zéro avoisinant de 0 et que la fonction est positive sur $]0, r_3[$ , elle est à gauche du maximum strictement croissante et à droite strictement décroissante.

   (c) $x(r) = -2r^3 + 18r^2 - 60r$ (la troisième condition n'est par remplie)
   par calcul : $\frac{d}{dr}\left(-2r^3 + 18r^2 - 60r\right) = -6r^2 + 36r - 60 = 0$, pas de zéro réel. Comme $x$ est continue et que $x(0) = -60$, la première dérivée est partout strictement décroissante. La condition qu'à droite de 0 il faut avoir un intervalle sur lequel la fonction est strictement croissante n'est alors pas remplie.

   (d) $x(r) = 4r^3 + 24r^2 - 60r$ (la première et la troisième condition ne sont par remplies)
   Par calcul : $\frac{d}{dr}\left(4r^3 + 24r^2 - 60r\right) = 12r^2 + 48r - 60 = 0$, zéros : $1, -5$
   $x'(0) = -60$. La fonction continue est alors strictement décroissante sur $]0, 1[$ et il n'y pas d'intervalle $]0, r_1[$ tel que la fonction y est strictement croissante.

2. On obtient :

   (a) $x(r) = a\sqrt{5}; x(5) = 3 = a\sqrt{5}; \Longrightarrow a = \frac{3}{\sqrt{5}} = 1.3416$

   (b) Avec $\frac{d}{da}a\sqrt{x_i} = \sqrt{x_i}$ on obtient pour un extremum (règle pour l'addition et règle de la chaîne)

$$\begin{aligned}\frac{d}{da}\sum_{i=1}^{n}(u_i - a\sqrt{x_i})^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left(2\left(u_i - a\sqrt{x_i}\right)\left(-\sqrt{x_i}\right)\right) \\ &= 2\sum_{i=1}^{n}\left(-\sqrt{x_i}u_i + ax_i\right) \\ &= 2\left(\sum_{i=1}^{n}-u_i\sqrt{x_i} + a\sum_{i=1}^{n}x_i\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

si et seulement si

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n}u_i\sqrt{x_i}}{\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

Pour déterminer s'il s'agit d'un minimum :

$$\frac{d}{da}\left(2\left(\sum_{i=1}^{n}-u_i\sqrt{x_i} + a\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{n}x_i > 0$$

pour $x_i \geq 0$ et au moins un $x_i > 0$.
Il y alors un minimum en

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n}u_i\sqrt{x_i}}{\sum_{i=1}^{n}x_i}.$$

Remarque : en statistiques il faudrait encore essayer de prouver que cette méthode d'estimation de $a$ n'a pas de biais (= faute systématique).
Avec R on peut simuler un exemple pour l'exercice (pour $a = 5$ et $n = 50$, on peut remplacer $a$ et $n$ par d'autres valeurs) avec les commandes suivantes :

```
n=50
a=5
x=runif(n,0,20)
u=a*sqrt(x)
u=u+rnorm(n,0,1)
plot(x,u)
ae=sum(u*sqrt(x))/sum(x)
ae
f=function(y) ae*sqrt(y) #f = fonction ou modèle estimé
curve(f,add=T)
```

3. $3 = \log_a(5+1) = \log_a 6$ si et seulement si $a = \sqrt[3]{6}$, car $\sqrt[3]{6}^3 = 6^{\frac{3}{3}} = 6$.
4. $d = 7$
   $20^3a + 20^2b + 20c + 7 = 30$
   $70^3a + 70^2b + 70c + 7 = 120$
   $\frac{d}{dx}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 3ax^2 + 2bx + c$
   $\frac{d}{dx}\left(3ax^2 + 2bx + c\right) = 6ax + 2b = 0$ en $x = 20$
   $120a + 2b = 0$ (point d'inflexion = zéro de la deuxième dérivée).

$$\begin{aligned}20^3a + 20^2b + 20c + 7 &= 30 \\ 70^3a + 70^2b + 70c + 7 &= 120 \\ 120a + 2b &= 0\end{aligned}$$

$\Longrightarrow a = \frac{13}{42\,000} = 3.095\,2 \times 10^{-4}; b = -\frac{13}{700} = -1.857\,1 \times 10^{-2}, c = \frac{587}{420} = 1.397\,6$
Ainsi, nous obtenons la fonction de coût suivante :

$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{13}{42\,000}x^3 - \frac{13}{700}x^2 + \frac{587}{420}x + 7 \\ &= 3.095\,2 \times 10^{-4}x^3 - 1.857\,1 \times 10^{-2}x^2 + 1.397\,6x + 7 \end{aligned}$$

Avec R sur la base de la représentation par matrices du système d'équations

$$\begin{pmatrix} 20^3 & 20^2 & 20 \\ 70^3 & 70^2 & 70 \\ 120 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30-7 \\ 120-7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

m=matrix(c(20ˆ3,20ˆ2,20,70ˆ3,70ˆ2,70,120,2,0),ncol=3,byrow=T) ; y=c(30-7,120-7,0) ; solve(m,y) ou avec

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 20^3 & 20^2 & 20 & 1 \\ 70^3 & 70^2 & 70 & 1 \\ 120 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 30 \\ 120 \\ 0 \end{pmatrix}$$

m=matrix(c(0,0,0,1,20ˆ3,20ˆ2,20,1,70ˆ3,70ˆ2,70,1,120,2,0,0),ncol=4,byrow=T) ; y=c(7,30,120,0) ;solve(m,y)

Nous examinons s'il s'agit d'une fonction de coût respectant la loi des rendements non-proportionnels $(a > 0, b < 0, c > 0, d \geq 0, b^2 < 3ac)$ : $b^2 = \left(-\frac{13}{700}\right)^2 = \frac{169}{490\,000} = 3.449\,0 \times 10^{-4} < 3ax = 3\frac{13}{42\,000}\frac{587}{420} = 4.193\,3$. $a > 0$; $b > 0; c > 0$.
Il s'agit alors d'une telle fonction.
Par calcul : (i) La fonction doit être positive à droite de 0.
$\frac{13}{42\,000}x^3 - \frac{13}{700}x^2 + \frac{587}{420}x + 7 = 0$ ; un seul zéro réel : $-4.693$
$C(0) = 7 > 0$. Ainsi partout positive à droite de 0 ($C$ est continue).
(ii) $C$ doit être strictement croissante sur $]0,\infty[$ : $\frac{d}{dx}\left(\frac{13}{42\,000}x^3 - \frac{13}{700}x^2 + \frac{587}{420}x + 7\right) = \frac{13}{14\,000}x^2 - \frac{13}{350}x + \frac{587}{420} = 0$, pas de zéro réel : Comme $C'(0) = \frac{587}{420} > 0$ ($C'$ est continue), $C$ est partout strictement croissante.
(iii) Il faut avoir un $x_1 > 0$ tel qu'il y a un point d'inflexion concave-convexe :
$\frac{d}{dx}\left(\frac{13}{14\,000}x^2 - \frac{13}{350}x + \frac{587}{420}\right) = \frac{13}{7000}x - \frac{13}{350} = 0$, zéro : 20
$\frac{d}{dx}\left(\frac{13}{7000}x - \frac{13}{350}\right) = \frac{13}{7000} > 0$ (alors minium de la première dérivée et point d'inflexion concave-convexe en 20).

5. $x(r) = (0.8r + 2)^{0.5}$ ; $r(0) = \sqrt{2} \neq 0$ ; la condition $r(0) = 0$ n'est pas remplie.
Il faut respecter : $x'(r) > 0$ et $x''(r) < 0$ (dans le premier quadrant)
$\frac{d}{dr}(0.8r + 2)^{0.5} = \frac{0.4}{(0.8r+2)^{0.5}} > 0$ pour $r > 0$
$\frac{d}{dr}\frac{0.4}{(0.8r+2)^{0.5}} = -\frac{0.16}{(0.8r+2)^{1.5}} < 0$ pour $r > 0$
Ainsi les autres conditions sont remplies. Il ne s'agit pas d'une fonction de production néo-classique. Une fonction de ce type serait alors $x(r) = (0.8r + 2)^{0.5} - \sqrt{2}$.

