Inéquations

$\mathbb{R}^+$ est l'enemble des nombres réels positifs avec 0.
$\mathbb{R}^-$ est l'ensemble des nombres réels négatifs.

Definition 1. *Pour $a, b \in \mathbb{R}$:*
$a > b$ si et seulement si $a - b \in \mathbb{R}^+$ und $a \neq b$.
$a \geq b$ si et seulement si $a > b$ ou $a = b$.
$a < b$ si et seulement si $b > a$
$a \leq b$ si et seulement si $b \geq a$

Sans démonstrations nous retenons :

Théorème 2. *Pour tous les nombres réelles x on peut affirmer : $x \in \mathbb{R}^+$ ou $x \in \mathbb{R}^-$.*

Théorème 3. *$x \in \mathbb{R}^+$ si et seulement si $x \geq 0$.*

Théorème 4. *$x \in \mathbb{R}^-$ si et seulement si $x < 0$.*

Théorème 5. *Pour tous les nombres réels x, y on peut affirmer : $x > y$ ou $x < y$ ou $x = y$*

Théorème 6. *Si $x > y$ et $y > z$, alors $x > z$ (transitivité)*

Exemple 7. $8 > 5$ *et* $12 > 8$. *Alors* $12 > 5$.

La transitivité est tout aussi valable pour "$<$".

Théorème 8. *Si $x > y$ on peut retenir pour tous les nombres réels z : $x + z > y + z$*

Démonstration. Nous supposons que $x > y$. Alors $x - y > 0$. Avec cela : $x + z - z - y = x + z - (y + z) > 0$, car $z - z = 0$. Ainsi : $x + z > y + z$ □

Exemple 9. $8 > 5$. *Avec cela :* $8 + 3 > 5 + 3$

On peut de plus affirmer : Si $x < y$, pour tous les nombres réelles z : $x + z < y + z$

Théorème 10. *Si $x > y$ et $z > 0$, alors : $xz > yz$*

Démonstration. $x > y \Longrightarrow x - y > 0$. Nous supposons que $z > 0$. On peut affirmer $z(x - y) = zx - zy > 0$, car le produit de nombres positifs est positif. Ainsi : $zx > zy$ □

Exemple 11. $5 > 3$ *et* $8 > 0$. *Ainsi :* $5 \cdot 8 > 3 \cdot 8$

De plus on peut affirmer : Si $x < y$ et $z > 0$, alors $xz < yz$.

Théorème 12. *Si $x > y$ et $z < 0$, alors $xz < yz$*

Démonstration. Nous supposons que $x > y$ et $z < 0$. Ainsi $x - y > 0$ et $z(x - y) = zx - zy < 0$, car le produit d'un nombre positif et d'un nombre négatif est négatif. Par conséquent : $zx < zy$. □

Exemple 13. $5 > 3$ *et* $-8 < 0$. *Ainsi* $5 \cdot (-8) < 3 \cdot (-8)$

De plus on peut affirmer : Si $x < y$ et $z < 0$, alors : $xz > yz$

Théorème 14. *Si $x > y > 0$ et $c > b > 0$, alors $xc > yb$*

Démonstration. Selon la supposition : $x - y > 0$ et $c - b > 0$. Avec cela : $xc > xb$ et $xb > yb$ et par conséquent à cause de la transitivité : $xc > yb$. □

Pour finir encore quelques théorèmes sans démonstrations :

Théorème 15. *$a > b > 0$ si et seulement si $a^n > b^n$ (pour $n > 0$)*

Exemple 16. $5 > 3$. *On peut en déduire :* $5^5 > 3^5$.

Théorème 17. $a > b > 0$ *si et seulement si* $a^{-n} < b^{-n}$ *(pour $n > 0$)*

Exemple 18. $5 > 3$. *On peut en déduire :* $5^{-5} < 3^{-5}$ $(5^{-5} = \frac{1}{5^5} = 0.000\,32; \quad 3^{-5} = \frac{1}{3^5} = 0.004115\,2)$

Théorème 19. $a > b > 0$ *si et seulement si* $\log_c a > \log_c b$ *(pour $c > 1$)*

La fonction logarithme de base c supérieure à 1 est strictement croissante. Pour $0 < c < 1$ la fonction logarithme est strictement décroissante.

