Illustrations de deux théorèmes concernant les limites

Théorème. *Si* $\lim_{x\to\infty} f(x), \lim_{x\to\infty} g(x) \in \mathbb{R}$, *alors*

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} g(x),$$

Exemple.

$$f(x) = 4 + \frac{1}{x^2}$$

$$g(x) = 2 - \frac{1}{x}$$

On peut p. ex. affirmer pour $f(x)+g(x)$ *et* $x=5$

$$f(5)+g(5) = 4 + \frac{1}{5^2} + 2 - \frac{1}{5} = 5.84$$

ou pour $x = 1.5$

$$f(1.5)+g(1.5) = 4 + \frac{1}{1.5^2} + 2 - \frac{1}{1.5} = 5.777777778.$$

Or : $\lim_{x\to\infty} f(x) = 4$ *;* $\lim_{x\to\infty} g(x) = 2$ *;* $\lim_{x\to\infty}(f(x)+g(x)) = 6 = \lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} g(x)$

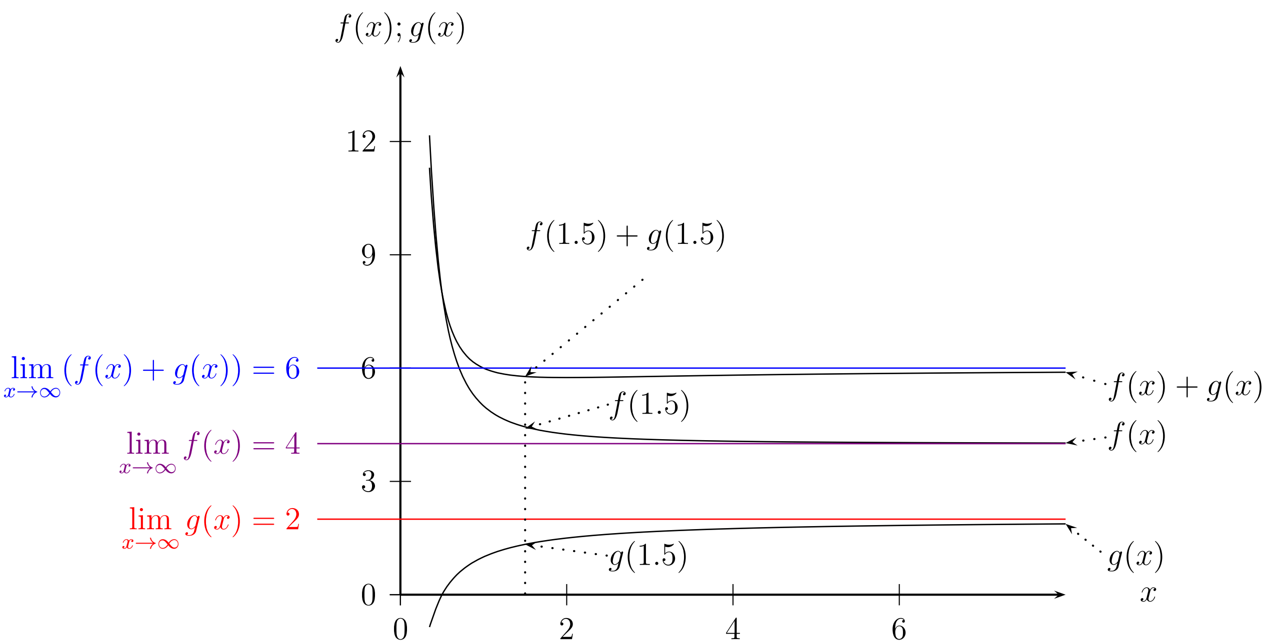

FIGURE 1 – La limite réelle de la somme de deux fonctions avec des limites réelles a et b est identique à $a+b$

Théorème. *Si* $\lim_{x\to\infty} f(x), a \in \mathbb{R},$ *alors*

$$\lim_{x\to\infty}(af(x)) = a\lim_{x\to\infty} f(x)$$

Exemple.

$$f(x) = 0.5 + \frac{1}{x}$$

$$a = 3.5$$

On peut p.ex. affirmer pour $3.5 \cdot f(x)$ *et pour* $x = 5$

$$3.5f(5) = 3.5 \cdot \left(0.5 + \frac{1}{5}\right) = 2.45$$

ou pour $x = 1.2$

$$3.5 \cdot f(1.2) = 3.5 \cdot \left(0.5 + \frac{1}{1.2}\right) = 4.666\,7$$

Or : $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.5; \lim_{x\to\infty} 3.5f(x) = 1.75 = 3.5 \cdot 0.5 = 3.5 \cdot \lim_{x\to\infty} f(x)$

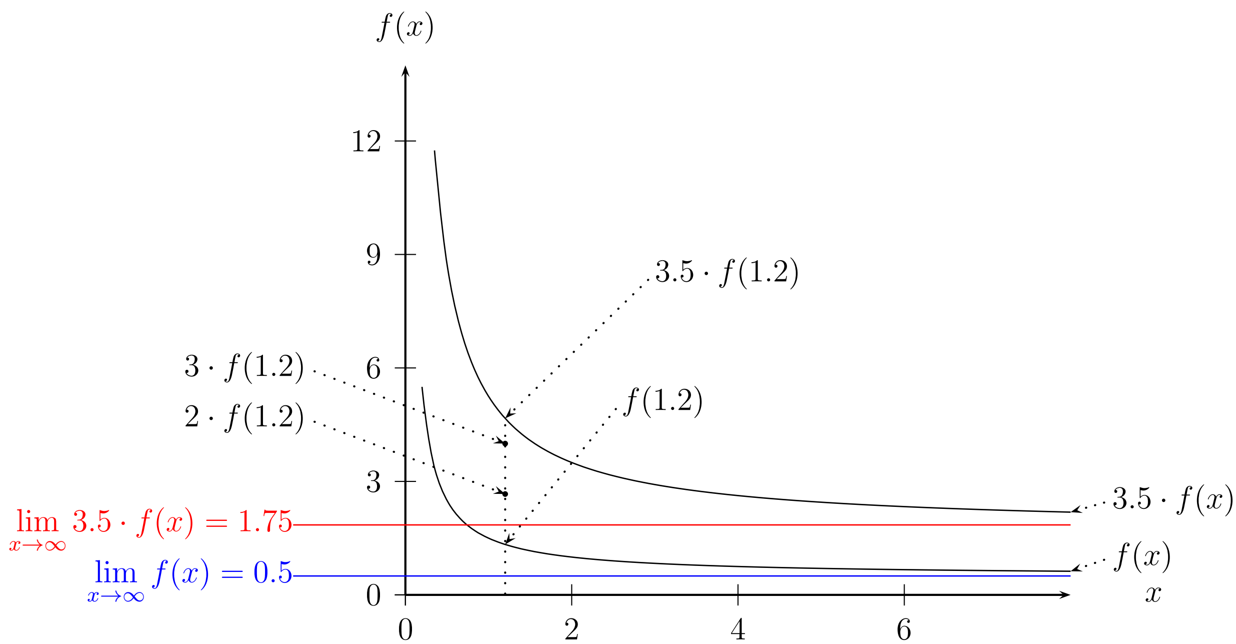

Figure 2 – La limite réelle du produit d'une constante réelle a et d'une fonction réelle avec une limite réelle b est identique à ab