6. Nous obtenons :

   (a) $f$ a un zéro en $0 \Longrightarrow d = 0$.
   $\frac{d}{dx}\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) = 3ax^2 + 2bx + c$ (première dérivée)
   $\frac{d}{dx}\left(3ax^2 + 2bx + c\right) = 6ax + 2b$ (deuxième dérivée) $\Longrightarrow 6ax + 2b = 0$ (point d'inflexion

en 0) ; $\Longrightarrow b = 0$
Exploitation de la propriété qu'il y a un extremum local en $-2$. Là, la première dérivée est égale à 0 : $3a \cdot (-2)^2 + 2b\,(-2) + c = 12a - 4b + c = 0$
Exploitation de la propriété „tangente a la pente 3 en 4“ ; en 4 la première dérivée est alors identique à 3.
$3a \cdot (4)^2 + 2b(4) + c = 48a + 8b + c = 3$
Avec $b = 0$, on obtient le système d'équations :

$$\begin{aligned} 12a + c &= 0 \\ 48a + c &= 3 \end{aligned}$$

$a = \frac{1}{12}, c = -1$
On obtient l'équation : $f(x) = \frac{1}{12}x^3 - x$
Avec R sur la base de la représentation :

$$\begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 48 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

X=matrix(c(12,1,48,1),ncol=2,byrow=T) ;y=c(0,3) ;solve(X,y)
Alternative : On peut résoudre le système d'équations donné par :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 12 & -4 & 1 & 0 \\ 48 & 8 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(b) $d = 8$ (coupe l'ordonnée en $(0, 8)$)
$f(1) = a + b + c + d = 0$ (le zéro est $(1; 0)$, $1^3 = 1^2 = 1$)
$\frac{d}{dx}\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) = 3ax^2 + 2bx + c$ (première dérivée)
$\frac{d}{dx}\left(3ax^2 + 2bx + c\right) = 6ax + 2b$ (deuxième dérivée)
point d'inflexion en $(1, 0)) \Longrightarrow 6a \cdot 1 + 2b = 6a + 2b = 0$
$f'(1) = 3a + 2b + c = -9$ (pente en $-9$ (point d'inflexion), alors la première dérivée en 1 est $-9$)
On obtient le système d'équations :

$$\begin{aligned} d &= 8 \\ a + b + c + d &= 0 \\ 6a + 2b &= 0 \\ 3a + 2b + c &= -9 \end{aligned}$$

Avec cela : $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$.
Avec R sur la base de

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$$

X=matrix(c(0,0,0,1,1,1,1,1,6,2,0,0,3,2,1,0),ncol=4,byrow=T) ; y=c(8,0,0,-9) ; solve(X,y)

(c) $d = 16$ (passe par $(0,16)$)
$\frac{d}{dx}\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) = 3ax^2 + 2bx + c$; la pente se monte à 30 en $(0,16)$ : $3a0^2 + 2b0 + c = c = 30$
$\frac{d}{dx}\left(3ax^2 + 2bx + c\right) = 6ax + 2b$; point d'inflexion en $(3,52)$ : $6a3 + 2b = 18a + 2b = 0$
en 3 la valeur de fonction est 52 : $a3^3 + b3^2 + 3c + d = 27a + 9b + 3c + d = 52$
On obtient alors le système d'équations :

$$\begin{aligned} d &= 16 \\ c &= 30 \\ 9a + b &= 0 \\ 27a + 9b + 3c + d &= 52 \end{aligned}$$

$a = 1, b = -9$
Nous obtenons l'équation : $f(x) = x^3 - 9x^2 + 30x + 16$
Avec R sur la base de

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 1 & 0 & 0 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 30 \\ 0 \\ 52 \end{pmatrix}$$

X=matrix(c(0,0,0,1,0,0,1,0,9,1,0,0,27,9,3,1),ncol=4,byrow=T);y=c(16,30,0,52);solve(X,y)

7. Puisqu'en 2 il y a un pôle, on peut affirmer : $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{ax+b}{x^2+c}\right) = \infty$ ou $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{ax+b}{x^2+c}\right) = -\infty$. La fonction n'y est pas définie. Ainsi $2^2 + c = 0$, c, à d. $c = -4$
extremum local en 1 : $\frac{d}{dx}\left(\frac{ax+b}{x^2-4}\right) = -\frac{ax^2+4a+2bx}{(x^2-4)^2} = 0 \Longleftrightarrow ax^2 + 4a + 2bx = 0$
Ainsi en $x = 1$ : $a + 4a + 2b = 0 = 5a + 2b = 0$
Valeur de fonction en 1 : $f(1) = \frac{a+b}{1^2-4} = -0.25 \Longrightarrow a + b = (1-4)(-0.25) = 0.75$
Nous obtenons alors le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} a + b &= 0.75 \\ 5a + 2b &= 0 \end{aligned}$$

$b = 1.25, a = -0.5$
Nous obtenons l'équation : $f(x) = \frac{-0.5x+1.25}{x^2-4}$
Avec R sur la base de

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0 \end{pmatrix}$$

X=matrix(c(1,1,5,2),ncol=2,byrow=T);y=c(0.75,0);solve(X,y)

8. $d = 98$.
$C'(x) = \frac{d}{dx}\left(ax^3 + bx^2 + cx + 98\right) = 3ax^2 + 2bx + c$. La fonction de coût marginal a un extremum local en 4 : $\frac{d}{dx}\left(3ax^2 + 2bx + c\right) = 6ax + 2b$ : $6a4 + 2b = 24a + 2b = 0$
Les coûts variables sont $C_v(x) = ax^3 + bx^2 + cx$
Minimum des coûts variables en 6 : $\frac{d}{dx}\left(ax^3 + bx^2 + cx\right) = 3ax^2 + 2bx + c$ : $3a6^2 + 2b6 = 108a + 12b = 0$
Les coûts marginaux en 3 se montent à 2 : $3^3a + 6b + c = 27a + 6b + c = 2$

On obtient le système d'équations :

$$\begin{aligned} d &= 98 \\ 24a + 2b &= 0 \\ 108a + 12b + c &= 0 \\ 27a + 6b + c &= 2 \end{aligned}$$

$a = -\frac{2}{9}, b = \frac{8}{3}, c = -8, d = 98$, c.à d : $C(x) = -\frac{2}{9}x^3 + \frac{8}{3}x^2 - 8x + 98$
Ave R sur la base de

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 24 & 2 & 0 & 0 \\ 108 & 12 & 1 & 0 \\ 27 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 98 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

X=matrix(c(0,0,0,1,24,2,0,0,108,12,1,0,27,6,1,0),ncol=4,byrow=T) ;y=c(98,0,0,2) ;solve(X,y)
Il faut contrôler pour $C(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ : $a > 0, b < 0, c > 0, d \geq 0, b^2 < 3ac$.
$a < 0$. Il ne s'agit alors pas d'une fonction de coût respectant la loi des rendements non-proportionnels.

## 11.6 Objectifs d'apprentissage

- Arriver à déterminer le comportement de croissance de fonctions économiques à l'aide du calcul différentiel (intervalles convexes, concaves, points d'inflexion concave-convexe et convexe-concave).
- Arriver à examiner par rapport à des fonctions économiques les conditions les caractérisant.
- Arriver à résoudre des problèmes du types des exercices (sauf exercices 7, 8 et 2b).

# Chapitre 12

# Applications économiques supplémentaires du calcul différentiel

## 12.1 Coûts unitaires et coûts marginaux

**Définition 12.1.1.** *$g_x$ est la droite radiale de la fonction $f$ en $x$ si et seulement si $g$ est une droite qui passe par* $(0,0)$ *et* $(x, f(x))$ $\diamondsuit$

Selon la définition la droite radiale de $f$ en $x$ est une droite qui relie l'origine du système de coordonnées à un point de la fonction, à savoir le point $(x, f(x))$. Supposons que $C$ soit une fonction de coût. Dans ce cas la pente de la droite radiale de $C$ en $x$ exprime les coûts unitaires, car pour la pente $m$ de la droite radiale de $f$ en $x$ on peut affirmer : $m = \frac{C(x)}{x} = c(x)$ (= coûts unitaires ou moyens, voir figure 12.1.1).

**Exemple 12.1.2.** *Nous examinons une fonction de coût respectant la loi des rendements non-proportionnels :*

$$C(x) = 4x^3 - 24x^2 + 60x + 50.$$

*Si nous déplaçons le point de la droite radiale sur la fonction de coût, on peut examiner d'une manière graphique le développement des coûts unitaires. Pour une fonction de coût respectant la loi des rendements non-proportionnels les coûts unitaires baissent d'abord (la pente de la droite radiale baisse), et monte par la suite (la pente de la droite radiale augmente). Le point où la pente est minimale est là où la droite radiale devient une tangente de la fonction de coût - en d'autre mot il s'agit de l'endroit $x$ où*

$$C'(x) = c(x).$$

*En ce point les coûts unitaires sont minimaux (voir figure 12.1.1) et on appelle la production de cette quantité „optimum de production".*

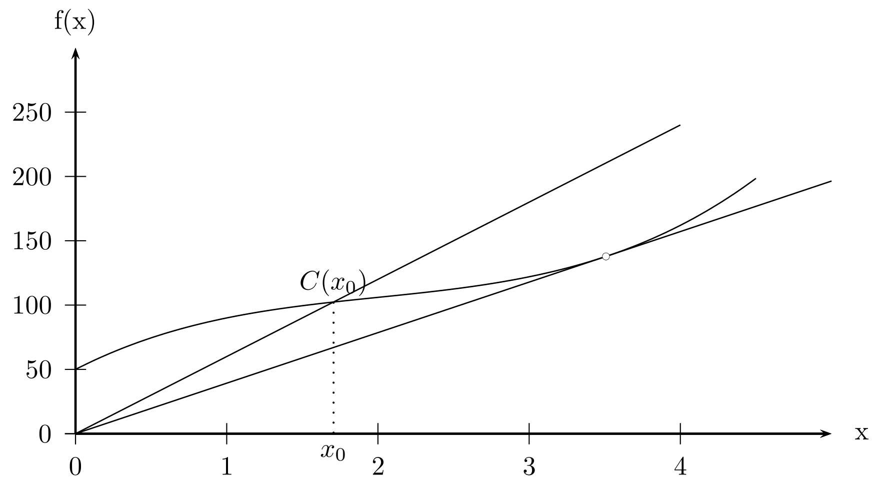


FIGURE 12.1.1 – La pente de la droite radiale indique les coûts unitaires $c(x_0)$ pour $x_0$ à l'intersection de la fonction de coûts $C$ et la droite radiale ; pour $C'(x) = c(x)$ la droite radiale devient la tangente de la fonction de coût respectant la loi des rendements non-proportionnels

◊

Si le prix d'un produit est plus bas que les coûts unitaires minimaux, la production n'est pas rentable à long terme. C'est pourquoi l'optimum de production constitue à long terme une limite inférieure du prix (= seuil de rentabilité).