Théorème 20. $5 > 3$ *: On peut en déduire :* $\ln 5 > \ln 3$ $(\ln 5 = 1.\,609\,4; \quad \ln 3 = 1.\,098\,6)$

Théorème 21. $x < y$ *si et seulement si* $a^x < a^y$ *($a > 1$)*

Exemple 22. $3 < 5$ *: On peut en déduire :* $4^3 < 4^5$ *($a > 1$)*

Théorème 23. $x < y$ *si et seulement si* $a^{-x} > a^{-y}$ *($a > 1$)*

Exemple 24. $3 < 5$ *: On peut en déduire :* $4^{-3} > 4^{-5}$ *(car* $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = 0.01562\,5$ *et* $4^{-5} = \frac{1}{4^5} = 0.0009765\,6$)

La valeur absolue d'un nombre

Definition 25. $|a| := \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$

Exemple 26. $|22| = 22$, *car* $22 > 0$ *et avec cela* $|22| = 22$
$|-22| = 22$, *car* $-22 < 0$ *et avec cela* $|-22| = -(-22) = 22$.

Exemple 27. $|x - 4|$
Nous devons étudier différents cas : soit : $x - 4 \geq 0$, *soit* $x - 4 < 0$.
Pour le premier cas $x - 4 \geq 0$, *on peut affirmer* $|x - 4| = x - 4$,
Pour le deuxième cas $x - 4 < 0$, *on peut affirmer* $|x - 4| = -(x - 4) = 4 - x$

Théorème 28. $|a| \geq 0$

Démonstration. Si $a \geq 0$, on peut affirmer selon la définition $|a| = a \geq 0$.
Si $a < 0$, on peut affirmer selon la définition $|a| = -a$. De $a < 0$ on peut déduire, $-a > 0$. Ainsi $|a| = -a \geq 0$. Par conséquent $|a| \geq 0$ est valable pour tous les cas. □

Théorème 29. $|a - b| = |b - a|$

Démonstration. cas 1 : Nous supposons que $a - b > 0$. Alors $|a - b| = a - b$. De plus : $b - a < 0$. Avec cela : $|b - a| = -(b - a) = a - b$.
cas 2 : Nous supposons que $a - b < 0$. Alors $|a - b| = -(a - b) = b - a$. De plus : $b - a > 0$. Avec cela : $|b - a| = b - a$.
cas 3 : $a - b = 0$. Alors $b - a = 0$ et selon la définition : $|a - b| = 0 = |b - a|$ □

$|a - b|$ mesure la distance entre a et b. Car $|a - 0| = |a|$, $|a|$ mesure la distance entre a et l'origine.

Théorème 30. $|a + b| \leq |a| + |b|$

Démonstration. On peut affirmer : $a, b \geq 0$ ou $a, b < 0$ ou $a \geq 0$ et $b < 0$, ou $b \geq 0$ et $a < 0$.
cas 1 : $a, b \geq 0$. Alors $|a| = a$ et $|b| = b$. De plus $a + b$ est en tant que somme de nombres positifs un nombre positif. Ainsi : $|a + b| = a + b = |a| + |b|$ et par là aussi $|a + b| \leq |a| + |b|$.
cas 2 : $a, b < 0$. Alors $|a| = -a$ et $|b| = -b$. De plus $a + b$ est un nombre négatif. On peut en déduire : $|a + b| = -(a + b) = -a + (-b) = |a| + |b|$ et par là aussi $|a + b| \leq |a| + |b|$.
cas 3 : $a \geq 0$ et $b < 0$. Par conséquent $|a| = a$ et $|b| = -b$.
Si (i) $a + b \geq 0$ alors $|a + b| = a + b$. De plus $a + b < a$, car on peut déduire de $b < 0$ et $a \geq 0$:

$a+b<a$. Puisque $-b>0$, on peut de plus affirmer $a+(-b)>a$, car de $-b>0$ et $a\geq 0$ résulte, $-b+a>a$. Avec cela : $|a+b|=a+b<a<-b+a=|a|+|b|$ et ainsi $|a+b|\leq |a|+|b|$.
Si (ii) $a+b<0$, alors $|a+b|=-(a+b)=-a+-b$. De $-a<0$ résulte $-a+(-b)<-b$. Comme $|a|,|b|\geq 0$ on peut affirmer $-b=|b|\leq |a|+|b|$. Avec cela : $|a+b|=-(a+b)=-a+-b<-b=|b|\leq |a|+|b|$.
A partir de (i) et (ii) on peut dire : pour le cas 3 l'inéquation est valable. .
Le cas 4 se prouve de la manière que le cas 3. Ainsi l'inéquation est valable pour tous les cas. $\square$

Exercices

1. Calculer :

   (a) $8x-24<0$
   (b) $4x+3\geq 11$
   (c) $7x-5<30$
   (d) $-4x+16\leq 0$
   (e) $-6x-6>0$
   (f) $\frac{x}{2}+1>0$
   (g) $3x+7<13+2x$
   (h) $7x-6>\frac{8x}{2}$
   (i) $2-\frac{x}{10}>2(7-x)$
   (j) $13x-5\leq 8x+15$
   (k) $3(x-3)<5-2(-x+1)$
   (l) $5-\frac{3x}{7}<3-\frac{5}{3}x$
   (m) $\frac{3}{2}x<2(6-x)$ (für x $\in \mathbb{Q}^+$)
   (n) $\frac{3}{2}x<2(6-x)$ (für x $\in \mathbb{N}$)
   (o) $\frac{x}{x-1}>0$
   (p) $\frac{x}{x+1}>0$
   (q) $\frac{2x}{x+3}<1$
   (r) $\frac{x+1}{x-1}>0.5$
   (s) $|x-5|>10$
   (t) $|x-1|+3<5$
   (u) $4+\sqrt{x}<10$
   (v) $2|x+2|<32$
   (w) $5\sqrt{x}\geq \sqrt{x}+12$
   (x) $(x-4)(x+5)<0$
   (y) $x^2-1\geq 0$
   (z) $5x-8<2$

2. Calculer :

   (a) $\frac{9x}{2}-x<7$
   (b) $-9x-8<16-3x$
   (c) $\frac{3x}{2}+4>x-1$
   (d) $24(x+2)+7(5-x)>117$
   (e) $3(x+5)>21-2(3-x)$
   (f) $12+2(x-1)<0$
   (g) $\frac{4}{9}x+2x<2(x-1)$
   (h) $\frac{x}{x-1}<4$
   (i) $\frac{(x+1)^2}{x-1}\geq x+1$
   (j) $\frac{4x^2}{4x+1}<x-1$
   (k) $\frac{2x-3}{2x+3}<1$
   (l) $\frac{2x-3}{2x+3}>1$
   (m) $\frac{2(x-2)}{7}<\frac{2x^2}{x+2}$
   (n) $\frac{11}{2x}+1>\frac{1}{x}$
   (o) $(x-1)^2>0$
   (p) $|x+3|>7$
   (q) $4|x-1|>4$
   (r) $|x-1|>0$
   (s) $\left|\frac{2x+1}{4}\right|>9$
   (t) $\sqrt{x}+4<2\sqrt{x}$
   (u) $\sqrt{3x+2}>8$
   (v) $\sqrt{x+2}>\sqrt{x-2}$

3. Auprès d'une entreprise de voiture de location A une voiture coûte 80 DM de taxe de base et pour chaque kilomètre parcouru 0.56 DM. Le même type de voiture coûte auprès de l'entreprise B par jour 75 DM et par kilomètre 0.58 DM. Quelle entreprise est meilleur marché à partir de quelle quantité de kilomètres parcourus ?

4. Examiner si l'énoncé suivant est vrai : dans chaque triangle la moitié du périmètre du triangle est plus grande que le côté le plus long du triangle.