On peut faire des réflexions similaires par rapport aux coûts variables. Au lieu de dessiner les coûts variables dans un graphique tel que la fonction de coûts variables traverse l'origine, nous pouvons aussi étudier leur développement dans un graphique qui contient la fonction de coût total. La droite radiale pour les coûts variables commencent alors au point $(0, C_f)$ - $C_f$ sont les coûts fixes. On voit directement sur le graphique que les coûts variables unitaires sont inférieurs aux coûts totaux unitaires, pourvu qu'il y ait des coûts fixes (comparer les droites radiales à travers le même points de $C$ ; voir figure 12.1.2).

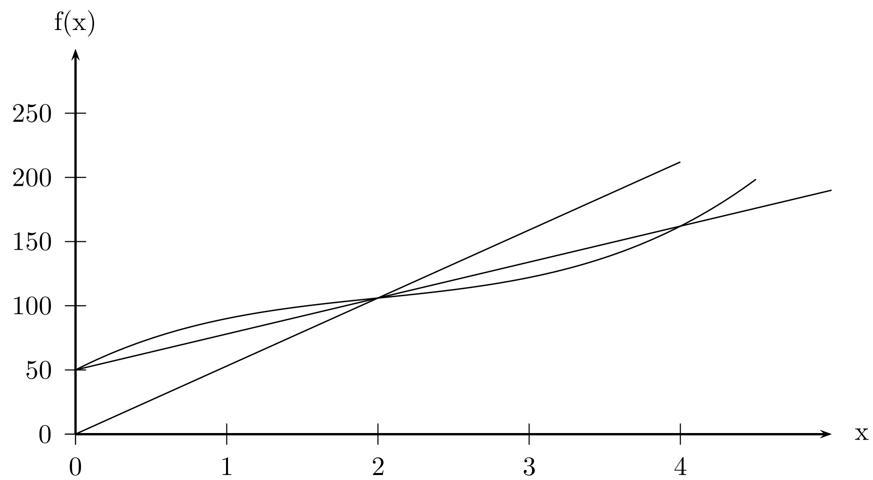


FIGURE 12.1.2 – Les coûts variables unitaires sont inférieurs aux coûts totaux unitaires - la pente de la droite radiale pour les coûts variables est inférieure à la pente de la droite radiale des coûts totaux

Les coûts variables sont minimaux là où la droite radiale devient tangente à la fonction de coût total :

$$C_v'(x) = C'(x) = \frac{C_v(x)}{x}.$$

S'il y a des coûts fixes, le point des coûts variables unitaires minimaux est atteint plus rapidement et les coûts unitaires variables minimaux sont inférieurs aux coûts unitaires totaux minimaux.

Interprétation économique : si le prix est égal au minimum des coûts unitaires variables, on peut couvrir exactement les coûts variables. On ne peut cependant pas couvrir les coûts fixes. Puisque les coûts fixes se présentent de toute façon, on peut à court terme continuer la production, car le prix couvre au moins les coûts variables - en attendant un développement favorable du marché. A long terme une telle production n'est cependant pas rentable. On appelle la quantité de production aux coûts variables unitaires minimaux „minimum de production". Ces coûts constitue „une limite inférieure des prix à court terme" (ou : „seuil de fermeture"). Même à court terme on perd, si le prix baisse en dessous de ce seuil.

Par rapport à notre exemple on peut calculer :
$C'(x) = \frac{d}{dx}\left(4x^3 - 24x^2 + 60x + 50\right) = 12x^2 - 48x + 60$
$c(x) = \frac{4x^3-24x^2+60x+50}{x} = 4x^2 - 24x + 60 + \frac{50}{x}$
$c_v(x) = \frac{4x^3-24x^2+60x}{x} = 4x^2 - 24x + 60$
$C'(x) = c(x) \iff 12x^2 - 48x + 60 = 4x^2 - 24x + 60 + \frac{50}{x} \iff$
$12x^3 - 48x^2 + 60x = 4x^3 - 24x^2 + 60x + 50 \iff$
$8x^3 - 24x^2 - 50 = 0$
Nous obtenons : $8x^3 - 24x^2 - 50 = 0 \Longrightarrow x = 3.5079$

**Alternative** : Pour calculer le seuil de rentabilité on peut aussi calculer la tangente de $C$ à travers $(0,0)$. La tangente $ax$ avec la pente $a$ a un point commun avec $C$. Pour ce point on peut dire : $ax = C(x) = 4x^3 - 24x^2 + 60x + 50 \Longrightarrow a = \frac{4x^3-24x^2+60x+50}{x} = c(x)$. Pour la pente on peut dire $a = C'(x) = 12x^2 - 48x + 60$. Avec cela on obtient : $12x^2 - 48x + 60 = \frac{4x^3-24x^2+60x+50}{x}$.
Nous obtenons le seuil de fermeture par :
$C'(x) = c_v(x) \iff 12x^2 - 48x + 60 = 4x^2 - 24x + 60 \iff$
$8x^2 - 24x = 0 \Longrightarrow x = 3$
Les coûts variables unitaires minimaux sont atteints en 3. (voir figure 12.1.3).

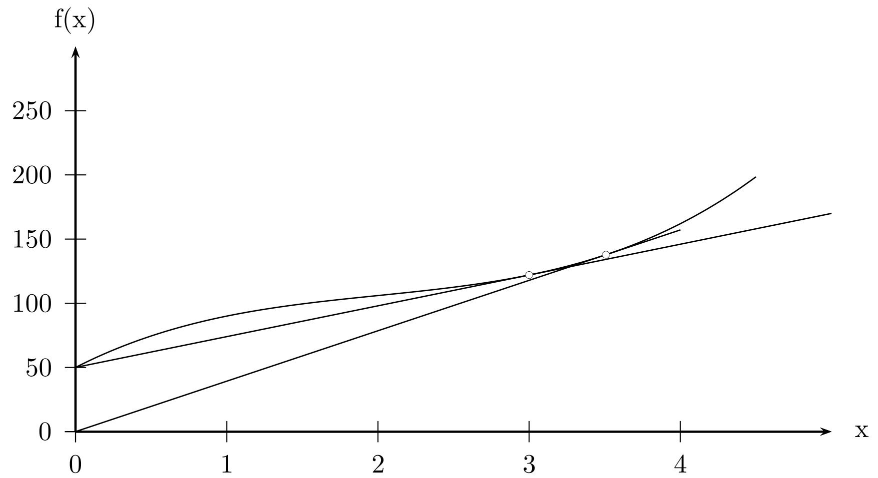


FIGURE 12.1.3 – Les coûts variables minimaux sont inférieurs aux coûts totaux unitaires

Le point où

$$C'(x) = c(x)$$

indique la quantité de production optimale (du point de vue de l'utilisation des ressources), car les coûts unitaires y sont minimaux.

Le point où

$$C'(x) = c_v(x)$$

indique la quantité pour laquelle les coûts variables sont minimaux.

## 12.2 Profit maximal

### 12.2.1 Concurrence parfaite et fonction de coût respectant la loi des rendements non-proportionnels

Fonction de profit $P$ ($R$ recette, $C$ coûts) :

$$P(x) = R(x) - C(x).$$

Le profit est maximal en $x_0$ si et seulement si en $x_0$ il y a un zéro de la première dérivée et la deuxième dérivée y est négative. Cela veut dire :

(1) $P$ est extrémal, si

$$P'(x) = R'(x) - C'(x) = 0.$$

et avec cela :

$$R'(x) = C'(x).$$

- la recette marginale est égale aux coûts marginaux.

Pour le cas de la concurrence parfaite, la fonction de recette a la forme :

$$R(x) = xp.$$

($x$ = quantité, $p$ = prix), car la quantité vendue par le producteur n'influence pas le prix. La dérivée de fonction de recette est

$$R'(x) = \frac{d}{dx}(xp) = p.$$

A l'extremum le prix est alors identique aux coûts marginaux.

$$R'(x) = p = C'(x).$$

Sens intuitif de ce constat : Si $p > C'(x)$, c. à d. le prix est supérieur aux coûts supplémentaires engendrés par la production supplémentaires d'une unité du bien, le profit augmente par une production supplémentaire. Si $p < C'(x)$, c. à d. le prix est inférieur aux coûts supplémentaires engendrés par la production d'une unité supplémentaire du bien, le profit baisse avec la production supplémentaire. C'est pourquoi le profit maximal se situe en $x$ avec $p = C'(x)$.

(2) Un extremum en $x$ est un maximum si

$$\begin{aligned} P''(x) < 0 &\Longrightarrow \\ R''(x) - C''(x) < 0 &\Longrightarrow \\ R''(x) < C''(x)&. \end{aligned}$$

Puisque

$$R'(x) = p,$$

$$\frac{d}{dx}R'(x) = R''(x) = 0.$$

On peut en déduire :

$$0 < C''(x).$$

Un extremum en $x$ est alors un maximum si la deuxième dérivée de la fonction de coût en $x$ est positive.