Solutions

1. On obtient :

   (a) $8x - 24 < 0 \Longrightarrow 8x < 24 \Longrightarrow x < 3$

   (b) $4x + 3 \geq 11 \Longrightarrow 4x \geq 8 \Longrightarrow x \geq 2$

   (c) $7x - 5 < 30 \Longrightarrow 7x < 35 \Longrightarrow x < 5$

   (d) $-4x + 16 \leq 0 \Longrightarrow -4x \leq -16 \Longrightarrow x \geq 4$

   (e) $-6x - 6 > 0 \Longrightarrow -6x > 6 \Longrightarrow x < -1$

   (f) $\frac{x}{2} + 1 > 0 \Longrightarrow \frac{x}{2} > -1 \Longrightarrow x > -2$

   (g) $3x + 7 < 13 + 2x \Longrightarrow x + 7 < 13 \Longrightarrow x < 6$

   (h) $7x - 6 > \frac{8x}{2} \Longrightarrow 14x - 12 > 8x \Longrightarrow 6x > 12 \Longrightarrow x > 2$

   (i) $2 - \frac{x}{10} > 2(7-x) \Longrightarrow 2 - \frac{x}{10} > 14 - 2x \Longrightarrow 20 - x > 140 - 20x \Longrightarrow 19x > 120 \Longrightarrow x > \frac{120}{19}$

   (j) $13x - 5 \leq 8x + 15 \Longrightarrow 5x \leq 20 \Longrightarrow x \leq 4$

   (k) $3(x-3) < 5 - 2(-x+1) \Longrightarrow 3x - 9 < 5 + 2x - 2 \Longrightarrow x < 12$

   (l) $5 - \frac{3x}{7} < 3 - \frac{5}{3}x \Longrightarrow \frac{105-9x}{21} < \frac{63-35x}{21} \Longrightarrow 105 - 9x < 63 - 35x \Longrightarrow 26x < -42 \Longrightarrow x < -\frac{21}{13}$

   (m) $\frac{3}{2}x < 2(6-x), [x \in \mathbb{Q}^+] \Longrightarrow 3x < 24 - 4x \Longrightarrow 7x < 24 \Longrightarrow x < 24/7 \Longrightarrow L = [0, 24/7[\cap \mathbb{Q}^+$ (domaine nombres rationnels !)

   (n) $\frac{3}{2}x < 2(6-x)[x \in \mathbb{N}] \Longrightarrow 3x < 24 - 4x \Longrightarrow 7x < 24 \Longrightarrow x < 24/7 \Longrightarrow L = \{0, 1, 2, 3\}$

   (o) $\frac{x}{x-1} > 0$; (domaine de définition : $\mathbb{R}\backslash\{1\}$)
   $x - 1 > 0$ ou $x - 1 < 0$ ou $x - 1 = 0$ (le dernier cas pas vraiment (division par 0, voir domaine de définition).
   cas *1* : $x - 1 > 0 (\Longrightarrow x > 1)$:
   alors : $x > 0$. En tenant compte des conditions : $x > 1$.
   cas *2* : $x - 1 < 0 (\Longrightarrow x < 1)$:
   alors : $x < 0$. En tenant compte des conditions : $x < 0$.
   On obtient $S = \{x : x < 0 \text{ ou } x > 1\} =]-\infty, 0[\cup]1, \infty[= \mathbb{R}\backslash[0, 1]$

   (p) $\frac{x}{x+1} > 0$; (domaine de définition : $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$)
   $x + 1 > 0$ ou $x + 1 < 0$ ou $x + 1 = 0$, dernier cas pas possible (division par 0)
   cas 1 : $x + 1 > 0$ ($\Longrightarrow x > -1$ (à cause du domaine de définition)) :
   alors : $x > 0$. En tenant compte des conditions : $x > 0$
   cas 2 : $x + 1 < 0 (\Longrightarrow x < -1)$:
   alors : $x < 0$. En tenant compte des conditions : $x < -1$
   On obtient : $S = \{x : x < -1 \text{ ou } x > 0\}$

   (q) $\frac{2x}{x+3} < 1$.
   (1) domaine de définition : $x + 3 = 0 \Longrightarrow x = -3$ n'est pas permis (division par 0). Alors $D = \mathbb{R}\backslash\{-3\}$
   (2) $x + 3 > 0$ ou $x + 3 = 0$ ou $x + 3 < 0$. $x + 3 = 0$ n'est pas admissible (division par 0). Alors deux cas :
   (3) *cas 1* : $x + 3 > 0 \Longrightarrow x > -3$
   $\frac{2x}{x+3} < 1$ (multiplier par $x + 3$) :
   $2x < 1 \cdot (x + 3)$ additioner $-x$: $x < 3$
   En tenant compte de $x > -3$ et de $x < 3$: $S_1 =]-3, 3[$
   (4) *cas 2* : $x + 3 < 0 \Longrightarrow x < -3$
   $\frac{2x}{x+3} < 1$ (multiplier par $x + 3$) :
   $2x > 1 \cdot (x + 3)$ additionner $-x$
   $x > 3$
   En tenant compte de $x < -3$ et de $x > 3$: $S_2 = \emptyset$
   (5) $S = S_1 \cup S_2 =]-3, 3[$

(r) $\frac{x+1}{x-1} > 0.5$ (domaine de définition : $\mathbb{R}\backslash\{1\}$)
cas 1 : $x-1>0 (\Longrightarrow x>1)$:
alors : $x+1 > 0.5x - 0.5 \Longrightarrow 0.5x > -1.5 \Longrightarrow x > -3$. En tenant compte des conditions : $x > 1$.
cas 2 : $x-1<0 (\Longrightarrow x<1)$:
alors : $x+1 < 0.5x - 0.5 \Longrightarrow 0.5x < -1.5 \Longrightarrow x < -3$. En tenant compte des conditions : $x < -3$
$S = \{x : x > 1 \text{ ou } x < -3\}$

(s) $|x-5| > 10$
Selon la définiton de la valeur absolue :
Si $x-5 \geq 0$, alors $|x-5| = x-5$
Si $x-5 < 0$, alors $|x-5| = -(x-5)$.
cas 1 : $x-5 \geq 0 \Longrightarrow x > 5$
De plus : $|x-5| = x-5 > 10 \Longrightarrow x > 15$.
En tenant compte des conditions : $x > 15$.
cas 2 : $x-5 < 0 \Longrightarrow x < 5$
de plus : $|x-5| = -(x-5) = -x+5 > 10 \Longrightarrow -x > 5 \Longrightarrow x < -5$.
En tenant compte des conditions : $x < -5$.
$S = \{x : x < -5 \text{ ou } x > 15\}$

(t) $|x-1| + 3 < 5 \Longrightarrow |x-1| < 2$
Selon la définiton de la valeur absolue :
Si $x-1 \geq 0$, alors $|x-1| = x-1$
Si $x-1 < 0$, alors $|x-1| = -(x-1)$.
cas 1 : $x-1 \geq 0 \Longrightarrow x > 1$.
De plus : $|x-1| = x-1 < 2 \Longrightarrow x < 3$;
En tenant compte des conditions : $1 < x < 3$.
cas 2 : $x-1 < 0 \Longrightarrow x < 1$
De plus : $|x-1| = -(x-1) = -x+1 < 2 \Longrightarrow x > -1$;
En tenant compte des conditions : $-1 < x < 1$
$S =]-1, 3[$

(u) $4+\sqrt{x} < 10$ (domaine de définition $\{x : x \geq 0\}$) $\Longrightarrow \sqrt{x} < 6 \Longrightarrow x < 36 \Longrightarrow S = [0, 36[$

(v) $2\,|x+2| < 32 \Longrightarrow |x+2| < 16$
Selon la définiton de la valeur absolue :
Si $x+2 \geq 0$, alors $|x+2| = x+2$
Si $x+2 < 0$, alors $|x+2| = -(x+2)$.
cas 1 : $x+2 \geq 0 \Longrightarrow x > -2$
De plus : $|x+2| = x+2 < 16 \Longrightarrow x < 14$;
En tenant compte des conditions : $-2 < x < 14$
cas 2 : $x+2 < 0 \Longrightarrow x < -2$
de plus : $|x+2| = -(x+2) = -x-2 < 16 \Longrightarrow -x < 18 \Longrightarrow x > -18$;
En tenant compte des conditions : $-18 < x < -2$
$S =]-18, 14[$

(w) $5\sqrt{x} \geq \sqrt{x} + 12$ (domaine de définition : $\{x : x \geq 0\}$) $\Longrightarrow 4\sqrt{x} \geq 12 \Longrightarrow \sqrt{x} \geq 3 \Longrightarrow x \geq 9 \Longrightarrow S = [9, \infty[$

(x) $(x-4)(x+5) < 0 \Longrightarrow x^2 + x - 20 < 0$. zéros : $-5, 4$. $f(0) = 0^2 + 0 - 20 = -20 < 0$. $S =]-5, 4[$.