On peut en retenir :

$$\boxed{\text{En } x_0 \text{ il y a un profit maximal si et seulement si } p = C'(x_0) \text{ et } C''(x_0) > 0.}$$

Nous pouvons calculer le profit maximal en calculant $P(x_0)$.

**Remarque 12.2.1.** *Une autre possibilité du calcul du profit est offerte par :*

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) \\ &= xp - x\frac{C(x)}{x} \\ &= x\left(p - \frac{C(x)}{x}\right) \\ &= x(p - c(x)) \end{aligned}$$

◊

Ainsi le profit est la quantité vendue du bien fois la différence entre le prix et les coûts unitaires. Là où le profit est maximal on peut calculer le profit par : $P(x_0) = [p - c(x_0)] \cdot x_0$ (voir figure 12.2.5).

**Exemple 12.2.2.** *Avec les réflexions ci-dessus on peut calculer la quantité qui maximise le profit de la manière suivante, si le prix et la fonction de coût sont donnés. Pour* $p = 60$ *et*

$$C(x) = x^3 - 12x^2 + 60x + 98$$

*on obtient :*

$$C'(x) = 3x^2 - 24x + 60 = 60 = p$$

*Solutions :* $8$ *et* $0$. *Avec* $C''(x) = \frac{d}{dx}\left(3x^2 - 24x + 60\right) = 6x - 24$ *on obtient :*

$$C''(0) = -24 < 0$$

*et*

$$C''(8) = 6 \cdot 8 - 24 > 0$$

*Il y a alors profit maximal en* $x = 8$.

*Comparons cette manière de procéder avec le calcul qu'on a appliqué jusqu'ici :*

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 60x - \left(x^3 - 12x^2 + 60x + 98\right) \\ &= -x^3 + 12x^2 - 98 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}P(x) = \frac{d}{dx}\left(-x^3 + 12x^2 - 98\right) = 24x - 3x^2$$

*Il y a alors des extrema en* $24x - 3x^2 = 0 \Longrightarrow x_1 = 0, \qquad x_2 = 8.$
$P''(x) = \frac{d}{dx}\left(24x - 3x^2\right) = 24 - 6x$
$P''(0) = 24 > 0$ *(minimum de la fonction de profit en 0)*
$P''(8) = 24 - 6 \cdot 8 < 0$ *(maximum de la fonction de profit en 8)*
*Le profit maximal se monte à :* $P(8) = -8^3 + 12 \cdot 8^2 - 98 = 158$

*Si l'on veut calculer avec la méthode „le profit est maximal en* $x_0$ *si et seulement si* $p = C'(x_0)$

*et $C''(x_0) > 0$ “ non seulement la quantité à produire pour maximiser le profit mais aussi le profit maximal, il faut soit calculer la fonction de profit et ensuite $P(x_0)$, soit utiliser la remarque 12.2.1 :*

$$(p - k(8)) \cdot 8 = (60 - k(8)) \cdot 8.$$

*Avec*

$$k(x) = \frac{x^3 - 12x^2 + 60x + 98}{x} = x^2 - 12x + 60 + \frac{98}{x}$$

*on obtient*

$$k(8) = \frac{8^3 - 12 \cdot 8^2 + 60 \cdot 8 + 98}{8} = 40.25$$

*et alors :* $G(8) = 8(60 - 40.25) = 158$ *(voir figures 12.2.4 et 12.2.5).*

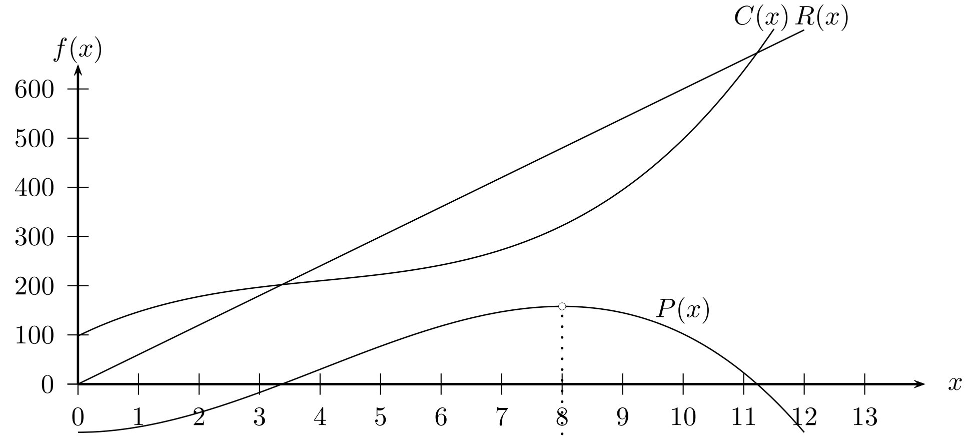


FIGURE 12.2.4 – Fonction de coût $C$, fonction de recette $R$ et fonction de profit $P$ - concurrence parfaite

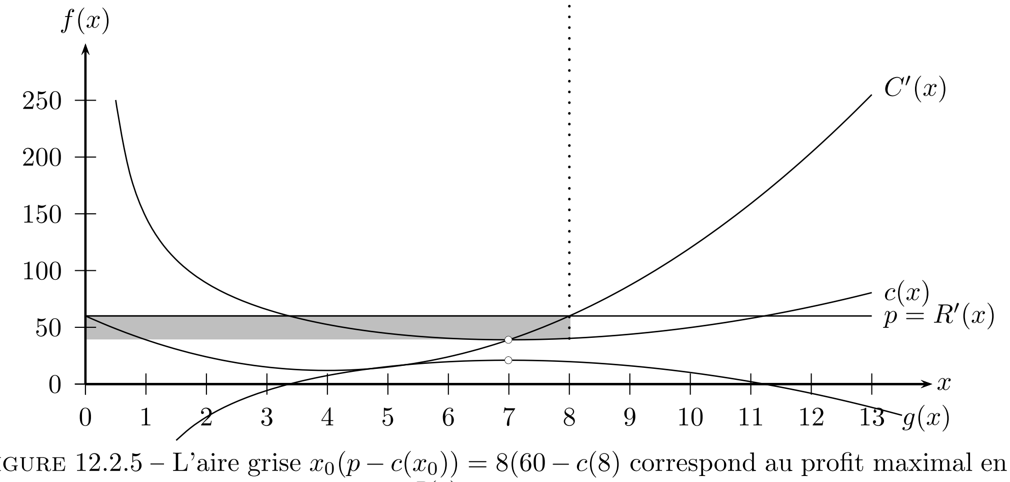


FIGURE 12.2.5 – L'aire grise $x_0(p - c(x_0)) = 8(60 - c(8)$ correspond au profit maximal en $x_0 = 8$ ; La fonction de profit unitaire $g(x) := \frac{P(x)}{x}$ est maximale là où $c(x)$ est minimal. Le profit maximal correspond au rectangle $[p - c(x_0)] \cdot x_0$ pour $x_0 = 8$.

$\Diamond$

**Remarque 12.2.3.** *Par rapport au profit unitaire on peut faire une analyse similaire ($g$ au lieu* *de p pour éviter des malentendus, g pour „gain“) :*

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{P(x)}{x} \\ &= \frac{R(x) - C(x)}{x} \\ &= \frac{R(x)}{x} - \frac{C(x)}{x} \\ &= r(x) - c(x) \end{aligned}$$

*($g(x)$ = fonction de profit unitaire ; $r(x)$ = fonction de recette unitaire)*

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{R(x)}{x} \\ &= \frac{xp}{x} \\ &= p; \end{aligned}$$

*Le profit unitaire est identique à la différence „prix moins coûts unitaires“.*

*Si $g$ est maximal, $g'(x) = 0 \Longrightarrow r'(x_0) = c'(x_0)$*
*Or $\frac{d}{dx}(r(x)) = \frac{d}{dx}(p) = 0$.*
*On peut en déduire : Si $g$ est maximal, $c'(x_0) = 0$.*

*De plus nous pouvons affirmer par rapport au maximum du profit unitaire : $g''(x_0) < 0 \Longrightarrow r''(x_0) - c''(x_0) < 0$.*
*Or $r''(x_0) = 0$*
*On peut en déduire : $c''(x_0) > 0$.*

*Si $c''(x_0) > 0$ et $c'(x_0) = 0$, la fonction $c$ a en $x_0$ un minimum. On peut en déduire :*

| *Le profit unitaire est maximal en $x_0$ si et seulement si $c$ est minimal en $x_0$.* |
|---|

$\Diamond$

**Remarque 12.2.4.** *Comparer $x_1$ où $c(x_1) = C'(x_1)$ et $x_0$ où $C'(x_0) = p$ (profit maximal). On voit que la quantité avec le profit maximal n'est pas identique à la quantité avec les coûts unitaires minimaux. L'optimum de production qui est le plus efficace par rapport à l'utilisation des ressources n'est pas l'optimum par rapport au profit.* $\Diamond$