(y) $x^2 - 1 \geq 0$. zéros $-1, 1$, et p.ex. $f(2)$, $f(-2)$ et $f(0)$ avec $f(x) = x^2 - 1$. $S = \{x : x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1\}$

(z) $5x - 8 < 2 \Longrightarrow 5x < 10 \Longrightarrow x < 2$

2. On obtient :

(a) $9x/2 - x < 7 \Longrightarrow 9x - 2x < 14 \Longrightarrow 7x < 14 \Longrightarrow x < 2$

(b) $-9x-8<16-3x \Longrightarrow -6x<24 \Longrightarrow x>-4$

(c) $\frac{3x}{2}+4>x-1 \Longrightarrow 3x+8>2x-2 \Longrightarrow x>-10$

(d) $24(x+2)+7(5-x)>117 \Longrightarrow 24x+48+35-7x>117 \Longrightarrow 17x>34 \Longrightarrow x>2$

(e) $3(x+5)>21-2(3-x) \Longrightarrow 3x+15>21-6+2x \Longrightarrow x>0$

(f) $12+2(x-1)<0 \Longrightarrow 12+2x-2<0 \Longrightarrow 2x<-10 \Longrightarrow x<-5$

(g) $\frac{4}{9}x+2x<2(x-1) \Longrightarrow 4x+18x<18x-18 \Longrightarrow 4x<-18 \Longrightarrow x<-4.5$

(h) $\frac{x}{x-1}<4$ (domaine de définition : $\mathbb{R}\backslash\{1\}$)
cas 1 : $x-1>0(\Longrightarrow x>1)$:
alors : $x<4x-4 \Longrightarrow -3x<-4 \Longrightarrow x>\frac{4}{3}$. En tenant compte des conditions : $x>\frac{4}{3}$
cas 2 : $x-1<0(\Longrightarrow x<1)$:
$x>4x-4 \Longrightarrow -3x>-4 \Longrightarrow x<\frac{4}{3}$. En tenant compte des conditions : $x<1$
$S=\{x : x<1 \text{ ou } x>\frac{4}{3}\}$

(i) $\frac{(x+1)^2}{x-1} \geq x+1$ (domaine de définition : $\mathbb{R}\backslash\{1\}$)
cas 1 : $x-1>0(\Longrightarrow x>1)$:
alors : $(x+1)^2 \geq (x-1)(x+1) \Longrightarrow x^2+2x+1 \geq x^2-1 \Longrightarrow 2x \geq -2 \Longrightarrow x \geq -1$. En tenant compte des conditions : $x \geq 1$
cas 2 : $x-1<0(\Longrightarrow x<1)$:
alors : $(x+1)^2 \leq (x-1)(x+1) \Longrightarrow x^2+2x+1 \leq x^2-1 \Longrightarrow 2x \leq -2 \Longrightarrow x \leq -1$. En tenant compte des conditions : $x \leq -1$
$S=\{x : x>1 \text{ ou } x \leq -1\}$

(j) $\frac{4x^2}{4x+1}<x-1$(domaine de définition : $\mathbb{R}\backslash\{-1/4\}$)
cas 1 : $4x+1>0(\Longrightarrow x>-1/4)$:
alors : $4x^2<(4x+1)(x-1) \Longrightarrow 4x^2<4x^2-3x-1 \Longrightarrow 0<-3x-1 \Longrightarrow 3x<-1 \Longrightarrow x<-1/3$
En tenant compte des conditions : il n'existe pas de x, qui remplit les conditions.
cas 2 : $4x+1<0(\Longrightarrow x<-1/4)$:
$4x^2>(4x+1)(x-1) \Longrightarrow 4x^2>4x^2-3x-1 \Longrightarrow 0>-3x-1 \Longrightarrow 3x>-1 \Longrightarrow x>-1/3$.
En tenant compte des conditions : $-\frac{1}{3}<x<-\frac{1}{4}$
$S=]-\frac{1}{3},-\frac{1}{4}[$