### 12.2.2 Monopole et fonction de coût respectant la loi de rendements non-proportionnel

Comme pour le cas de la concurrence parfaite on peut affirmer : $P$ a un extremum en

$$P'(x) = R'(x) - C'(x) = 0.$$

On peut en déduire de nouveau :

$$R'(x) = C'(x).$$

La première dérivée de la fonction de recette n'est cependant plus une constante (prix). Il y a maximum, si $P''(zéro_{P'}) = R''(zéro_{P'}) - C''(zéro_{P'}) < 0$, alors $R''(zéro_{P'}) < C''(zéro_{P'})$. Nous examinons un exemple concret :

**Exemple 12.2.5.** *Nous reprenons l'exemple ci-dessus 12.2.2, même s'il faut tenir compte du fait que dans le cas d'un monopole on se situera dans un autre intervalle par rapport aux quantités produites que pour le cas de la concurrence parfaite où la quantité offerte d'une entreprise n'a aucun effet sur le prix du marché. Pour le premier cas, le monopoliste produit toute la quantité sur le marché, dans le deuxième cas seulement une petite partie. Par conséquent on ne peut comparer directement les résultats des deux cas. Bien que nous utilisions la même fonction de coût, on parle en fait d'un autre produit et d'un autre marché :*
$C(x) = x^3 - 12x^2 + 60x + 98; \Longrightarrow C'(x) = 3x^2 - 24x + 60 \Longrightarrow C''(x) = 6x - 24$
$p(x) = -10x + 120$ *($p =$ fonction de prix). La fonction de recette est alors :*
$R(x) = xp(x) = -10x^2 + 120x.$
$R'(x) = -20x + 120.$
*Extremum en :* $R'(x) = C'(x) \Longleftrightarrow$
$3x^2 - 24x + 60 = -20x + 120 \Longrightarrow x_0 = \frac{2}{3}\sqrt{46} + \frac{2}{3} = 5.188\,2$
*Maximum ou minimum ?* $R''(x) = -20 < C''(5.188\,2) = 6 \cdot 5.188\,2 - 24 = 7.129\,2$
*Alors maximum. Le profit est*
$P(5.188\,2) = R(5.188\,2) - C(5.188\,2) =$
$-10 \cdot 5.1882^2 + 120 \cdot 5.1882 - 5.1882^3 + 12 \cdot 5.1882^2 - 60 \cdot 5.1882 - 98 = 127.47 > 0.$
*Le profit est de nouveau identique au produit suivant :*

$$P(x) = R(x) - C(x) = xp(x) - x\frac{C(x)}{x} = [p(x) - c(x)] \cdot x.$$

*Pour le* $x_0$*, où le profit est maximal :* $[p(x_0) - c(x_0)] \cdot x_0$.
*Nous obtenons le profit maximal :*
$\left[-10x_0 + 120 - \frac{x_0^3 - 12x_0^2 + 60x_0 + 98}{x_0}\right] \cdot x_0 = \left(-10 \cdot 5.1882 + 120 - \frac{5.1882^3 - 12 \cdot 5.1882^2 + 60 \cdot 5.1882 + 98}{5.1882}\right) 5.1882 =$
$127.47$ *(voir figures 12.2.6 et 12.2.7).*

◊

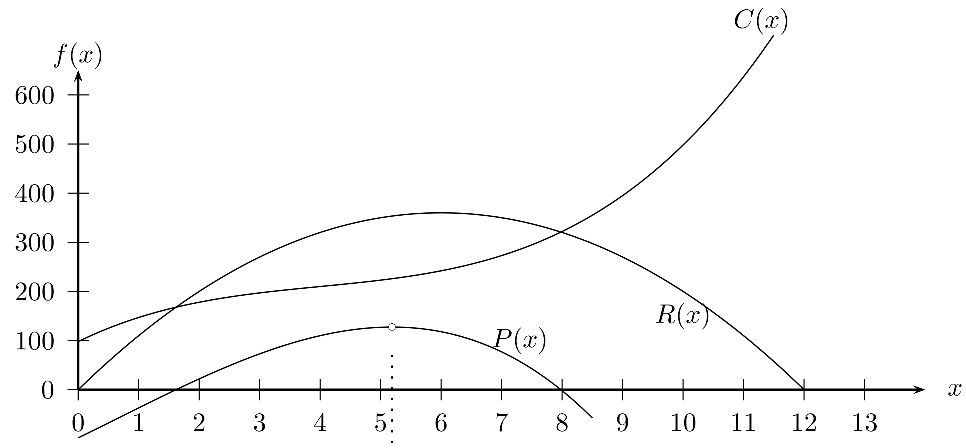


FIGURE 12.2.6 – Fonction de coût $C$, fonction de recette $R$ et fonction de profit $P$ - monopole

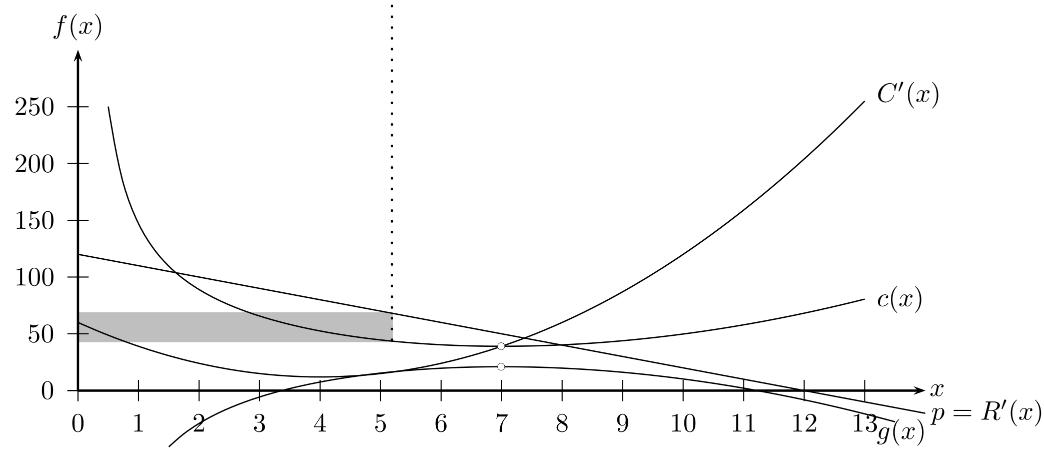


FIGURE 12.2.7 – L'aire grise $x_0(p(x_0) - c(x_0)) = 8(60 - c(8)$ correspond au profit maximal ; de plus $g$ est maximal si et seulement si $c$ est minimal

**Exemple 12.2.6.** ◊

## 12.3 Elasticité de fonctions économiques

La pente d'une fonction économique en $x_0$ dépend des unités de mesure. On peut montrer cela à l'aide d'un exemple. Supposons une fonction de coût à travers les points suivants :

$$(5, 437.5), (10, 600), (15, 662.5), (30, 1000)$$

- mesurés en tonnes et en CHF. Nous obtenons la fonction de coût suivantes, si l'on le considère comme raisonnable de calculer un polynôme à travers ces points :

$$C(x) = 0.1x^3 - 5x^2 + 90x + 100$$

Les coûts marginaux en $x = 17$ sont :

$$C'(x) = \frac{d}{dx}\left(0.1x^3 - 5x^2 + 90x + 100\right) = 0.3x^2 - 10x + 90$$
$$C'(17) = 0.3 \cdot 17^2 - 10{\cdot}17 + 90 = 6.7$$

Si l'on mesure les quantités en kg et en CHF on obtient la fonction de coût suivante et les coûts marginaux en 17000. :

$$C(x) = 10^{-10}x^3 - 5{\cdot}10^{-6}x^2 + 0.09x + 100$$
$$C'(x) = 3{\cdot}10^{-10}x^2 - 0.0000\,1x + 0.0\,9$$
$$C'(17000) = 3{\cdot}10^{-10}{\cdot}17000^2 - 0.00001{\cdot}17000 + 0.09 = 0.0067$$

Il serait utile d'avoir une mesure pour le changement d'une fonction en un point qui serait indépendante des unités. On obtient une telle mesure si l'on compare le changement relatif de $f$ au changement relatif de $x$ en $x_0$. Le changement relatif de $f$ en $x_0$ est la différence de $f(x)$ et $f(x_0)$ divisé par $f(x_0)$

**Remarque 12.3.1.** *le changement relatif d'un capital en une année est*

$$\frac{C_1 - C_0}{C_0} = \frac{C_0(1+i) - C_0}{C_0} = \frac{C_0(1+i-1)}{C_0} = 1 + i - 1 = i$$

*($i$ = intérêt).* ◊

**Définition 12.3.2.** *L'élasticité $E_f(x_0)$ de $f$ en $x_0$ est égale à* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{f(x_0)}}{\frac{x-x_0}{x_0}}$ ◊

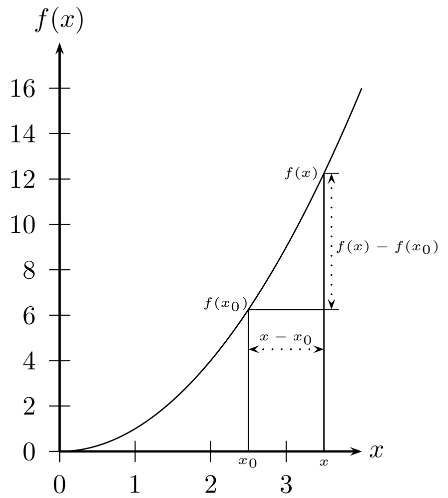


FIGURE 12.3.8 – Représentation graphique par rapport à la définition de l'élasticité. $\frac{f(x)-f(x_0)}{f(x_0)}$ est la proportion de $f(x) - f(x_0)$ à $f(x_0)$ et $\frac{x-x_0}{x_0}$ est la proportion de $x - x_0$ à $x_0$. L'élasticité compare la première ce ces proportions à la deuxième.

En transformant $\left(\frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{f(x_0)}}{\frac{x-x_0}{x_0}}\right)$ nous obtenons :

$$\frac{(f(x) - f(x_0)){\cdot}x_0}{f(x_0){\cdot}(x - x_0)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} {\cdot} \frac{x_0}{f(x_0)}$$

et en calculant la limite

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)}\cdot\frac{x_0}{f(x_0)}\right) &= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)}\right)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{x_0}{f(x_0)}\\ &= f'(x_0)\cdot\frac{x_0}{f(x_0)}\end{aligned}$$

(Cela correspond pour le cas de la fonction de coût au rapport des coûts marginaux aux coûts unitaires, car $C'(x)\frac{x}{C(x)}=\frac{C'(x)}{\frac{C(x)}{x}}=\frac{C'(x)}{c(x)}$). Ce développement est valable pour des $x_0$ arbitraires. On peut alors affirmer :

**Théorème 12.3.3.** $E_f(x)=\frac{f'(x)\cdot x}{f(x)}$

**Exemple 12.3.4.** *Nous calculons l'élasticité des fonctions de coûts en* 17 *et* 17000 *:* ♢

A) $C(x)=0.1x^3-5x^2+90x+100$

$$C'(x)=\frac{d}{dx}\left(0.1x^3-5x^2+90x+100\right)=0.3x^2-10x+90$$

$$E_{C,x}=f'(x)\cdot\frac{x}{f(x)}=\frac{0.3x^2-10x+90}{0.1x^3-5x^2+90x+100}\cdot x=\frac{0.3x^3-10x^2+90x}{0.1x^3-5x^2+90x+100}.$$

$$E_{f,17}=\frac{0.3\cdot 17^3-10\cdot 17^2+90\cdot 17}{0.1\cdot 17^3-5\cdot 17^2+90\cdot 17+100}=0.168\,42$$

B) $C(x)=10^{-10}x^3-5\cdot 10^{-6}x^2+0.09x+100$

$$C'(x)=\frac{d}{dx}\left(10^{-10}x^3-5\cdot 10^{-6}x^2+0.09x+100\right)=3.0\times 10^{-10}x^2-0.0000\,1x+0.0\,9$$

$$E_{f,x}=\frac{3.0\times 10^{-10}x^2-0.0000\,1x+0.0\,9}{10^{-10}x^3-5\cdot 10^{-6}x^2+0.09x+100}\cdot x$$

$$E_{C,17000}=\frac{3.0\times 10^{-10}\cdot 17000^2-0.0000\,1\cdot 17000+0.0\,9}{10^{-10}\cdot 17000^3-5\cdot 10^{-6}\cdot 17000^2+0.09\cdot 17000+100}\cdot 17000=0.168\,42$$

L'élasticité des deux fonction est la même en 17 de A et en $17'000$ de B.

$E_f$ est une fonction qui nous indique l'élasticité de $f$ pour chaque $x$. L'élasticité est une grandeur sans dimension (sans unités de mesure) puisque les unités se réduisent (voir exemple ci-dessus : les unités de mesure de $E_{C,x}=\frac{C'(x)\cdot x}{C(x)}$ : $\frac{\frac{CHF}{t}t}{CHF}=1$ ou $\frac{\frac{CHF}{kg}kg}{CHF}=1$.

**Remarque 12.3.5.** *L'élasticité d'une fonction $f$ exprime d'une manière approximative, de combien de pourcents la fonction $f$ croît (décroît), si $x$ augmente d'un pourcent. Justification : comme les changements relatifs $\frac{f(x)-f(x_0)}{f(x_0)}$ et $\frac{x-x_0}{x_0}$ multiplié par 100 expriment des changements relatifs en pourcents, le quotient de deux changements relatifs est identique au quotient de ces deux changements relatifs multipliés par 100 :*

$$\frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{f(x_0)}}{\frac{x-x_0}{x_0}}=\frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{f(x_0)}\cdot 100}{\frac{x-x_0}{x_0}\cdot 100}.$$

♢

**Définition 12.3.6.** — *$f$ est élastique en $x_0$ si et seulement si $|E_f(x_0)| > 1$ (approximativement le changement d'un pourcent mène à un changement de plus d'un pourcent).*
- *$f$ n'est pas élastique en $x_0$ si et seulement si $|E_f(x_0)| < 1$ (approximativement un changement d'un pourcent en $x$ mène à un changement de moins d'un pourcent en $f$).*
- *$f$ est proportionnellement élastique en $x_0$ si et seulement si $|E_f(x_0)| = 1$*
- *$f$ est absolument élastique en $x_0$ si et seulement si $|E_f(x)| = +\infty$. ($x_0$ ne fera pas partie du domaine de définition de $E_f$)*
- *$f$ est complètement inélastique en $x_0$ si et seulement si $|E_f(x_0)| = 0$.*

$\Diamond$

### 12.3.1 Exercices

1. Un monopoliste affronte la fonction de coût suivante : $C(x) = 3x^3 - 11x^2 + 65x + 108$.
   La fonction de demande est : $p(x) = -8x + 130$.
   (a) Vérifier si la fonction de coûts respecte la loi des rendements non-proportionnels
   (b) Calculer la recette et le profit maximal
   (c) Calculer le profit maximal à l'aide de l'équation $C'(x) = R'(x)$ et
   (d) de l'expression : $[p(x_0) - c(x_0)] \cdot x_0$
2. Une entreprise (concurrence parfaite) affronte la fonction de coût suivante : $C(x) = 3x^3 - 11x^2 + 65x + 108$.
   Le prix du marché est $p = 45$.
   Calculer le profit maximal à l'aide des méthodes suivantes :
   (a) première et deuxième dérivée de $P(x)$
   (b) équation $p = C'(x)$
   (c) expression $[p - c(x_0)] \cdot x_0$
3. Une entreprise (concurrence parfaite) affronte la fonction de coût suivante : $C(x) = 3x^3 - 11x^2 + 65x + 108$.
   Quel est le prix minimal pour que la production soit profitable ?
4. Une entreprise (concurrence parfaite) affronte la fonction de coût suivante : $C(x) = 65x + 180$.
   prix du marché $p = 70$.
   Calculer le profit maximal.
5. Un monopoliste affronte les fonctions de coût et de demande suivantes :
   $C(x) = 65x + 108$.
   $p(x) = -8x + 130$
   Calculer le profit maximal.
6. Supposons que $C(x) = 0.1x^3 - 2.4x^2 + 30x + 640$ soit une fonction de coût.
   (a) Vérifier s'il s'agit d'une fonction respectant la loi des rendements non-proportionnels.
   (b) Calculer le point d'inflexion. Interpréter le point d'inflexion d'un point de vue économique.
   (c) Trouver la quantité avec les coûts unitaires minimaux.
   (d) Quel est le prix minimal pour que la production soit rentable par rapports au coûts variables ?
7. Supposons que $x(r) = -0.4r^3 + 18r^2 + 24r$ soit une fonction de production $[0 < r < 25]$
   (a) Pour quel $r$ la productivité marginale est optimale ? (productivité marginale = $x'(r)$).
   (b) Calculer la production maximale dans l'intervalle.

(c) Pour quelle quantité du facteur de production la production moyenne (unitaire) est-elle maximale ?

(d) Pour quelle quantité du facteur de production la productivité marginale et la production moyenne sont-elles identiques ?

8. Trouver la fonction d'élasticité des fonctions suivantes :
$f(x) = 10x^7$
$f(x) = 4x^3 + 2x^2 - x + 1$
$f(x) = \frac{3x-4}{8x+2}$
$f(x) = ax^n (a, n \neq 0)$
$f(x) = x^{0.2}$

9. Supposons que $x(p) = 18 - 2p$.

   (a) Calculer la fonction d'élasticité.

   (b) Calculer l'élasticité en $p = 5$ et $p = 10$.

10. Supposons que $P_D(x) = 18 - 2x$ soit une fonction de demande. Calculer la fonction d'élasticité

   (a) par rapport à la quantité

   (b) par rapport au prix

   (c) Calculer les élasticités pour $p = 5$ et $p = 10$.

11. L'équation suivante décrit une fonction de consommation (consommation en fonction du revenu). $C(Y) = \frac{2-Y}{2+Y}$. Calculer la fonction d'élasticité et les élasticités en $Y = 15$, $Y = 100$.

12. Supposons que $x(p) = 18 - 2p$ soit une fonction de demande qui exprime la quantité achetée en fonction du prix.

   (a) Calculer $p_0$ où $x$ est proportionnellement élastique.

   (b) Calculer l'intervalle où $x$ est inélastique.

   (c) Calculer l'intervalle où $x$ est élastique.

   (d) Calculer $p_0$ où $x$ est absolument élastique.

   (e) Calculer $p_0$ où $x$ est complètement inélastique.

### 12.3.2 Solutions

1. On obtient :

   (a) $a > 0; b < 0; c > 0, d > 0; b^2 = 121 < 3ac = 585$. Il s'agit d'une fonction de coût respectant la loi des rendements non-proportionnels.