(k) $\frac{2x-3}{2x+3}<1$ (domaine de définition : $\mathbb{R}\backslash\{-\frac{3}{2}\}$)
cas 1 : $2x+3>0(\Longrightarrow x>-3/2)$:
alors : $2x-3<2x+3 \Longrightarrow -3<3 \Longrightarrow$ satisfait par tout x.
En tenant compte des conditions : $x>-3/2$.
cas 2 : $2x+3<0(\Longrightarrow x<-3/2)$:
alors : $2x-3>2x+3 \Longrightarrow -3>3$. Aucun x satisfait la condition.
En tenant compte des conditions : aucun x satisfait les conditions.
$S=]-3/2,\infty[$

(l) $\frac{2x-3}{2x+1}>1$ (domaine de définition : $\mathbb{R}\backslash\{-3/2\}$)
cas 1 : $2x+3>0(\Longrightarrow x>-3/2)$:
$2x-3>2x+3 \Longrightarrow -3>3$. Aucun x satisfait la condition.
En tenant compte des conditions : Aucun x satisfait la condition.
cas 2 : $2x+3<0(\Longrightarrow x<-3/2)$:
$2x-3<2x+3 \Longrightarrow -3<3 \Longrightarrow$ tous les x satisfont la condition.
En tenant compte des conditions : $x<-3/2$.
$S=]-\infty,-3/2[$

(m) $\frac{2(x-2)}{7}<\frac{2x^2}{x+2}$(domaine de définition : $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$)
cas 1 : $x+2>0(\Longrightarrow x>-2)$:
$2(x-2)(x+2)<14x2 \Longrightarrow 2x^2-8<14x^2 \Longrightarrow -12x^2-8<0$. zéros : pas de zéros réels. $f(0)=-8$. Tous les x satisfont l'inéquation. En tenant compte des conditions :

$x > -2$.
cas 2 : $x + 2 < 0 (\Longrightarrow x < -2)$:
$2(x-2)(x+2) > 14x^2 \Longrightarrow 2x^2 - 8 > 14x^2 \Longrightarrow -12x^2 - 8 > 0$. Comme $f(0) = -8$, aucun x satisfait l'inéquation. En tenant compte des conditions : aucun x satisfait l'inéquation.
$S =]-2, \infty[$

(n) $\frac{11}{2x} + 1 > \frac{1}{x} \Longrightarrow \frac{11}{2x} - \frac{1}{x} > -1$ (domaine de définition : $\mathbb{R} \backslash \{0\}$)
cas 1 : $2x > 0 (\Longrightarrow x > 0)$:
$9 > -2x \Longrightarrow -4.5 < x \Longrightarrow x > -4.5$. En tenant compte des conditions : $x > 0$.
cas 2 : $2x < w (\Longrightarrow x < 0)$:
$9 < -2x \Longrightarrow -4.5 < x \Longrightarrow x < -4.5$. En tenant compte des conditions : $x < -4.5$.
$S = \{x : x < -4.5 \text{ ou } x > 0\}$

(o) $(x-1)^2 > 0 \Longrightarrow x^2 - 2x + 1 > 0$. zéros : 1. $f(0) = 1$. Tous les x sauf 1 satisfont l'inéquation. $S = \mathbb{R} \backslash \{1\}$

(p) $|x + 3| > 7$
Selon la définition de la valeur absolue :
Si $x + 3 \geq 0$, alors $|x + 3| = x + 3$
Si $x + 3 < 0$, alors $|x + 3| = -(x + 3)$.
cas 1 : $x + 3 \geq 0 \Longrightarrow x > -3$
De plus : $|x + 3| = x + 3 > 7 \Longrightarrow x > 4$;
En tenant compte des conditions : $x > 4$
cas 2 : $|x + 3| = -(x + 3) = -x - 3 > 7 \Longrightarrow x < -10$;
En tenant compte des conditions : $S_2 =]-\infty, -10]$
$S = \{x : x > 4\}$