   (b) $R(x) = xp(x) = x(-8x + 130) = -8x^2 + 130x$.
   $R'(x) = \frac{d}{dx}\left(-8x^2 + 130x\right) = -16x + 130$ zéro en : $x = \frac{65}{8} = 8.125$
   $R''(x)\frac{d}{dx}( -16x + 130) = -16 \Longrightarrow$ un maximum.
   $R(8.125) = -8 \cdot 8.125^2 + 130 \cdot 8.125 = 528.13$ (= recette maximale)
   $P(x) = R(x) - C(x) = -8x^2 + 130x - \left(3x^3 - 11x^2 + 65x + 108\right) =$
   $-3x^3 + 3x^2 + 65x - 108$
   $P'(x) = \frac{d}{dx}\left(-3x^3 + 3x^2 + 65x - 108\right) = -9x^2 + 6x + 65$,
   zéros en : $3.0413$ et $-2.3747$
   $P''(x) = \frac{d}{dx}\left(-9x^2 + 6x + 65\right) = -18x + 6$
   en : $x = 3.0413$ $\quad -18 \cdot 3.0413 + 6 = -48.743 \Longrightarrow$ in $x = 3.0413$ un maximum.
   $P(3.0413) = -3 \cdot 3.0413^3 + 3 \cdot 3.0413^2 + 65 \cdot 3.0413 - 108 = 33.041$ (= profit maximal)

(c) $C'(x) = \frac{d}{dx}\left(3x^3 - 11x^2 + 65x + 108\right) = 9x^2 - 22x + 65$
$9x^2 - 22x + 65 = -16x + 130, \qquad x_1 = 3.041\,3; \qquad x_2 = -2.374\,7$
$C''(x) = \frac{d}{dx}\left(9x^2 - 22x + 65\right) = 18x - 22$
en $x = 3.0413$ : $C''(3.0413) = 18 \cdot 3.0413 - 22 = 32.743 \Longrightarrow$
en $x = 3.0413$ il y a un maximum de $P$.
$P(3.0413) = -3 \cdot 3.0413^3 + 3 \cdot 3.0413^2 + 65 \cdot 3.0413 - 108 = 33.041$

(d) à l'aide de l'expression : $[p(x_0) - c(x_0)] \cdot x_0$
Selon (b) ou (c) le maximum est en $x_0 = 3.0413$.
$p(3.0413) = -8 \cdot 3.0413 + 130 = 105.67$
$c(x) = \frac{3x^3 - 11x^2 + 65x + 108}{x} \Longrightarrow$
$c(3.0413) = \frac{3 \cdot 3.0413^3 - 11 \cdot 3.0413^2 + 65 \cdot 3.0413 + 108}{3.0413} = 94.805 \Longrightarrow$
$P_{\max} = (105.67 - 94.805) \cdot 3.0413 = 33.044$

2. On obtient :

(a) $R(x) = px$
$P(x) = R(x) - C(x) = 45x - \left(3x^3 - 11x^2 + 65x + 108\right) =$
$-3x^3 + 11x^2 - 20x - 108$
$P'(x) = \frac{d}{dx}\left(-3x^3 + 11x^2 - 20x - 108\right) = \quad -9x^2 + 22x - 20$
zéros : pas de solution réelle

(b) $\frac{d}{dx}\left(3x^3 - 11x^2 + 65x + 108\right) = 9x^2 - 22x + 65$
$9x^2 - 22x + 65 = 45$
pas de zéro réel

(c) à l'aide de l'expression $[p - c(x_0)] \cdot x_0$
Comme il n'y a pas de zéro réel de la première dérivée nous ne pouvons pas déterminer $x_0$.

3. $9x^2 - 22x + 65 = \frac{3x^3 - 11x^2 + 65x + 180}{x}$ (coûts marginaux = coûts moyens) : solution : $3.853\,6$
$C'(3.8536) = 9 \cdot 3.8536^2 - 22 \cdot 3.8536 + 65 = 113.87$

4. $P(x) = R(x) - C(x) = 70x - 65x - 180 = 5x - 180$
$P'(x) = \frac{d}{dx}(5x - 180) = 5$
$P''(x) = \frac{d}{dx}(5) = 0 \quad (0 \not< 0)$. Il n'y a pas de maximum. Il faut vérifier si le profit est jamais positif.
$R(x) - C(x) > 0; \qquad 5x - 180 > 0, \qquad x > 36$
A partir de $x = 36$ le profit est positif. La fonction de profit tend vers l'infini : $\lim_{x \to \infty}(5x - 180) = \infty$
On ne peut par conséquent déterminer le profit maximal que si l'on fixe un domaine économique raisonnable : p.ex. $[0, 50]$
Le profit maximal serait alors : $5 \cdot 50 - 180 = 70$

5. $C(x) = 65x + 108$
$p(x) = -8x + 130$
$P(x) = R(x) - C(x) = x(-8x + 130) - (65x + 108) = -8x^2 + 65x - 108$
$P'(x) = \frac{d}{dx}\left(-8x^2 + 65x - 108\right) = \ -16x + 65 \qquad$ zéro en : $x = 4.062\,5$
$P''(x) = \frac{d}{dx}(-16x + 65) = -16 \Longrightarrow \quad$ Il y a en $x = 4.0625$ un maximum.
$P(4.0625) = -8 \cdot 4.0625^2 + 65 \cdot 4.0625 - 108 = 24.031$
Selon $R'(x) = C'(x)$ :
$R'(x) = \frac{d}{dx}\left(-8x^2 + 130x\right) = -16x + 130$
$C'(x) = \frac{d}{dx}(65x + 108) = 65$
$-16x + 130 = 65, \ \Longrightarrow x = 4.062\,5$
$P(4.0625) = 24.031$

6. On obtient :

(a) $0.1 > 0\,;\, b < 0\,;\, c > 0\,;\, d > 0\,;\, b^2 = (-2.4)^2 = 5.76 < 3 \cdot 0.1 \cdot 30 = 9$
Toutes les conditions sont remplies.

(b) point d'inflexion $C''(x) = 0\,;$
$\frac{d}{dx}\left(0.1x^3 - 2.4x^2 + 30x + 640\right) = 0.3x^2 - 4.8x + 30$
$\frac{d}{dx}\left(0.3x^2 - 4.8x + 30\right) = 0.6x - 4.8$
$0.6x - 4.8 = 0, \quad x = 8$
Interprétation économique : jusqu'à ce point les coûts marginaux baissent, après ils augmentent.

(c) La production est optimale si les coûts unitaires sont identiques aux coûts marginaux.
$\frac{0.1x^3-2.4x^2+30x+640}{x} = \frac{d}{dx}\left(0.1x^3 - 2.4x^2 + 30x + 640\right) = 0.3x^2 - 4.8x + 30$
$= 0.3x^2 - 4.8x + 30 \Longrightarrow$
$0.1x^3 - 2.4x^2 + 30x + 640 = 0.3x^3 - 4.8x^2 + 30x \Longrightarrow$
$-0.2x^3 + 2.4x^2 + 640 = 0 \Longrightarrow x = 20$
en $x = 20$, la production est optimale.
ou par $\frac{d}{dx}\frac{0.1x^3-2.4x^2+30x+640}{x} = -\frac{0.2}{x^2}\left(-1.0x^3 + 12.0x^2 + 3200\right) = 0.2x - \frac{640.0}{x^2} - 2.4$
$0.2x - \frac{640.0}{x^2} - 2.4 = 0$, Solutions : $20.0, -4.0 - 12.0i, -4.0 + 12.0i$
solution réelle dans le domaine économique : 20.
$\frac{d}{dx}\left(0.2x - \frac{640.0}{x^2} - 2.4\right) = \frac{0.2}{x^3}\left(x^3 + 6400\right) = \frac{1280.0}{x^3} + 0.2 > 0$ pour $x > 0$. (alors minimum)

(d) Si le prix est inférieur aux coûts variables unitaires, la production n'est pas raisonnable du point de vue économique.
$k_v(x) = C'(x)$ en :
$k_v(x) = \frac{0.1x^3-2.4x^2+30x}{x} = 0.1x^2 - 2.4x + 30$
$0.3x^2 - 4.8x + 30 = 0.1x^2 - 2.4x + 30 \Longrightarrow$
$0.2x^2 - 2.4x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 12$
$k_v(12) = 0.1 \cdot 12^2 - 2.4 \cdot 12 + 30 = 15.6$
Si le prix tombe en dessous de 15.6, il faudrait arrêter de produire.

7. On obtient :

(a) productivité marginale
$\frac{d}{dr}\left(-0.4r^3 + 18r^2 + 24r\right) = -1.2r^2 + 36r + 24$
maximum ou minimum en : $\frac{d}{dr}\left(-1.2r^2 + 36r + 24\right) =$
$-2.4r + 36 = 0 \Longrightarrow \quad$ en : $\; r = 15$
$\frac{d}{dr}(-2.4r + 36) = -2.4$
en $r = 15$ il se trouve un maximum.

(b) $\frac{d}{dr}\left(-0.4r^3 + 18r^2 + 24r\right) = -1.2r^2 + 36r + 24 = 0$
zéros : $30.652, -0.65248 \notin [0 < r < 25]$
Puisque la dérivée est continue, et qu'en $[0, 25]$ il n'y a pas de zéro de la dérivée et que $x(0) = 24 > 0$, la première dérivée est partout positive. Par conséquent la fonction $x$ est dans l'intervalle partout strictement croissante et atteint son maximum en 25. Le maximum est $x(25) = -0.4 \cdot 25^3 + 18 \cdot 25^2 + 24 \cdot 25 = 5600$.

(c) $\frac{-0.4r^3+18r^2+24r}{r} = -0.4r^2 + 18r + 24$
$\frac{d}{dr}\left(-0.4r^2 + 18r + 24\right) = -0.8r + 18 = 0$
maximal ou minimal en $r = 22.5$
$\frac{d}{dr}(-0.8r + 18) = -0.8$
Il y a maximum en 22.5.

(d) $-1.2r^2 + 36r + 24 = -0.4r^2 + 18r + 24, \qquad r = 22.5$
L'optimum se trouve en $r$, tel que $x'(r) = \frac{x(r)}{r}$.
L'optimum $x'(x) = \frac{x(r)}{r}$ est optimal par rapport à l'utilisation des ressources.

8. On obtient :

(a) $E_f(x) = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)} = \frac{d}{dx}\left(10x^7\right) \cdot \frac{x}{10x^7} = 70x^6 \cdot \frac{x}{10x^7} = 7$

(b) $E_f(x) = \frac{d}{dx}\left(4x^3 + 2x^2 - x + 1\right) \cdot \frac{x}{4x^3+2x^2-x+1} = \frac{4x^2+12x^3-x}{4x^3+2x^2-x+1}$, car $x \cdot \frac{d}{dx}\left(4x^3 + 2x^2 - x + 1\right) = x\left(12x^2 + 4x - 1\right) = 12x^3 + 4x^2 - x$.

(c) $E_f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{3x-4}{8x+2}\right) \cdot \frac{x}{\frac{3x-4}{8x+2}} = \frac{19}{2(4x+1)^2} \cdot \frac{x}{\frac{3x-4}{8x+2}} = \frac{19x(8x+2)}{2(4x+1)^2(3x-4)}$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{3x-4}{8x+2}\right) = \frac{3\cdot(8x+2)-(3x-4)\cdot 8}{(8x+2)^2} = \frac{24x+6-24x+32}{4(4x+1)^2} = \frac{19}{2(4x+1)^2}$

(d) $E_f(x) = \frac{d}{dx}(ax^n) \cdot \frac{x}{ax^n} = nax^{n-1} \cdot \frac{x}{ax^n} = n\frac{x^n}{x^n} = n$.
Nous obtenons une constante. Pour un polynôme de ce type l'élasticité est partout la même.

(e) $E_f(x) = x^{0.2} = \frac{d}{dx}(x^{0.2}) \cdot \frac{x}{x^{0.2}} = 0.2x^{-0.8} \cdot \frac{x}{x^{0.2}} = 0.2 \cdot \frac{x}{x^{0.8} \cdot x^{0.2}} = 0.2 \cdot \frac{x}{x^{0.8+0.2}} = 0.2 \cdot \frac{x}{x} = 0.2$

9. On obtient :

(a) $E_f(p) = \frac{d}{dp}(18 - 2p) \cdot \frac{p}{18-2p} = \frac{-2p}{18-2p}$

(b) $E_f(5) = \frac{-2\cdot 5}{18-2\cdot 5} = -\frac{5}{4}$

10. On obtient :

(a) $E_{P_D}(x) = \frac{d}{dx}(18 - 2x) \cdot \frac{x}{18-2x} = \frac{-2x}{18-2x}$

(b) Pour calculer l'élasticité par rapport au prix il faut calculer la fonction réciproque :
$P_D(x) = 18 - 2x \Longrightarrow \frac{p-18}{-2} = x(p) = \frac{18-p}{2}$
$E_x(p) = \frac{d}{dp}\left(\frac{18-p}{2}\right) \cdot \frac{p}{\frac{18-p}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{p}{\frac{18-p}{2}} = -\frac{p \cdot 2}{2(18-p)} = -\frac{p}{18-p}$

(c) $E_x(5) = -\frac{5}{18-5} = -\frac{5}{13} = -0.38462$
$E_x(10) = -\frac{10}{18-10} = -\frac{5}{4} = -1.25$

11. $C'(Y) = \frac{d}{dY}\left(\frac{2-Y}{2+Y}\right) = \frac{-1(2+Y)-(2-Y)\cdot 1}{(2+Y)^2} = -\frac{4}{(2+Y)^2}$
$E_{C,Y} = \frac{d}{dY}\left(\frac{2-Y}{2+Y}\right) \cdot \frac{Y}{\frac{2-Y}{2+Y}} = -\frac{4}{(2+Y)^2} \cdot \frac{Y(2+Y)}{2-Y} = -\frac{4}{2+Y}\frac{Y}{2-Y} = \frac{-4Y}{4-Y^2}$
$E_{C,15} = \frac{-4\cdot 15}{4-15^2} = \frac{60}{221} = 0.27149$
$E_{C,100} = \frac{-4\cdot 100}{4-100^2} = \frac{100}{2499} = 0.040016$

12. Nous déterminons d'abord le domaine économique : $p$ et $x(p) \geq 0$.
$x(p) = 18 - 2p \geq 0 \Longrightarrow -2p \geq -18 \Longrightarrow p \leq 9$
L'intervalle intéressant est alors : $0 \leq p \leq 9$.

(a) est proportionnellement élastique :
$\left|\frac{-2p}{18-2p}\right| = 1 \Longrightarrow$
i) $\frac{-2p}{18-2p} = 1$ ou ii) $\frac{-2p}{18-2p} = -1$
i) $\frac{-2p}{18-2p} = 1 \Longrightarrow -2p = 18 - 2p \Longrightarrow 0 = 18 \Longrightarrow$ pas possible
ii) $\frac{-2p}{18-2p} = -1 \Longrightarrow -2p = -18 + 2p \Longrightarrow -4p = -18 \Longrightarrow p = \frac{18}{4} = 4.5$

(b) $\left|\frac{-2p}{18-2p}\right| < 1 \Longrightarrow$
$-1 < \frac{-2p}{18-2p} < 1 \Longrightarrow -1 < \frac{-2p}{18-2p}$ et $\frac{-2p}{18-2p} < 1$.
Nous analysons ces deux conditions :
(i) $\frac{-2p}{18-2p} < 1$ (il faut enlever 9 du domaine de définition pour éviter une division par 0)
Si l'on multiplie les deux côtés de l'inéquation par des expressions il faut faire attention aux signe possible de ces expressions : $18 - 2p < 0$ ou $18 - 2p > 0$. Puisque pour le domaine de définition $18 - 2p > 0$, nous pouvons laisser de côté le cas $18 - 2p < 0$ et

multiplier les deux côtés de l'inéquation par $18 - 2p$ sans changer la direction du signe d'inégalité :
$-2p < 18 - 2p \Longrightarrow 0 < 18$ ($0 < 18$ est vrai, mais $p$ disparaît. On n'a plus un énoncé sur $p$)
(ii) $-1 < \frac{-2p}{18-2p} \Longrightarrow -18 + 2p < -2p \Longrightarrow -18 < -4p \Longrightarrow \frac{-18}{-4} > p \Longrightarrow p < 4.5$
Ainsi : $p < 4.5$

(c) $\left|\frac{-2p}{18-2p}\right| > 1 \Longrightarrow \frac{-2p}{18-2p} > 1$ ou $\frac{-2p}{18-2p} < -1$
Nous analysons ces deux cas :
(1) $\frac{-2p}{18-2p} > 1 \Longrightarrow -2p > 18 - 2p\,; \Longrightarrow 0 > 18$ (pas possible).
(2) $\frac{-2p}{18-2p} < -1 \Longrightarrow -2p < -18 + 2p \Longrightarrow -4p < -18 \Longrightarrow p > \frac{-18}{-4} = 4.5$
En tenant compte de l'intervalle économique et en excluant la division par 0 : $4.5 < p < 9$.

(d) $\lim\limits_{p\to 9^-} \frac{-2p}{18-2p} = -\infty$. Alors $\lim\limits_{p\to 9^-} \left|\frac{-2p}{18-2p}\right| = \infty$. Absolument élastique en $p = 9$ (Attention : 9 ne fait pas partie du domaine de définition de $\frac{-2p}{18-2p}$, mais fait partie du domaine de définition de $x(p)$).

(e) $\frac{-2p}{18-2p} = 0 \Longrightarrow p = 0$

## 12.4 Objectifs d'apprentissage

— Arriver à expliquer à l'aide d'un graphique le lien entre les coûts unitaires et les coûts marginaux
— Arriver à faire des analyses du profit pour le cas de la concurrence parfaite et du monopole (arriver à faire les graphiques, à les interpréter et à faire les calculs).
— Connaître et arriver à expliquer intuitivement la définition de l'élasticité.
— Arriver à résoudre des problèmes du type des exercices.

## Références

Favre, J.-P. (2009). *Mathématiques de gestion.* Epalinges : Digilex.

Sydsaeter, K., & Hammond, P. (2002). *Essential Mathematics for Economic Analysis.* Prentice-Hall : Pearson.

Tietze, J. (1998). *Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik* (7e éd.). Wiesbaden : Vieweg.

Varian, H. R. (2010). *Intermediate microeconomics : A modern approach* (8e éd.). London : Norton.