(q) $4\,|x - 1| > 4 \Longrightarrow |x - 1| > 1$
Selon la définition de la valeur absolue :
Si $x - 1 \geq 0$, alors $|x - 1| = x - 1$
Si $x - 1 < 0$, alors $|x - 1| = -(x - 1)$.
cas 1 : $x - 1 \geq 0 \Longrightarrow x > 1$
de plus : $|x - 1| = x - 1 > 1 \Longrightarrow x > 2$;
En tenant compte des conditions : $x > 2$
cas 2 : $x - 1 < 0 \Longrightarrow x < 1$
De plus : $|x - 1| = -(x - 1) = -x + 1 > 1 \Longrightarrow x < 0$;
En tenant compte des conditions : $x < 0$
$S = \{x : x < 0 \text{ ou } x > 2\}$

(r) $|x - 1| > 0$
Selon la définition de la valeur absolue :
Si $x - 1 \geq 0$, alors $|x - 1| = x - 1$
Si $x - 1 < 0$, alors $|x - 1| = -(x - 1)$.
cas 1 : $x - 1 \geq 0 \Longrightarrow x > 1$
De plus : $|x - 1| = x - 1 > 0 \Longrightarrow x > 1$;
En tenant compte des conditions : x > 1
cas 2 : $x - 1 < 0 \Longrightarrow x < 1$
De plus : $|x - 1| = -(x - 1) = -x + 1 > 0 \Longrightarrow x - 1 < 0 \Longrightarrow x < 1$;
En tenant compte des conditions :$x < 1$.
$S = \{x : x < 1 \text{ ou } x > 1\} = \mathbb{R} \backslash \{1\}$

(s) $\left|\frac{2x+1}{4}\right| > 9$
Selon la définition de la valeur absolue :
Si $\frac{2x+1}{4} \geq 0$, alors $\left|\frac{2x+1}{4}\right| = \frac{2x+1}{4}$
Si $\frac{2x+1}{4} < 0$, alors $\left|\frac{2x+1}{4}\right| = -\frac{2x+1}{4}$
cas 1 : $\frac{2x+1}{4} \geq 0 \Longrightarrow 2x + 1 > 0 \Longrightarrow x > -(1/2)$
De plus : $\left|\frac{2x+1}{4}\right| = \frac{2x+1}{4} > 9 \Longrightarrow 2x + 1 > 36 \Longrightarrow 2x > 35 \Longrightarrow x > 17.5$
En tenant compte des conditions : $x > 17.5$

cas 2 : $\frac{2x+1}{4} < 0 \Longrightarrow 2x+1 < 0 \Longrightarrow x < -(1/2)$
De plus : $\left|\frac{2x+1}{4}\right| = -\frac{2x+1}{4} > 9 \Longrightarrow 2x+1 < -36 \Longrightarrow 2x < -37 \Longrightarrow x < -18.5$
En tenant compte des conditions : $x < -18.5$
$S = \{x :< -18.5 \text{ ou } x > 17.5\}$

(t) $\sqrt{x} + 4 < 2$ (domaine de définition $\{x : x \geq 0\}$) $\Longrightarrow 4 < \sqrt{x} \Longrightarrow x > 16$

(u) $\sqrt{3x+1} > 8$ (domaine de définition $\{x : 3x+1 \geq 0\} = \{x : x > -(1/3)\}$)
$\Longrightarrow 3x+1 > 64 \Longrightarrow 3x > 63 \Longrightarrow x > 63/3$

(v) $\sqrt{x+2} > \sqrt{x-2}$ (domaine de définition : $\{x : x+2 \geq 0\} \cap \{x : x-2 \geq 0\} = \{x : x \geq 2\}$)
$\Longrightarrow x+2 > x-2 \Longrightarrow 2 > -2$. Alors $S = [2, \infty[$

3. $y_1 = 80 + 0.56x; y_2 = 75 + 0.58x$
$80 + 0.56x > y = 75 + 0.58x \Longrightarrow$
$-0.02x > -5 \Longrightarrow 0.02x < 5 \Longrightarrow x < 250$. A est plus cher, si $x < 250$ km.

4. Les trois côté du triangle sont a, b et c, et a est le côté le plus long. Par conséquent il faut que $\frac{a+b+c}{3} > a \Longleftrightarrow a+b+c > 2a \Longleftrightarrow b+c > a$ (la dernière proposition est vraie pour un triangle. Avec $b+c < a$, on ne peut pas dessiner un triangle !).